

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Układy równań liniowych - metoda Jacobiego

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 04.06.2025 | Data Oddania: 04.06.2025

1. Wstęp

1.1. Omówienie przypadku

Dana jest macierz liczb rzeczywistych zdefiniowana odpowiednio:

$$\mathbf{A_{IV}}^{n \times n} = \begin{cases} a_{ii} = k \\ a_{ij} = \frac{m}{n - i - j + 0.5}, \text{ dla } i \neq j & i, j = 1, ..., n \end{cases}$$

$$\text{dla } m = 2, k = 11$$
(1.1)

, gdzie:

- i numer wiersza macierzy
- *j* numer kolumny macierzy
- n wymiary macierzy

W niniejszym dokumencie przeprowadzono analizę numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych postaci $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ iteracyjną metodą Jakobiego gdzie \mathbf{A} jest macierzą współczynników, \mathbf{x} wektorem niewiadomych, a \mathbf{b} wektorem wyrazów wolnych. Celem pracy jest zbadanie promienia spektralnego macierzy iteracji układu, zbieżności metody wraz z liczbą iteracji , średnim czasem obliczeń na iterację oraz dokładnością uzyskanego rozwiązania numerycznego w zależności od parametrów takich jak rozmiar macierzy n, wektor początkowy, próg zbieżności ρ oraz kryteria stopu.

W zadaniu rozważono rozwiązywanie układu rownań dla rozmiarów macierzy $n \in \{2,3,5,10,15,20,50,100,200,500,750,1000\}$, dokładności obliczeń $\rho=10^l$, gdzie $l \in \{-2,-3,-4,-5,-7,-10,-15\}$, kryteriów stopu - przyrostowego oraz rezydualnego (Sekcja 1.4) oraz trzech wektorów początkowych (Sekcja 1.5). Maksymalna liczba iteracji metody została ustawiona na $k_{\max}=10000$.

1.2. Metodyka wyznaczania układu równań

W celach badania wprowadzony został wektor rzeczywisty

$$\overline{\mathbf{x}}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

, gdzie n zdefiniowane jest jak powyżej, zaś elementy wektora są losową kombinacją liczb –1 i 1. W eksperymencie, w celu uzyskania powtarzalnych wyników, zawsze ustawiano random. seed na stałą wartość podczas generowania wektora.



Z powyższego wektora otrzymywano wektor b w następujący sposób:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \tag{1.3}$$

Następnie, mając wyznaczony wektor ${\bf b}$ przystąpiono do rozwiązywania układu równań ${\bf A}{\bf x}={\bf b}$, gdzie ${\bf x}$ jest wektorem niewiadomych.

Podejście to umożliwiło porównanie wyznaczonego wektora \mathbf{x} do $\overline{\mathbf{x}}$.

1.3. Metodyka wyznaczania rozwiązania układu równań

Mając układ równań liniowych zdefiniowany jako:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1.4}$$

, gdzie A jest macierzą kwadratową, x jest wektorem niewiadomych, a b jest wektorem po prawej stronie, możemy dokonać następującej dekompozycji macierzy A:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{R} \tag{1.5}$$

, gdzie ${f D}$ jest macierzą diagonalną, której elementy diagonali odpowiadają elementom diagonali a_{ii} macierzy ${f A}$, zaś ${f R}$ jest resztą.

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$$
(1.6)

Układ równań można teraz zapisać w nastepujący sposób:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{R}\mathbf{x} \tag{1.7}$$

Kolejne wektory wynikowe w metodzie Jakobiego będą wyznaczane więc za pomocą wzoru:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{b} - \mathbf{R} \mathbf{x}^{(k)} \right) \tag{1.8}$$

, gdzie $\mathbf{x}^{(k)}$ jest przybliżeniem wektora wynikowego w k-tej iteracji.

