Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Aproksymacja Wielomianami Algebraicznymi

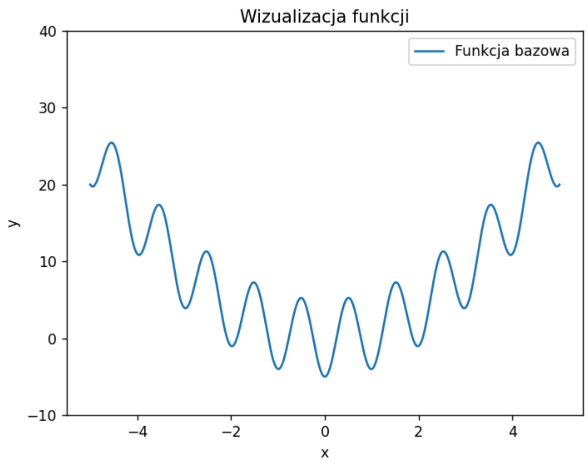
Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 25.04.2025 | Data Oddania: 15.04.2025

1. Analiza przypadku

Dana jest funkcja

$$\begin{gathered} f(x) = x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right), \\ \text{gdzie } m = 5 \text{ oraz } k = 0.5, \\ \text{określona dla } \ x \in [-5; 5] \end{gathered} \tag{1.1}$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$

W poniższej pracy przeprowadzono analizę funkcji zadanej w problemie **aproksymacji średniokwadratowej** poprzez jej dyskretyzację przy użyciu wielomianów algebraicznych.

W ramach eksperymentów numerycznych rozważono różne liczby punktów dyskretyzacji $n \in \{3, 6, 9, ..., 100\}$ oraz różne stopnie wielomianów aproksymujących $m \in \{2, 5, 8, ..., 90\}$,

Celem badania wyznaczenie wartości funkcji w określonych punktach oraz skonstruowanie jej przybliżenia na podstawie tych danych, graficzna ilustracja oraz analiza wybranych i interesujących przypadków.

Aproksymacja wielomianami algebraicznymi jest realizowana metodą rozwiązywania **układu równań**, gdzie za niewiadomymi są odpowiednie współczynniki wielomianu.

W implementacji, do rozwiązania niżej opisanych układów równań w języku `Python` posłużyła funkcja `numpy.linalg.solve` będąca częścią biblioteki `Numpy`. W samej bibliotece, rozwiązanie układu równań liniowych jest obliczane za pomocą rozkładu LU z częściowym wyszukiwaniem elementu głównego i zamianami wierszy.

2. Wyznaczenie dokładności aproksymacji

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości aproksymowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu aproksymacji dla $m = 1000$ równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-5; 5]$ z wykorzystaniem niżej wymienionych wskaźników. Wizualizacja błędów przedstawiona jest w Sekcja 6.

2.1. Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy (ang. *Minimum Square Error, MSE*) wyrażony jest wzorem

$$E_{ś} = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{l} (W(x_i) - f(x_i))^2}}{l} \tag{2.1}$$

, gdzie
- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - funkcja z Wzór (1.1)
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

2.2. Błąd maksymalny

Błąd maksymalnych wyrażony jest wzorem

$$E_m = \max_{i \in \{1,2,\ldots,l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \tag{2.2}$$

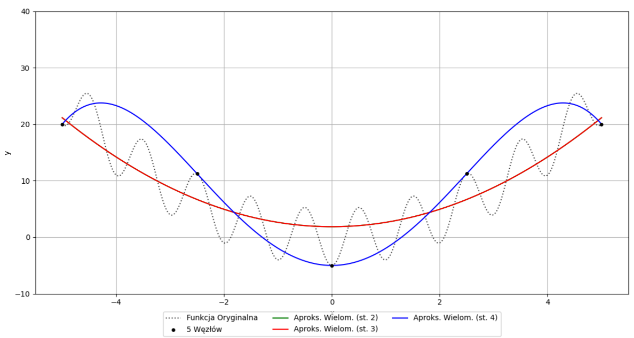
, gdzie
- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - funkcja z Wzór (1.1)
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

3. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:
- Komputer HP EliteBook 840 G6:
  - System operacyjny: Windows 11 x64
  - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
  - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.9.20
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib

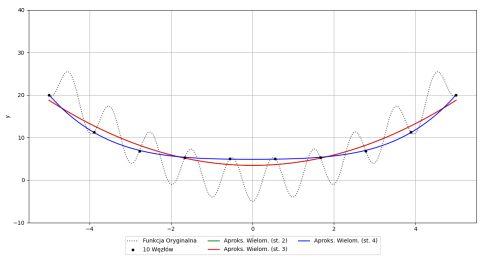
4. Wizualizacja aproksymacji dla stałej liczby węzłów n

4.1. Dla $n = 5$ węzłów

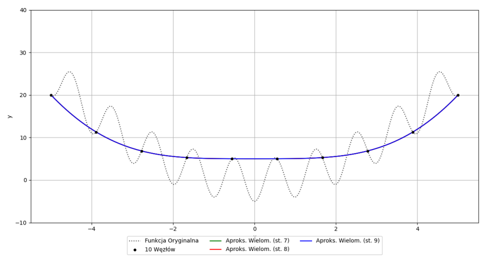


Rysunek 2: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 5 | Stopnie $m = 2, 3, 4$

4.2. Dla $n = 10$ węzłów

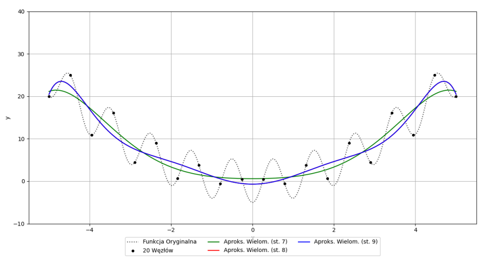


Rysunek 3: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 10 | Stopnie $m = 2, 3, 4$

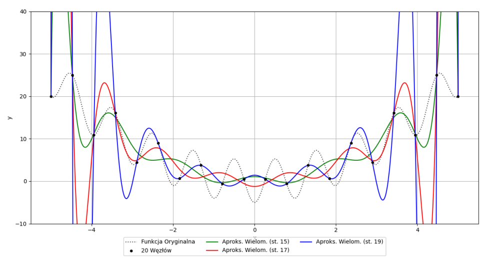


Rysunek 4: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 10 | Stopnie $m = 7, 8, 9$

4.3. Dla $n = 20$ węzłów

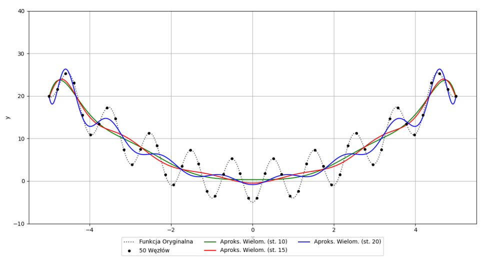


Rysunek 5: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 20 | Stopnie $m = 7, 8, 9$

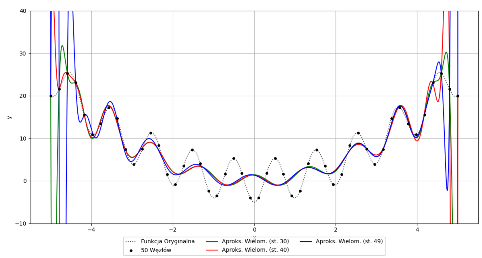


Rysunek 6: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 20 | Stopnie $m = 15, 17, 19$

