Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Układy równań liniowych - metody bezpośrednie cz.2

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 28.06.2025 | Data Oddania: 28.06.2025

1. Omówienie przypadku

Dana jest trójdiagonalna macierz liczb rzeczywistych zdefiniowana odpowiednio:

$$\mathbf{A_{III}}^{n\times n} = \begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,i+1} = \frac{1}{i+m} \\ a_{i,i-1} = \frac{k}{i+m+1}, \text{ dla } \ i > 1 \\ a_{i,j} = 0, \ \text{ dla } \ j < i-1 \ \text{ oraz } \ j > i+1 \end{cases} \qquad i,j = 1,...,n \tag{1.1}$$

$$\text{dla } m = 3, k = 7$$

, gdzie:

- i - numer wiersza macierzy
- j - numer kolumny macierzy
- n - wymiary macierzy

W niniejszym dokumencie przeprowadzono analizę numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych postaci $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, **metodą eliminacji Gaussa** oraz **metodą Thomasa** gdzie $\mathbf{A}$ jest **trójdiagonalną macierzą** współczynników, $\mathbf{x}$ wektorem niewiadomych, a $\mathbf{b}$ wektorem wyrazów wolnych. Celem pracy jest zbadanie wpływu użycia różnych metod rozwiązywania układu na dokładność otrzymanych rozwiązań, poprzez **wyznaczenie błędów** pomiędzy wyznaczonymi a prawdziwymi wartościami wektora niewiadomych, **czas rozwiązania** układu oraz **zużycie pamięci** przez metodę.

W zadaniu zbadano rozwiązywanie układu rownań dla $n = 2, ..., 500$ oraz **dwóch precyzji obliczeń** oferowanych przez bibliotekę `numpy`: `float32` (pojedyńcza precyzja) oraz `float64` (podwójna precyzja). Dodatkowo, testy przeprowadzono na macierzy $\mathbf{A_{III}}$ reprezentowanej w sposób dwojaki:

- W pełnej formie macierzy $\mathbf{A_{III}}^{n\times n}$ (Równanie (1.1)) (metoda Gaussa oraz metoda Thomasa)
- W formie **przechowującej jedynie liczby na diagonali oraz paśmie szerokości 3 macierzy**:

$$\mathbf{A_{III}}^{n\times 3} = \begin{cases} a_{i,2} = k \\ a_{i,3} = \frac{1}{i+m}, \text{ dla } \ i < n \\ a_{i,1} = \frac{k}{i+m+1}, \text{ dla } \ i > 1 \\ a_{i,j} = 0, \ \text{ wpp.} \end{cases} \qquad i = 1,...,n, \quad j = 1,2,3 \tag{1.2}$$

$$\text{dla } m = 3, k = 7$$

Druga metoda przechowywania macierzy jest możliwa, ponieważ $\mathbf{A_{III}}$ jest macierzą rzadką, trójdiagonalną, przez co większość jej elementów $a_{ij} = 0$.

2. Metodyka wyznaczania układów równań

W celach badania wprowadzony został wektor rzeczywisty

$$\overline{\mathbf{x}}^{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

, gdzie n zdefiniowane jest jak powyżej, zaś elementy wektora są **losową kombinacją liczb –1 i 1**. W eksperymencie, w celu uzyskania powtarzalnych wyników, **zawsze ustawiano `random.seed` na stałą wartość** podczas generowania wektora.

Z powyższego wektora otrzymywano wektor $\mathbf{b}$ w następujący sposób:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \tag{2.2}$$

Następnie, mając wyznaczony wektor $\mathbf{b}$ przystąpiono do rozwiązywania układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem niewiadomych.

Podejście to umożliwiło porównanie wyznaczonego wektora $\mathbf{x}$ do $\overline{\mathbf{x}}$.

3. Pomiar poprawności wyznaczenia rozwiązania

Pomiar poprawności wyznaczenia rozwiązania układu równań przeprowadzony został, porównując prawdziwe składowe wektora z wartością metodą Gaussa. Za metrykę błędu przyjęty został **błąd bezwzględny**.

$$\|\mathbf{x}\|_{\max} = \max_{i\in 1,\dots,n} (|x_i - \overline{x_i}|) \tag{3.1}$$

, gdzie

- x_i - i-ta wartość wyznaczonego wektora
- $\overline{x_i}$ - i-ta wartość prawdziwego wektora

4. Wyznaczenie zużycia pamięci

Zużycie pamięci przez użyte metody zostało zbadane za pomocą biblioteki wbudowanej `tracemalloc` języka Python z użyciem metod `take_snapshot`, `snapshot.compare_to` oraz zsumowaniem różnicy w statystykach zaalokowanej pamięci pomiędzy obiektami `snapshot`.

5. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

- Komputer HP EliteBook 840 G6:
  - System operacyjny: Windows 11 x64
  - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
  - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.12.0
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib, Seaborn

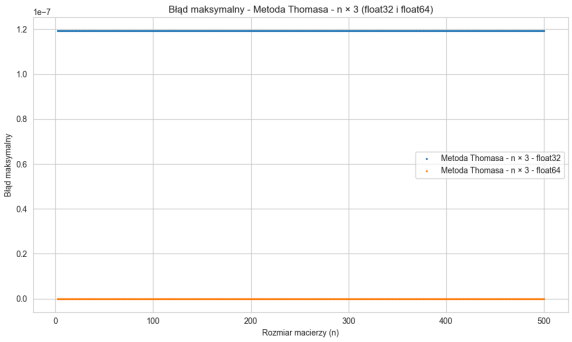
6. Analiza wyników dla macierzy $\mathbf{A_{III}}$

6.1. Błąd makysmalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$

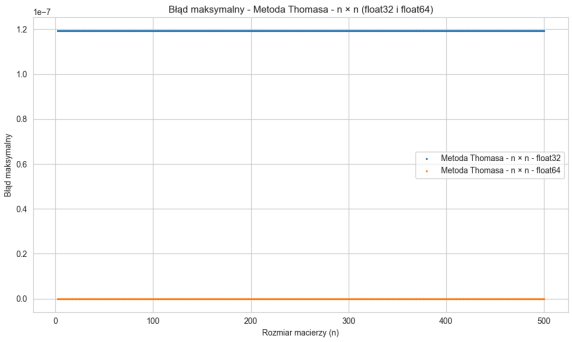
Zestawienie błędu makysmalnego $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ wyznaczonego wektora dla macierzy $\mathbf{A_{III}}$						
	Precyzja `float32`			Precyzja `float64`		
n	$\mathbf{A_{III}}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$\mathbf{A_{III}}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$\mathbf{A_{III}}^{n\times n}$ Metoda Gaussa	$\mathbf{A_{III}}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$\mathbf{A_{III}}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$\mathbf{A_{III}}^{n\times n}$ Metoda Gaussa
2	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
3	1.1921e-07	0.0000e+00	1.1921e-07	0.0000e+00	1.1921e-07	0.0000e+00
4	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	0.0000e+00	1.1921e-07	0.0000e+00
5	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	0.0000e+00	1.1921e-07	0.0000e+00
6	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
7	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
8	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
9	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
10	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
11	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
12	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
13	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
14	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
15	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
17	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
18	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
19	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
20	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
21	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
22	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
23	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
24	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	1.1102e-16	1.1921e-07	1.1102e-16
25	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
26	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
27	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
28	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
29	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
30	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
31	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
32	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
33	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
34	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
35	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
36	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
37	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
38	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
39	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
40	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
41	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
42	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
43	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
44	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
45	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
46	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
47	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
48	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
49	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
50	1.1921e-07	3.3307e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
			...			
251	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
252	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
253	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
254	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
255	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
256	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
257	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
258	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
259	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
260	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
261	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
262	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
263	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
264	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
265	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
266	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
267	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
268	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
269	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
270	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
271	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
272	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
273	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
274	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
275	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
276	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
277	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
278	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
279	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
280	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
281	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
282	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
283	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
284	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
285	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
286	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
287	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
288	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
289	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
290	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
291	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
292	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
293	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
294	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
295	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
296	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
297	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
298	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
299	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
300	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
			...			
451	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
452	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
453	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
454	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
455	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
456	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
457	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
458	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
459	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
460	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
461	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
462	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
463	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
464	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
465	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
466	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
467	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
468	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
469	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
470	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
471	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
472	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
473	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
474	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
475	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
476	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
477	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
478	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
479	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
480	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
481	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
482	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
483	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
484	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
485	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
486	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
487	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
488	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
489	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
490	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
491	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
492	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
493	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
494	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
495	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
496	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
497	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
498	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
499	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16
500	1.1921e-07	4.4409e-16	1.1921e-07	2.2204e-16	1.1921e-07	2.2204e-16