1.4. Kryteria stopu

W trakcie wyznaczania rozwiązania układu wyznaczono liczbę iteracji niezbędnych do spełnienia zadanego **kryterium stopu**. W badaniach wykorzystano dwa różne kryteria, dla których dobierano różne wartości parametru zbieżności ρ . W obydwu przypadkach za normę $\|\cdot\|$ przyjęto **normę L2** obliczoną za pomocą funkcji bibliotecznej numpy - numpy . linalg . norm:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \tag{1.9}$$

1.4.1. Kryterium przyrostowe

Kryterium przyrostowe charakteryzuje zależność:

$$\left\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\right\| < \rho \tag{1.10}$$

, gdzie:

- $\mathbf{x}^{(i)}$ i-te przybliżenie wektora wynikowego, $i \in \mathbb{N}^+$
- ρ zadana dokładność



1.4.2. Kryterium rezydualne

Kryterium rezydualne charakteryzuje zależność:

$$\left\| \mathbf{A} \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{b} \right\| < \rho \tag{1.11}$$

, gdzie:

- $\mathbf{x}^{(i)}$ i-te przybliżenie wektora wynikowego, $i \in \mathbb{N}^+$
- ρ zadana dokładność
- A macierz układu równań
- b macierz wynikowa

1.5. Wektor początkowy

W ramach eksperymentu przetestowano trzy wektory początkowe $\mathbf{x}^{(0)}$. Z racji, że wektor rozwiązania $\overline{\mathbf{x}}$ układu ma postać przedstawioną w Sekcja 1.2, przyjęto następujące wektory rozmiarów $n \times 1$:

$$\mathbf{x}_{1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0\\0\\\vdots\\0\\0 \end{bmatrix} \qquad (1.12) \qquad \qquad \mathbf{x}_{2}^{(0)} = \begin{bmatrix} 30\\30\\\vdots\\30\\30 \end{bmatrix} \qquad (1.13) \qquad \qquad \mathbf{x}_{3}^{(0)} = \begin{bmatrix} 100\\100\\\vdots\\100\\100 \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

1.6. Pomiar poprawności wyznaczenia rozwiązania

Pomiar poprawności wyznaczenia rozwiązania układu równań przeprowadzony został, porównując prawdziwe składowe wektora z wartością metodą Gaussa. Za metrykę błędu przyjęty został maksymalny błąd bezwzględny.

$$\|\mathbf{x}\|_{\max} = \max_{i \in 1, \dots, n} (|x_i - \overline{x_i}|) \tag{1.15}$$

, gdzie

- x_i i-ta wartość wyznaczonego wektora
- $\overline{x_i}$ *i*-ta wartość prawdziwego wektora

1.7. Zbieżność i promień spektralny macierzy

Warunkiem zbieżności w każdej metodzie iteracyjnej jest nierówność

$$\rho_s(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}) < 1 \tag{1.16}$$

, gdzie

- ρ_s jest **promieniem spektralnym** zdefiniowanym jako największa, co do wartości bezwzględnej, wartość własna macierzy iteracji
- ${f D}^{-1}{f R}$ macierz iteracji układu, gdzie ${f D}$ i ${f R}$ zdefiniowane jak w Równanie (1.5)

Podczas realizacji badań, promień spektralny ρ_s macierzy iteracyjnej wyznaczono za pomocą funkcji biblioteki numpy, wyznaczając maksymalną wartość bezwzględną ze zbioru wynikowego zwracanego przez metodę numpy.linalg.eigvals. Wyznaczone promienie spektralne dla zadanej macierzy znajdują się w Tabela 1, Sekcja 3.

2. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

- Komputer HP EliteBook 840 G6:
 - System operacyjny: Windows 11 x64



► Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz

► Pamięć RAM: 8GB

• Środowisko: Jupyter Notebook

• Język: Python 3.12.0

• Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib, Seaborn

3. Badanie promienia spetkralnego macierzy iteracji

W Tabela 1 przedstawiono wyniki badania promienia spektralnego macierzy iteracji ρ_s dla rosnących rozmiarów macierzy n metodyką opisaną w Sekcja 1.7. Można zauważyć, że promień spektralny macierzy przyjmuje wartości stosunkowo stałe, co umożliwia rozważanie macierzy rzędu wielkości n=1000.

