

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## Sprawozdanie | Interpolacja - Zagadnienie Hermite'a

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 23.03.2025 | Data Oddania: 04.04.2025

### 1. Analiza przypadku

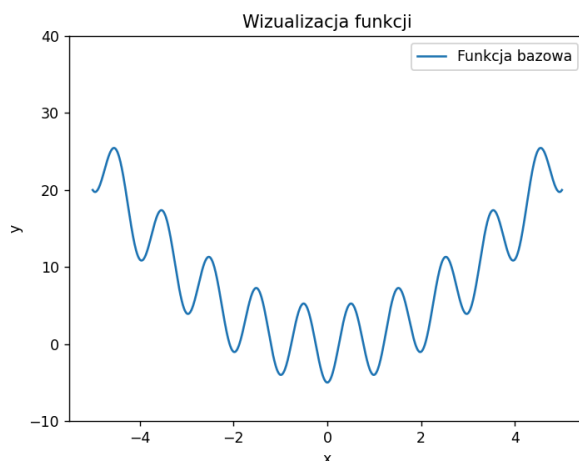
Dla funkcji

$$x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right) \quad (1.1)$$

gdzie  $m = 5$  oraz  $k = 0.5$

Na przedziale:

$$x \in [-5; 5] \quad (1.2)$$



Rysunek 1: Wykres funkcji  $x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$

Dla powyższej funkcji wyznaczyć, zgodnie z zagadnieniem Hermite'a, wielomian interpolujący w postaci Hermite'a. W przypadku poniższego sprawozdania wielomian został wyznaczony metodą Newton'a używając Różnic Dzielonych (ang. *Divided Differences*), która wymagała znajomości pierwszej pochodnej funkcji interpolowanej:

$$2x + \frac{m\pi}{k} \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) \quad (1.3)$$

Interpolację przeprowadzić dla różnej liczby węzłów  $n$  - w przypadku poniższej analizy  $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ . Dla każdego przypadku interpolacji porównać wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległych oraz pokrywających się z miejscami zerowymi wielomianu Czebyszewa.

Ocenić dokładność, z jaką wielomian przybliży zadaną funkcję, wyszukać stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów) oraz porównać z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

## 2. Wyznaczenie dokładności interpolacji

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką wielomian, uzyskany zgodnie z zagadnieniem Hermite'a względem pierwszej pochodnej, przybliża zadaną funkcję (1.1) wykorzystano niżej wymienione wskaźniki.

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolacji dla  $m = 1000$  równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale  $x \in [-5; 5]$ .

### 2.1. Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy wyrażony jest wzorem

$$E_s = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^l (W(x_i) - f(x_i))^2}}{l} \quad (2.1)$$

, gdzie

- $l$  - liczba punktów pomiaru błędu
- $f$  - funkcja z Wzór (1.1)
- $W$  - funkcja wielomianu interpolacji
- $x_i$  - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

### 2.2. Błąd maksymalny

Błąd maksymalny wyrażony jest wzorem

$$E_m = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \quad (2.2)$$

, gdzie

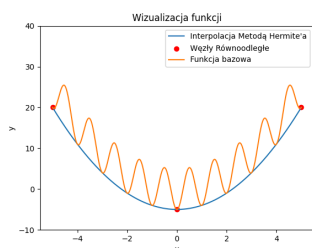
- $l$  - liczba punktów pomiaru błędu
- $f$  - funkcja z Wzór (1.1)
- $W$  - funkcja wielomianu interpolacji
- $x_i$  - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

## 3. Dane techniczne

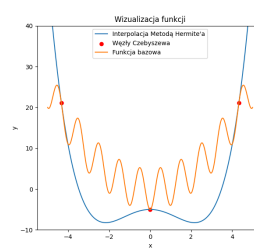
Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

- Komputer HP EliteBook 840 G6:
  - System operacyjny: Windows 11 x64
  - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
  - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.9.20
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib

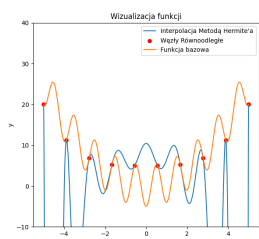
## 4. Przykładowe wykresy interpolacji metodą Hermite'a



