

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Interpolacja - Funkcje Sklejane

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 23.03.2025 | Data Oddania: 11.04.2025

1. Analiza przypadku

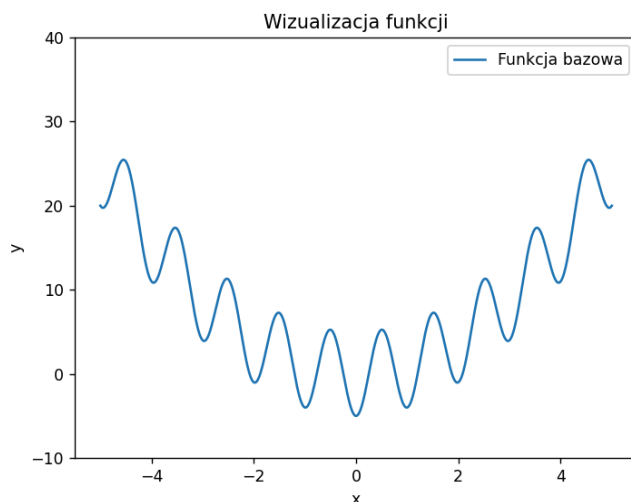
Dla funkcji

$$x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right) \quad (1.1)$$

gdzie $m = 5$ oraz $k = 0.5$

Na przedziale:

$$x \in [-5; 5] \quad (1.2)$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$

Dla powyższej funkcji należy wyznaczyć interpolacyjne funkcje sklejane drugiego oraz trzeciego stopnia.

W przypadku poniższej analizy, dla obu stopni funkcji sklejanych obliczenia zostaną przeprowadzone przy użyciu różnych warunków brzegowych:

- Dla stopnia 2: **Free Boundary** oraz **Clamped Boundary**.
- Dla stopnia 3: **Free Boundary** oraz **Not-a-Knot**.

Interpolację przeprowadzono dla różnej liczby węzłów n , min. $n \in \{5, 7, 10, 11, 13, 20, 50, 100, 1000\}$. Dla każdego przypadku interpolacji porównano wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: **równoodległych** oraz pokrywających się z miejscami zerowi **wielomianu Czebyszewa**, których rozłożenie definiuje przedziały cząstkowe funkcji sklejanych.

Celem analizy jest ocena dokładności przybliżenia funkcji $f(x)$ przez funkcje sklejane, porównanie efektywności interpolacji 2. i 3. stopnia, zbadanie wpływu różnych **warunków brzegowych** oraz analiza zachowania błędów przy różnej liczbie i rozmieszczeniu węzłów, interesujących przypadków, takich jak zachowanie interpolacji dla małej liczby węzłów czy niedokładności na krańcach przedziału dla niektórych warunków brzegowych. Szczegółowe wyprowadzenia i opisy warunków brzegowych znajdują się w sekcji Sekcja 3.1 oraz Sekcja 3.2.

2. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

- Komputer HP EliteBook 840 G6:
 - System operacyjny: Windows 11 x64
 - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
 - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.12.0
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib, Seaborn

3. Wyprowadzenia Interpolacji Funkcjami Sklejanymi

W poniższych wyprowadzeniach oraz wnioskach terminy *funkcja sklejana* oraz *splajn* używane są naprzemiennie.

Zarówno interpolacja splajnami kwadratowymi, jak i sześciennymi, jest zrealizowana metodą rozwiązywania **układu równań**, gdzie za niewiadomymi są odpowiednie współczynniki wielomianu interpolacji.

W implementacji, do rozwiązania niżej opisanych układów równań w języku Python posłużyła funkcja `numpy.linalg.solve` będąca częścią biblioteki Numpy. W samej bibliotece, rozwiązanie układu równań liniowych jest obliczane za pomocą rozkładu LU z częściowym wyszukiwaniem elementu głównego i zamianami wierszy.

3.1. Funkcja Sklejana Kwadratowa

Równanie funkcji sklejaney drugiego stopnia możemy zapisać jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (3.1)$$

, gdzie:

- $i \in [1, 2, \dots, n - 1]$ - indeksy węzłów
- S_i - i -ta funkcja sklejana cząstkowa
- n - liczba węzłów
- a_i, b_i, c_i - współczynniki i -tego węzła
- x_i - współrzędna x i -tego węzła

Warunki funkcji sklejaney

Funkcja sklejana musi dodatkowo spełniać następujące warunki:

- Warunek interpolacji:

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i \\ S_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Warunek ciągłości funkcji:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \quad (3.3)$$

- Warunek ciągłości pierwszej pochodnej:

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}) \quad (3.4)$$

gdzie

$$S'_i = 2a_i(x - x_i) + b_i \quad (3.5)$$

Wyprowadzenia na podstawie warunków

Dla uproszczenia poniższych wyprowadzeń, wprowadźmy oznaczenie:

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (3.6)$$

Z warunku (3.2) otrzymujemy:

$$S_i(x_i) = a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i, \text{ stąd} \quad (3.7)$$

$$y_i = c_i$$

Z warunku (3.4) otrzymujemy:

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$$

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i \quad (3.8)$$

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} = \frac{b_{i+1} - b_i}{2h_i}$$

Z (3.8) oraz warunku (3.3) otrzymujemy:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$$

$$c_i = c_{i+1} - a_i(x_{i+1} - x_i)^2 - b_i(x_{i+1} - x_i) = c_{i+1} - a_i h_i^2 - b_i h_i, \text{ z (2.2)}$$

$$c_i = c_{i+1} - \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2h_i} \right) h_i^2 - b_i h_i =$$

$$= c_{i+1} - \frac{(b_{i+1} - b_i)h_i + 2b_i h_i}{2} = c_{i+1} - \frac{(b_{i+1} + b_i)h_i}{2}, \text{ z (2.8)} \quad (3.9)$$

$$y_i = y_{i+1} - \frac{(b_{i+1} + b_i)h_i}{2}, \text{ z (2.7)}$$

$$(b_i + b_{i+1}) = \frac{2(y_{i+1} - y_i)}{h_i}$$

Układ równań

Używając powyższych wyprowadzeń, możemy skonstruować następujący układ równań:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = \frac{2(y_2 - y_1)}{h_1} \\ b_2 + b_3 = \frac{2(y_3 - y_2)}{h_2} \\ \dots \\ b_{n-1} + b_n = \frac{2(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} \end{cases} \quad (3.10)$$