4.4. Dla $n = 50$ węzłów

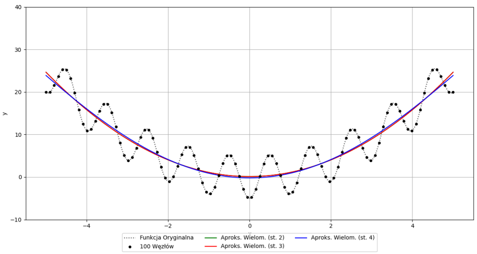


Rysunek 7: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 50 | Stopnie $m = 10, 15, 20$

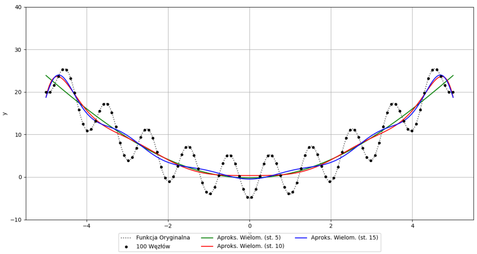


Rysunek 8: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 50 | Stopnie $m = 30, 40, 49$

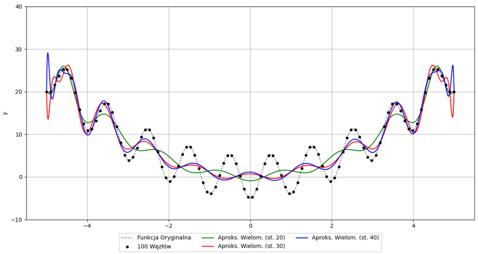
4.5. Dla $n = 100$ węzłów



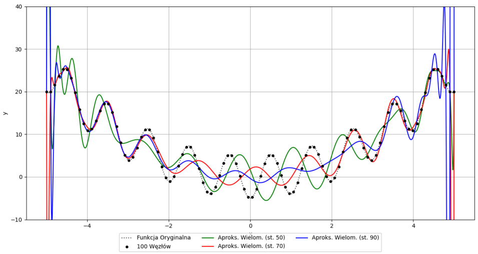
Rysunek 9: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 2, 3, 4$



Rysunek 10: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 5, 10, 15$



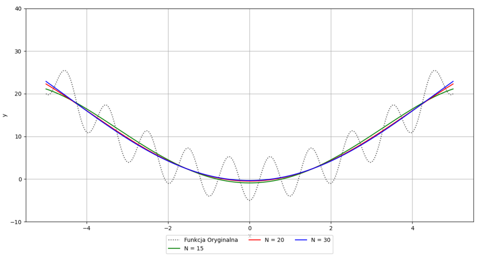
Rysunek 11: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 20, 30, 40$



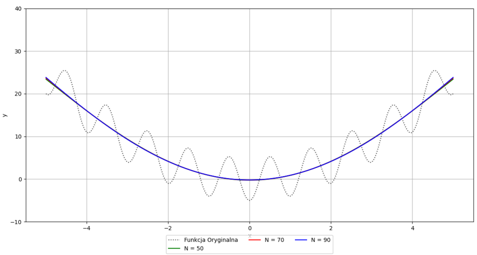
Rysunek 12: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 50, 70, 90$

5. Wizualizacja aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu m

5.1. Dla stopnia $m = 5$

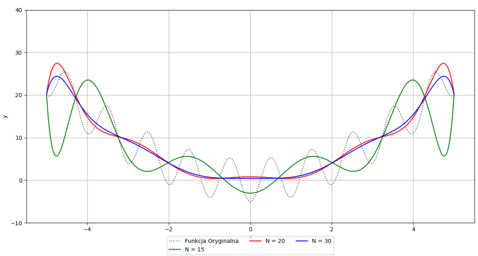


Rysunek 13: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu m = 5 | Liczby węzłów $n = 15, 20, 30$

