

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Układy równań liniowych - metoda Jacobiego

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 04.06.2025 | Data Oddania: 04.06.2025

1. Wstęp

1.1. Omówienie przypadku

Dana jest macierz liczb rzeczywistych zdefiniowana odpowiednio:

$$\mathbf{A}_{IV}^{n \times n} = \begin{cases} a_{ii} = k \\ a_{ij} = \frac{m}{n-i-j+0.5}, \text{ dla } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

dla $m = 2, k = 11$

, gdzie:

- i - numer wiersza macierzy
- j - numer kolumny macierzy
- n - wymiary macierzy

W niniejszym dokumencie przeprowadzono analizę numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych postaci $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ iteracyjną metodą Jakobiego gdzie \mathbf{A} jest macierzą współczynników, \mathbf{x} wektorem niewiadomych, a \mathbf{b} wektorem wyrazów wolnych. Celem pracy jest **zbadanie promienia spektralnego** macierzy iteracji układu, **zbieżności metody** wraz z liczbą iteracji, średnim czasem obliczeń na iterację oraz **dokładnością uzyskanego rozwiązania numerycznego** w zależności od parametrów takich jak rozmiar macierzy n , wektor początkowy, próg zbieżności ρ oraz kryteria stopu.

W zadaniu rozważono rozwiązywanie układu równań dla **rozmiarów macierzy**

$n \in \{2, 3, 5, 10, 15, 20, 50, 100, 200, 500, 750, 1000\}$, **dokładności obliczeń** $\rho = 10^l$, gdzie

$l \in \{-2, -3, -4, -5, -7, -10, -15\}$, **kryteriów stopu** - przyrostowego oraz rezydualnego

(Sekcja 1.4) oraz **trzech wektorów początkowych** (Sekcja 1.5). Maksymalna liczba iteracji metody została ustawiona na $k_{\max} = 10000$.

1.2. Metodyka wyznaczania układu równań

W celach badania wprowadzony został wektor rzeczywisty

$$\bar{\mathbf{x}}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

, gdzie n zdefiniowane jest jak powyżej, zaś elementy wektora są **losową kombinacją liczb -1 i 1**. W eksperymencie, w celu uzyskania powtarzalnych wyników, **zawsze ustawiano random.seed na stałą wartość** podczas generowania wektora.

Z powyższego wektora otrzymywano wektor \mathbf{b} w następujący sposób:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \quad (1.3)$$

Następnie, mając wyznaczony wektor \mathbf{b} przystąpiono do rozwiązywania układu równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie \mathbf{x} jest wektorem niewiadomych.

Podejście to umożliwiło porównanie wyznaczonego wektora \mathbf{x} do $\bar{\mathbf{x}}$.

1.3. Metodyka wyznaczania rozwiązania układu równań

Mając układ równań liniowych zdefiniowany jako:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.4)$$

, gdzie \mathbf{A} jest macierzą kwadratową, \mathbf{x} jest wektorem niewiadomych, a \mathbf{b} jest wektorem po prawej stronie, możemy dokonać następującej dekompozycji macierzy \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{R} \quad (1.5)$$

, gdzie \mathbf{D} jest macierzą diagonalną, której elementy diagonalni odpowiadają elementom diagonalni a_{ii} macierzy \mathbf{A} , zaś \mathbf{R} jest resztą.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \\ \mathbf{R} &= \mathbf{A} - \mathbf{D} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Układ równań można teraz zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (1.7)$$

Kolejne wektory wynikowe w metodzie Jakobiego będą wyznaczone więc za pomocą wzoru:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)}) \quad (1.8)$$

, gdzie $\mathbf{x}^{(k)}$ jest przybliżeniem wektora wynikowego w k -tej iteracji.