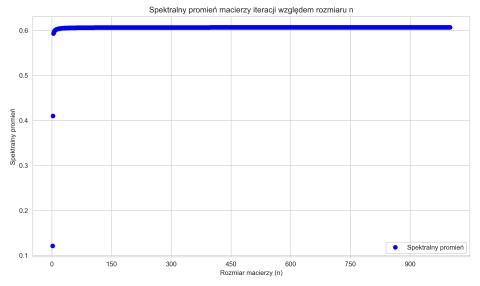
Zestawienie błędu makysmalnego $\ \mathbf{x}\ _{\max}$ wyznaczonego wektora dla macierzy \mathbf{A}_{IV}							
n	Promień spektralny ρ_s						
2	0.12121						
3	0.40971						
4	0.59297						
5	0.59457						
6	0.59731						
7	0.59884						
8	0.59957						
9	0.60082						
10	0.60097						
11	0.60197						
12	0.60192						
13	0.60272						
14	0.60260						
15	0.60325						
16	0.60311						
17	0.60365						
18	0.60351						
19	0.60396						
20	0.60383						
21	0.60420						
22	0.60409						
23	0.60441						
24	0.60431						
25	0.60458						
26	0.60449						
27	0.60472						
28	0.60464						
29	0.60484						
30	0.60478						
31	0.60495						

	aczonego wektora dla macierzy A _I
n	Promień spektralny $ ho_s$
100	0.60605
101	0.60606
102	0.60606
103	0.60607
104	0.60607
105	0.60608
106	0.60608
107	0.60609
108	0.60609
109	0.60610
110	0.60610
111	0.60611
112	0.60611
113	0.60612
114	0.60612
115	0.60612
116	0.60613
117	0.60613
118	0.60613
119	0.60614
120	0.60614
121	0.60615
122	0.60615
123	0.60615
124	0.60616
125	0.60616
126	0.60616
127	0.60617
128	0.60617
129	0.60617

	zonego wektora dla macierzy
n	Promień spektralny ρ_s
500	0.60647
501	0.60647
502	0.60647
503	0.60647
504	0.60647
505	0.60647
506	0.60647
507	0.60647
508	0.60647
509	0.60647
510	0.60647
511	0.60647
512	0.60647
513	0.60647
514	0.60647
515	0.60647
516	0.60647
517	0.60647
518	0.60647
519	0.60647
520	0.60647
521	0.60647
522	0.60647
523	0.60647
524	0.60648
525	0.60647
526	0.60648
527	0.60648
528	0.60648
529	0.60648

Zestawienie błędu makysmalnego $\ \mathbf{x}\ _{\max}$							
wyzn	aczonego wektora dla macierzy ${ m A_{IV}}$						
n	Promień spektralny ρ_s						
970	0.60652						
971	0.60652						
972	0.60652						
973	0.60652						
974	0.60652						
975	0.60652						
976	0.60652						
977	0.60652						
978	0.60652						
979	0.60652						
980	0.60652						
981	0.60652						
982	0.60652						
983	0.60652						
984	0.60652						
985	0.60652						
986	0.60652						
987	0.60652						
988	0.60652						
989	0.60652						
990	0.60652						
991	0.60652						
992	0.60652						
993	0.60652						
994	0.60652						
995	0.60652						
996	0.60652						
997	0.60652						
998	0.60652						
999	0.60652						
1000	0.60652						

iteracji



Rysunek 1: Wizualizacja - promień spektralny macierzy iteracji
 ρ_s względem jej rozmiaru n