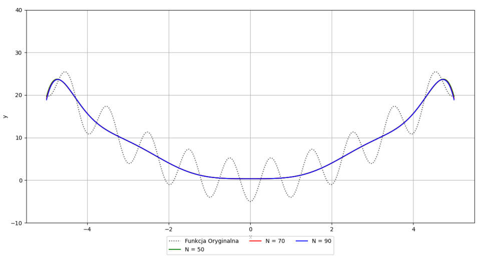


Rysunek 14: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu m = 5 | Liczby węzłów $n = 50, 70, 90$

5.2. Dla stopnia $m = 10$

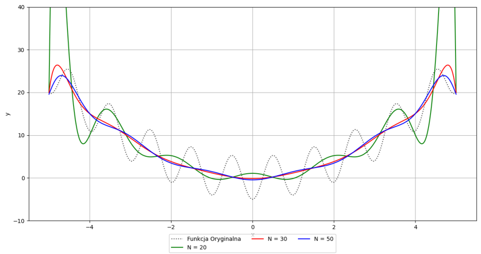


Rysunek 15: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu m = 10 | Liczby węzłów $n = 15, 20, 30$

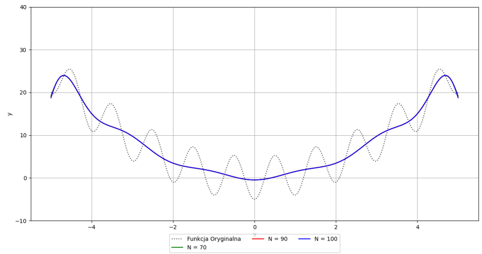


Rysunek 16: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu m = 10 | Liczby węzłów $n = 50, 70, 90$

5.3. Dla stopnia $m = 15$

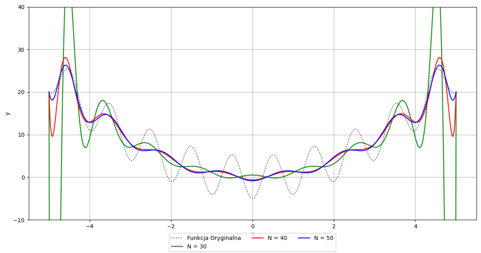


Rysunek 17: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu $m = 15$ | Liczby węzłów $n = 20, 30, 50$

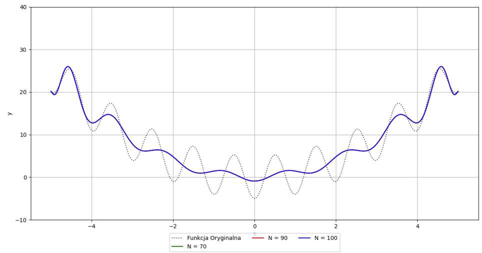


Rysunek 18: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu $m = 15$ | Liczby węzłów $n = 70, 90, 100$

5.4. Dla stopnia $m = 20$

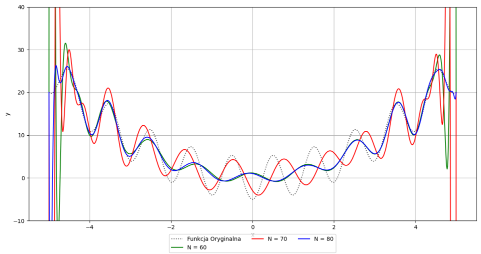


Rysunek 19: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu $m = 20$ | Liczby węzłów $n = 30, 40, 50$

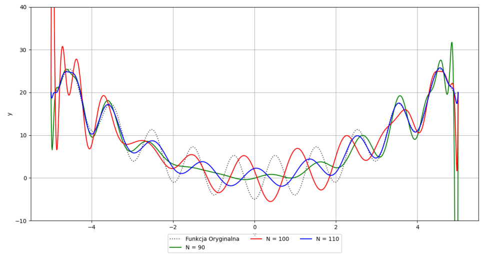


Rysunek 20: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu $m = 20$ | Liczby węzłów $n = 70, 90, 100$