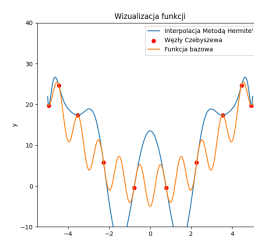
Rysunek 2: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 3



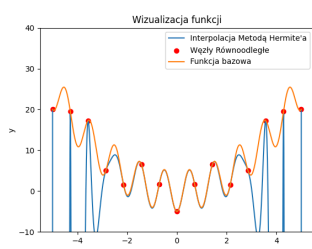
Rysunek 7: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Wielomianu Czebyszewa | Liczba węzłów = 3



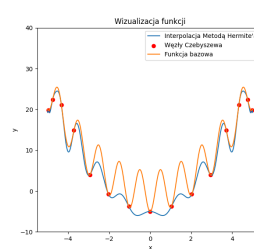
Rysunek 3: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 10



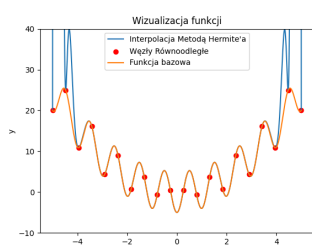
Rysunek 8: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Wielomianu Czebyszewa | Liczba węzłów = 10



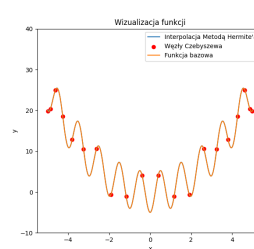
Rysunek 4: Interpolacja metodą Lagrange'a | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 15



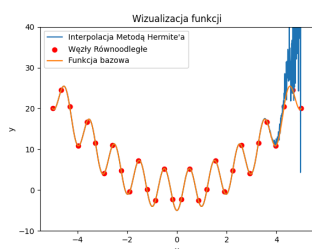
Rysunek 9: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Wielomianu Czebyszewa | Liczba węzłów = 15



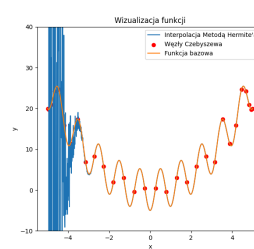
Rysunek 5: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 20



Rysunek 10: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Wielomianu Czebyszewa | Liczba węzłów = 20

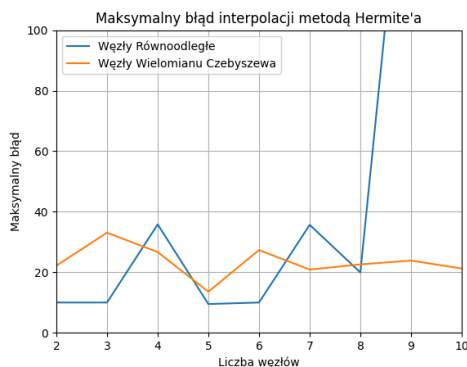


Rysunek 6: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 30

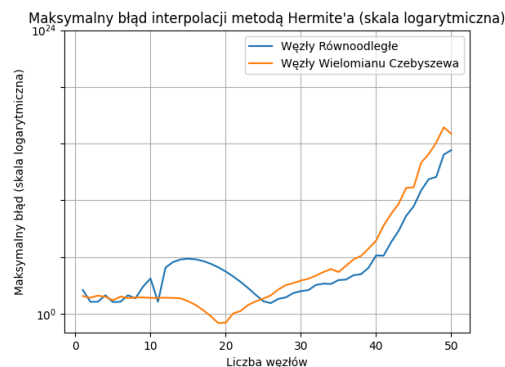


Rysunek 11: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Wielomianu Czebyszewa | Liczba węzłów = 30

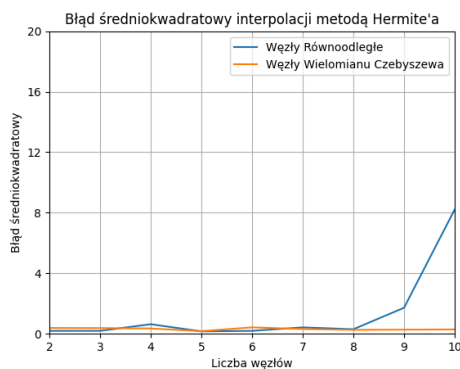
## 5. Analiza wykresów błędów interpolacji



