

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Podsumowanie metod rozwiązywania układów równań

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 09.06.2025 | Data Oddania: 09.06.2025

1. Wprowadzenie

Celem niniejszego dokumentu jest podsumowanie badań przeprowadzonych w celu zbadania metod rozwiązywania układów równań liniowych postaci $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ oraz analiza ich efektywności w różnych przypadkach.

1.1. Analizowane macierze

Badaniu zostały poddane cztery układy równań w formie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Poszczególne macierze \mathbf{A} wyglądały następująco:

$$\mathbf{A_I}^{n \times n} = \begin{cases} a_{1j} = 1 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \end{cases} \text{ dla } i \neq 1 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{A_{II}}^{m \times m} = \begin{cases} a_{ij} = \frac{2i}{j} \text{ dla } j \geq i \\ a_{ij} = a_{ji} \text{ dla } j < i \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A_{III}}^{n \times n} = \begin{cases} a_{i,i} = q \\ a_{i,i+1} = \frac{1}{i+p} \\ a_{i,i-1} = \frac{q}{i+p+1}, \text{ dla } i > 1 \\ a_{i,j} = 0, \text{ dla } j < i-1 \text{ oraz } j > i+1 \end{cases} \quad (1.2)$$

dla $p = 3, q = 7$

$$\mathbf{A_{III}}^{n \times 3} = \begin{cases} a_{i,2} = k \\ a_{i,3} = \frac{1}{i+m}, \text{ dla } i < n \\ a_{i,1} = \frac{k}{i+m+1}, \text{ dla } i > 1 \\ a_{i,j} = 0, \text{ wpp.} \end{cases} \quad (1.4)$$

dla $m = 3, k = 7$

$$\mathbf{A_{IV}}^{n \times n} = \begin{cases} a_{ii} = k \\ a_{ij} = \frac{m}{n-i-j+0.5}, \text{ dla } i \neq j \end{cases} \quad (1.5)$$

dla $m = 2, k = 11$

, gdzie $i, j = 1, \dots, n$ (lub w przypadku macierzy $n \times 3$: $i = 1, \dots, n$ $j = 1, 2, 3$) oraz:

- i - numer wiersza macierzy
- j - numer kolumny macierzy
- n, m - wymiary macierzy

Wektor niewiadomych, na podstawie którego wyznaczano wektor \mathbf{b} miał formę

$$\bar{\mathbf{x}}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

, gdzie n zdefiniowane jest jak powyżej, zaś elementy wektora są losową kombinacją liczb -1 i 1 .

Z powyższego wektora otrzymywano wektor \mathbf{b} w następujący sposób:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \quad (1.7)$$

Dodatkowo, w celach analizy poprawności rozwiązania, użyto **maksymalnego błędu bezwzględnego** zdefiniowanego następująco:

$$\|\mathbf{x}\|_{\max} = \max_{i \in 1, \dots, n} (|x_i - \bar{x}_i|) \quad (1.8)$$

, gdzie

- x_i - i -ta wartość wyznaczonego wektora
- \bar{x}_i - i -ta wartość prawdziwego wektora

1.2. Analizowane metody

W badaniach zostały przeanalizowane następujące metody rozwiązywania układów równań:

- Metody Bezpośrednie:
 - **Eliminacja Gaussa** (macierze \mathbf{A}_I , \mathbf{A}_{II} , $\mathbf{A}_{III}^{n \times n}$)
 - **Metoda Thomasa** ($\mathbf{A}_{III}^{n \times 3}$)
- Metody Iteracyjne:
 - **Metoda Jacobiego** (\mathbf{A}_{IV})

Dodatkowo, oprócz analizy samej metody, pod uwagę podczas badań brane pod uwagę były min. :

- **właściwości macierzy** (uwarunkowanie, struktura, rzadkość, promień spektralny macierzy iteracji),
- **złożoności obliczeniowej i pamięciowej** metod,
- **wpływu precyzji** arytmetyki zmiennoprzecinkowej,

Poniżej przedstawiono szczegółową analizę wymienionych metod wraz z oceną ich efektywności oraz zastosowania w kontekście różnych typów macierzy i warunków numerycznych.

2. Metody bezpośrednie

Metody bezpośrednie, takie jak eliminacja Gaussa oraz metoda Thomasa, znajdują dokładne rozwiązanie układu (w granicach precyzji maszynowej) po skończonej liczbie operacji. Ich skuteczność jest jednak silnie uzależniona od właściwości macierzy \mathbf{A} .

2.1. Uwarunkowanie macierzy

Współczynnik uwarunkowania, $\text{cond}(\mathbf{A})$, jest miarą wrażliwości rozwiązania na zaburzenia danych wejściowych. Eksperymenty wykazały, że jest to najważniejszy czynnik wpływający na dokładność.

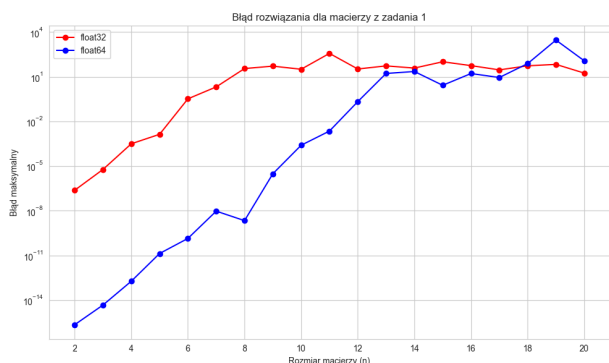
Dla macierzy silnie źle uwarunkowanej, przypominającej **macierz Hilberta** (\mathbf{A}_I), błąd rozwiązania rośnie lawinowo wraz ze wzrostem jej rozmiaru, co ilustruje Rysunek 1. Już dla niewielkich n , błąd w precyzji float32 staje się tak duży, że wynik jest bezużyteczny. Nawet w precyzji float64 utrata dokładności jest znaczna. W przeciwieństwie do tego, dla macierzy lepiej uwarunkowanej (\mathbf{A}_{II}) błędy pozostają na poziomie precyzji maszynowej w znacznie szerszym zakresie rozmiarów.

