

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## Sprawozdanie | Rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 13.06.2025 | Data Oddania: 13.06.2025

### 1. Opis eksperymentu

W eksperymencie zbadano rozwiązywanie równania różniczkowego:

$$y' - kmy \sin(mx) \cos(mx) = k^2 m \sin(mx) \cos(mx), \quad y(x_0) = a \quad (1.1)$$

, którego dokładne rozwiązanie analityczne wynosi:

$$y(x) = e^{-k \cos(mx)} - k \cos(mx) + 1 \quad (1.2)$$

, gdzie

$$\begin{aligned} m &= 3, k = 3 \\ x &\in \left[ \frac{3}{2}\pi, 3\pi \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

za pomocą **metody Eulera** oraz **metody Rungego-Kutty 4 rzędu**.

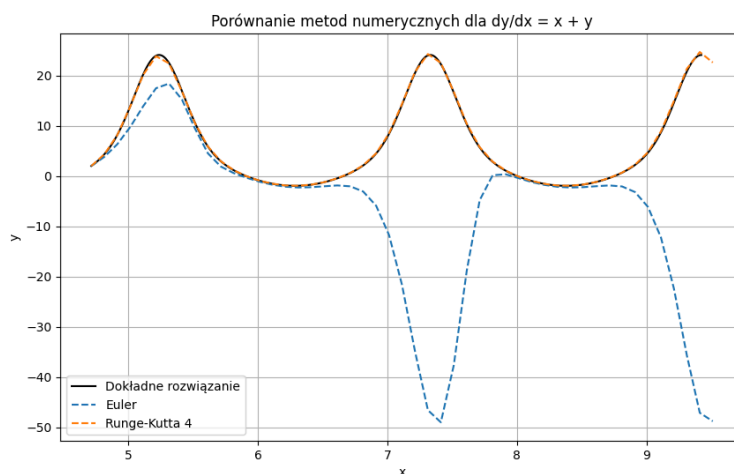
W eksperymentach przyjmowano w metodach wielkość kroku  $h = 10^k$ , gdzie  $k \in \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ . Dodatkowo, przeprowadzono analizę błędu przybliżenia rozwiązania analitycznego, opisane w Sekcja 4.

### 2. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

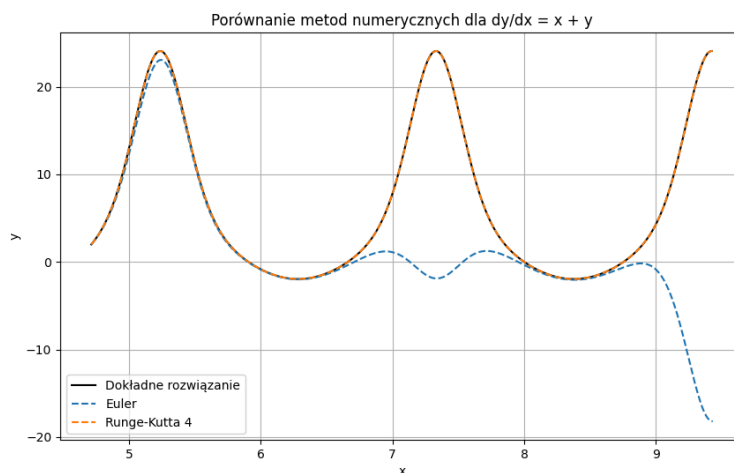
- Komputer HP EliteBook 840 G6:
  - System operacyjny: Windows 11 x64
  - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
  - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.12.0
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib, Seaborn