Tabela 1: Wyniki - błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ wektora wyznaczonego z $\mathbf{A_{III}x} = \mathbf{b}$ [s]

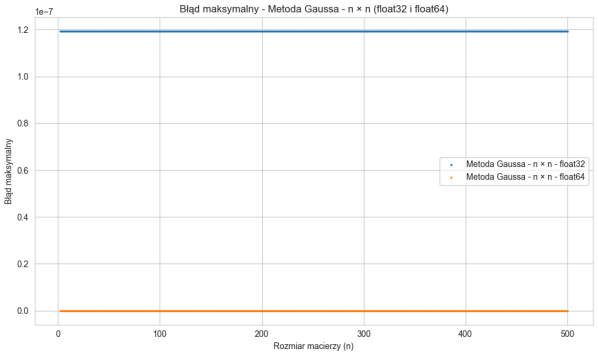
6.2. Wizualizacja wyników błędu makysmalnego $\|\mathbf{x}\|_{\max}$



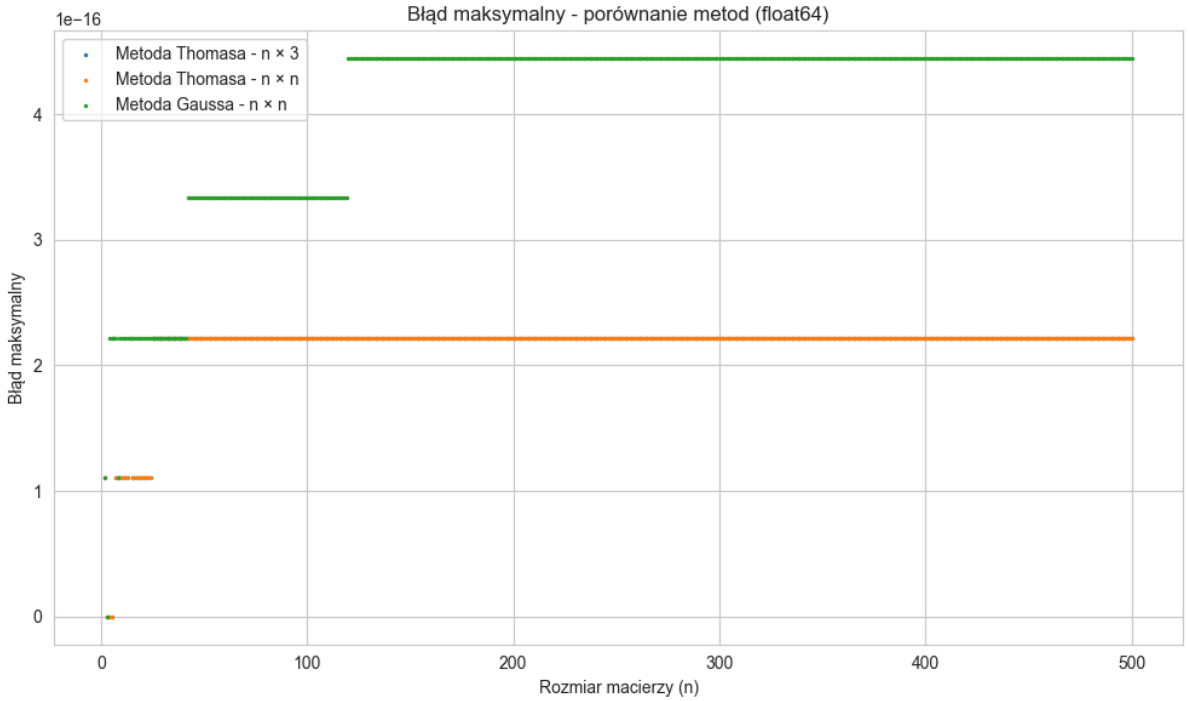
Rysunek 1: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Thomasa ${\mathbf{A}_{\mathbf{III}}}^{n\times 3}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 2: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Thomasa ${\mathbf{A}_{\mathbf{III}}}^{n\times n}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 3: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Gaussa ${\mathbf{A}_{\mathbf{III}}}^{n\times n}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



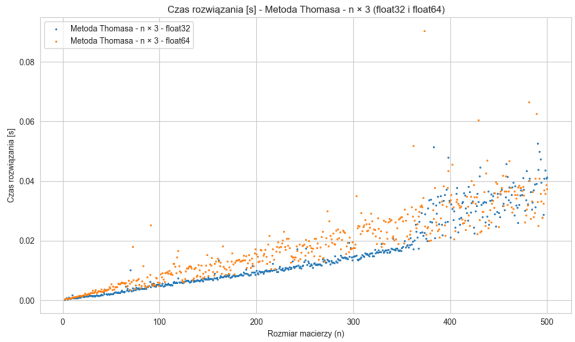
Rysunek 4: Porównanie błędów maksymalnych $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ $\mathbf{A}_{\mathbf{III}}$ różnymi metodami dla precyzji `float64`.