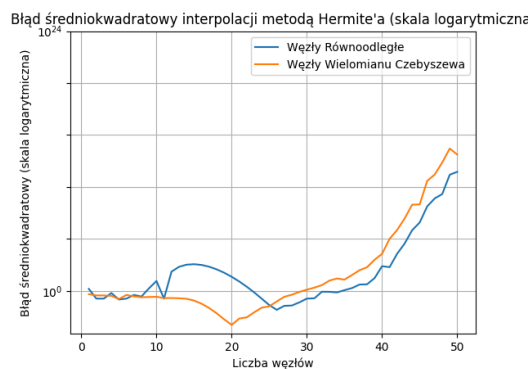
Rysunek 12: Wykres błędów maksymalnych  $E_m$  stosując interpolację metodą Hermite'a dla liczby węzłów  $n \in [0; 10]$



Rysunek 13: Wykres błędów maksymalnych  $E_m$  stosując interpolację metodą Hermite'a dla liczby węzłów  $n \in [0; 50]$  | skala logarytmiczna osi Y



Rysunek 14: Wykres błędów średniokwadratowych  $E_s$  stosując interpolację metodą Hermite'a dla liczby węzłów  $n \in [0; 10]$



Rysunek 15: Wykres błędów średniokwadratowych  $E_s$  stosując interpolację metodą Hermite'a dla liczby węzłów  $n \in [0; 50]$  | skala logarytmiczna osi Y

Dla węzłów Czebyszewa, błędy interpolacji maleją w miarę przyrostu liczby węzłów osiągając minimum dla  $n = 20$ , po czym ponownie zaczynają wzrastać poprzez błędy arytmetyki komputerowej.

W przypadku interpolacji z użyciem węzłów równoodległych przez **efekt Rungego** występujący dla małej liczby węzłów błąd stopniowo narasta do liczby węzłów  $n = 15$  (wyjątek  $n = 11$  opisany poniżej), od którego, podobnie jak w przypadku węzłów Czebyszewa, wraz z zanikaniem efektu Rungego błąd zaczyna spadać osiągając minimum dla  $n = 26$ . Po osiągnięciu minimum błędy wzrastają ze względu na błędy arytmetyki.

Węzły względem miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa dają znacząco mniejsze odchylenia względem węzłów równoodległych w znaczącej liczbie analizowanych sytuacji. Jest to zgodne z teorią, ponieważ węzły Czebyszewa minimalizują problem Rungego i ograniczają oscylacje wielomianu interpolacyjnego.

Skala logarytmiczna ukazuje wyraźniejszy trend – Wykresy przedstawione w skali logarytmicznej (Rysunki 13 i 15) pokazują, że błąd interpolacji rośnie wykładniczo powyżej pewnej wartości ze względu na błędy arytmetyki.

## 6. Analiza Wyników

Węzły Równoodległe		
Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Błąd Średniokwadratowy
1	101.204969	1.540441
2	9.999975	0.193552
3	9.999975	0.193552
4	35.811232	0.632087
5	9.490189	0.15944
6	9.999975	0.193552
7	35.665597	0.421508
8	19.938027	0.300166
9	185.901791	1.718332
10	945.808981	8.214078
11	9.999975	0.193552
12	7837.700311	59.961189
13	23202.613006	168.057128
14	38427.43673	264.98926
15	44551.955558	293.67891
16	39552.262171	249.980732
17	28223.774577	171.650437
18	16740.62756	98.1436
19	8433.708733	47.785955
20	3671.635352	20.149484
21	1399.554743	7.456257
22	472.828433	2.448014
23	142.781324	0.718497
24	38.724178	0.188815
25	11.129429	0.048819
26	7.738912	0.017734
27	17.783394	0.041815
28	23.636105	0.044476
29	55.351586	0.08712
30	79.793005	0.194086
31	97.852247	0.206386
32	265.158611	0.837863
33	343.49458	0.822004
34	322.41422	0.724298
35	689.501564	1.165579
36	760.318176	1.818551
37	1773.315219	3.855305
38	2183.079278	4.054802
39	7575.447764	15.153978
40	83489.711916	190.858287
41	80261.907388	156.422582
42	1.107170e+06	2691.758596
43	1.025060e+07	23694.495846
44	1.890268e+08	405196.348382
45	1.215888e+09	2.075074e+06
46	2.736153e+10	6.386599e+07
47	2.396406e+11	3.515231e+08
48	3.724585e+11	8.811229e+08
49	2.924767e+13	5.421223e+10
50	6.925356e+13	1.007637e+11