Można zauważyć, że układ (3.10) ma n niewiadomych $b_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ oraz $n - 1$ równań. Ostatnie równanie, konieczne, aby układ stał był oznaczony, można wyprowadzić z **warunków brzegowych**. Poniżej zaproponowane zostaną rozwiązania korzystające z dwóch różnych warunków brzegowych.

Warunek I - Free Boundary

Zgodnie z warunkiem brzegowym *Free Boundary*, zachodzi wybrane z poniższych:

$$S'_1(x_1) = 0 \vee S'_{n-1}(x_n) = 0 \quad (3.11)$$

Wykorzystując tą właściwość, można otrzymać:

$$\begin{aligned} 2a_1(x_1 - x_1) + b_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dzięki powyższemu warunkowi, bazując na (3.10) można utworzyć układ równań oznaczony:

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = \frac{2(y_2 - y_1)}{h_1} \\ b_2 + b_3 = \frac{2(y_3 - y_2)}{h_2} \\ \dots \\ b_{n-1} + b_n = \frac{2(y_{n-1} - y_n)}{h_{n-1}} \end{cases} \quad (3.13)$$

Warunek II - Clamped Boundary - Druga Pochodna

Zgodnie z warunkiem brzegowym *Clamped Boundary* dla drugiej pochodnej, zachodzi:

$$s''_1(x_1) = f''(x_1) \vee s''_{n-1}(x_n) = f''(x_n) \quad (3.14)$$

gdzie wartości f'' są wartościami drugiej pochodnej w podanych punktach. Stąd:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}f''(x_1) \\ \frac{b_2 - b_1}{h_1} &= \frac{1}{2}f''(x_1) \\ b_2 - b_1 &= \frac{1}{2}f''(x_1) \cdot h_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dzięki powyższemu warunkowi, bazując na (3.10) można utworzyć układ równań oznaczony:

$$\begin{cases} b_2 - b_1 = \frac{1}{2}f''(x_1) \cdot h_1 \\ b_1 + b_2 = \frac{2(y_2 - y_1)}{h_1} \\ b_2 + b_3 = \frac{2(y_3 - y_2)}{h_2} \\ \dots \\ b_{n-1} + b_n = \frac{2(y_{n-1} - y_n)}{h_{n-1}} \end{cases} \quad (3.16)$$

Różnice pomiędzy warunkami brzegowymi

- **Free Boundary**
 - Zakłada zerową pierwszą pochodną na jednym końcu ($S'_1(x_1) = 0$).
 - Powoduje to przewidywalnie, że splajn będzie „wypłaszczał się” na tym końcu przedziału, co może być nienaturalne, jeśli funkcja oryginalna ma tam niezerowe nachylenie.
- **Clamped Boundary - Druga Pochodna:**
 - Druga pochodna jest narzucona zgodnie z $f''(x)$, co zapewnia lepsze dopasowanie krzywizny, odzwierciedlając odpowiednio wypukłość funkcji.
 - Będzie powodowało to potencjalnie lepsze dopasowanie na początku przedziału uwzględniające lokalną krzywiznę funkcji, jeśli nachylenie jej jest istotne.

Różnica w zachowaniu funkcji sklejanej będzie najbardziej widoczna w pobliżu końca przedziału, dla którego zastosowano warunek brzegowy. Dla dużej liczby węzłów wpływ pojedynczego warunku brzegowego na ogólny kształt funkcji maleje, ale może pozostać widoczny lokalnie. Charakter oscylacji w splajnach drugiego stopnia również może zależeć od warunku brzegowego.

3.2. Funkcja Sklejana Sześcienna

Równanie funkcji sklejanej drugiego stopnia możemy zapisać jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_{i(x-x_i)}^2 + d_i, \quad \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (3.17)$$

, gdzie:

- $i \in [1, 2, \dots, n - 1]$ - indeksy węzłów
- S_i - i -ta funkcja sklejana
- n - liczba węzłów
- a_i, b_i, c_i - współczynniki i -tego węzła
- x_i - współrzędna x i -tego węzła

Warunki funkcji sklejanej

Funkcja sklejana musi dodatkowo spełniać następujące warunki:

- Warunek interpolacji:

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i \\ S_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

- Warunek ciągłości funkcji:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \quad (3.19)$$

- Warunek ciągłości pierwszej pochodnej:

$$S'_{i+1}(x_i + 1) = S'_i(x_{i+1}) \quad (3.20)$$

gdzie

$$S'_i = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_{i(x-x_i)} + c_i \quad (3.21)$$

- Warunek ciągłości drugiej pochodnej:

$$S''_{i+1}(x_i + 1) = S''_i(x_{i+1}) \quad (3.22)$$

gdzie

$$S''_i = 6a_i(x - x_i) + 2b_{i(x-x_i)} \quad (3.23)$$

Wyprowadzenia na podstawie warunków

Dla uproszczenia poniższych wyprowadzeń, wprowadźmy oznaczenie:

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (3.24)$$

Druga pochodna funkcji szesciennej jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Wprowadźmy oznaczenie $h_i = x_{i+1} - x_i$. $s''_{i(x)}$ możemy zapisać w postaci:

$$S''_{i(x)} = S''_{i(x_i)} \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} = S''_{i(x_{i+1})} \frac{x - x_i}{h_i} \quad (3.25)$$