6.3. Czas rozwiązywania układu równań

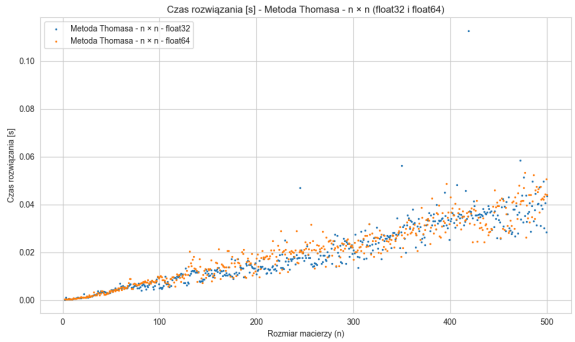
Zestawienie czasu rozwiązywania układu równań dla macierzy A_{III} [s]						
	Precyzja float32			Precyzja float64		
n	$A_{III}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Gaussa	$A_{III}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Gaussa
2	4.2460e-04	5.0000e-04	3.0140e-04	4.5060e-04	2.6290e-04	4.1190e-04
3	8.9630e-04	7.6380e-04	1.2262e-03	3.7650e-04	5.1680e-04	6.1580e-04
4	8.1470e-04	1.8197e-03	4.3050e-04	3.9480e-04	7.5090e-04	5.3450e-04
5	1.2045e-03	1.6766e-03	4.3720e-04	5.7160e-04	4.8630e-04	5.7080e-04
6	1.5970e-03	2.0474e-03	8.2650e-04	4.8360e-04	9.9100e-04	6.3990e-04
7	2.2251e-03	2.5946e-03	4.8620e-04	6.5260e-04	8.0490e-04	7.0920e-04
8	3.6530e-03	3.0731e-03	5.0670e-04	4.8760e-04	5.9130e-04	7.9070e-04
9	3.4888e-03	3.7363e-03	5.3600e-04	5.5370e-04	8.8370e-04	8.7870e-04
10	3.8324e-03	4.6240e-03	5.5690e-04	5.8990e-04	1.7756e-03	9.6480e-04
11	5.4826e-03	5.3276e-03	6.2850e-04	8.6640e-04	7.8930e-04	1.0732e-03
12	5.4341e-03	6.0083e-03	7.2590e-04	7.9100e-04	7.1140e-04	1.2164e-03
13	8.4784e-03	6.8752e-03	7.6650e-04	7.2430e-04	8.0700e-04	1.1823e-03
14	1.0057e-02	7.9665e-03	9.4140e-04	7.5060e-04	8.6420e-04	1.2510e-03
15	1.1608e-02	9.2601e-03	1.1395e-03	9.8190e-04	8.8680e-04	1.3231e-03
16	1.2464e-02	1.1924e-02	1.1285e-03	8.8020e-04	9.3730e-04	1.4063e-03
17	1.4499e-02	1.1038e-02	9.3070e-04	9.5470e-04	1.0242e-03	1.4966e-03
18	1.6134e-02	1.4128e-02	9.7750e-04	1.0832e-03	1.0435e-03	1.5324e-03
19	1.8326e-02	1.3774e-02	1.0223e-03	1.3310e-03	1.1246e-03	1.3946e-03
20	1.9552e-02	1.4393e-02	1.1339e-03	1.3251e-03	1.3536e-03	1.6300e-03
21	2.2137e-02	1.5438e-02	1.3087e-03	1.2250e-03	1.3780e-03	1.6954e-03
22	2.6228e-02	1.6460e-02	2.6619e-03	1.2616e-03	1.2015e-03	1.7735e-03
23	3.1521e-02	1.8598e-02	1.3090e-03	1.2000e-03	1.3104e-03	2.3567e-03
24	2.3856e-02	2.1286e-02	1.3212e-03	1.3214e-03	1.3402e-03	1.7293e-03
25	2.1715e-02	3.0184e-02	1.7233e-03	1.6842e-03	1.4621e-03	1.8775e-03
26	2.1848e-02	2.8323e-02	1.2805e-03	1.5132e-03	1.4506e-03	2.0701e-03
27	2.5389e-02	3.5954e-02	1.4472e-03	2.1790e-03	1.5985e-03	2.4111e-03
28	2.9681e-02	3.1736e-02	1.5567e-03	1.4804e-03	1.5143e-03	2.2370e-03
29	3.2058e-02	3.0589e-02	1.7227e-03	1.5861e-03	1.6016e-03	2.4815e-03
30	3.4643e-02	3.0161e-02	1.6756e-03	1.9267e-03	1.5817e-03	2.4660e-03
31	5.0350e-02	3.7468e-02	1.9031e-03	1.8464e-03	1.4760e-03	3.2737e-03
32	5.6790e-02	4.4341e-02	2.2049e-03	3.3933e-03	1.4783e-03	2.5916e-03
33	6.9208e-02	4.3880e-02	2.4443e-03	2.0670e-03	1.4508e-03	2.8639e-03
34	7.7582e-02	4.0396e-02	2.2343e-03	2.3686e-03	1.6714e-03	3.5169e-03
35	7.5292e-02	4.2918e-02	2.6917e-03	2.2155e-03	1.8615e-03	2.5467e-03
36	6.0600e-02	4.6120e-02	3.9341e-03	3.0682e-03	1.5696e-03	2.9059e-03
37	4.8947e-02	5.2350e-02	3.0740e-03	2.9496e-03	1.5900e-03	3.1257e-03
38	5.7030e-02	4.8631e-02	3.1459e-03	2.1123e-03	1.6374e-03	3.0697e-03
39	7.4773e-02	6.5283e-02	3.9566e-03	2.9407e-03	1.8091e-03	2.9605e-03
40	8.4155e-02	5.0323e-02	3.2943e-03	3.8582e-03	1.9284e-03	3.6405e-03
41	7.8616e-02	7.5885e-02	3.4323e-03	3.8054e-03	1.7592e-03	2.9849e-03
42	6.8556e-02	7.1283e-02	3.6093e-03	3.1430e-03	2.7145e-03	3.1346e-03
43	9.1388e-02	6.7305e-02	3.5328e-03	2.3114e-03	2.1250e-03	3.6713e-03
44	9.3176e-02	6.4526e-02	3.4091e-03	2.5227e-03	3.5144e-03	3.4107e-03
45	9.6171e-02	7.1256e-02	3.1608e-03	2.6463e-03	2.1245e-03	3.4319e-03
46	1.1166e-01	7.9715e-02	3.0598e-03	3.0355e-03	1.9465e-03	3.5395e-03
47	8.9366e-02	7.5101e-02	2.8453e-03	2.8996e-03	2.2282e-03	3.7851e-03
48	7.6340e-02	8.3035e-02	3.1826e-03	3.9248e-03	2.0310e-03	4.4895e-03
49	1.4534e-01	9.3416e-02	3.1937e-03	3.3087e-03	2.2280e-03	4.0932e-03
50	1.1174e-01	9.4781e-02	4.3330e-03	4.1256e-03	2.1520e-03	5.5313e-03
...						
251	2.2852e+00	2.2256e+00	1.7833e-02	2.1560e-02	1.7497e-02	2.0302e-02
252	2.1657e+00	2.2773e+00	2.2698e-02	2.3335e-02	1.1949e-02	1.8019e-02
253	2.0678e+00	2.2672e+00	1.9066e-02	1.9316e-02	1.3161e-02	1.5971e-02
254	2.1130e+00	2.3477e+00	1.7781e-02	2.1396e-02	1.2558e-02	1.9875e-02
255	2.2663e+00	2.3664e+00	1.7658e-02	2.4123e-02	1.1580e-02	1.8372e-02
256	2.2826e+00	2.3922e+00	1.5144e-02	3.1698e-02	1.2148e-02	1.7544e-02
257	2.2915e+00	2.3861e+00	1.4990e-02	2.0943e-02	1.1772e-02	1.6468e-02
258	2.3771e+00	2.3170e+00	1.4087e-02	2.4857e-02	1.0950e-02	1.7511e-02
259	2.3465e+00	2.4483e+00	1.4402e-02	2.1072e-02	1.2306e-02	1.4962e-02
260	2.4385e+00	2.3573e+00	1.5695e-02	1.3482e-02	1.2621e-02	2.0705e-02
261	2.3720e+00	2.4902e+00	1.5216e-02	2.0899e-02	1.2031e-02	2.0684e-02
262	2.3855e+00	2.4307e+00	1.4866e-02	2.3078e-02	1.2206e-02	1.7608e-02
263	2.3860e+00	2.5833e+00	1.9744e-02	1.9620e-02	1.1937e-02	1.9175e-02
264	2.4425e+00	2.5127e+00	1.7363e-02	2.2809e-02	1.2173e-02	1.3747e-02
265	2.3800e+00	2.6115e+00	2.0442e-02	2.1310e-02	1.2109e-02	1.4840e-02
266	2.2785e+00	2.5458e+00	1.8672e-02	2.0411e-02	1.1977e-02	1.7837e-02
267	2.3249e+00	2.6415e+00	1.5432e-02	2.1902e-02	1.1821e-02	2.1390e-02
268	2.3643e+00	2.6719e+00	1.5949e-02	2.8710e-02	1.3834e-02	2.3121e-02
269	2.6704e+00	2.5744e+00	1.8839e-02	2.2620e-02	1.3032e-02	1.4271e-02
270	2.7665e+00	2.6183e+00	1.8696e-02	2.1424e-02	1.3423e-02	1.3153e-02
271	2.8867e+00	2.5466e+00	1.7074e-02	1.4217e-02	1.2651e-02	1.8838e-02
272	2.6163e+00	2.7595e+00	1.6455e-02	2.6270e-02	1.2772e-02	2.0845e-02
273	2.3351e+00	2.5848e+00	2.0280e-02	1.8031e-02	1.3704e-02	3.0032e-02
274	2.3215e+00	2.8089e+00	1.8372e-02	2.4517e-02	1.3382e-02	1.8288e-02