Tabela 1: Błędy interpolacji zagadnieniem Hermite'a dla węzłów Równoodległych, liczba węzłów  $n \in [1 : 50]$

Węzły Czebyszewa		
Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Błąd Średniokwadratowy
1	30.458038	0.495689
2	22.169959	0.382321
3	33.06779	0.375575
4	26.670325	0.349265
5	13.572175	0.173976
6	27.343096	0.423092
7	20.887522	0.313149
8	22.588527	0.258368
9	23.856996	0.272451
10	21.240336	0.286937
11	21.013798	0.216779
12	22.446762	0.21735
13	20.937302	0.207508
14	19.640154	0.186959
15	11.16498	0.127358
16	5.394165	0.065331
17	1.973643	0.026296
18	0.620277	0.008595
19	0.160528	0.002355
20	0.170575	0.0007131777
21	1.026355	0.002778
22	1.696759	0.003581
23	5.424824	0.010563
24	11.009883	0.028202
25	18.617975	0.037395
26	35.112489	0.106487
27	108.854553	0.284287
28	258.182722	0.442367
29	381.7829	0.805942
30	631.616519	1.290356
31	891.244766	1.997973
32	1634.697863	3.417439
33	3345.369113	8.929736
34	5889.643738	13.961175
35	3336.547866	11.083307
36	11039.229811	29.422901
37	38928.438197	80.915975
38	76184.11596	153.318164
39	323751.624056	746.279251
40	1.492273e+06	2655.286218
41	2.844949e+07	64223.268789
42	2.769812e+08	421823.37913
43	1.985355e+09	4.897791e+06
44	4.368430e+10	9.281338e+07
45	4.997942e+10	9.719493e+07
46	6.165092e+12	1.455955e+10
47	3.227973e+13	5.666031e+10
48	3.027256e+14	7.225716e+11
49	5.978862e+15	1.421930e+13
50	1.669509e+15	3.919184e+12

Tabela 2: Błędy interpolacji zagadnieniem Hermite'a dla węzłów Czebyszewa, liczba węzłów  $n \in [1 : 50]$

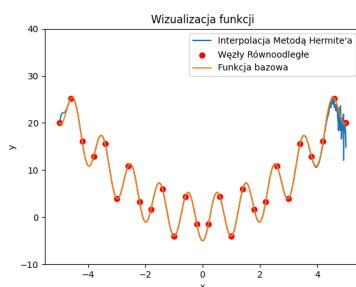
## 7. Analiza przypadków szczególnych

### Różnice w wykresach interpolacji dla różnych rozmieszczeń węzłów

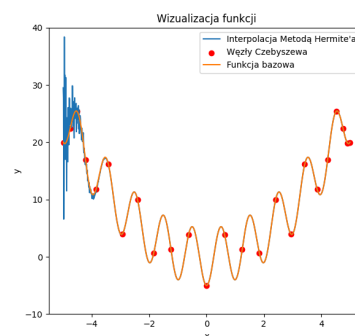
W przypadku interpolacji metodą Hermite'a różnice pomiędzy rozmieszczeniem węzłów są szczególnie widoczne, co widać w Sekcja 4. Dla rozpatrywanej funkcji, efekt Rungego w przypadku węzłów równoodległych rozpoczyna się dla  $n \approx 8$ , lecz po wzroście stopniowo zanika w miarę przyrostu liczby węzłów. Wykorzystanie miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa jako węzłów prowadzi do znacznego zmniejszenia efektu Rungego. Węzły te są gęściej rozmieszczone na krańcach przedziału i rzadziej w środku, co powoduje lepszą stabilność interpolacji.

### Błędy arytmetyczne

Przez to, że interpolacja wyznaczana jest metodą Różnic Dzielonych (ang. *Divided Differences*), która wymaga wykonywania wielokrotnych dzielenia różnic pomiędzy kolejnymi wartościami funkcji i węzłami interpolacyjnymi, widoczne są błędy interpolacji spowodowane propagacją błędów arytmetycznych. Podczas, gdy w interpolacji metodą Newtona efekt ten mógł zostać zauważony dla  $n > 40$ , w przypadku interpolacji metodą Hermite'a, przez to, że uwzględniamy także wartości pierwszej pochodnej, efekt zaczyna występować dla  $n \approx 20$  w obu przypadkach rozmieszczeń węzłów.