Zestawienie wyników układu równań macierzy \mathbf{A}_I						
n	Precyzja float32			Precyzja float64		
	$\ \mathbf{x}\ _{\max}$	$\text{cond}(\mathbf{A}_I)$	Czas wykonania [s]	$\ \mathbf{x}\ _{\max}$	$\text{cond}(\mathbf{A}_I)$	Czas wykonania [s]
2	2.3842e-07	1.8000e+01	3.6520e-04	2.2204e-16	1.8000e+01	9.1700e-05
3	5.9605e-06	6.6000e+02	1.0720e-04	4.6629e-15	6.6000e+02	8.7200e-05
4	3.1519e-04	2.0000e+04	6.2630e-04	1.8563e-13	2.0000e+04	1.1410e-04
5	1.3683e-03	7.9856e+05	1.4500e-04	1.3481e-11	7.9789e+05	1.4810e-04
...						
16	5.5915e+01	1.5217e+10	9.7000e-04	1.6436e+01	6.3264e+17	1.0131e-03
17	2.8959e+01	2.6438e+10	1.0813e-03	8.8916e+00	3.3941e+18	1.0933e-03
18	5.4278e+01	1.8653e+10	1.4695e-03	7.6128e+01	4.3636e+20	2.0043e-03
19	6.7806e+01	2.0498e+10	4.1616e-03	2.9033e+03	4.8968e+18	1.3233e-03
20	1.7629e+01	3.2036e+10	2.5734e-03	1.1828e+02	1.8405e+18	1.4530e-03

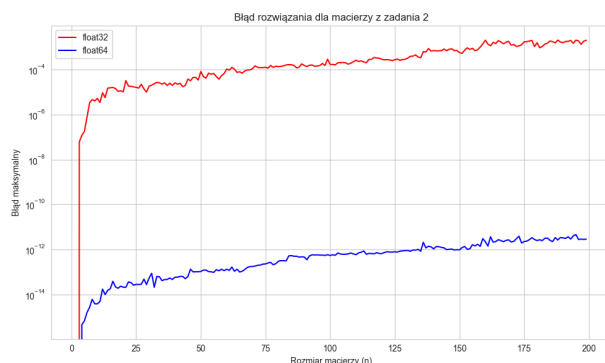
Tabela 1: Wyniki wyznaczone po rozwiązaniu układu równań $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}$

Zestawienie wyników układu równań macierzy \mathbf{A}_{II}						
m	Precyzja float32			Precyzja float64		
	$\ \mathbf{x}\ _{\max}$	$\text{cond}(\mathbf{A}_{II})$	Czas wykonania [s]	$\ \mathbf{x}\ _{\max}$	$\text{cond}(\mathbf{A}_{II})$	Czas wykonania [s]
17	1.4424e-05	3.3973e+02	1.0539e-03	2.1538e-14	3.3973e+02	2.0254e-03
18	1.0848e-05	3.8174e+02	1.1858e-03	1.8652e-14	3.8174e+02	3.0364e-03
19	1.1444e-05	4.2604e+02	1.2885e-03	2.3093e-14	4.2604e+02	2.6777e-03
20	1.0252e-05	4.7251e+02	1.7295e-03	2.0872e-14	4.7251e+02	2.2148e-03
...						
195	2.0491e-03	4.6017e+04	1.7745e-01	4.5652e-12	4.6008e+04	1.9123e-01
196	1.9000e-03	4.6487e+04	1.5607e-01	2.7600e-12	4.6482e+04	2.1743e-01
197	1.3421e-03	4.6963e+04	1.6989e-01	2.8753e-12	4.6958e+04	2.0993e-01
198	1.8345e-03	4.7446e+04	1.6850e-01	2.7925e-12	4.7436e+04	1.9823e-01
199	2.0335e-03	4.7927e+04	2.3307e-01	2.8667e-12	4.7917e+04	1.9536e-01

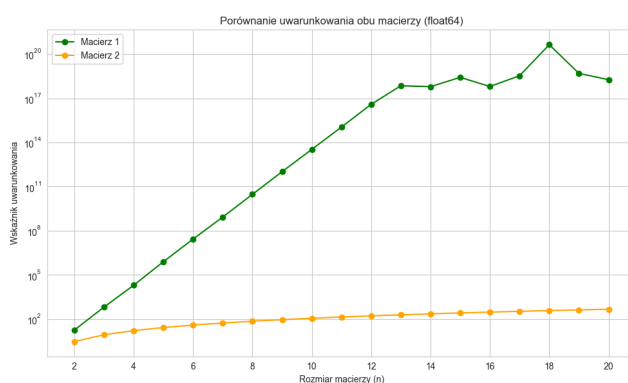
Tabela 2: Wyniki wyznaczone po rozwiązaniu układu równań $\mathbf{A}_{II} \mathbf{x} = \mathbf{b}$



Rysunek 1: Wzrost błędu maksymalnego dla źle uwarunkowanej macierzy A_I (przypominającej macierz Hilberta). Dla $n \geq 8$ w precyzji float32 (czerwona linia) tracona jest cała dokładność.