275	2.1714e+00	2.7067e+00	1.8694e-02	2.4781e-02	1.3148e-02	2.6711e-02
276	2.0852e+00	2.7783e+00	2.5176e-02	2.5046e-02	1.2220e-02	2.1650e-02
277	2.2375e+00	2.7221e+00	2.1793e-02	2.3972e-02	1.3223e-02	2.0622e-02
278	2.1605e+00	2.8184e+00	1.5268e-02	1.8731e-02	1.2782e-02	1.9414e-02
279	2.9065e+00	2.7547e+00	2.3288e-02	2.4736e-02	1.2764e-02	2.2510e-02
280	3.1433e+00	2.8575e+00	2.4773e-02	2.1137e-02	1.2526e-02	1.9014e-02
281	2.3547e+00	2.8938e+00	2.7400e-02	2.1860e-02	1.4934e-02	1.8799e-02
282	2.4414e+00	2.8239e+00	1.4203e-02	1.4469e-02	1.3052e-02	2.3517e-02
283	3.4709e+00	2.8289e+00	2.7121e-02	2.2638e-02	1.2678e-02	2.0482e-02
284	2.3207e+00	2.9228e+00	1.9978e-02	2.2277e-02	1.3958e-02	2.3886e-02
285	2.6834e+00	2.9945e+00	1.8540e-02	1.4418e-02	1.3498e-02	2.0926e-02
286	2.1785e+00	2.9941e+00	2.2827e-02	1.8093e-02	1.3511e-02	2.2990e-02
287	3.1543e+00	2.8566e+00	1.6052e-02	2.1284e-02	1.5079e-02	1.7175e-02
288	3.2255e+00	2.9449e+00	1.5689e-02	2.3968e-02	1.4467e-02	2.0308e-02
289	3.1751e+00	3.0403e+00	2.3486e-02	2.0770e-02	1.4311e-02	2.3524e-02
290	3.1682e+00	3.1283e+00	2.5866e-02	2.3624e-02	1.4304e-02	2.3026e-02
291	3.2807e+00	2.9973e+00	2.4845e-02	2.1753e-02	1.4472e-02	2.2676e-02
292	3.0207e+00	2.9611e+00	1.5378e-02	2.2780e-02	1.4161e-02	1.5591e-02
293	3.4398e+00	3.0605e+00	2.4307e-02	2.5165e-02	1.4283e-02	1.8121e-02
294	4.3029e+00	3.2385e+00	2.3665e-02	2.5597e-02	1.3812e-02	1.9406e-02
295	3.3172e+00	3.3553e+00	2.1738e-02	2.3903e-02	1.9311e-02	1.6279e-02
296	3.3395e+00	3.1859e+00	1.8371e-02	2.3702e-02	1.4600e-02	2.1226e-02
297	3.3899e+00	3.1264e+00	2.2237e-02	2.2559e-02	1.7558e-02	1.7260e-02
298	3.4017e+00	3.2832e+00	2.3085e-02	2.2910e-02	1.4504e-02	1.7324e-02
299	3.4217e+00	3.2998e+00	1.9403e-02	2.2210e-02	1.3563e-02	1.9568e-02
300	3.4799e+00	3.1911e+00	2.0837e-02	1.6976e-02	1.4746e-02	1.7688e-02
...						
451	6.7241e+00	5.6246e+00	3.2553e-02	4.1925e-02	2.8052e-02	3.5762e-02
452	7.5408e+00	5.7774e+00	2.5915e-02	2.6095e-02	3.5666e-02	3.6680e-02
453	6.8435e+00	5.6900e+00	3.9033e-02	4.2732e-02	3.7162e-02	3.7754e-02
454	9.9636e+00	5.7792e+00	4.2332e-02	2.9886e-02	3.1617e-02	4.1939e-02
455	8.2274e+00	5.7171e+00	3.0866e-02	4.1662e-02	3.2416e-02	3.1788e-02
456	8.3123e+00	5.7968e+00	3.9127e-02	2.9482e-02	3.0307e-02	3.6551e-02
457	8.0466e+00	5.8717e+00	2.8914e-02	3.8621e-02	3.4614e-02	4.1624e-02
458	8.2369e+00	5.8517e+00	4.1103e-02	3.5970e-02	4.5833e-02	3.6567e-02
459	7.7932e+00	5.8473e+00	3.6105e-02	3.1134e-02	4.1574e-02	3.2137e-02
460	8.3208e+00	5.8374e+00	4.3003e-02	2.8245e-02	3.3725e-02	3.6617e-02
461	8.2361e+00	5.9240e+00	3.0141e-02	2.9006e-02	3.8046e-02	4.6844e-02
462	8.2567e+00	6.0586e+00	2.9196e-02	3.3279e-02	3.2881e-02	3.7701e-02
463	8.3935e+00	5.9539e+00	2.7758e-02	3.1149e-02	3.5431e-02	3.1309e-02
464	8.7539e+00	5.9918e+00	2.8545e-02	4.0940e-02	3.8007e-02	2.9551e-02
465	8.0214e+00	6.1358e+00	3.7954e-02	4.1304e-02	3.9520e-02	3.0675e-02
466	8.0651e+00	6.1553e+00	3.7940e-02	2.9842e-02	2.8610e-02	3.6641e-02
467	8.6007e+00	6.2106e+00	2.6759e-02	4.3016e-02	3.8280e-02	3.5496e-02
468	8.7453e+00	6.1191e+00	3.9555e-02	4.0784e-02	3.1907e-02	3.4203e-02
469	8.6182e+00	6.0565e+00	3.5861e-02	3.4172e-02	3.1189e-02	3.5413e-02
470	8.2128e+00	6.0998e+00	2.8045e-02	4.4783e-02	2.6027e-02	3.7911e-02
471	7.8518e+00	6.2155e+00	3.6747e-02	4.8098e-02	3.2162e-02	3.8617e-02
472	7.9004e+00	6.2621e+00	5.8520e-02	4.0152e-02	3.5133e-02	3.7692e-02
473	8.0561e+00	6.2099e+00	3.3789e-02	4.1508e-02	3.6906e-02	3.7697e-02
474	8.0591e+00	6.2020e+00	4.3836e-02	4.1648e-02	3.5455e-02	3.6777e-02
475	8.0557e+00	6.3547e+00	3.2753e-02	4.1622e-02	4.1029e-02	3.8151e-02
476	8.2541e+00	6.1699e+00	5.1339e-02	4.6902e-02	3.7164e-02	3.5246e-02
477	8.0042e+00	6.6665e+00	3.5292e-02	5.3360e-02	3.0108e-02	2.6260e-02
478	8.1203e+00	6.2318e+00	4.3727e-02	2.6414e-02	3.3662e-02	2.8513e-02
479	8.2146e+00	6.3016e+00	3.2772e-02	3.9607e-02	4.3504e-02	3.0443e-02
480	8.1233e+00	6.4300e+00	3.6198e-02	3.4436e-02	3.2335e-02	3.1979e-02
481	8.3924e+00	6.7554e+00	3.7008e-02	4.4104e-02	4.0031e-02	6.6559e-02
482	8.3338e+00	6.5436e+00	4.0765e-02	3.2608e-02	4.0934e-02	4.0182e-02
483	8.2196e+00	6.5543e+00	2.8647e-02	4.4184e-02	3.6335e-02	2.7303e-02
484	8.2453e+00	6.5546e+00	3.9407e-02	3.4918e-02	3.0540e-02	3.3180e-02
485	8.2806e+00	6.5628e+00	4.9608e-02	4.1448e-02	3.2945e-02	3.6394e-02
486	8.2648e+00	6.9142e+00	3.3020e-02	5.2439e-02	3.6962e-02	2.7949e-02
487	8.3667e+00	6.5875e+00	3.7737e-02	3.4104e-02	3.8985e-02	2.9365e-02
488	8.2952e+00	6.6829e+00	4.4563e-02	4.6012e-02	3.1265e-02	4.0916e-02
489	8.4275e+00	6.6819e+00	3.1346e-02	4.7578e-02	3.9178e-02	6.2578e-02
490	8.3854e+00	6.8781e+00	4.0208e-02	4.5317e-02	5.2590e-02	3.3145e-02
491	8.5588e+00	6.7378e+00	4.0375e-02	4.6496e-02	4.3830e-02	2.5005e-02
492	8.5399e+00	6.8006e+00	4.7254e-02	3.6687e-02	4.9934e-02	4.0848e-02
493	8.5099e+00	6.8336e+00	3.1148e-02	4.7384e-02	4.7297e-02	3.5754e-02
494	8.6005e+00	6.8494e+00	3.9681e-02	4.2046e-02	3.9579e-02	3.3290e-02
495	8.6074e+00	6.9138e+00	3.8235e-02	4.2589e-02	2.7698e-02	2.7696e-02
496	8.8236e+00	6.8046e+00	4.9657e-02	4.2228e-02	2.8793e-02	3.2458e-02
497	8.8633e+00	6.9194e+00	3.0204e-02	4.3348e-02	4.0924e-02	3.6980e-02
498	8.7402e+00	6.9200e+00	4.0680e-02	4.4294e-02	4.3701e-02	3.5839e-02
499	9.0277e+00	7.0646e+00	2.8507e-02	5.0772e-02	4.0808e-02	3.8751e-02
500	8.8501e+00	7.0061e+00	4.3633e-02	4.4079e-02	4.1255e-02	3.7361e-02