1.4. Kryteria stopu

W trakcie wyznaczania rozwiązania układu wyznaczono liczbę iteracji niezbędnych do spełnienia zadanego **kryterium stopu**. W badaniach wykorzystano dwa różne kryteria, dla których dobierano różne wartości parametru zbieżności ρ . W obydwu przypadkach za normę $\|\cdot\|$ przyjęto **normę L2** obliczoną za pomocą funkcji bibliotecznej numpy - `numpy.linalg.norm`:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (1.9)$$

1.4.1. Kryterium przyrostowe

Kryterium przyrostowe charakteryzuje zależność:

$$\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\| < \rho \quad (1.10)$$

, gdzie:

- $\mathbf{x}^{(i)}$ - i -te przybliżenie wektora wynikowego, $i \in \mathbb{N}^+$
- ρ - zadana dokładność

1.4.2. Kryterium rezydualne

Kryterium rezydualne charakteryzuje zależność:

$$\|\mathbf{Ax}^{(i)} - \mathbf{b}\| < \rho \quad (1.11)$$

, gdzie:

- $\mathbf{x}^{(i)}$ - i -te przybliżenie wektora wynikowego, $i \in \mathbb{N}^+$
- ρ - zadana dokładność
- \mathbf{A} - macierz układu równań
- \mathbf{b} - macierz wynikowa

1.5. Wektor początkowy

W ramach eksperymentu przetestowano trzy wektory początkowe $\mathbf{x}^{(0)}$. Z racji, że wektor rozwiązania $\bar{\mathbf{x}}$ układu ma postać przedstawioną w Sekcja 1.2, przyjęto następujące wektory rozmiarów $n \times 1$:

$$\mathbf{x}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{x}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ \vdots \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{x}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ \vdots \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

1.6. Pomiar poprawności wyznaczenia rozwiązania

Pomiar poprawności wyznaczenia rozwiązania układu równań przeprowadzony został, porównując prawdziwe składowe wektora z wartością metodą Gaussa. Za metrykę błędu przyjęty został **maksymalny błąd bezwzględny**.

$$\|\mathbf{x}\|_{\max} = \max_{i \in 1, \dots, n} (|x_i - \bar{x}_i|) \quad (1.15)$$

, gdzie

- x_i - i -ta wartość wyznaczonego wektora
- \bar{x}_i - i -ta wartość prawdziwego wektora

1.7. Zbieżność i promień spektralny macierzy

Warunkiem zbieżności w każdej metodzie iteracyjnej jest nierówność

$$\rho_s(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}) < 1 \quad (1.16)$$

, gdzie

- ρ_s jest **promieniem spektralnym** zdefiniowanym jako największa, co do wartości bezwzględnej, wartość własna macierzy iteracji
- $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$ - macierz iteracji układu, gdzie \mathbf{D} i \mathbf{R} - zdefiniowane jak w Równanie (1.5)

Podczas realizacji badań, promień spektralny ρ_s macierzy iteracyjnej wyznaczono za pomocą funkcji biblioteki numpy, wyznaczając maksymalną wartość bezwzględną ze zbioru wynikowego zwracanego przez metodę `numpy.linalg.eigvals`. Wyznaczone promienie spektralne dla zadanej macierzy znajdują się w Tabela 1, Sekcja 3.

2. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

- Komputer HP EliteBook 840 G6:
 - System operacyjny: Windows 11 x64

- Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
- Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.12.0
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib, Seaborn

3. Badanie promienia spektralnego macierzy iteracji

W Tabeli 1 przedstawiono wyniki badania promienia spektralnego macierzy iteracji ρ_s dla rosnących rozmiarów macierzy n metodą opisaną w Sekcja 1.7. Można zauważyć, że promień spektralny macierzy przyjmuje wartości stosunkowo stałe, co umożliwia rozważanie macierzy rzędu wielkości $n = 1000$.