### 3. Analiza wyników



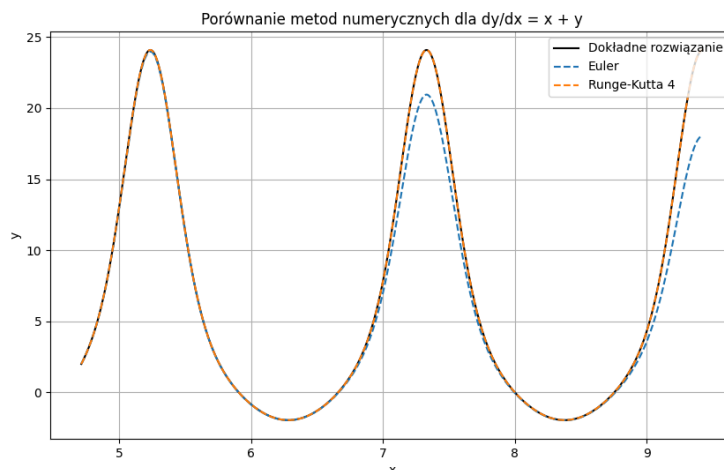
Rysunek 1: Dokładne rozwiązania równania różniczkowego wraz z aproksymacjami dla kroku  $h = 0.1$

Dla kroku  $h = 0.1$  w przypadku **metody Eulera** dokładnie widoczne są dwa minima - w punktach  $x \approx 7.5$  oraz  $x \approx 9.5$ , tam, gdzie dokładne rozwiązanie równania różniczkowego osiąga lokalne maksimum. **Metoda Rungego-Kutty** daje rozwiązanie niemal identyczne do faktycznego rozwiązania.



Rysunek 2: Dokładne rozwiązania równania różniczkowego wraz z aproksymacjami dla kroku  $h = 0.01$

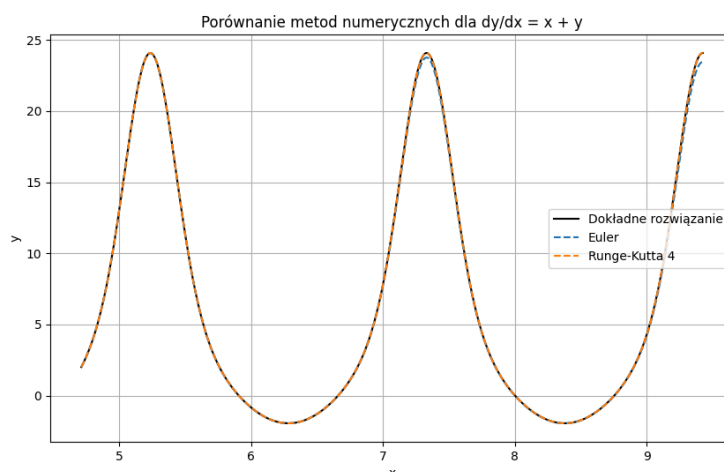
Dla kroku  $h = 0.01$  w przypadku **metody Eulera** ponownie widoczne są dwa minima w tych samych punktach, lecz pierwsze minimum osiąga dużo większą wartość niż występujące w drugim na końcu przedziału. **Metoda Rungego-Kutty** nadal daje rozwiązanie niemal identyczne do faktycznego rozwiązania, można wnioskować, że pozostanie już tak do końca.



Rysunek 3: Dokładne rozwiązania równania różniczkowego wraz z aproksymacjami dla kroku  $h = 0.001$

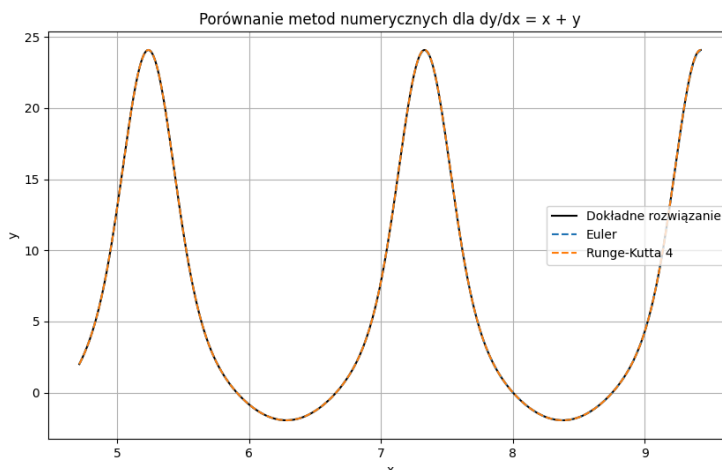
Dla kroku  $h = 0.001$  można zaobserwować, że w przypadku **metody Eulera** nie są już widoczne lokalne minima, dokładność jest znacznie większa w porównaniu do poprzednich kroków  $h$ .