Rysunek 2: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla macierzy A_{II} po rozwiązaniu układu równań dla precyzji float32 oraz float64



Rysunek 3: Porównanie współczynników uwarunkowania dla n i $m = 2, \dots, 20$ dla A_I oraz A_{II} w precyzji float64

Z powyższego można wysunąć wniosek, że niezależnie od wybranej metody, **zawsze należy w pierwszej kolejności ocenić uwarunkowanie macierzy**. Dla macierzy źle uwarunkowanych konieczne jest stosowanie arytmetyki o podwyższonej precyzji (float64), a nawet to może nie wystarczyć dla większych problemów.

2.2. Efektywność metod dla macierzy rzadkich

Klasyczna eliminacja Gaussa jest metodą uniwersalną, ale jej złożoność czasowa $O(n^3)$ i pamięciowa $O(n^2)$ (gdzie n jest rozmiarem macierzy), czynią ją niepraktyczną dla dużych macierzy. Jeśli jednak macierz ma specjalną strukturę, jak na przykład **trójdzielna** (A_{III}), można zastosować znacznie wydajniejsze algorytmy. W przypadku przeprowadzanych badań zdecydowano się na **Algorytm Thomasa**, który pozwala wyznaczyć rozwiązanie, w przypadku macierzy trójdzielnej, w czasie $O(n)$.

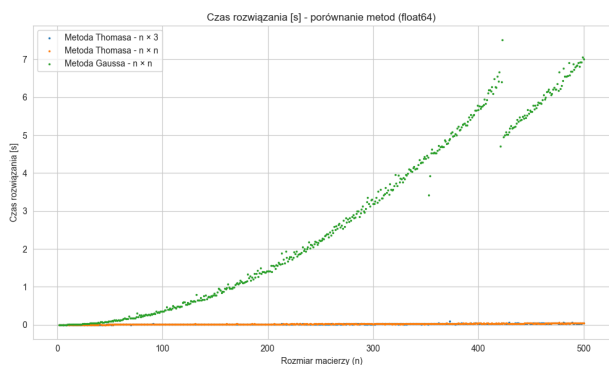
Porównanie eliminacji Gaussa z **algorytmem Thomasa** wykazało olbrzymie korzyści.

- **Czas wykonania:** Algorytm Thomasa, o złożoności $O(n)$, jest rzędy wielkości szybszy niż Gauss $O(n^3)$, co widać na Rysunek 4.
- **Zużycie pamięci:** Dodatkowo, przechowywanie tylko diagonali wraz z pasmem szerokości 3 (złożoność $O(n)$) zamiast całej macierzy (złożoność $O(n^2)$) prowadzi do drastycznej oszczędności pamięci, co jest kluczowe dla dużych układów. Ilustruje to Rysunek 5.