4. Badanie metody Jacobiego

4.1. Kryterium Przyrostowe

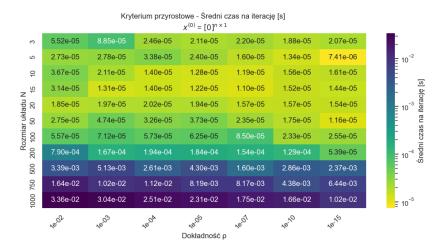
4.1.1. Wektor początkowy $x_1^{(0)} = [0]^{n \times 1}$

			Kryterium przy	$x^{(0)} = [0]^{n \times 1}$	d bezwzględny			
8	3.48e-03	1.97e-04	2.87e-05	1.58e-06	1.46e-08	2.16e-11	4.44e-16	= 10 ⁻³
2	2.78e-03	1.92e-04	2.31e-05	1.66e-06	2.45e-08	1.58e-11	4.44e-16	
10	2.05e-03	2.24e-04	2.47e-05	1.54e-06	2.05e-08	4.27e-11	7.77e-16	10 ⁻⁴
- t	2.12e-03	2.23e-04	2.35e-05	1.95e-06	1.44e-08	2.49e-11	4.44e-16	-5
adu l	1.30e-03	1.41e-04	1.54e-05	1.94e-06	3.37e-08	5.52e-11	7.77e-16	10 Kupèli
ır ukt	1.62e-03	2.09e-04	1.38e-05	1.86e-06	3.37e-08	5.24e-11	7.77e-16	10 ^{−6} BZMZ
Rozmiar układu N 0 100 50 20 15	1.20e-03	1.60e-04	2.15e-05	2.90e-06	3.73e-08	5.07e-11	8.88e-16	fundajezwzeg pelg
200	5.22e-04	5.95e-05	7.95e-06	1.07e-06	1.92e-08	3.32e-11	1.44e-15	
200	2.10e-04	2.22e-05	2.43e-06	2.70e-07	3.35e-09	4.69e-12	2.66e-15	10 ⁻⁸
750	3.70e-04	5.04e-05	6.93e-06	9.51e-07	1.77e-08	2.83e-11	2.66e-15	10 ⁻⁹
1000	2.14e-04	2.27e-05	2.41e-06	3.06e-07	3.88e-09	9.43e-12	4.44e-15	10-10
	reol	Ne OS	Ne:OA	1805	reol	10,0	ve, ve	- 10
	N	No	No	Dokładność ρ		100	N	

Rysunek 2: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$



Rysunek 3: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$



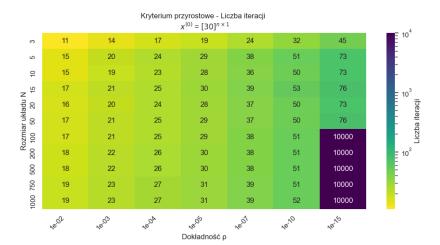
Rysunek 4: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$



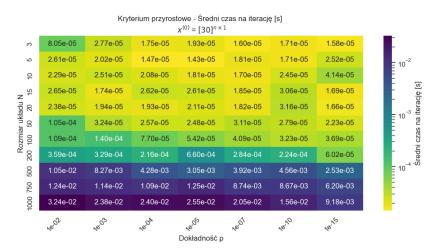
4.1.2. Wektor początkowy $x_2^{(0)} = [30]^{n \times 1}$