Tabela 2: Wyniki - czas rozwiązywania układu równań $\mathbf{A_{III}x = b}$ [s]

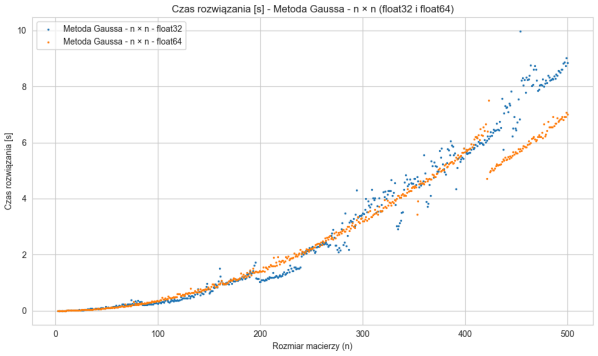
6.4. Wizualizacja wyników czasu rozwiązywania układu równań



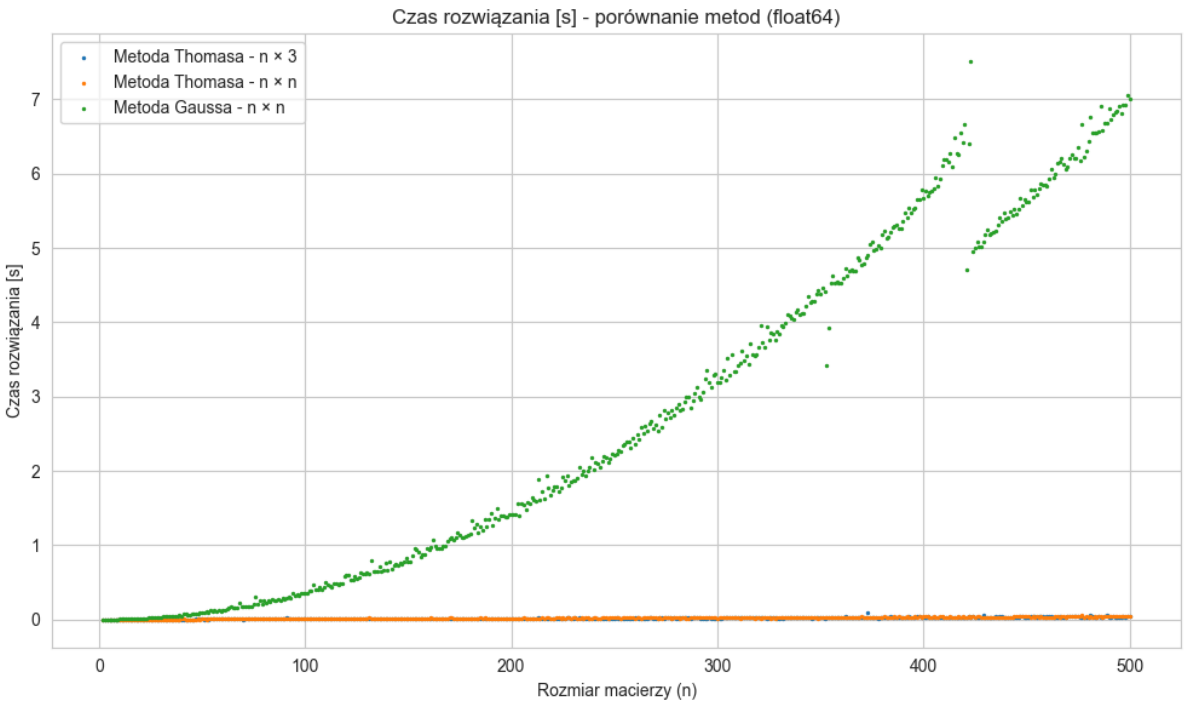
Rysunek 5: Czas rozwiązania metodą Thomasa $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}{}^{n\times 3}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 6: Czas rozwiązania metodą Thomasa $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}{}^{n\times n}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 7: Czas rozwiązania metodą Gaussa $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}{}^{n\times n}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 8: Porównanie czasów rozwiązania $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}$ różnymi metodami dla precyzji `float64`.