Całkując obustronnie otrzymujemy:

$$S_{i(x)} = S''_{i(x_i)} \frac{x_i}{6} h_i (x_{i+1} - x)^3 + S''_{i(x_{i+1})} \frac{x_{i+1}}{6} h_i (x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x) \quad (3.26)$$

Wiedząc, że funkcja musi spełniać warunki (3.3) wyznaczamy wartości stałych całkowania dzięki czemu otrzymujemy wzór:

$$\begin{aligned} S_{i(x)} = S''_{i(x_i)} \frac{x_i}{6} h_i (x_{i+1} - x)^3 + S''_{i(x_{i+1})} \left(\frac{x_{i+1}}{6} h_i \right) (x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - s''_{i(x_{i+1})} \frac{h_i}{6} \right) (x - x_i) + \\ + \left(\frac{y_i}{h_i} - s''_{i(x_i)} \frac{h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) \end{aligned} \quad (3.27)$$

W powyższym wzorze brakuje nam tylko wartości s'_i , korzystając z warunku ciągłości pierwszej pochodnej różniczkujemy $s_i(x)$, otrzymując:

$$S'_i = -\frac{h_i}{3} S''_{i(x_i)} - \frac{h_i}{6} S''_{i(x_{i+1})} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \quad (3.28)$$

Wprowadźmy symbole $\sigma_i = (\frac{1}{6})s''_{i(x_i)}$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$. Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S'_{i(x)} &= \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \\ S'_{i-1}(x) &= \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Z warunku ciągłości $S'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) &= \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1}) \\ h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} &= \Delta_i - \Delta_{i-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Układ równań

Używając powyższych wyprowadzeń, możemy skonstruować następujący układ równań:

$$\begin{cases} h_1\sigma_1 + 2(h_1 + h_2)\sigma_2 + h_2\sigma_3 = \Delta_2 - \Delta_1 \\ h_2\sigma_2 + 2(h_2 + h_3)\sigma_3 + h_3\sigma_4 = \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ h_{n-2}\sigma_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \end{cases} \quad (3.31)$$

Można zauważyć, że układ (3.10) ma n niewiadomych $\sigma_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ oraz $n - 2$ równań. Ostatnie równanie, konieczne, aby układ stał był oznaczony, można wyprowadzić z **warunków brzegowych**. Poniżej zaproponowane zostanie rozwiązanie korzystające z dwóch warunków brzegowych.

Warunek I - Free Boundary

Zgodnie z warunkiem brzegowym *Free Boundary*, zachodzi wybrane z poniższych:

$$S''_1(x_1) = 0 \wedge S''_{n-1}(x_n) = 0 \quad (3.32)$$

Wykorzystując tę właściwość, można otrzymać:

$$\sigma_1 = 0 \wedge \sigma_n = 0 \quad (3.33)$$

Dzięki powyższemu warunkowi, bazując na (3.10) można utworzyć układ równań oznaczony:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ h_1\sigma_1 + 2(h_1 + h_2)\sigma_2 + h_2\sigma_3 = \Delta_2 - \Delta_1 \\ h_2\sigma_2 + 2(h_2 + h_3)\sigma_3 + h_3\sigma_4 = \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ h_{n-2}\sigma_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ \sigma_n = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Warunek II - Not-a-Knot

Zgodnie z warunkiem brzegowym *Clamped Boundary* dla drugiej pochodnej, zachodzi:

$$S_1'''(x_1) = S_1'''(x_1) \wedge S_{n-1}'''(x_n) = S_n'''(x_n) \quad (3.35)$$

gdzie trzecia pochodna funkcji sklejanej S_i''' wynosi:

$$S_i''' = 6a_i \quad (3.36)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ a_{n-1} &= a_n \end{aligned} \quad (3.37)$$

Stosując odpowiednie przekształcenia, na bazie (3.23) i oraz (3.24):

$$a_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i} \quad (3.38)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{h_1} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{h_2} \\ h_2\sigma_1 - (h_1 + h_2)\sigma_2 + h_1\sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{h_{n-1}} &= \frac{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}{h_{n-2}} \\ h_{n-1}\sigma_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1})\sigma_{n-1} + h_{n-2}\sigma_n &= 0 \end{aligned}$$

Dzięki powyższym, bazując na (3.10) można utworzyć układ równań oznaczony:

$$\begin{cases} h_2\sigma_1 - (h_1 + h_2)\sigma_2 + h_1\sigma_3 = 0 \\ h_1\sigma_1 + 2(h_1 + h_2)\sigma_2 + h_2\sigma_3 = \Delta_2 - \Delta_1 \\ h_2\sigma_2 + 2(h_2 + h_3)\sigma_3 + h_3\sigma_4 = \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ h_{n-2}\sigma_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ h_{n-1}\sigma_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1})\sigma_{n-1} + h_{n-2}\sigma_n = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Różnice pomiędzy warunkami brzegowymi

- **Free Boundary**
 - Druga pochodna na obu końcach jest zero-
wa, co oznacza brak wymuszonej krzywizny.
 - Powoduje to, że splajn będzie zachowywał
się podobnie do funkcji liniowej w otoczeniu
węzłów na krańców przedziału interpolacji.
- **Not-A-Knot:**
 - Trzecia pochodna jest ciągła w drugim i
przedostatnim węźle.
 - Daje to bardziej gładki przebieg funkcji,
ponieważ istnieją nagłe zmiany w trzeciej
pochodnej, co powoduje mniej „załamań”.

Dla małej liczby węzłów (n), wybór warunku brzegowego będzie prawdopodobnie miał znaczący wpływ na kształt całej funkcji sklejanej. W miarę wzrostu n , wpływ warunków brzegowych staje się bardziej zlokalizowany w pobliżu krańców przedziału $[x_1, x_n]$. Dla bardzo dużego n , globalne różnice między warunkami mogą zanikać, chociaż lokalne różnice na krańcach mogą pozostać.