5.5. Dla stopnia $m = 50$



Rysunek 21: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu $m = 50$ | Liczby węzłów $n = 60, 70, 80$

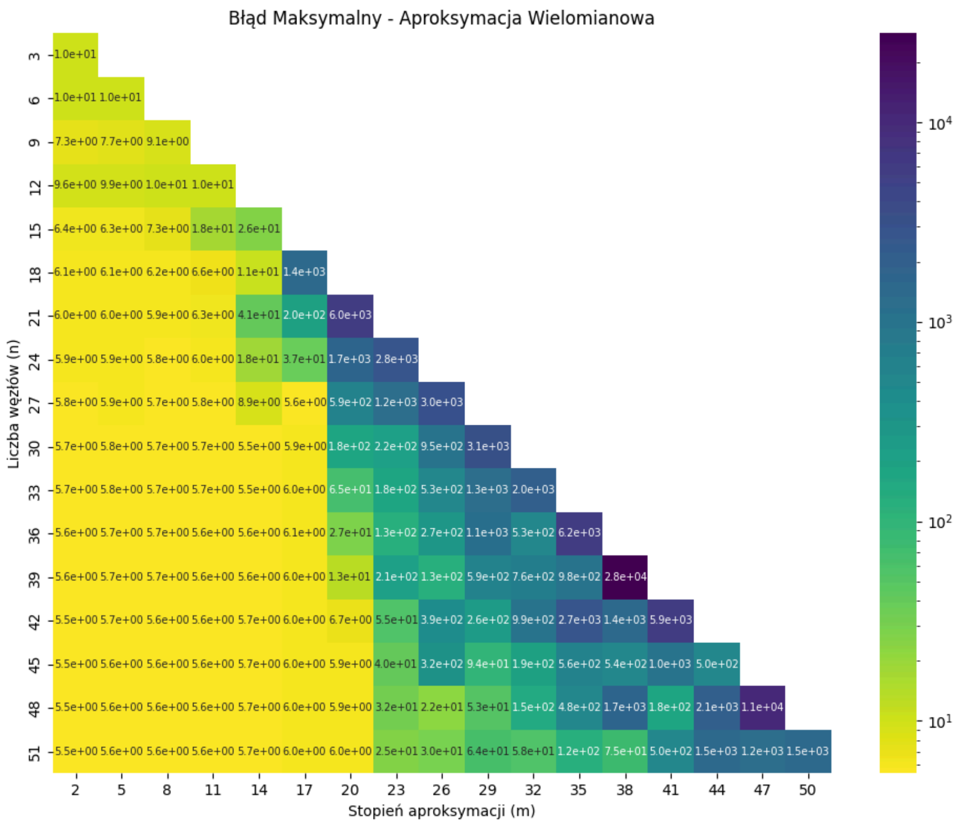


Rysunek 22: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu $m = 50$ | Liczby węzłów $n = 90, 100, 110$