**Metoda Rungego-Kutty** - brak widocznej zmiany względem ostatniego wyniku.



Rysunek 4: Dokładne rozwiązania równania różniczkowego wraz z aproksymacjami dla kroku  $h = 0.0001$

Dla kroku  $h = 0.0001$  widoczne jest niemal dokładne dopasowanie do prawdziwego rozwiązania w przypadku **metody Eulera**. **Metoda Rungego-Kutty** - brak widocznej zmiany względem ostatniego wyniku.



Rysunek 5: Dokładne rozwiązania równania różniczkowego wraz z aproksymacjami dla kroku  $h = 0.00001$

Dla kroku  $h = 0.00001$  różnica pomiędzy **metodą Eulera** oraz **metodą Rungego-Kutty** staje się znikoma.

## 4. Analiza błędów przybliżenia

W celu wyznaczenia błędu przybliżenia użyto błędu maksymalnego, wyrażonego wzorem

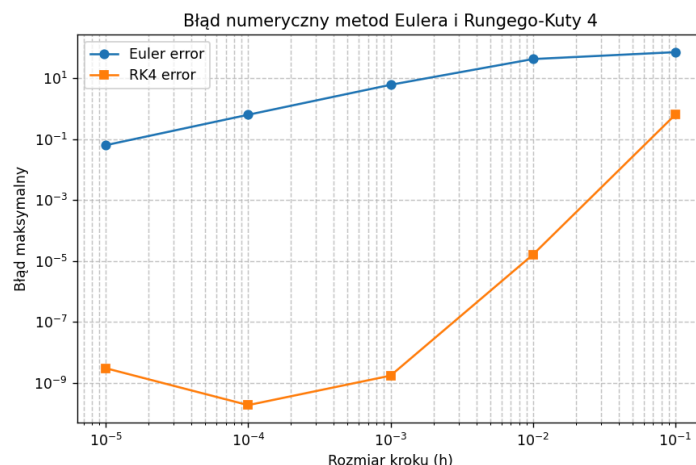
$$E_{\max} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} (|y_i - \tilde{y}_i|) \quad (4.1)$$

, gdzie

- $l$  - liczba punktów, będących wynikiem odpowiedniej metody
- $y_i$  - wynik w punkcie  $x_i$  otrzymany rozwiązaniem analitycznym
- $\tilde{y}_i$  - wynik w punkcie  $x_i$  obliczony dla odpowiedniej metody

Porównanie błędów $E_{\max}$		
$h$	Metoda Eulera	Metoda Rungego-Kutty
1e-01	7.12471e+01	6.29009e-01
1e-02	4.22640e+01	1.60143e-05
1e-03	6.04019e+00	1.71420e-09
1e-04	6.27823e-01	1.84816e-10
1e-05	6.30274e-02	3.00399e-09

Tabela 1: Przedstawienie wyników błędów maksymalnych  $E_{\max}$  dla poszczególnych metod



Rysunek 6: Wykres błędu maksymalnego metod Eulera i Runge-Kuttego dla poszczególnych wielkości kroków

Na podstawie Tabela 1 oraz Rysunek 6 można zauważyć wyraźną poprawę jakości przybliżenia podanymi metodami w miarę zmniejszania kroku  $h$  w przypadku obydwu metod. Mimo tego, zanik błędu w metodzie Eulera zachodzi znacznie wolniej niż w przypadku metody Rungego-Kutty. Dodatkowo, błąd metody Eulera jest zawsze kilka rzędów wielkości większy od błędu w metodzie Rungego-Kutty.