4. Wyznaczenie dokładności interpolacji

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką wielomian, uzyskany zgodnie z zagadnieniem Hermite’a względem pierwszej pochodnej, przybliża zadaną funkcję (1.1) wykorzystano niżej wymienione wskaźniki.

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolacji dla $m = 1000$ równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-5; 5]$.

4.1. Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy wyrażony jest wzorem

$$E_s = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^l (W(x_i) - f(x_i))^2}}{l} \quad (4.1)$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - funkcja z Wzór (1.1)
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

4.2. Błąd maksymalny

Błąd maksymalny wyrażony jest wzorem

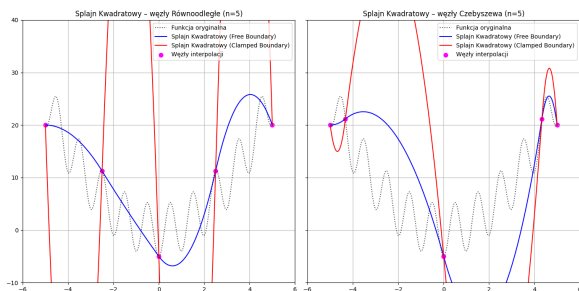
$$E_l = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \quad (4.2)$$

, gdzie

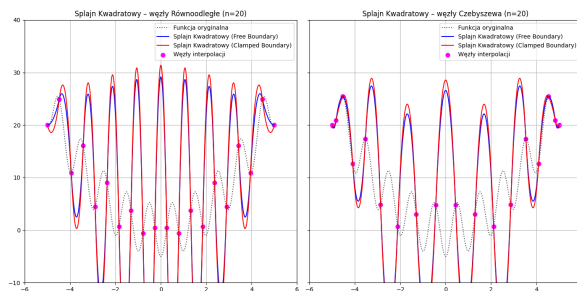
- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - funkcja z Wzór (1.1)
- W - funkcja wielomianu interpolacji
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

5. Wizualizacja rezultatów dla wybranych liczb węzłów

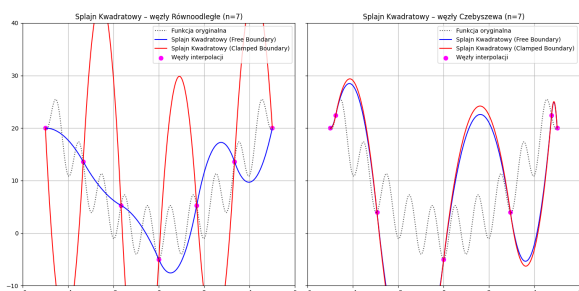
5.1. Funkcje Sklejane Kwadratowe



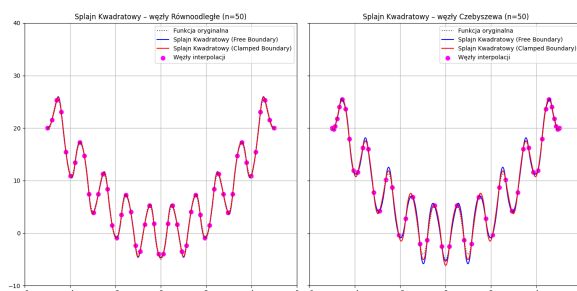
Rysunek 2: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 5



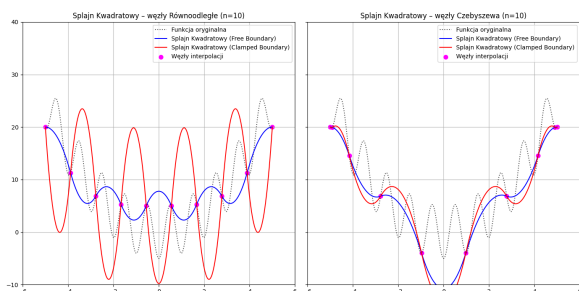
Rysunek 6: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 20



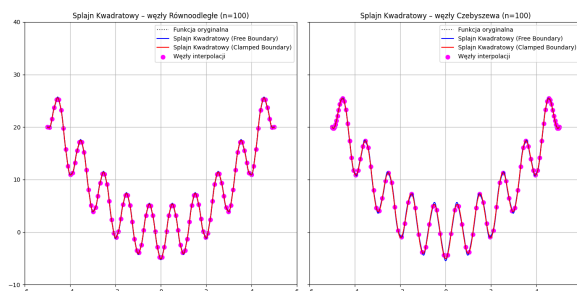
Rysunek 3: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 7



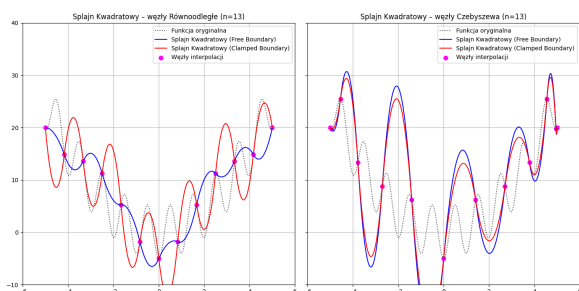
Rysunek 7: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 50



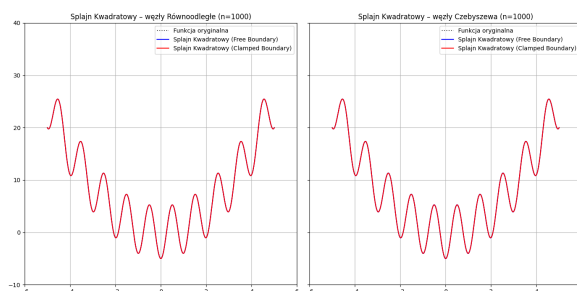
Rysunek 4: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 10