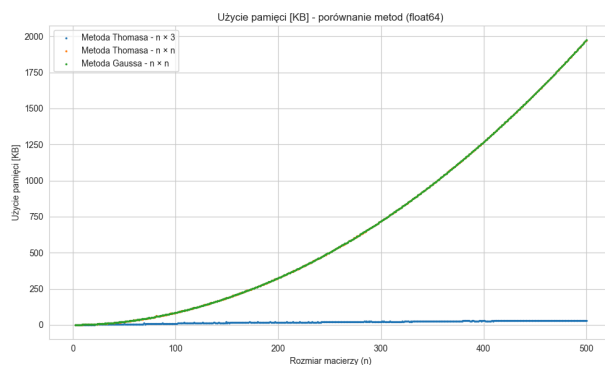
Zestawienie czasu rozwiązywania układu równań dla macierzy A_{III} [s]						
n	Precyzja float32			Precyzja float64		
	$A_{III}^{n \times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Gausa	$A_{III}^{n \times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Gausa
100	2.6163e-01	3.4938e-01	5.1012e-03	9.6419e-03	5.6396e-03	5.7869e-03
101	3.0220e-01	3.4685e-01	5.2821e-03	1.0302e-02	4.8956e-03	8.7311e-03
102	2.9549e-01	3.8862e-01	4.8749e-03	9.6538e-03	5.0355e-03	7.9150e-03
103	2.7474e-01	3.8986e-01	5.3624e-03	8.5050e-03	5.7771e-03	9.2686e-03
104	3.2617e-01	4.7042e-01	6.1346e-03	8.4837e-03	4.7469e-03	7.0397e-03
105	3.1324e-01	4.0459e-01	7.8309e-03	8.1777e-03	4.9723e-03	6.2004e-03
106	2.9042e-01	3.9956e-01	9.8645e-03	7.2853e-03	5.4075e-03	9.1376e-03
107	3.5739e-01	4.3814e-01	6.7846e-03	9.1662e-03	5.3592e-03	9.3878e-03
108	3.9725e-01	4.0435e-01	7.8290e-03	7.2445e-03	5.3203e-03	9.5300e-03
109	3.5999e-01	4.3241e-01	6.9139e-03	5.8828e-03	5.5942e-03	9.0233e-03
110	3.1389e-01	5.0374e-01	5.5108e-03	6.6545e-03	5.3837e-03	9.9632e-03
111	3.0675e-01	4.6208e-01	8.9517e-03	9.0439e-03	5.1227e-03	8.8636e-03
112	3.3187e-01	4.4740e-01	6.0561e-03	9.0689e-03	5.3416e-03	9.1610e-03
113	4.1266e-01	4.4167e-01	8.5363e-03	9.7577e-03	5.1883e-03	8.6085e-03
114	3.5132e-01	4.7914e-01	9.7078e-03	9.8411e-03	5.8125e-03	1.2388e-02
115	3.4189e-01	4.8128e-01	9.4441e-03	7.6389e-03	6.1803e-03	1.2385e-02
116	4.0239e-01	4.7221e-01	9.4536e-03	5.9308e-03	5.8596e-03	1.1335e-02
117	3.5224e-01	4.8203e-01	8.8825e-03	8.6109e-03	6.0159e-03	9.0316e-03
118	3.6588e-01	4.8924e-01	9.8743e-03	1.0861e-02	5.9171e-03	1.4417e-02
119	3.9330e-01	5.8956e-01	9.6695e-03	1.0355e-02	7.5008e-03	1.6605e-02
120	3.7140e-01	6.0344e-01	1.0100e-02	1.0634e-02	5.9993e-03	1.1562e-02
121	3.8633e-01	5.9958e-01	1.0590e-02	9.3897e-03	6.0650e-03	9.7489e-03
122	4.9610e-01	5.5387e-01	1.1216e-02	7.6863e-03	6.1273e-03	9.3437e-03
123	4.1212e-01	5.2958e-01	1.0386e-02	9.6349e-03	6.0515e-03	6.8548e-03
124	4.5785e-01	5.7902e-01	1.0838e-02	1.0522e-02	5.8064e-03	6.3335e-03
125	4.5179e-01	5.4476e-01	7.1835e-03	9.1311e-03	6.0624e-03	6.2842e-03
126	5.3464e-01	5.7178e-01	7.3449e-03	1.0949e-02	6.4881e-03	7.2536e-03
127	4.4778e-01	6.2531e-01	1.3409e-02	1.0742e-02	6.4039e-03	9.8232e-03
128	4.5621e-01	6.2324e-01	6.3009e-03	1.2527e-02	6.6350e-03	1.0855e-02
129	4.4783e-01	6.0750e-01	7.6367e-03	1.0782e-02	6.6968e-03	1.0715e-02
130	5.2798e-01	6.3818e-01	7.1367e-03	1.4175e-02	6.5151e-03	1.1250e-02
...						
460	8.3208e+00	5.8374e+00	4.3003e-02	2.8245e-02	3.3725e-02	3.6617e-02
461	8.2361e+00	5.9240e+00	3.0141e-02	2.9006e-02	3.8046e-02	4.6844e-02
462	8.2567e+00	6.0586e+00	2.9196e-02	3.3279e-02	3.2881e-02	3.7701e-02