		1		rostowe - Błąc x ⁽⁰⁾ = [30] ⁿ ×	d bezwzględny 1			
8	1.85e-03	1.26e-04	8.71e-06	1.46e-06	1.68e-08	1.34e-11	4.44e-16	-3
2	4.40e-03	2.78e-04	3.25e-05	2.33e-06	1.86e-08	1.94e-11	4.44e-16	10
10	3.80e-03	4.62e-04	5.73e-05	5.50e-06	8.96e-08	6.87e-11	4.44e-16	10 ⁻⁴
N 15	1.28e-03	1.63e-04	2.11e-05	2.03e-06		1.58e-11	4.44e-16	= 10 ⁻⁵ ≥
Rozmiar układu N 200 100 50 20 15	2.83e-03	3.53e-04	4.47e-05	5.72e-06	4.54e-08	7.72e-11	8.88e-16	<u> </u>
ar ukl 50	1.24e-03	1.59e-04	2.07e-05	2.73e-06	4.81e-08	8.18e-11	8.88e-16	10 ⁻⁶ BZMZ6
ozmi 100	1.66e-03	2.18e-04	2.88e-05	3.83e-06	4.83e-08	6.51e-11	8.88e-16	10 ⁻⁷ gr
Z00	1.23e-03	1.57e-04	2.03e-05	2.67e-06	4.67e-08	6.12e-11	1.44e-15	-
200	1.13e-03	1.44e-04	1.87e-05	2.45e-06	4.28e-08	5.49e-11	2.66e-15	10 ⁻⁸
750	6.26e-04	8.04e-05	1.07e-05	1.42e-06	2.57e-08	6.63e-11	2.66e-15	10 ⁻⁹
1000	6.89e-04	7.31e-05	9.68e-06	1.29e-06	2.31e-08	3.93e-11	4.44e-15	10 ⁻¹⁰
	ve.oz	1803	Ne:OA	1805	reol	16,10	Ne'NS	- 10
				Dokładność o				

Rysunek 5: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$



Rysunek 6: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$



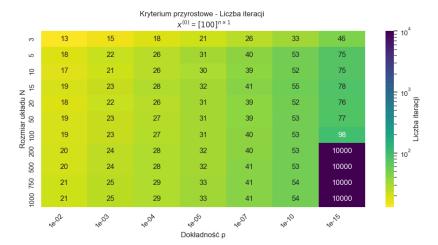
Rysunek 7: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$



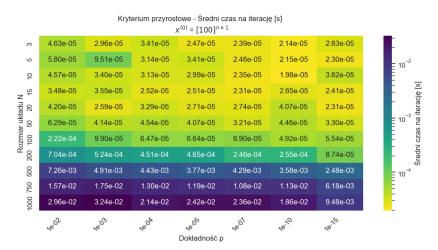
4.1.3. Wektor początkowy $x_3^{(0)} = [100]^{n\times 1}$

		ا		rostowe - Błąc r ⁽⁰⁾ = [100] ⁿ ×	d bezwzględny 1				
8	1.04e-03	1.75e-04	1.19e-05	8.23e-07	9.44e-09	1.84e-11	4.44e-16	E3	
2	2.57e-03	2.98e-04	3.48e-05	2.49e-06		2.09e-11	4.44e-16	10	
10	4.57e-03	5.63e-04	5.38e-05	6.84e-06	5.60e-08	8.60e-11	4.44e-16	10 ⁻⁴	
N 25	1.47e-03	1.87e-04	1.83e-05	2.35e-06	2.05e-08	1.82e-11	4.44e-16		^
	3.52e-03	4.43e-04	5.65e-05	3.39e-06	5.87e-08	9.95e-11	6.66e-16	10	<u>6</u>
Rozmiar układu 100 50 20	1.60e-03	2.07e-04	2.73e-05	3.61e-06	6.41e-08	5.93e-11	8.88e-16	10 ⁻⁶	ZMZ
ozmis 100	1.78e-03	2.34e-04	3.10e-05	4.12e-06	5.24e-08	6.97e-11	8.88e-16	=	ad bę
200 200	1.35e-03	1.74e-04	2.27e-05	2.98e-06	5.25e-08	6.98e-11	1.44e-15	_	
200	1.32e-03	1.70e-04	2.22e-05	2.93e-06	2.67e-08	6.84e-11	2.66e-15	10 ⁻⁸	
750	6.86e-04	8.81e-05	1.17e-05	1.56e-06	2.81e-08	4.78e-11	2.66e-15	= 10 ⁻⁹	
1000	7.39e-04	8.55e-05	1.13e-05	1.51e-06	2.73e-08	4.63e-11	4.44e-15	10 10 10 10	
	Veros	1803	Ne:OA	18:05	18:01	10,10	Ne'NS	10	
	~			Dokładność ρ		~	~		