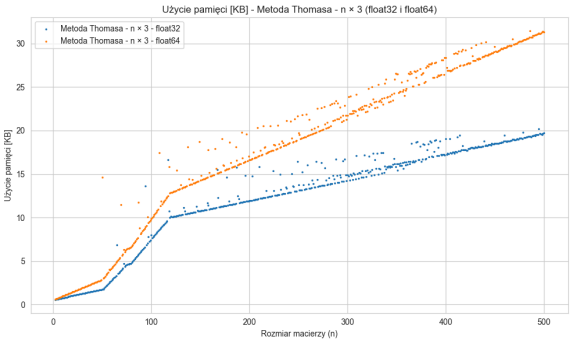
6.5. Zużycie pamięci

Zestawienie zużycia pamięci wykorzystywanej przez program dla macierzy A_{III} [kB]						
	Precyzja `float32`			Precyzja `float64`		
n	$A_{III}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Gaussa	$A_{III}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Gaussa
2	8.5156e-01	8.9062e-01	6.1719e-01	6.5625e-01	5.7031e-01	6.1719e-01
3	1.2949e+00	9.5312e-01	1.0605e+00	7.1875e-01	5.9375e-01	6.6406e-01
4	9.2188e-01	1.0312e+00	6.8750e-01	7.9688e-01	6.1719e-01	7.1094e-01
5	9.6875e-01	1.1250e+00	7.3438e-01	8.9062e-01	6.4062e-01	7.5781e-01
6	1.0234e+00	1.2344e+00	7.8906e-01	1.0000e+00	6.6406e-01	8.0469e-01
7	1.0859e+00	1.3594e+00	8.5156e-01	1.1250e+00	6.8750e-01	8.5156e-01
8	1.1562e+00	1.5000e+00	9.2188e-01	1.2656e+00	7.1094e-01	8.9844e-01
9	1.2344e+00	1.6562e+00	1.0000e+00	1.4219e+00	7.3438e-01	9.4531e-01
10	1.3203e+00	1.8281e+00	1.0859e+00	1.5938e+00	7.5781e-01	9.9219e-01
11	1.4141e+00	2.0156e+00	1.1797e+00	1.7812e+00	7.8125e-01	1.0391e+00
12	1.5156e+00	2.2188e+00	1.2812e+00	1.9844e+00	8.0469e-01	1.0859e+00
13	1.6250e+00	2.4375e+00	1.3906e+00	2.2031e+00	8.2812e-01	1.1328e+00
14	1.7422e+00	2.6719e+00	1.5078e+00	2.4375e+00	8.5156e-01	1.1797e+00
15	1.8672e+00	2.9219e+00	1.6328e+00	2.6875e+00	8.7500e-01	1.2266e+00
16	2.0000e+00	3.1875e+00	1.7656e+00	2.9531e+00	9.4531e-01	1.2734e+00
17	2.1406e+00	3.4688e+00	1.9062e+00	3.2344e+00	9.6875e-01	1.3203e+00
18	2.2891e+00	3.7656e+00	2.0547e+00	3.5312e+00	9.9219e-01	1.3672e+00
19	2.4453e+00	4.0781e+00	2.2109e+00	3.8438e+00	1.0156e+00	1.4141e+00
20	2.6094e+00	4.4062e+00	2.3750e+00	4.1719e+00	1.0391e+00	1.4609e+00
21	2.7812e+00	4.7500e+00	2.5469e+00	4.5156e+00	1.0625e+00	1.5078e+00
22	2.9609e+00	5.1094e+00	2.7266e+00	4.8750e+00	1.0859e+00	1.5547e+00
23	9.7598e+00	5.4844e+00	2.9141e+00	5.2500e+00	1.1094e+00	1.6016e+00
24	3.3438e+00	6.6787e+00	3.1094e+00	5.6406e+00	1.1328e+00	1.6484e+00
25	3.5469e+00	7.3359e+00	3.3125e+00	6.0469e+00	1.1562e+00	1.6953e+00
26	3.8955e+00	6.8408e+00	3.5234e+00	6.4688e+00	1.1797e+00	1.7422e+00
27	3.9766e+00	7.1406e+00	3.7422e+00	6.9062e+00	1.2031e+00	1.7891e+00
28	4.2031e+00	7.5938e+00	3.9688e+00	7.3594e+00	1.2266e+00	1.8359e+00
29	4.4375e+00	8.0625e+00	4.2031e+00	7.8281e+00	1.2500e+00	1.8828e+00
30	4.6797e+00	8.5469e+00	4.4453e+00	8.3125e+00	1.2734e+00	1.9297e+00
31	4.9297e+00	1.2919e+01	4.6953e+00	8.8125e+00	1.2969e+00	1.9766e+00
32	8.5625e+00	1.0021e+01	4.9531e+00	9.3281e+00	1.3203e+00	2.0234e+00
33	5.8652e+00	1.0094e+01	5.2188e+00	9.8594e+00	1.3438e+00	2.0703e+00
34	5.7266e+00	1.0641e+01	5.4922e+00	1.0406e+01	1.3672e+00	2.1172e+00
35	8.7656e+00	1.1203e+01	5.7734e+00	1.0969e+01	1.3906e+00	2.1641e+00
36	6.8721e+00	1.2305e+01	6.0625e+00	1.1547e+01	1.4141e+00	2.2109e+00
37	6.5938e+00	1.2375e+01	6.3594e+00	1.2141e+01	1.4375e+00	2.2578e+00
38	6.8984e+00	1.2984e+01	6.6641e+00	1.2750e+01	1.4609e+00	2.3047e+00
39	9.1963e+00	1.3609e+01	6.9766e+00	1.3375e+01	1.4844e+00	2.3516e+00
40	7.9434e+00	1.7437e+01	7.2969e+00	1.4016e+01	1.5078e+00	2.3984e+00
41	7.8594e+00	1.5593e+01	7.6250e+00	1.4672e+01	1.5312e+00	2.4453e+00
42	8.1953e+00	1.6036e+01	7.9609e+00	1.5344e+01	1.5547e+00	2.4922e+00
43	9.1797e+00	1.6266e+01	8.3047e+00	1.6031e+01	1.5781e+00	2.5391e+00
44	8.8906e+00	1.6969e+01	8.6562e+00	1.6734e+01	1.6016e+00	2.5859e+00
45	9.2500e+00	2.0640e+01	9.0156e+00	1.7453e+01	1.6250e+00	2.6328e+00
46	1.0258e+01	1.8834e+01	9.3828e+00	1.8188e+01	1.6484e+00	2.6797e+00
47	1.0404e+01	1.9172e+01	9.7578e+00	1.8938e+01	1.6719e+00	2.7266e+00
48	1.0375e+01	2.1832e+01	1.0164e+01	1.9703e+01	1.6953e+00	2.7734e+00
49	1.1283e+01	2.1177e+01	1.0578e+01	2.0484e+01	1.7188e+00	2.8203e+00
50	1.1211e+01	2.1539e+01	1.0977e+01	2.1328e+01	1.7422e+00	1.4615e+01
			...			
251	2.5728e+02	5.0620e+02	2.5634e+02	5.0711e+02	1.3125e+01	1.9544e+01
252	2.5902e+02	5.1010e+02	2.5878e+02	5.0979e+02	1.3148e+01	1.9055e+01
253	2.6116e+02	5.1505e+02	2.6071e+02	5.1330e+02	1.3172e+01	1.9102e+01
254	2.6373e+02	5.1810e+02	2.6229e+02	5.1728e+02	1.5246e+01	2.1815e+01
255	2.6511e+02	5.2194e+02	2.6429e+02	5.2184e+02	1.3755e+01	1.9195e+01
256	2.6724e+02	5.2612e+02	2.6688e+02	5.2581e+02	1.3242e+01	1.9242e+01
257	2.6902e+02	5.3079e+02	2.6831e+02	5.2933e+02	1.3266e+01	1.9289e+01
258	2.7166e+02	5.3420e+02	2.7034e+02	5.3394e+02	1.3289e+01	2.1850e+01
259	2.7319e+02	5.3833e+02	2.7237e+02	5.3744e+02	1.6034e+01	1.9383e+01
260	2.7523e+02	5.4241e+02	2.7492e+02	5.4152e+02	1.3850e+01	1.9430e+01
261	2.7727e+02	5.4695e+02	2.7645e+02	5.4798e+02	1.3359e+01	2.1271e+01
262	2.7940e+02	5.5049e+02	2.7851e+02	5.5021e+02	1.3383e+01	1.9523e+01
263	2.8127e+02	5.5462e+02	2.8057e+02	5.5384e+02	1.3406e+01	2.0106e+01
264	2.8346e+02	5.5880e+02	2.8515e+02	5.5857e+02	1.4320e+01	1.9617e+01
265	2.8561e+02	5.6353e+02	2.8472e+02	5.6265e+02	1.3865e+01	1.9664e+01
266	2.8757e+02	5.6713e+02	2.8680e+02	5.6631e+02	1.3477e+01	2.0244e+01
267	2.9041e+02	5.7115e+02	2.9162e+02	5.7106e+02	1.3500e+01	1.9758e+01
268	2.9182e+02	5.7565e+02	2.9152e+02	5.7470e+02	1.6415e+01	1.9805e+01
269	2.9393e+02	5.8026e+02	2.9311e+02	5.8124e+02	1.4372e+01	2.2544e+01
270	2.9694e+02	5.8392e+02	2.9523e+02	5.8357e+02	1.3570e+01	2.0458e+01
271	2.9817e+02	5.8823e+02	2.9794e+02	5.8741e+02	1.3594e+01	1.9945e+01
272	3.0026e+02	5.9256e+02	2.9948e+02	5.9229e+02	1.3617e+01	1.9992e+01
273	3.0245e+02	5.9677e+02	3.0162e+02	5.9637e+02	1.6308e+01	2.2646e+01
274	3.0512e+02	6.0107e+02	3.0429e+02	6.0275e+02	1.3664e+01	2.0086e+01
275	3.0680e+02	6.0521e+02	3.0593e+02	6.0514e+02	1.3688e+01	2.0133e+01
276	3.0892e+02	6.1029e+02	3.1060e+02	6.0889e+02	1.3711e+01	2.2724e+01