463	8.3935e+00	5.9539e+00	2.7758e-02	3.1149e-02	3.5431e-02	3.1309e-02
464	8.7539e+00	5.9918e+00	2.8545e-02	4.0940e-02	3.8007e-02	2.9551e-02
465	8.0214e+00	6.1358e+00	3.7954e-02	4.1304e-02	3.9520e-02	3.0675e-02
466	8.0651e+00	6.1553e+00	3.7940e-02	2.9842e-02	2.8610e-02	3.6441e-02
467	8.6007e+00	6.2106e+00	2.6759e-02	4.3016e-02	3.8280e-02	3.5496e-02
468	8.7453e+00	6.1191e+00	3.9555e-02	4.0784e-02	3.1907e-02	3.4203e-02
469	8.6182e+00	6.0565e+00	3.5861e-02	3.4172e-02	3.1189e-02	3.5413e-02
470	8.2128e+00	6.0998e+00	2.8045e-02	4.4783e-02	2.6027e-02	3.7911e-02
471	7.8518e+00	6.2155e+00	3.6747e-02	4.8098e-02	3.2162e-02	3.8617e-02
472	7.9004e+00	6.2621e+00	5.8520e-02	4.0152e-02	3.5133e-02	3.7692e-02
473	8.0561e+00	6.2099e+00	3.3789e-02	4.1508e-02	3.6906e-02	3.7697e-02
474	8.0591e+00	6.2020e+00	4.3836e-02	4.1648e-02	3.5455e-02	3.6777e-02
475	8.0557e+00	6.3547e+00	3.2753e-02	4.1622e-02	4.1029e-02	3.8151e-02
476	8.2541e+00	6.1699e+00	5.1339e-02	4.6902e-02	3.7164e-02	3.5246e-02
477	8.0042e+00	6.6665e+00	3.5292e-02	5.3360e-02	3.0108e-02	2.6260e-02
478	8.1203e+00	6.2318e+00	4.3727e-02	2.6414e-02	3.3662e-02	2.8513e-02
479	8.2146e+00	6.3016e+00	3.2772e-02	3.9607e-02	4.3504e-02	3.0443e-02
480	8.1233e+00	6.4300e+00	3.6198e-02	3.4436e-02	3.2335e-02	3.1979e-02
481	8.3924e+00	6.7554e+00	3.7008e-02	4.4104e-02	4.0031e-02	6.6559e-02
482	8.3338e+00	6.5436e+00	4.0765e-02	3.2608e-02	4.0934e-02	4.0182e-02
483	8.2196e+00	6.5543e+00	2.8647e-02	4.4184e-02	3.6335e-02	2.7303e-02
484	8.2453e+00	6.5546e+00	3.9407e-02	3.4918e-02	3.0540e-02	3.3180e-02
485	8.2806e+00	6.5628e+00	4.9608e-02	4.1448e-02	3.2945e-02	3.6394e-02
486	8.2648e+00	6.9142e+00	3.3020e-02	5.2439e-02	3.6962e-02	2.7949e-02
487	8.3667e+00	6.5875e+00	3.7737e-02	3.4104e-02	3.8985e-02	2.9365e-02
488	8.2952e+00	6.6829e+00	4.4563e-02	4.6012e-02	3.1265e-02	4.0916e-02
489	8.4275e+00	6.6819e+00	3.1346e-02	4.7578e-02	3.9178e-02	6.2578e-02
490	8.3854e+00	6.8781e+00	4.0208e-02	4.5317e-02	5.2590e-02	3.3145e-02
491	8.5588e+00	6.7378e+00	4.0375e-02	4.6496e-02	4.3830e-02	2.5005e-02
492	8.5399e+00	6.8006e+00	4.7254e-02	3.6687e-02	4.9934e-02	4.0848e-02
493	8.5099e+00	6.8336e+00	3.1148e-02	4.7384e-02	4.7297e-02	3.5754e-02
494	8.6005e+00	6.8494e+00	3.9681e-02	4.2046e-02	3.9579e-02	3.3290e-02
495	8.6074e+00	6.9138e+00	3.8235e-02	4.2589e-02	2.7698e-02	2.7696e-02
496	8.8236e+00	6.8046e+00	4.9657e-02	4.2228e-02	2.8793e-02	3.2458e-02
497	8.8633e+00	6.9194e+00	3.0204e-02	4.3348e-02	4.0924e-02	3.6980e-02
498	8.7402e+00	6.9200e+00	4.0680e-02	4.4294e-02	4.3701e-02	3.5839e-02
499	9.0277e+00	7.0646e+00	2.8507e-02	5.0772e-02	4.0808e-02	3.8751e-02
500	8.8501e+00	7.0061e+00	4.3633e-02	4.4079e-02	4.1255e-02	3.7361e-02