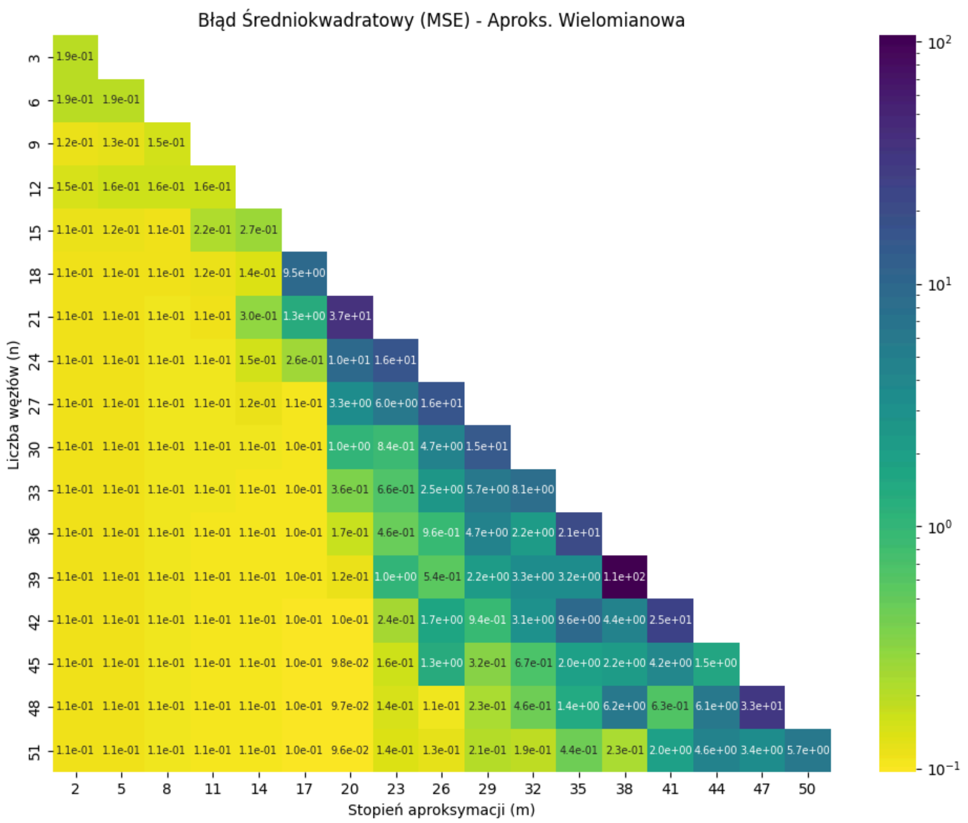
6. Analiza błędów aproksymacji

Poniższe wykresy w postaci *„map ciepła”* przestawiają dokładną skalę błędów aproksymacji wielomianowej dla błędu maksymalnego E_m (Rysunek 23) oraz średniokwadratowego $E_ś$ (Rysunek 24). Wyniki zostały przedstawione dla $n \leq 51$ w celu zachowania czytelności.

Można zauważyć, że wraz ze wzrostem stopnia wielomianów aproksymacji m dla danej liczby węzłów n widoczna jest tendencja do znacznego zwiększenia wartości błędów. Jednocześnie, dl każdego $m \geq 23$ widoczny jest znaczący wzrost wartości błędów.



Rysunek 23: Wizualizacja błędów aproksymacji - Błąd Makysmalny E_m



Rysunek 24: Wizualizacja błędów aproksymacji - Błąd Średnikowadratowy $E_ś$

7. Analiza przypadków szczególnych

Dokładność przybliżenia względem zmiennych parametrów

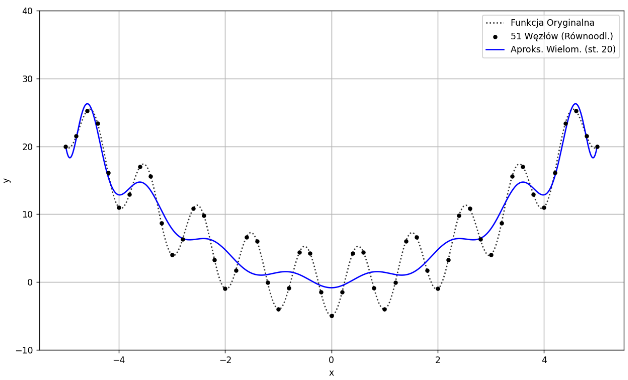
Dla ustalonej liczby węzłów, zwiększanie stopnia wielomianu prowadzi do poprawy dokładności przybliżenia, lecz po przekroczeniu optymalnej wartości stopnia wielomianu, można zaobserwować gwałtowny **wzrost błędu aproksymacji** oraz pojawienie się efektu Rungego. Można to tłumaczyć złym uwarunkowaniem układu równań dla wartości m zbliżonych do liczby węzłów n.