Rysunek 8: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 100

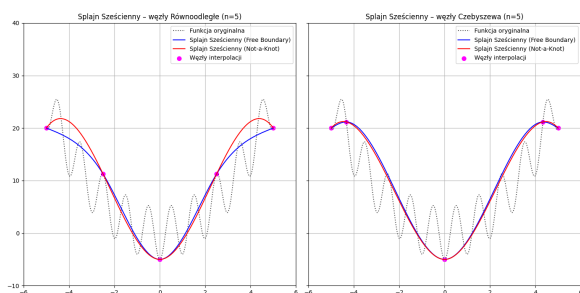


Rysunek 5: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 13

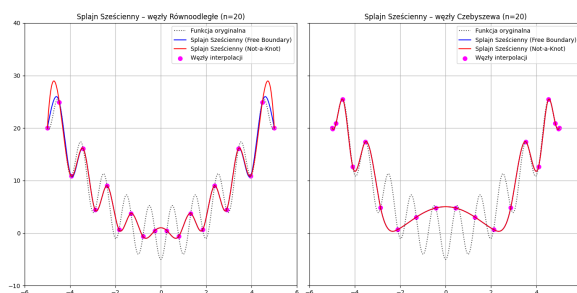


Rysunek 9: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 1000

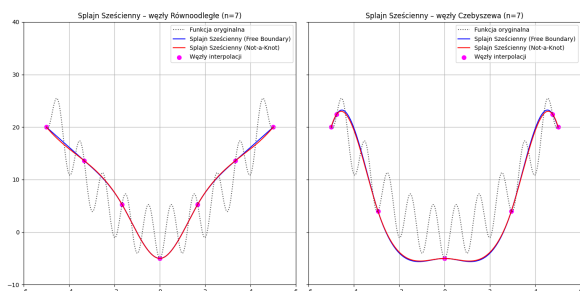
5.2. Funkcje Sklejane Sześciennne



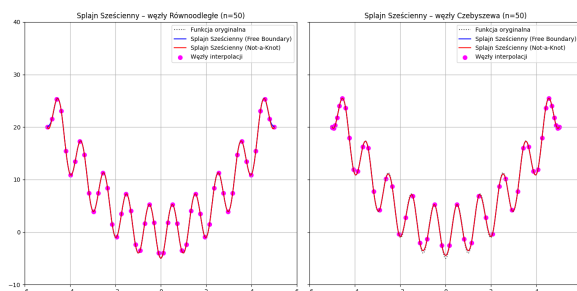
Rysunek 10: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 5



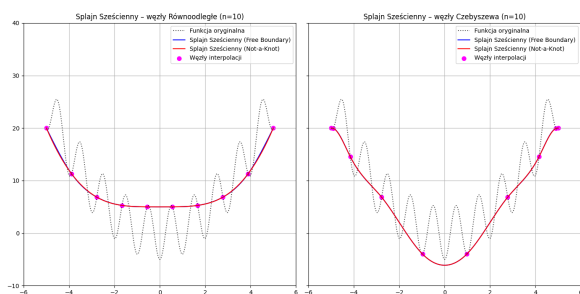
Rysunek 14: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 20



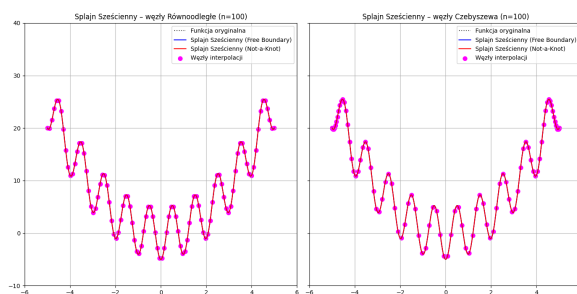
Rysunek 11: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 7



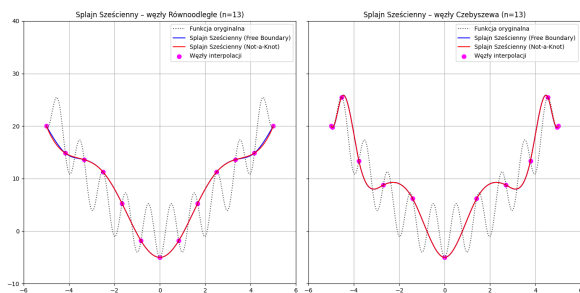
Rysunek 15: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 50



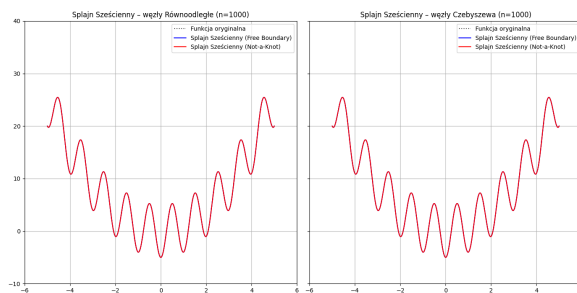
Rysunek 12: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 10