Tabela 3: Wyniki - czas rozwiązywania układu równań $A_{III}x = b$ [s]

Zestawienie zużycia pamięci wykorzystywanej przez program dla macierzy A_{III} [kB]						
	Precyzja float32			Precyzja float64		
n	$A_{III}^{n \times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Gausa	$A_{III}^{n \times 3}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Thomasa	$A_{III}^{n \times n}$ Metoda Gausa
100	4.4951e+01	8.5523e+01	4.4305e+01	8.4539e+01	7.9658e+00	9.8516e+00
101	4.6031e+01	8.7056e+01	4.5156e+01	8.6188e+01	7.6406e+00	1.0008e+01
102	4.6662e+01	8.8836e+01	4.6016e+01	8.7852e+01	7.7734e+00	1.0164e+01
103	4.7705e+01	9.0463e+01	4.6883e+01	8.9531e+01	7.9062e+00	1.0320e+01
104	5.0665e+01	9.2158e+01	4.7758e+01	9.1227e+01	8.0391e+00	1.0477e+01
105	4.9509e+01	9.3882e+01	4.8641e+01	9.2938e+01	8.1719e+00	1.0633e+01
106	5.2773e+01	9.5648e+01	5.3033e+01	9.7879e+01	8.3047e+00	1.0789e+01
107	5.1344e+01	9.7342e+01	5.0430e+01	9.6516e+01	8.4375e+00	1.0945e+01
108	5.2204e+01	9.9096e+01	5.1819e+01	9.8164e+01	8.5703e+00	1.7455e+01
109	5.3234e+01	1.0087e+02	5.2662e+01	9.9938e+01	8.7031e+00	1.1367e+01
110	5.4156e+01	1.0271e+02	5.3172e+01	1.0173e+02	8.8359e+00	1.1872e+01
111	5.7295e+01	1.0435e+02	5.4102e+01	1.0353e+02	8.9688e+00	1.1570e+01
112	5.5686e+01	1.0634e+02	5.5039e+01	1.0535e+02	9.1016e+00	1.1727e+01
113	5.6689e+01	1.0812e+02	5.5984e+01	1.0719e+02	9.2344e+00	1.1883e+01
114	5.8394e+01	1.1002e+02	5.6938e+01	1.0904e+02	9.3672e+00	1.2039e+01
115	5.8819e+01	1.1184e+02	5.8031e+01	1.1091e+02	9.5000e+00	1.2195e+01
116	5.9852e+01	1.1462e+02	5.9438e+01	1.1279e+02	9.6328e+00	1.2352e+01
117	6.0765e+01	1.1562e+02	5.9844e+01	1.1902e+02	1.6646e+01	1.2508e+01
118	6.1749e+01	1.1743e+02	6.0828e+01	1.1730e+02	1.0741e+01	1.5865e+01
119	6.4464e+01	1.1940e+02	6.4518e+01	1.1899e+02	1.0031e+01	1.2820e+01
120	6.3752e+01	1.2135e+02	6.2930e+01	1.2048e+02	1.0170e+01	1.2867e+01
121	6.4703e+01	1.2336e+02	6.3828e+01	1.2244e+02	1.0078e+01	1.2914e+01
122	6.5712e+01	1.2540e+02	6.4844e+01	1.2441e+02	1.0102e+01	1.2961e+01
123	6.6788e+01	1.2739e+02	6.6325e+01	1.2641e+02	1.0125e+01	1.3008e+01
124	6.7767e+01	1.2935e+02	6.6898e+01	1.2841e+02	1.0148e+01	1.3055e+01
125	6.8688e+01	1.3142e+02	6.7938e+01	1.3044e+02	1.0172e+01	1.3102e+01
126	6.9853e+01	1.3341e+02	6.8984e+01	1.3248e+02	1.0195e+01	1.5446e+01
127	7.0960e+01	1.3546e+02	7.0039e+01	1.3453e+02	1.0219e+01	1.3195e+01
128	7.1977e+01	1.3759e+02	7.1102e+01	1.3983e+02	1.0242e+01	1.3242e+01
129	7.3093e+01	1.3967e+02	7.2172e+01	1.3926e+02	1.0266e+01	1.3289e+01
130	7.4008e+01	1.4177e+02	7.3250e+01	1.4079e+02	1.0289e+01	1.3794e+01
...						
460	8.4065e+02	1.6725e+03	8.3992e+02	1.6719e+03	1.9437e+01	2.9517e+01
461	8.4410e+02	1.6791e+03	8.4362e+02	1.6791e+03	1.8759e+01	2.9547e+01
462	8.4810e+02	1.6868e+03	8.4719e+02	1.6864e+03	1.8736e+01	2.9617e+01
463	8.5150e+02	1.6936e+03	8.5074e+02	1.6941e+03	1.8806e+01	2.9710e+01
464	8.5508e+02	1.7014e+03	8.5440e+02	1.7008e+03	1.8783e+01	2.9711e+01
465	8.5867e+02	1.7087e+03	8.5814e+02	1.7081e+03	1.8807e+01	2.9804e+01
466	8.6181e+02	1.7155e+03	8.6174e+02	1.7154e+03	1.8830e+01	2.9729e+01
467	8.6603e+02	1.7236e+03	8.6540e+02	1.7227e+03	1.8854e+01	2.9779e+01
468	8.6966e+02	1.7306e+03	8.6901e+02	1.7301e+03	1.8976e+01	3.0538e+01
469	8.7331e+02	1.7374e+03	8.7276e+02	1.7374e+03	1.8999e+01	2.9945e+01
470	8.7699e+02	1.7454e+03	8.7646e+02	1.7448e+03	1.8953e+01	2.9939e+01
471	8.8068e+02	1.7527e+03	8.8015e+02	1.7522e+03	1.8924e+01	2.9986e+01
472	8.8471e+02	1.7595e+03	8.8375e+02	1.7595e+03	1.8971e+01	3.0010e+01
473	8.8808e+02	1.7676e+03	8.8807e+02	1.7669e+03	1.9047e+01	3.0080e+01
474	8.9128e+02	1.7743e+03	8.9126e+02	1.7744e+03	1.9018e+01	3.0180e+01
475	8.9551e+02	1.7818e+03	8.9493e+02	1.7818e+03	1.9140e+01	3.0227e+01
476	8.9926e+02	1.7899e+03	8.9863e+02	1.7893e+03	1.9140e+01	3.0267e+01
477	9.0302e+02	1.7973e+03	9.0237e+02	1.7968e+03	1.9134e+01	3.0268e+01
478	9.0677e+02	1.8042e+03	9.0616e+02	1.8042e+03	1.9088e+01	3.0295e+01
479	9.1049e+02	1.8122e+03	9.0988e+02	1.8117e+03	1.9783e+01	3.0361e+01
480	9.1420e+02	1.8201e+03	9.1364e+02	1.8193e+03	1.9211e+01	3.0461e+01
481	9.1752e+02	1.8268e+03	9.1743e+02	1.8268e+03	1.9182e+01	3.0455e+01
482	9.2183e+02	1.8349e+03	9.2118e+02	1.8350e+03	1.9258e+01	3.0502e+01
483	9.2588e+02	1.8425e+03	9.2494e+02	1.8419e+03	1.9229e+01	3.0602e+01
484	9.2938e+02	1.8495e+03	9.2873e+02	1.8494e+03	1.9298e+01	3.0596e+01
485	9.3316e+02	1.8577e+03	9.3257e+02	1.8571e+03	1.9298e+01	3.0695e+01
486	9.3698e+02	1.8653e+03	9.3640e+02	1.8647e+03	1.9299e+01	3.1437e+01
487	9.4080e+02	1.8723e+03	9.4016e+02	1.8723e+03	1.9276e+01	3.0736e+01
488	9.4462e+02	1.8805e+03	9.4403e+02	1.8799e+03	1.9392e+01	3.0714e+01
489	9.4791e+02	1.8881e+03	9.4781e+02	1.8876e+03	1.9369e+01	3.0929e+01
490	9.5230e+02	1.8959e+03	9.5162e+02	1.8953e+03	1.9438e+01	3.0930e+01
491	9.5612e+02	1.9030e+03	9.5612e+02	1.9029e+03	1.9416e+01	3.0977e+01
492	9.5998e+02	1.9112e+03	9.5939e+02	1.9106e+03	1.9538e+01	3.1023e+01
493	9.6412e+02	1.9192e+03	9.6320e+02	1.9183e+03	1.9562e+01	3.1040e+01
494	9.6766e+02	1.9262e+03	9.6707e+02	1.9260e+03	1.9532e+01	3.1117e+01
495	9.7160e+02	1.9344e+03	9.7090e+02	1.9338e+03	2.0211e+01	3.1210e+01
496	9.746e+02	1.9423e+03	9.7487e+02	1.9417e+03	1.9632e+01	3.1158e+01
497	9.7930e+02	1.9501e+03	9.7867e+02	1.9494e+03	1.9586e+01	3.1188e+01
498	9.8325e+02	1.9573e+03	9.8264e+02	1.9577e+03	1.9557e+01	3.1351e+01
499	9.8716e+02	1.9656e+03	9.8652e+02	1.9650e+03	1.9649e+01	3.1397e+01
500	9.9112e+02	1.9735e+03	9.9048e+02	1.9728e+03	1.9726e+01	3.1329e+01



Rysunek 4: Porównanie czasu wykonania. Liniowy wzrost dla metody Thomasa ($O(n)$) jest ledwo widoczny w porównaniu z parabolicznym wzrostem dla Gaussa ($O(n^3)$).



