

Matemática IV - Funções de Variáveis Complexas

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	Total

Observação:

- 1) Este simulado é formado através de um banco de problemas selecionado pelo docente e não necessariamente tem relação com formato, nível de dificuldade, ou qualquer outro aspecto das provas de MA044/Funções de Variável Complexa na sua disciplina. Use este simulado apenas como uma forma adicional de estudo.
- 2) Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los.
- 3) Justifique bem suas soluções.

Simulado de Matemática IV - Funções de Variáveis Complexas

Prof. Gabriel Ponce

1. **a)** (1.5) Seja $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$. Determine z^{2019} .

Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$.

- b)** (1.0) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que:

$$|c - a| = |c - b| = \frac{|a - b|}{2}.$$

Prove que, para todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ temos:

$$|z - a| \cdot |z - b| \geq \left(|z - c| - \frac{|a - b|}{2} \right)^2$$

2. Prove que dois números complexos não nulos z_1 e z_2 tem o mesmo módulo se, e somente se, existem números complexos c_1 e c_2 tais que $z_1 = c_1 c_2$ e $z_2 = c_1 \overline{c_2}$.
3. **a)** Use a fórmula binomial e a fórmula de Moivre para escrever

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta (i \sin \theta)^k,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Defina o inteiro m da seguinte forma: $m = n/2$ se n é par e $m = (n - 1)/2$ caso n seja ímpar. Mostre que

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^m \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \theta \cdot (-1)^k \cdot \sin^{2k} \theta,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$.

- b)** Escreva $x = \cos \theta$ na somatória do final da parte (a). Mostre que fazendo essa substituição, $\cos n\theta$ vira um polinômio em x :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^m \binom{n}{2k} x^{n-2k} (1 - x^2)^k,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$.