Rysunek 8: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



Rysunek 9: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



Rysunek 10: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$

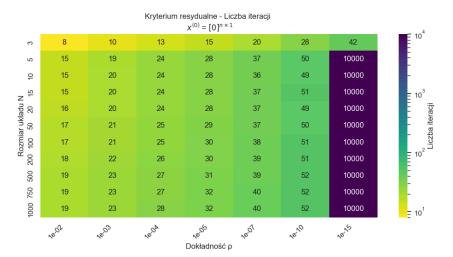


4.2. Kryterium rezydualne

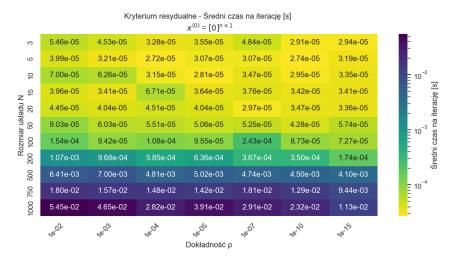
4.2.1. Wektor początkowy $x_1^{(0)} = [0]^{n \times 1}$

			Kryterium resy	/dualne - Błąd x ⁽⁰⁾ = [0] ^{n × 1}				
ю	4.99e-04	7.25e-05	4.23e-06	6.32e-07	5.55e-09	3.46e-12	0.00e+0	Ē.,
2	3.31e-04	3.96e-05	2.80e-06	3.41e-07	2.99e-09	3.36e-12	3.33e-16	10 4
10	3.67e-04	2.47e-05	2.88e-06	3.62e-07	5.81e-09	5.62e-12	4.44e-16	I 10 ⁻⁵
- 1	3.63e-04	2.35e-05	2.47e-06	3.01e-07	4.09e-09	3.26e-12	4.44e-16	Ε.
Rozmiar układu N 0 100 50 20 15	2.26e-04	2.94e-05	3.84e-06	5.03e-07	4.51e-09	1.12e-11	4.44e-16	10 -7 - 10 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7
ar ukł 50	2.09e-04	2.71e-05	3.55e-06	4.66e-07	8.14e-09	1.11e-11	8.88e-16	SZMZ
zmia 100	3.26e-04	4.32e-05	5.74e-06	3.96e-07	7.42e-09	1.20e-11	8.88e-16	10 Paga bez
200 200	1.27e-04	1.67e-05	2.19e-06	2.90e-07	2.58e-09	6.46e-12	1.44e-15	-R
200	5.64e-05	6.01e-06	6.41e-07	6.84e-08	7.77e-10	5.25e-13	2.66e-15	
750	9.59e-05	1.29e-05	1.73e-06	1.30e-07	2.42e-09	6.08e-12	2.66e-15	≣ 10 ^{−9}
1000	6.07e-05	6.47e-06	3.06e-07	4.19e-08	7.83e-10	1.98e-12	4.44e-15	_
,	Ne Or	ve _{O2}	ve.op	reos	reol	16.70	No. Vo	- 10 ⁻¹⁰
	-		•	Dokładność o		,	,	

Rysunek 11: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$



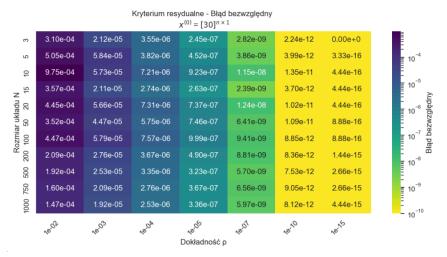
Rysunek 12: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$



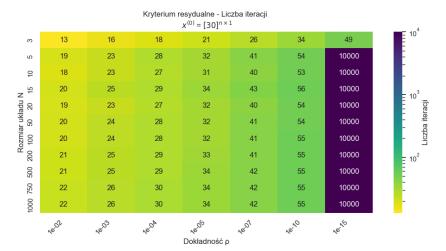
Rysunek 13: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$