Rysunek 5: Porównanie zużycia pamięci. Przechowywanie macierzy rzadkiej ($n \times 3$) jest znacznie bardziej efektywne ($O(n)$) niż pełnej macierzy ($n \times n$) o złożoności ($O(n^2)$).

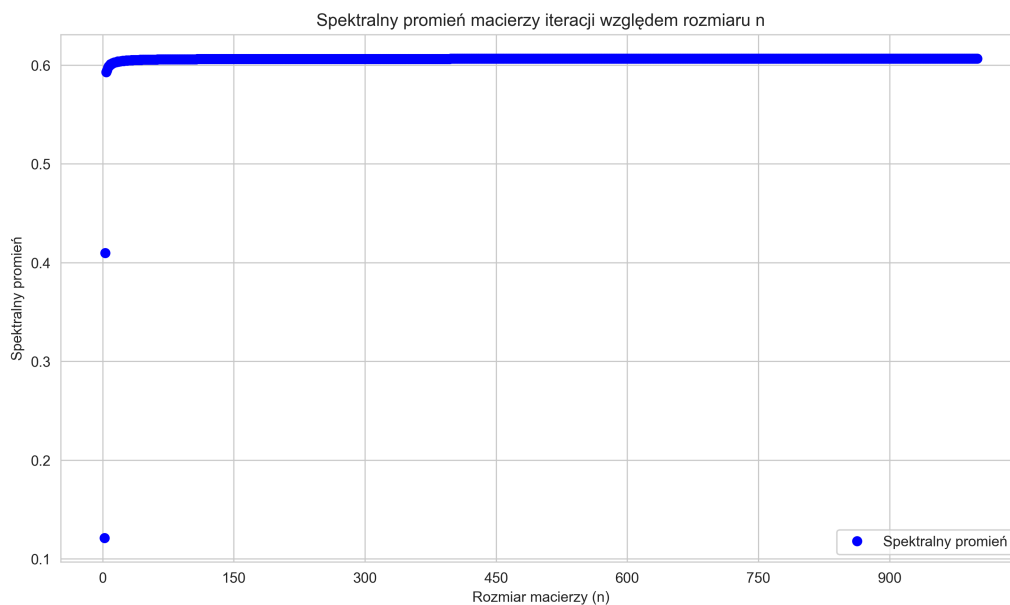
Analizując powyższe, jeśli macierz układu jest rzadka i ma regularną strukturę (np. jest pasmowa, trójdzielna), **użycie wyspecjalizowanego algorytmu jest znacznie efektywniejsze**. Zyski w wydajności i oszczędności pamięci są ogromne, przy zachowaniu tej samej dokładności numerycznej co w metodzie ogólnej.

3. Metody iteracyjne

Metody iteracyjne, takie jak **metoda Jacobiego**, stanowią alternatywę dla metod bezpośrednich, szczególnie w przypadku bardzo dużych i rzadkich układów równań, gdzie złożoność metod bezpośrednich jest zbyt wysoka.

3.1. Warunek zbieżności

Kluczowym aspektem metod iteracyjnych jest ich **zbieżność**. Metoda Jacobiego jest zbieżna, jeśli promień spektralny jej macierzy iteracji $D^{-1}R$ jest mniejszy od jedności ($\rho_s < 1$). Przeprowadzone badania dla macierzy A_{IV} potwierdziły, że warunek ten jest spełniony, a wartość promienia spektralnego stabilizuje się dla dużych n , co gwarantuje zbieżność.

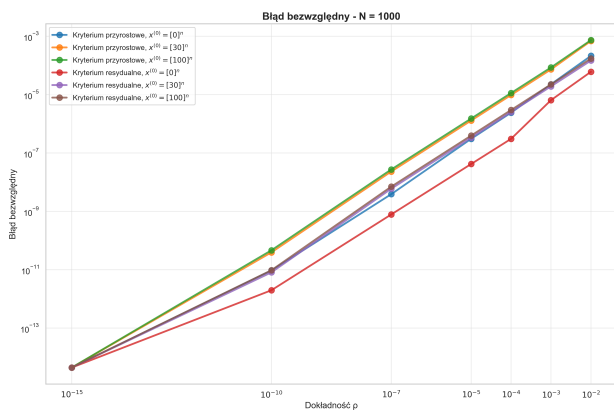


Rysunek 6: Promień spektralny macierzy iteracji Jacobiego. Wartość stabilizuje się poniżej 1, co gwarantuje zbieżność metody dla badanej macierzy A_{IV} .

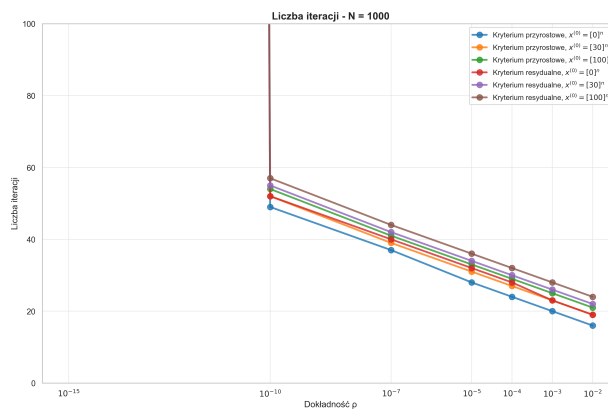
3.2. Analiza parametrów iteracji

W przeciwieństwie do metod bezpośrednich, wynik i wydajność metod iteracyjnych zależą od kilku parametrów:

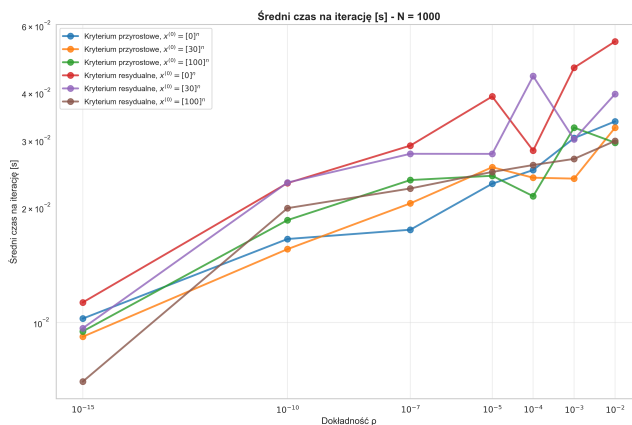
- **Liczba iteracji:** Rośnie wraz z rozmiarem macierzy n oraz wymaganą dokładnością ρ .
- **Próg zbieżności (ρ):** Zbyt rygorystyczny próg (np. 10^{-15}) może prowadzić do osiągnięcia maksymalnej liczby iteracji, zanim warunek stopu zostanie spełniony. Dzieje się tak, ponieważ różnice między kolejnymi przybliżeniami stają się mniejsze niż precyzja maszynowa, a proces iteracyjny „utyka w miejscu”.
- **Kryterium stopu:** Porównano dwa kryteria: **przyrostowe** ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$) oraz **rezydualne** ($\|Ax^{(k)} - b\|$). Chociaż oba dają podobne wyniki, kryterium rezydualne często oferuje lepszą kontrolę nad faktycznym błędem rozwiązania. Dla tej samej wartości progu ρ , kryterium rezydualne skutkowało zazwyczaj nieco niższym błędem końcowym, co widać na Rysunek 7.
- **Wektor początkowy $x^{(0)}$:** Po porównaniu trzech wektorów początkowych postaci $[0]^{n \times 1}$, $[30]^{n \times 1}$, $[100]^{n \times 1}$, w przypadku analizowanej macierzy, nie zauważono drastycznych różnic w wynikach, ale jest to parametr, który w przypadku innych macierzy iteracji może wpłynąć znacząco na czas wyznaczenia rozwiązania.



Rysunek 7: Porównanie błędów maksymalnych $\|x\|_{\max}$ dla kryterium przyrostowego i rezydualnego ($n = 1000$)



Rysunek 8: Porównanie liczby iteracji dla kryterium przyrostowego i rezydualnego ($n = 1000$)



Rysunek 9: Porównanie średniego czasu obliczeń dla kryterium przyrostowego i rezydualnego ($n = 1000$)

Metody iteracyjne są rozwiązaniem efektywnym, ale wymagają starannej analizy zbieżności i doboru parametrów. Otrzymywane wyniki są dogodne dla **dużych, rzadkich macierzy o dobrym uwarunkowaniu**, takich jak A_{IV} .

4. Podsumowanie

Dobór optymalnej metody rozwiązywania układu równań liniowych stanowi proces decyzyjny, który można sprowadzić do szeregu kluczowych kwestii analitycznych:

Analiza właściwości macierzy układu:

- **Uwarunkowanie macierzy:** Jest to czynnik o fundamentalnym znaczeniu. W przypadku macierzy źle uwarunkowanych (tj. o dużej liczbie uwarunkowania, „cond”(A) $\gg 1$), należy liczyć się z utratą dokładności numerycznej. W takich sytuacjach niezbędne jest stosowanie podwójnej precyzji (float64), celem ograniczenia wpływu błędów zaokrągleń.
- **Struktura macierzy:** W zależności od tego, czy macierz jest gęsta, czy rzadka (np. o strukturze trójdagonalnej lub pasmowej), należy dobrać odpowiednio wyspecjalizowany algorytm obliczeniowy.

Dobór metody numerycznej

- **Dla macierzy gęstych o niewielkich lub umiarkowanych rozmiarach:** Metoda eliminacji Gaussa stanowi rozwiązanie domyślne, charakteryzujące się dużą uniwersalnością i niezawodnością.
- **Dla macierzy rzadkich o szczególnej strukturze:** Metody bezpośrednie dostosowane do specyfiki problemu (np. algorytm Thomasa dla macierzy trójdogonalnych) zapewniają wysoką efektywność obliczeniową i znaczne oszczędności pamięciowe.
- **Dla bardzo dużych, rzadkich macierzy:** Metody iteracyjne (np. metoda Jacobiego) często okazują się jedynym praktycznym rozwiązaniem z uwagi na niskie zapotrzebowanie na pamięć oraz małą złożoność obliczeniową pojedynczej iteracji.

Pozostałe istotne aspekty

- **Precyzja obliczeniowa:** Zastosowanie podwójnej precyzji (float64) istotnie zwiększa stabilność numeryczną, co jest szczególnie ważne w przypadku układów źle uwarunkowanych.
- **Złożoność metody:** Wyspecjalizowane algorytmy bezpośrednie oraz metody iteracyjne, choć często wiele bardziej wydajne, mogą wymagać zaawansowanej analizy, w tym sprawdzenia warunków zbieżności.

Nie istnieje uniwersalna metoda rozwiązująca wszystkie układy równań liniowych w sposób optymalny. Kluczem do skutecznych obliczeń jest świadomy wybór algorytmu, oparty na dogłębnej analizie zarówno właściwości matematycznych rozważanego układu, jak i cech charakterystycznych dostępnych metod numerycznych. Tylko takie podejście gwarantuje uzyskanie wyników zarówno dokładnych, jak i obliczeniowo efektywnych.