Rysunek 16: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 100

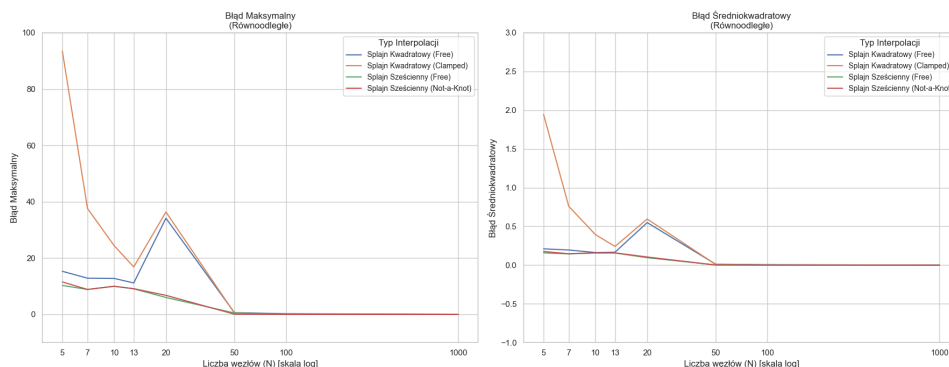


Rysunek 13: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 13

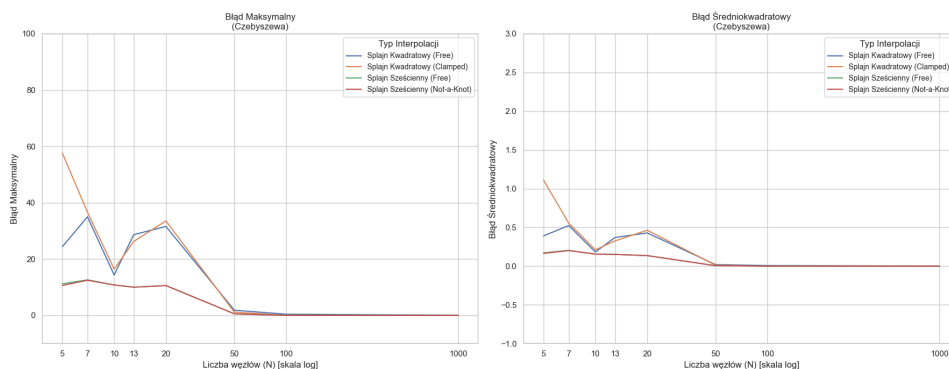


Rysunek 17: Interpolacja funkcjami sklejanymi sześciennymi | Liczba węzłów = 1000

6. Analiza błędów interpolacji dla wybranych n



Rysunek 18: Wykres błędów wielomianu interpolacji | Węzły Równoodległe



Rysunek 19: Wykres błędów wielomianu interpolacji | Węzły Czebyszewa

Na podstawie przedstawionych wykresów zależności błędu maksymalnego oraz błędu średniokwadratowego od liczby węzłów n w skali logarytmicznej, można wyciągnąć następujące wnioski:

Wpływ stopnia splajnu

Splajny sześcienne (zielona i czerwona linia) wykazują znacząco niższe błędy niż splajny kwadratowe (niebieska i pomarańczowa linia) dla niemal wszystkich analizowanych liczb węzłów $n > 5$. Różnica jest szczególnie duża dla $n < 50$.

Wpływ rozmieszczenia węzłów

Porównując wykresy dla węzłów Czebyszewa z węzłami równoodległymi, widać wyraźnie, że **węzły Czebyszewa** prowadzą do niższych błędów, zwłaszcza dla splajnów kwadratowych. Dla węzłów równoodległych (dolne wykresy), splajny kwadratowe wykazują bardzo wysokie błędy szczególnie dla $n \in [5 : 20]$, co wskazuje na dużą niestabilność i słabą jakość interpolacji (**zjawisko Rungego**).

Wpływ warunków brzegowych

Splajny kwadratowe: Warunek brzegowy *Clamped* (pomarańczowa linia) często generuje wyższe błędy niż warunek *Free* (niebieska linia). Ogólny rząd wielkości błędu jest podobny dla obu warunków w porównaniu do różnicy między splajnami kwadratowymi a sześciennymi.

Splajny sześcienne: Różnice między warunkami brzegowymi *Free* (zielona linia) a *Not-a-Knot* (czerwona linia) są mniej znaczące, lecz wciąż widoczne na wszystkich wykresach. Wybór między tymi warunkami ma znikomy wpływ na błąd interpolacji.

Węzły Równoodległe			
Typ Funkcji Sklejanej	Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Błąd Średniokwadratowy
Splajn Kwadratowy (Free)	5	15.307602	0.210108
	7	12.864139	0.195441
	10	12.784731	0.162693
	13	11.168711	0.166214
	20	34.151701	0.549023
	50	0.633009	0.011959
	100	0.259068	0.005831
	1000	2.775558e-17	5.551115e-20
Splajn Kwadratowy (Clamped)	5	93.472231	1.944337
	7	37.607671	0.759043
	10	24.429070	0.394160
	13	16.852197	0.241234
	20	36.366564	0.595004
	50	0.508525	0.009167
	100	0.125367	0.002748
	1000	1.110223e-16	1.570092e-19
Splajn Sześcienny (free)	5	10.287024	0.158191
	7	8.854308	0.145090
	10	9.996380	0.156952
	13	9.085363	0.156412
	20	6.017011	0.095980
	50	0.500936	0.002438
	100	0.105101	0.000342
	1000	1.110223e-16	2.113802e-19
Splajn Sześcienny (Not-a-Knot)	5	11.528883	0.175910
	7	8.862919	0.146543
	10	9.993751	0.158118
	13	9.136961	0.158084
	20	6.775847	0.104954
	50	0.085422	0.000847
	100	0.017914	6.851599e-05
	1000	1.110223e-16	2.113802e-19

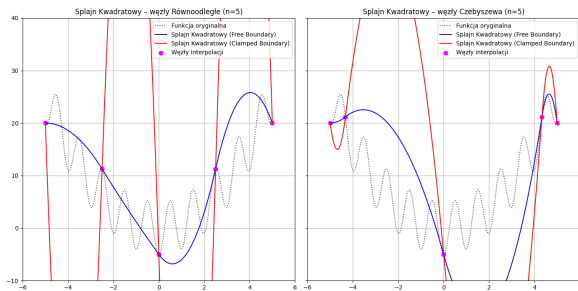
Tabela 1: Błędy interpolacji funkcjami sklejanyymi dla węzłów równoodległych.