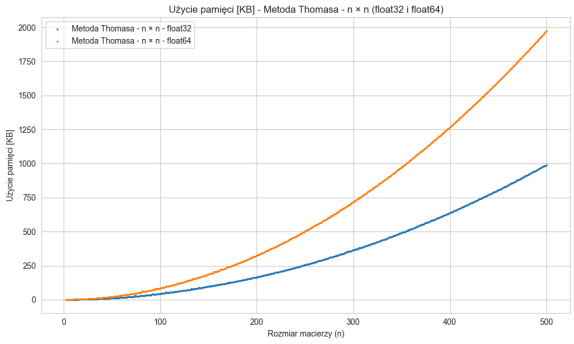
Zestawienie zużycia pamięci wykorzystywanej przez program dla macierzy A_{III} [kB]						
	Precyzja `float32`			Precyzja `float64`		
n	$A_{III}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Gaussa	$A_{III}^{n\times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n\times n}$ Metoda Gaussa
277	3.1110e+02	6.1405e+02	3.1081e+02	6.1565e+02	1.5685e+01	2.0740e+01
278	3.1339e+02	6.1848e+02	3.1245e+02	6.1811e+02	1.4271e+01	2.0273e+01
279	3.1615e+02	6.2274e+02	3.1514e+02	6.2197e+02	1.3781e+01	2.0908e+01
280	3.1765e+02	6.2758e+02	3.1683e+02	6.2871e+02	1.3805e+01	2.0367e+01
281	3.1985e+02	6.3159e+02	3.2126e+02	6.3127e+02	1.4533e+01	2.0414e+01
282	3.2254e+02	6.3602e+02	3.2124e+02	6.3519e+02	1.3852e+01	2.2927e+01
283	3.2436e+02	6.4102e+02	3.2346e+02	6.4016e+02	1.3875e+01	2.0508e+01
284	3.2658e+02	6.4485e+02	3.2633e+02	6.4408e+02	1.3898e+01	2.3071e+01
285	3.2871e+02	6.4937e+02	3.2792e+02	6.4855e+02	1.4812e+01	2.1138e+01
286	3.3145e+02	6.5459e+02	3.3267e+02	6.5359e+02	1.4459e+01	2.3165e+01
287	3.3323e+02	6.5840e+02	3.3295e+02	6.5753e+02	1.3969e+01	2.1177e+01
288	3.3549e+02	6.6287e+02	3.3467e+02	6.6261e+02	1.6684e+01	2.3446e+01
289	3.3835e+02	6.6740e+02	3.3758e+02	6.6658e+02	1.4810e+01	2.1325e+01
290	3.3986e+02	6.7252e+02	3.3921e+02	6.7169e+02	1.4039e+01	2.3139e+01
291	3.4244e+02	6.7651e+02	3.4205e+02	6.7569e+02	1.4062e+01	2.1341e+01
292	3.4517e+02	6.8097e+02	3.4429e+02	6.8251e+02	1.4898e+01	2.2679e+01
293	3.4690e+02	6.8637e+02	3.4858e+02	6.8532e+02	1.4623e+01	2.1536e+01
294	3.4908e+02	6.9029e+02	3.4884e+02	6.9003e+02	1.4133e+01	2.1023e+01
295	3.5221e+02	6.9492e+02	3.5299e+02	6.9451e+02	1.6489e+01	2.1766e+01
296	3.5386e+02	7.0012e+02	3.5402e+02	6.9932e+02	1.4180e+01	2.1117e+01
297	3.5605e+02	7.0428e+02	3.5585e+02	7.0390e+02	1.6720e+01	2.2913e+01
298	3.5900e+02	7.0888e+02	3.5768e+02	7.1031e+02	1.4880e+01	2.1771e+01
299	3.6084e+02	7.1402e+02	3.6232e+02	7.1319e+02	1.4250e+01	2.1258e+01
300	3.6320e+02	7.1816e+02	3.6279e+02	7.1804e+02	1.4914e+01	2.1763e+01
			...			
451	8.0789e+02	1.6082e+03	8.0776e+02	1.6076e+03	1.8531e+01	2.9095e+01
452	8.1219e+02	1.6156e+03	8.1122e+02	1.6147e+03	1.8555e+01	2.9072e+01
453	8.1540e+02	1.6218e+03	8.1487e+02	1.6218e+03	1.8532e+01	2.9119e+01
454	8.1910e+02	1.6295e+03	8.1896e+02	1.6290e+03	1.8549e+01	2.9189e+01
455	8.2256e+02	1.6361e+03	8.2203e+02	1.6360e+03	1.8595e+01	2.9236e+01
456	8.2618e+02	1.6437e+03	8.2556e+02	1.6431e+03	1.8618e+01	2.9382e+01
457	8.2974e+02	1.6509e+03	8.2918e+02	1.6503e+03	1.8648e+01	2.9429e+01
458	8.3291e+02	1.6575e+03	8.3272e+02	1.6574e+03	1.8665e+01	2.9377e+01
459	8.3711e+02	1.6652e+03	8.3634e+02	1.6646e+03	1.8765e+01	2.9499e+01
460	8.4065e+02	1.6725e+03	8.3992e+02	1.6719e+03	1.9437e+01	2.9517e+01
461	8.4410e+02	1.6791e+03	8.4362e+02	1.6791e+03	1.8759e+01	2.9547e+01
462	8.4810e+02	1.6868e+03	8.4719e+02	1.6864e+03	1.8736e+01	2.9617e+01
463	8.5150e+02	1.6936e+03	8.5074e+02	1.6941e+03	1.8806e+01	2.9710e+01
464	8.5508e+02	1.7014e+03	8.5440e+02	1.7008e+03	1.8783e+01	2.9711e+01
465	8.5867e+02	1.7087e+03	8.5814e+02	1.7081e+03	1.8807e+01	2.9804e+01
466	8.6181e+02	1.7155e+03	8.6174e+02	1.7154e+03	1.8830e+01	2.9729e+01
467	8.6603e+02	1.7236e+03	8.6540e+02	1.7227e+03	1.8854e+01	2.9779e+01
468	8.6966e+02	1.7306e+03	8.6901e+02	1.7301e+03	1.8976e+01	3.0538e+01
469	8.7331e+02	1.7374e+03	8.7276e+02	1.7374e+03	1.8999e+01	2.9945e+01
470	8.7699e+02	1.7454e+03	8.7646e+02	1.7448e+03	1.8953e+01	2.9939e+01
471	8.8068e+02	1.7527e+03	8.8015e+02	1.7522e+03	1.8924e+01	2.9986e+01
472	8.8471e+02	1.7595e+03	8.8375e+02	1.7595e+03	1.8971e+01	3.0010e+01
473	8.8808e+02	1.7676e+03	8.8807e+02	1.7669e+03	1.9047e+01	3.0080e+01
474	8.9128e+02	1.7743e+03	8.9126e+02	1.7744e+03	1.9018e+01	3.0180e+01
475	8.9551e+02	1.7818e+03	8.9493e+02	1.7818e+03	1.9140e+01	3.0227e+01
476	8.9926e+02	1.7899e+03	8.9863e+02	1.7893e+03	1.9140e+01	3.0267e+01
477	9.0302e+02	1.7973e+03	9.0237e+02	1.7968e+03	1.9134e+01	3.0268e+01
478	9.0677e+02	1.8042e+03	9.0616e+02	1.8042e+03	1.9088e+01	3.0295e+01
479	9.1049e+02	1.8122e+03	9.0988e+02	1.8117e+03	1.9783e+01	3.0361e+01
480	9.1420e+02	1.8201e+03	9.1364e+02	1.8193e+03	1.9211e+01	3.0461e+01
481	9.1752e+02	1.8268e+03	9.1743e+02	1.8268e+03	1.9182e+01	3.0455e+01
482	9.2183e+02	1.8349e+03	9.2118e+02	1.8350e+03	1.9258e+01	3.0502e+01
483	9.2588e+02	1.8425e+03	9.2494e+02	1.8419e+03	1.9229e+01	3.0602e+01
484	9.2938e+02	1.8495e+03	9.2873e+02	1.8494e+03	1.9298e+01	3.0596e+01
485	9.3316e+02	1.8577e+03	9.3257e+02	1.8571e+03	1.9298e+01	3.0695e+01
486	9.3698e+02	1.8653e+03	9.3640e+02	1.8647e+03	1.9299e+01	3.1437e+01
487	9.4080e+02	1.8723e+03	9.4016e+02	1.8723e+03	1.9276e+01	3.0736e+01
488	9.4462e+02	1.8805e+03	9.4403e+02	1.8799e+03	1.9392e+01	3.0714e+01
489	9.4791e+02	1.8881e+03	9.4781e+02	1.8876e+03	1.9369e+01	3.0929e+01
490	9.5230e+02	1.8959e+03	9.5162e+02	1.8953e+03	1.9438e+01	3.0930e+01
491	9.5612e+02	1.9030e+03	9.5612e+02	1.9029e+03	1.9416e+01	3.0977e+01
492	9.5998e+02	1.9112e+03	9.5939e+02	1.9106e+03	1.9538e+01	3.1023e+01
493	9.6412e+02	1.9192e+03	9.6320e+02	1.9183e+03	1.9562e+01	3.1040e+01
494	9.6766e+02	1.9262e+03	9.6707e+02	1.9260e+03	1.9532e+01	3.1117e+01
495	9.7160e+02	1.9344e+03	9.7090e+02	1.9338e+03	2.0211e+01	3.1210e+01
496	9.7546e+02	1.9423e+03	9.7487e+02	1.9417e+03	1.9632e+01	3.1158e+01
497	9.7930e+02	1.9501e+03	9.7867e+02	1.9494e+03	1.9586e+01	3.1188e+01
498	9.8325e+02	1.9573e+03	9.8264e+02	1.9577e+03	1.9557e+01	3.1351e+01
499	9.8716e+02	1.9656e+03	9.8652e+02	1.9650e+03	1.9649e+01	3.1397e+01
500	9.9112e+02	1.9735e+03	9.9048e+02	1.9728e+03	1.9726e+01	3.1329e+01