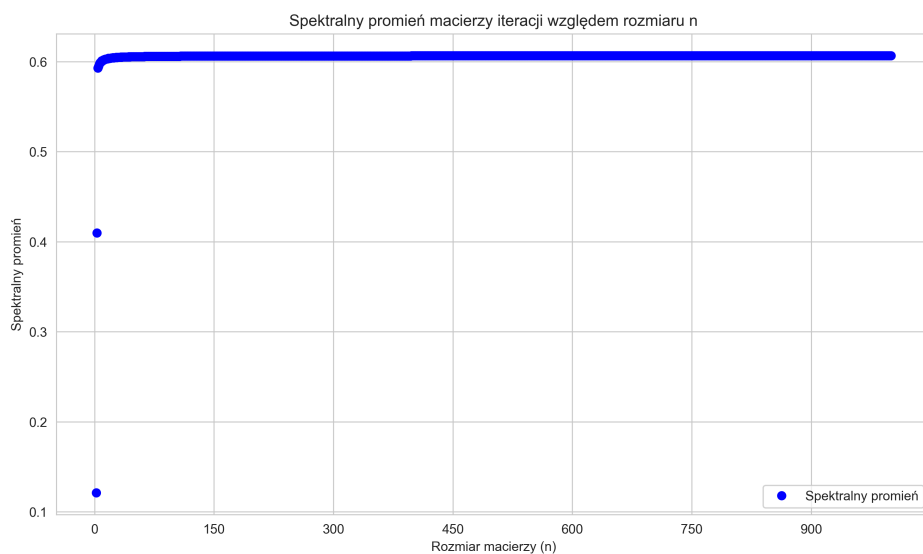
Zestawienie błędów maksymalnych $\ x\ _{\max}$ wyznaczonego wektora dla macierzy A_{IV}	
n	Promień spektralny ρ_s
2	0.12121
3	0.40971
4	0.59297
5	0.59457
6	0.59731
7	0.59884
8	0.59957
9	0.60082
10	0.60097
11	0.60197
12	0.60192
13	0.60272
14	0.60260
15	0.60325
16	0.60311
17	0.60365
18	0.60351
19	0.60396
20	0.60383
21	0.60420
22	0.60409
23	0.60441
24	0.60431
25	0.60458
26	0.60449
27	0.60472
28	0.60464
29	0.60484
30	0.60478
31	0.60495
...	

Zestawienie błędów maksymalnych $\ x\ _{\max}$ wyznaczonego wektora dla macierzy A_{IV}	
n	Promień spektralny ρ_s
100	0.60605
101	0.60606
102	0.60606
103	0.60607
104	0.60607
105	0.60608
106	0.60608
107	0.60609
108	0.60609
109	0.60610
110	0.60610
111	0.60611
112	0.60611
113	0.60612
114	0.60612
115	0.60612
116	0.60613
117	0.60613
118	0.60613
119	0.60614
120	0.60614
121	0.60615
122	0.60615
123	0.60615
124	0.60616
125	0.60616
126	0.60616
127	0.60617
128	0.60617
129	0.60617
...	

Zestawienie błędów maksymalnych $\ x\ _{\max}$ wyznaczonego wektora dla macierzy A_{IV}	
n	Promień spektralny ρ_s
500	0.60647
501	0.60647
502	0.60647
503	0.60647
504	0.60647
505	0.60647
506	0.60647
507	0.60647
508	0.60647
509	0.60647
510	0.60647
511	0.60647
512	0.60647
513	0.60647
514	0.60647
515	0.60647
516	0.60647
517	0.60647
518	0.60647
519	0.60647
520	0.60647
521	0.60647
522	0.60647
523	0.60647
524	0.60648
525	0.60647
526	0.60648
527	0.60648
528	0.60648
529	0.60648
...	

Zestawienie błędów maksymalnych $\ x\ _{\max}$ wyznaczonego wektora dla macierzy A_{IV}	
n	Promień spektralny ρ_s
970	0.60652
971	0.60652
972	0.60652
973	0.60652
974	0.60652
975	0.60652
976	0.60652
977	0.60652
978	0.60652
979	0.60652
980	0.60652
981	0.60652
982	0.60652
983	0.60652
984	0.60652
985	0.60652
986	0.60652
987	0.60652
988	0.60652
989	0.60652
990	0.60652
991	0.60652
992	0.60652
993	0.60652
994	0.60652
995	0.60652
996	0.60652
997	0.60652
998	0.60652
999	0.60652
1000	0.60652

Tabela 1: Wyniki - promień spektralny ρ_s macierzy iteracji

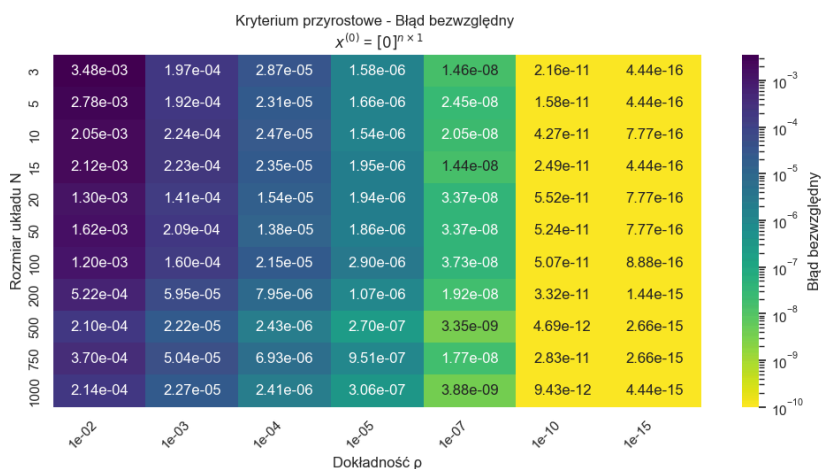


Rysunek 1: Wizualizacja - promień spektralny macierzy iteracji ρ_s względem jej rozmiaru n