Węzły Czebyszewa			
Typ Funkcji Sklejanej	Liczba Węzłów	Błąd Maksymalny	Błąd Średniokwadratowy
Splajn Kwadratowy (Free)	5	24.390708	0.390690
	7	35.010849	0.523855
	10	14.333276	0.181864
	13	28.680156	0.369743
	20	31.580298	0.428588
	50	1.833686	0.019635
	100	0.443024	0.007579
	1000	0.039110	0.000744
Splajn Kwadratowy (Clamped)	5	57.610035	1.109503
	7	36.626907	0.553971
	10	16.408249	0.210711
	13	26.264910	0.325660
	20	33.552765	0.463296
	50	1.139724	0.012172
	100	0.050578	0.000646
	1000	3.871655e-05	4.261344e-07
Splajn Sześcienny (free)	5	11.209135	0.171126
	7	12.633341	0.203467
	10	10.811021	0.154872
	13	10.023191	0.151565
	20	10.594924	0.135560
	50	0.564691	0.005270
	100	0.016978	0.000158
	1000	1.220928e-06	1.134882e-08
Splajn Sześcienny (Not-a-Knot)	5	10.630270	0.164554
	7	12.476981	0.200330
	10	10.805698	0.154980
	13	10.014120	0.151183
	20	10.595134	0.135560
	50	0.564691	0.005270
	100	0.016978	0.000158
	1000	1.220928e-06	1.134882e-08

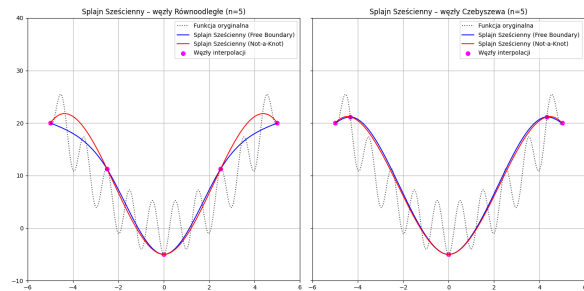
Tabela 2: Błędy interpolacji funkcjami sklejanyymi dla węzłów Czebyszewa.

7. Analiza interpolacji dla przypadków szczególnych

7.1. Przypadek małej liczby węzłów / przedziałów



Rysunek 20: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 5



Rysunek 21: Interpolacja funkcjami sklejanyimi sześciennymi | Liczba węzłów = 5

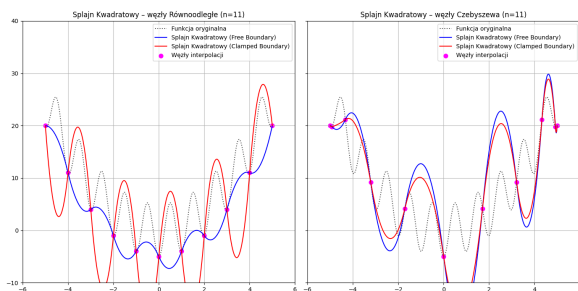
Dla $n = 5$ splajny sześcienne zapewniają znacznie lepsze przybliżenie funkcji oryginalnej niż splajny kwadratowe. W przypadku splajnow kwadratowych obserwuje się bardzo duże oscylacje i znaczące odchylenia od funkcji oryginalnej, szczególnie w pobliżu krańców przedziału interpolacji.

Dla funkcji sklejanych kwadratowych, różnica między warunkami brzegowymi *Free Boundary* a *Clamped Boundary* jest zauważalna. W przypadku węzłów równoodległych oba warunki prowadzą do złych wyników, przy czym *Clamped* wydaje się generować nieco większe oscylacje na krańcach. Przy węzłach Czebyszewa oba warunki dają znacznie lepsze wyniki, przy czym *Free Boundary*.

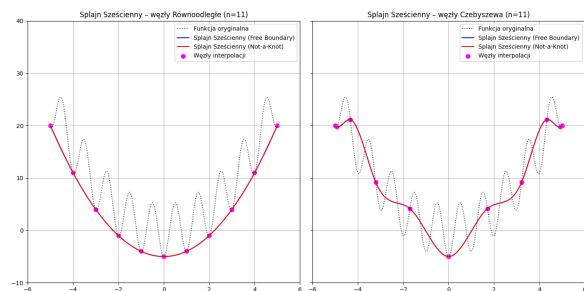
Dla splajnow sześciennych, różnica między warunkami brzegowymi *Free Boundary* a *Not-a-Knot* jest mniej zauważalna, lecz odchylenia widoczne są w przypadku krańców przedziałów, gdzie w przypadku *Not-A-Knot* krzywizna wielomianu interpolacji jest lepiej zauważalna i dopasowana.

Jasne, oto wpis dla $n=11$:

7.2. Przypadek występowania węzłów na minimach lokalnych funkcji



Rysunek 22: Interpolacja funkcjami sklejanyimi kwadratowymi | Liczba węzłów = 11

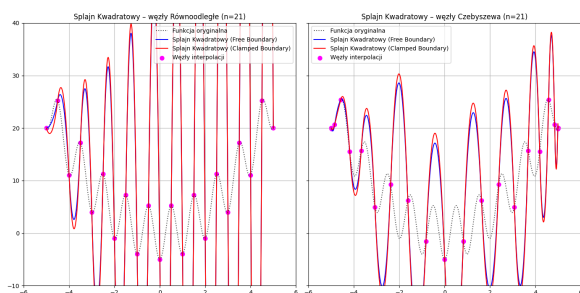


Rysunek 23: Interpolacja funkcjami sklejanyimi sześciennymi | Liczba węzłów = 11

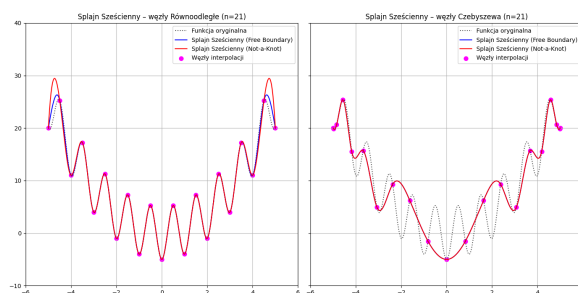
Dla $n = 11$ splajny sześcienne dają wyraźnie lepsze dopasowanie niż kwadratowe. Splajny kwadratowe nadal generują duże oscylacje, splajny sześcienne dają wyniki znacząco bardziej gładkie.