Tabela 3: Wyniki - zużycie pamięci podczas działania algorytmu rozwiązującego układ równań $A_{III}x = b$ (przechowywanie macierzy + pamięć potrzebna do działania programu)

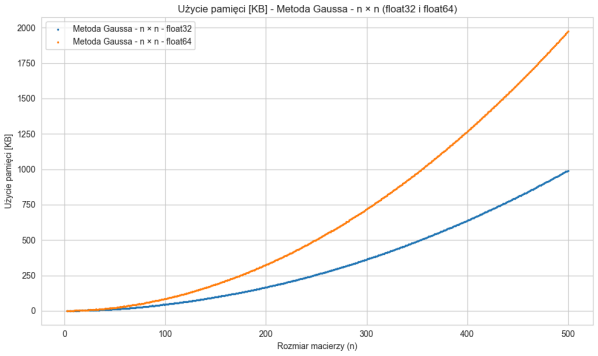
6.6. Wizualizacja wyników zużycia pamięci



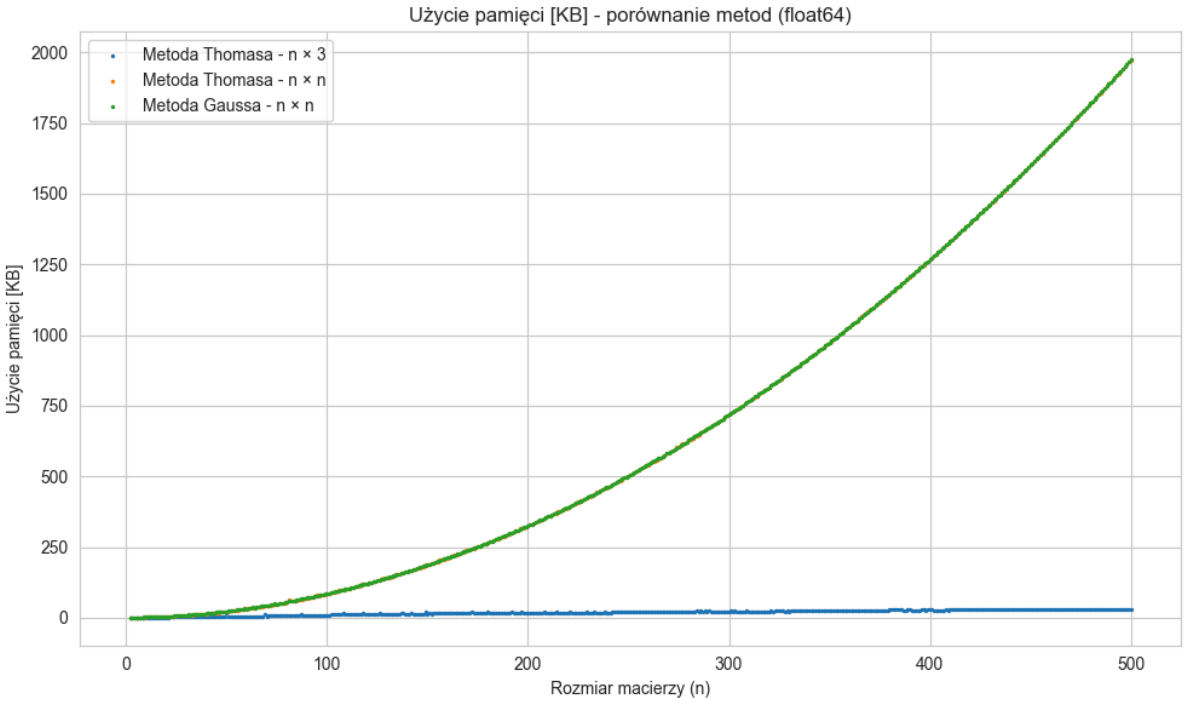
Rysunek 9: Zużycie pamięci [KB] dla metody Thomasa $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}{}^{n\times 3}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 10: Zużycie pamięci [KB] dla metody Thomasa $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}{}^{n\times n}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 11: Zużycie pamięci [KB] dla metody Gaussa $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}{}^{n\times n}$ dla precyzji `float32` oraz `float64`.



Rysunek 12: Porównanie zużycia pamięci [KB] $\mathbf{A}_{\mathrm{III}}$ różnymi metodami dla precyzji `float64`.

7. Wnioski

Efektywność obliczeniowa
Metoda Thomasa, dedykowana dla macierzy trójdiagonalnych, wykazała istotnie wyższą wydajność obliczeniową względem klasycznej metody eliminacji Gaussa. Czas rozwiązania układu równań przy użyciu metody Thomasa był zauważalnie krótszy, co jest szczególnie widoczne dla większych rozmiarów macierzy ($n \to 500$). Potwierdza to teoretyczne złożoności czasowe algorytmu Gaussa $\mathrm{O}(n^3)$ oraz Thomasa $O(n)$.

Zużycie pamięci operacyjnej
Skalowanie zużycia pamięci potwierdza teoretyczne złożoności: Dla metody Gaussa $n \times n$ i Thomasa $n \times n$ zużycie pamięci (Tabela 3) rośnie znacznie szybciej niż dla Thomasa $n \times 3$. Dla $n = 500$ (`float64`), Gauss zajmuje ok. 1972 kB, a Thomas $n \times n$ ok. 1973 kB. To obrazuje złożoność $\mathrm{O}(n^2)$ związaną z przechowywaniem pełnej macierzy. Wykresy (Rysunki 10 i 11) powinny pokazywać paraboliczny wzrost.
W przypadku metody Thomasa $n \times 3$, dla n=500 (`float64`), zużycie to tylko ok. 31 kB. Wzrost jest liniowy $\mathrm{O}(n)$, co czyni tę metodę wyjątkowo efektywną pamięciowo dla dużych, rzadkich macierzy trójdiagonalnych, co ilustruje Rysunek 9.

Dokładność numeryczna
Rodzaj zastosowane metody, Gaussa lub Thomasa, nie wpłynął na granicę błędu dla danej precyzji. Z Tabela 2 widać, że dla `float32` wszystkie metody (Thomas $n \times 3$, Thomas $n \times n$, Gauss $n \times n$) osiągają błąd rzędu $\approx 1.19 \cdot 10^{-7}$. Dla `float64`, wszystkie metody osiągają błąd rzędu $2.22 \cdot 10^{-16}$ lub $4.44 \cdot 10^{-16}$. Oznacza to, że fundamentalnym ograniczeniem dokładności jest typ danych, a nie sam algorytm (pod warunkiem jego stabilności numerycznej, co w tym przypadku jest spełnione).

Zgodność wyników z oczekiwaniami teoretycznymi
Wyniki eksperymentalne w pełni potwierdziły właściwości teoretyczne obu metod: specjalizowana metoda Thomasa okazała się bardziej wydajna dla macierzy rzadkich o strukturze trójdiagonalnej, podczas gdy metoda Gaussa, mimo swojej uniwersalności, charakteryzowała się większym kosztem obliczeniowym i pamięciowym.