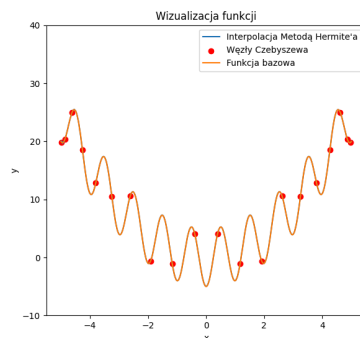
Rysunek 16: Interpolacja metodą Lagrange'a | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 25 - Efekty błędów arytmetycznych



Rysunek 17: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Wielomianu Czebyszewa | Liczba węzłów = 25 - Efekty błędów arytmetycznych

### Najlepsze dopasowanie wielomianu interpolacji

Najlepsze dopasowania wielomianu interpolacji występuje dla  $n = 20$  w przypadku węzłów rozmieszczonych względem miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa. W tym przypadku błąd średniokwadratowy wynosi  $E_s = 0.000713$ , co jest najmniejszą wartością błędu wśród testowanej liczby węzłów.

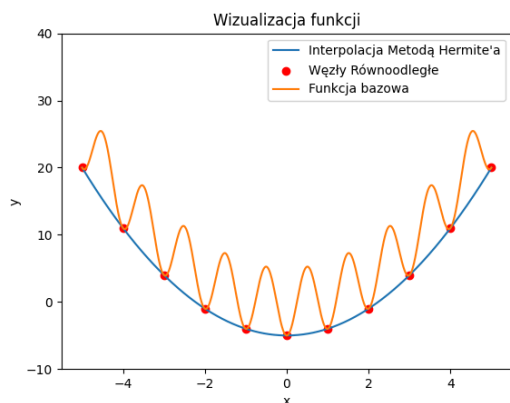


Rysunek 18: Interpolacja metodą Newtona | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 20 - Rozpoczęcie występowania efektu Rungego

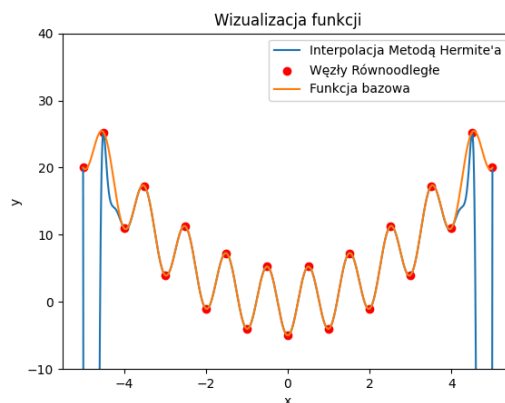
## Węzły występujące na ekstremach lokalnych funkcji

W przypadku węzłów o rozłożeniu równoodległym można zaobserwować przypadki rozmieszczenia węzłów na lokalnych ekstremach interpolowanej funkcji.

W przypadku węzłów rozmieszczonych na lokalnych minimach, funkcja staje się gładka, zgodnie z oczekiwaniami, przez co **efekt Rungego** nie jest widoczny. W tym przypadku również następuje znaczący spadek wartości obydwu rodzajów błędów opisanych w Sekcja 5. W przypadku węzłów położonych zarówno na minimach, jak i ekstremach, zaczyna występować efekt Rungego na krańcach przedziału, w którym zdefiniowana jest interpolowana funkcja.



Rysunek 19: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Równoodległe  
| Liczba węzłów = 11 - Rozmieszczenie węzłów na minimach  
lokalnych funkcji



Rysunek 20: Interpolacja metodą Hermite'a | Węzły Równoodległe  
| Liczba węzłów = 21 - rozmieszczenie węzłów na minimach i  
maksimach lokalnych funkcji

## 8. Uwagi dotyczące pracy

*Ze względu na nieprawidłowości w kodzie, wynikające z błędu indeksacji w implementowanej metodzie wyznaczania wartości wielomianu w punkcie z użyciem schematu Hornera, sprawozdanie dostarczone na zajęciach różni się od powyższej pracy ze względu na zmianę wyglądu wielomianu interpolacji po wprowadzeniu poprawek. Treść została odpowiednio zmieniona, aby wnioski pokrywały się z dostarczonymi wykresami.*