Różnice między warunkami brzegowymi są w tym przypadku zauważalne głównie dla splajnow kwadratowych, w przypadku splajnow sześciennych różnice są niezauważalne.

7.3. Przypadek węzłów na ekstremach lokalnych funkcji



Rysunek 24: Interpolacja funkcjami sklejanyymi kwadratowymi | Liczba węzłów = 21



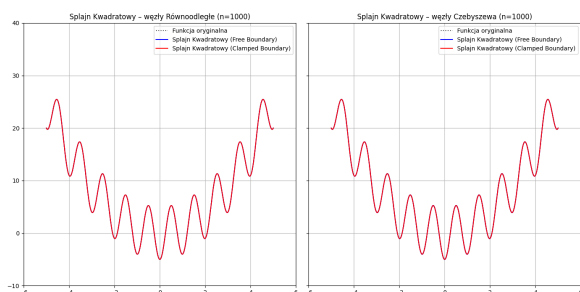
Rysunek 25: Interpolacja funkcjami sklejanyymi sześciennymi | Liczba węzłów = 21

Dla $n = 21$ splajny sześciennic nadal zapewniają znacznie lepsze dopasowanie niż splajny kwadratowe. W przypadku splajnów kwadratowych z węzłami równoodległymi obserwuje się ekstremalnie duże oscylacje. Zwiększenie liczby węzłów pogorszyło stabilność dla tego przypadku.

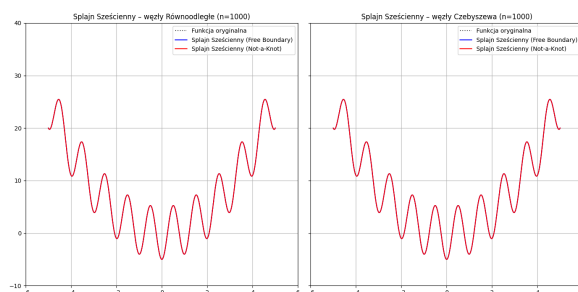
Dla funkcji sklejanych kwadratowych, użycie węzłów Czebyszewa znacząco redukuje oscylacje w porównaniu do węzłów równoodległych, jednak przybliżenie wciąż nie jest idealne, zwłaszcza w pobliżu krańców. Różnice między warunkami brzegowymi *Free Boundary* a *Clamped Boundary* są widoczne, ale mniej istotne niż wpływ rozmieszczenia węzłów.

Dla splajnów sześciennych, przy $n = 21$ oba rodzaje węzłów dają dobre przybliżenie. Węzły Czebyszewa oferują nieco lepsze dopasowanie na krańcach przedziału. Różnice między warunkami brzegowymi *Free Boundary* a *Not-a-Knot* są wciąż zauważalne na krańcach przedziału interpolacji w przypadku węzłów równoodległych.

7.4. Przypadek najlepszego dopasowania funkcji interpolacji



Rysunek 26: Interpolacja funkcjami sklejanyymi kwadratowymi | Liczba węzłów = 1000



Rysunek 27: Interpolacja funkcjami sklejanyymi sześciennymi | Liczba węzłów = 1000

Dla $n = 1000$ zarówno splajny kwadratowe, jak i sześciennic zapewniają dobre dopasowanie do funkcji oryginalnej. Przy tak dużej liczbie węzłów, problemy z oscylacjami całkowicie zanikają.

Również różnice wynikające z zastosowania różnych warunków brzegowych stają się przy tej liczbie węzłów praktycznie niezauważalne na wykresach.

8. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy interpolacji funkcji funkcjami sklejanyymi, można sformułować następujące wnioski:

- **Stopień splajnu:** Splajny sześciennic (stopnia 3) zapewniają znacząco wyższą dokładność (niższe błędy maksymalne i średniokwadratowe) w porównaniu do splajnów kwadratowych (stopnia 2), szczególnie dla $n < 50$. Różnica w jakości aproksymacji jest wyraźna.

- **Rozmieszczenie węzłów:** Użycie węzłów Czebyszewa prowadzi do wyraźnie lepszych wyników (niższych błędów i mniejszych oscylacji) niż zastosowanie węzłów równoodległych. Jest to szczególnie krytyczne dla splajnów kwadratowych, które przy węzłach równoodległych wykazują bardzo duże błędy i niestabilność (**zjawisko Rungego**).
- **Warunki brzegowe (Splajny Kwadratowe):** W przeprowadzonych testach, warunek brzegowy **Free Boundary** często generował nieznacznie niższe błędy niż warunek **Clamped Boundary**. Niezależnie od warunku, dokładność splajnów kwadratowych była istotnie niższa niż sześciennych. Różnice między warunkami są widoczne, zwłaszcza przy mniejszej liczbie węzłów i węzłach równoodległych.
- **Warunki brzegowe (Splajny Sześciennie):** Różnice w dokładności między warunkami **Free Boundary** a **Not-a-Knot** są znacznie mniejsze niż wpływ stopnia splajnu czy rozmieszczenia węzłów.
- **Zanikanie efektów warunków brzegowych:** Wraz ze wzrostem liczby węzłów n , dokładność wszystkich metod interpolacji rośnie, zaś **efekty, spowodowane warunkami brzegowymi, zanikają**, a ich wpływ staje się marginalny. Dla dużej liczby węzłów ($n = 1000$), wszystkie testowane warianty zapewniają bardzo dobre przybliżenie funkcji bazowej, a różnice między nimi stają się praktycznie niezauważalne.