Z kolei przy stałym stopniu wielomianu, zwiększanie liczby węzłów zazwyczaj poprawia dokładność aproksymacji. Jednak dla wielomianów wysokiego stopnia (np. $n > 20$), zależność między liczbą węzłów a dokładnością przybliżenia staje się coraz słabsza. Najbardziej zauważalne efekty widoczne są, gdy liczba węzłów przewyższa przynajmniej dwukrotnie stopień wielomianu aproksymacji.

Efekt Rungego

Efekty **gwałtownej oscylacji** wielomianu aproksymacyjnego występują w przypadku stopni wielomianu m zbliżonych co do wartości do liczby węzłów - im większa wartość dla danej aproksymacji tym **efekt Rungego** staje się bardziej widoczny. Zjawisko to w mniejszym stopniu przejawia się dla wykresów, gdzie $n \leq 10$, później staje się wyraźnie widoczna (Rysunek 6, Rysunek 8, Rysunek 12).

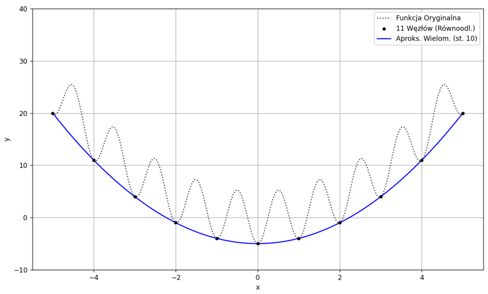
Wielomian aproksymacji o najlepszym dopasowaniu



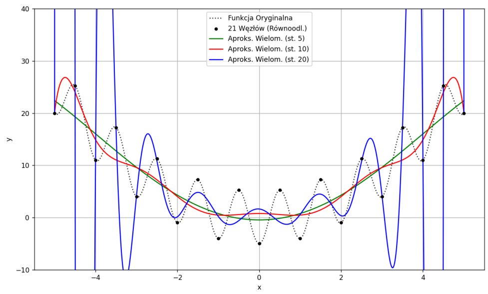
Rysunek 25: Wielomian Aproksymacji o najmniejszym błędzie średniokwadratowym | $n = 51, m = 20$

Na podstawie Rysunek 24 można wyciągnąć wnioski, że najlepsze dopasowanie wielomianu, wśród wartości $n \leq 51$ oraz $m \leq 50$, ma miejsce dla $n = 51$ oraz $m = 20$ z wartością błędu $\boldsymbol{E_ś \approx 0.096}$. W tym przypadku, stopień wielomianu m jest dwukrotnie mniejszy od liczby węzłów n, co pozwala na dokładniejszą aproksymację przez korzystne uwarunkowanie układu równań.

Przypadek węzłów na ekstremach lokalnych funkcji



Rysunek 26: Wielomian Aproksymacji | Węzły w lokalnych minimach | $n = 11$, $m = 10$



Rysunek 27: Wielomian Aproksymacji | Węzły w lokalnych ekstremach | $n = 21$, $m = 5, 10, 20$

W przypadku występowania węzłów aproksymacji **na minimach lokalnych** funkcji f (liczba węzłów $n = 11$) (Rysunek 26), dowolny stopień wielomianu > 1 daje ten sam efekt - wynikowy wielomian aproksymacyjny wyglądem jest tożsamy z wielomianem stopnia drugiego, który przechodzi przez wszystkie minima bez gwałtownych oscylacji.

W przypadku **maksimów lokalnych** funkcji f (liczba węzłów $n = 21$) (Rysunek 26), wielomian aproksymacyjny zgodnie z oczekiwaniami mieści się pomiędzy węzłami funkcji. Podobnie jak w wyżej opisanych przypadkach, przy zastosowaniu większego stopnia wielomianów zaczyna być widoczny efekt Rungego na krańcach przedziałów.