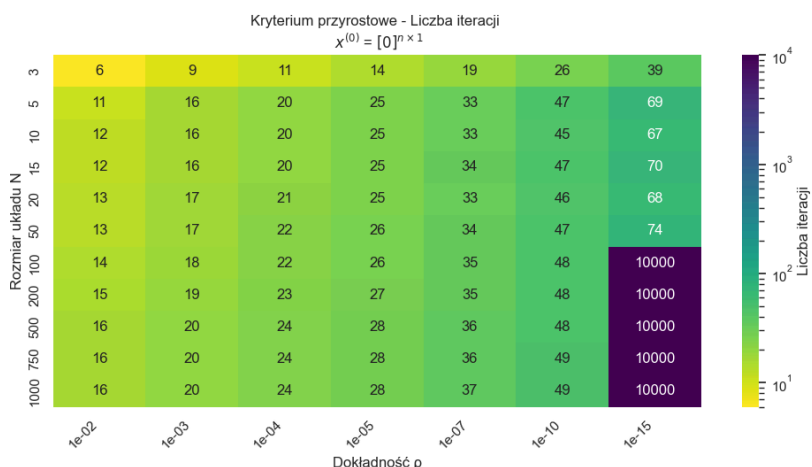
4. Badanie metody Jacobiego

4.1. Kryterium Przyrostowe

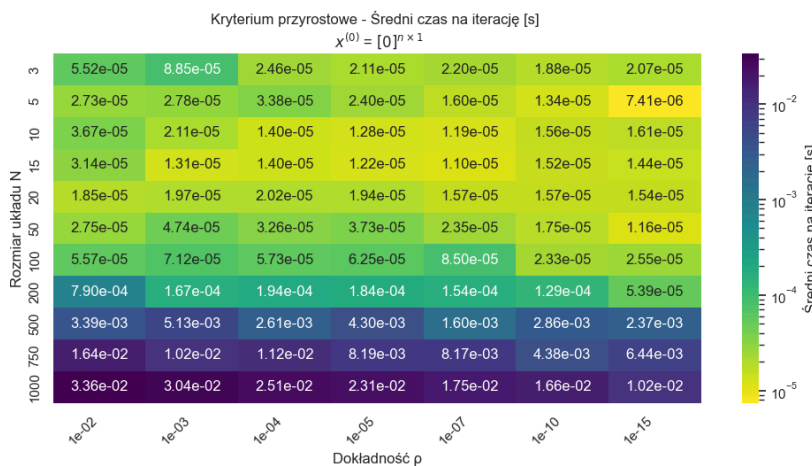
4.1.1. Wektor początkowy $x_1^{(0)} = [0]^{n \times 1}$