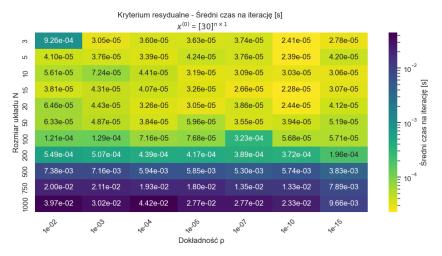
4.2.2. Wektor początkowy $x_2^{(0)} = [30]^{n\times 1}$



Rysunek 14: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$



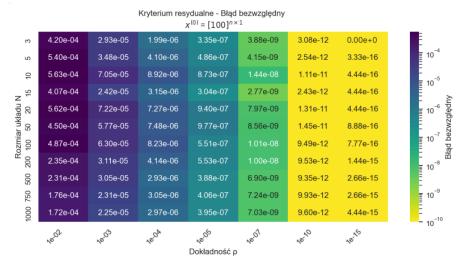
Rysunek 15: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$



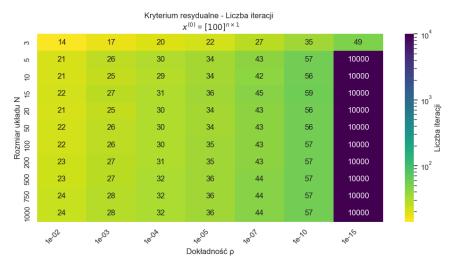
Rysunek 16: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$



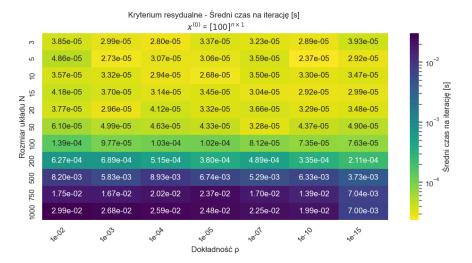
4.2.3. Wektor początkowy $x_3^{(0)} = [100]^{n\times 1}$



Rysunek 17: Błąd maksymalny $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



Rysunek 18: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$

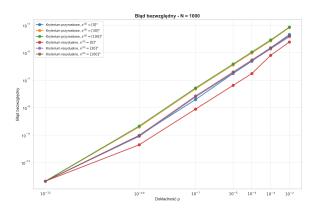


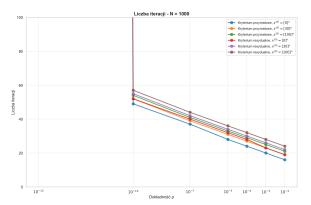
Rysunek 19: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



5. Porównanie kryteriów stopu

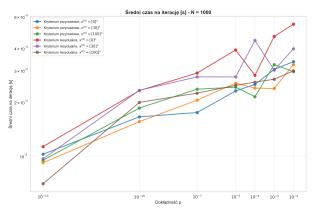
Poniżej przedstawiono wykresy porównujące działanie kryterium przyrostowego oraz kryterium rezydualnego dla macierzy o rozmiarze n=1000, dla różnych wartości progu zbieżności ρ oraz dla wektora początkowego $x_1^{(0)}=[0]^{1000\times 1}$.





Rysunek 20: Porównanie błędu maksymalnego $\|\mathbf{x}\|_{\max}$ dla kryterium przyrostowego i rezydualnego (n=1000)

Rysunek 21: Porównanie liczby iteracji dla kryterium przyrostowego i rezydualnego (n=1000)



Rysunek 22: Porównanie średniego czasu obliczeń dla kryterium przyrostowego i rezydualnego (n=1000)

Analizując powyższe wykresy porównawcze dla rozmiaru macierzy n=1000 (Rysunek 20, Rysunek 21, Rysunek 22), można zauważyć, że wyniki uzyskane przy użyciu kryterium przyrostowego oraz kryterium rezydualnego nie różnią się znacząco pod względem osiąganego błędu maksymalnego, liczby iteracji oraz średniego czasu obliczeń.

Drobne fluktuacje są widoczne, szczególnie dla mniejszych wartości progu zbieżności ρ , jednak ogólny trend i rząd wielkości badanych metryk pozostają bardzo zbliżone dla obu kryteriów stopu. Wskazuje to na podobną efektywność obu kryteriów w kontekście badanych parametrów dla tej konkretnej metody i problemu.

6. Wnioski

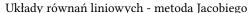
Zbieżność Metody

Analiza promienia spektralnego (ρ_s) macierzy iteracji ${\bf D^{-1}R}$ wykazała, że dla wszystkich badanych rozmiarów macierzy n, wartość ρ_s była mniejsza od 1. Promień spektralny rósł wraz ze wzrostem n, stabilizując się w okolicach wartości 0.6065 dla większych macierzy. Potwierdza to teoretyczny warunek zbieżności metody Jacobiego dla analizowanego układu równań.

Wpływ Parametrów na Proces Iteracyjny

Rozmiar macierzy (n): Wzrost rozmiaru macierzy n skutkował zwiększeniem liczby iteracji

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice





potrzebnych do osiągnięcia zadanego progu zbieżności ρ oraz proporcjonalnym wzrostem średniego czasu wykonania pojedynczej iteracji.

Próg zbieżności (ρ): Zmniejszanie wartości progu zbieżności ρ (czyli zwiększanie wymaganej dokładności) prowadziło do wzrostu liczby iteracji. Dla bardzo małych wartości p (np. 10^{-15}), często **osiągano maksymalny limit iteracji** (10000), co sugeruje, że osiągnięcie tak wysokiej precyzji może być ograniczone precyzją maszynową.

Wektor początkowy ($\mathbf{x}^{(0)}$): Testowane wektory początkowe ($\mathbf{x}_1^{(0)}, \mathbf{x}_2^{(0)}, \mathbf{x}_3^{(0)}$) miały niewielki, choć zauważalny wpływ na liczbę iteracji i niekiedy na końcowy błąd bezwzględny. Różnice te nie były jednak na tyle duże, aby jednoznacznie faworyzować którykolwiek z wektorów w każdym przypadku – optymalny wybór mógłby zależeć od kombinacji n i p.

Dokładność rozwiązania: Osiągany błąd bezwzględny był, zgodnie z oczekiwaniami, niższy dla mniejszych wartości progu ρ. Wartości błędu zbliżone do precyzji maszynowej (rzędu 10^{-15} , 10^{-16}) były obserwowane dla najbardziej rygorystycznych progów.

Porównanie kryteriów stopu

Oba kryteria stopu – przyrostowe oraz rezydualne (Sekcja 1.4) – wykazały podobne ogólne trendy pod względem liczby iteracji i średniego czasu obliczeń dla badanych n (przykład dla n=1000 - Sekcja 5).

Kryterium rezydualne często prowadziło do osiągnięcia niższego (lepszego) końcowego błędu bezwzględnego rozwiązania w porównaniu do kryterium przyrostowego dla tej samej wartości progu p (co widać na Rysunku 20).

Dla dokładności rzędu 10⁻¹⁵ kryterium rezydualne osiągał maksymalną liczbę iteracji, mimo bliskości uzyskanego wyniku do dokładności. Efekt ten spowodowany prawdopodobnie jest faktem, że mimo iż metoda formalnie zbiega do rozwiązania, praktycznie dochodzi do punktu, w którym różnice między kolejnymi iteracjami są mniejsze niż maszyna jest w stanie zarejestrować (około epsilonu maszynowego).

Mimo pewnych fluktuacji, ogólna efektywność i rząd wielkości badanych metryk (błąd, liczba iteracji, czas) były zbliżone dla obu kryteriów, co sugeruje ich porównywalną użyteczność dla badanego problemu, przy czym kryterium rezydualne może oferować nieco lepszą kontrolę nad błędem samego rozwiązania.