Rysunek 2: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$

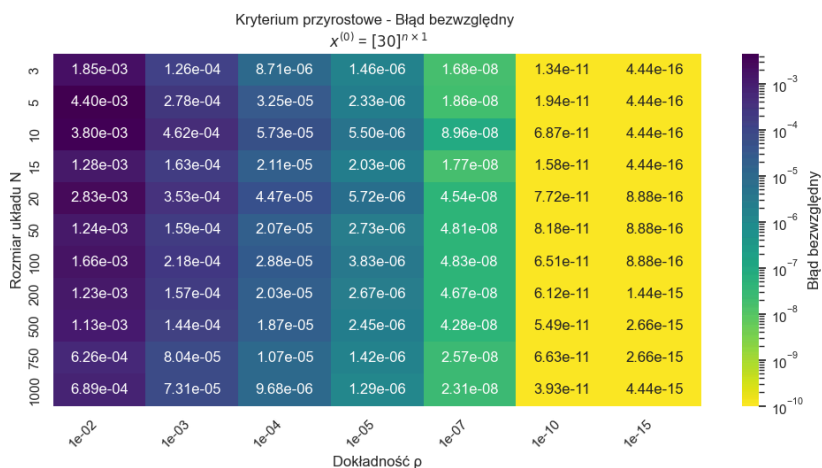


Rysunek 3: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$

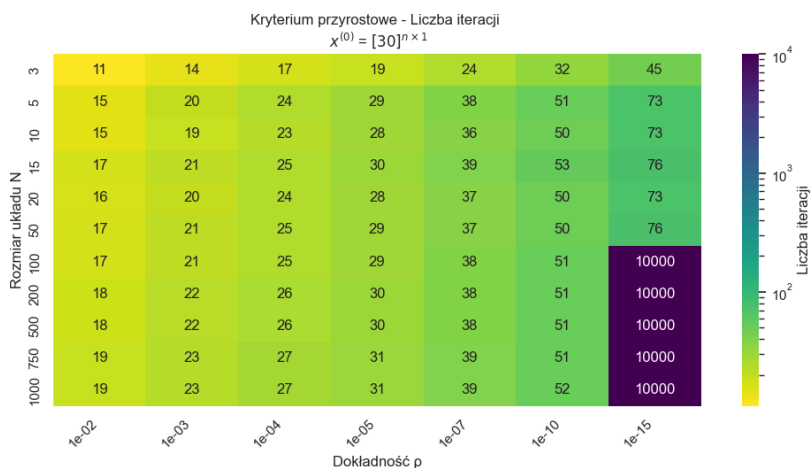


Rysunek 4: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$

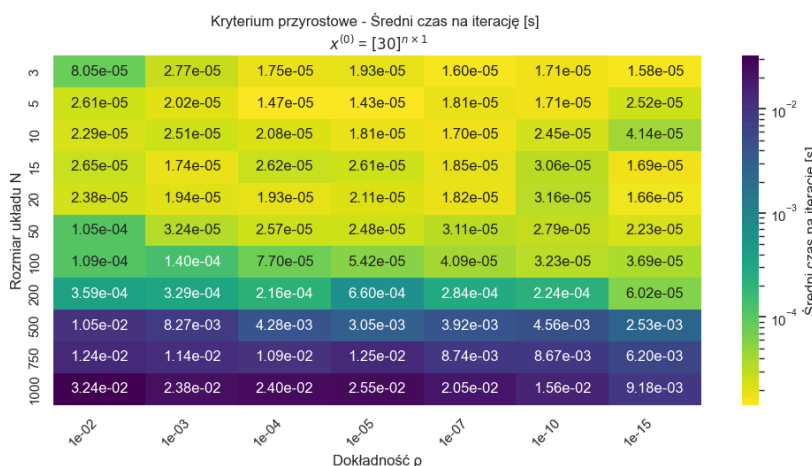
4.1.2. Wektor początkowy $x_2^{(0)} = [30]^{n \times 1}$



Rysunek 5: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$

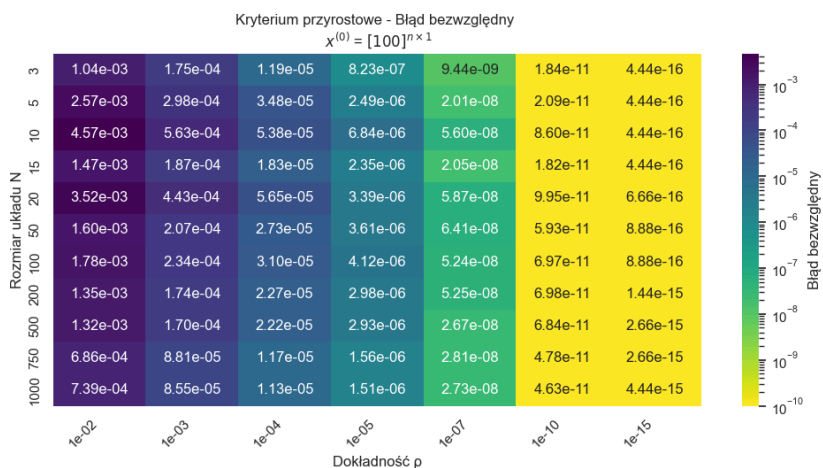


Rysunek 6: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$

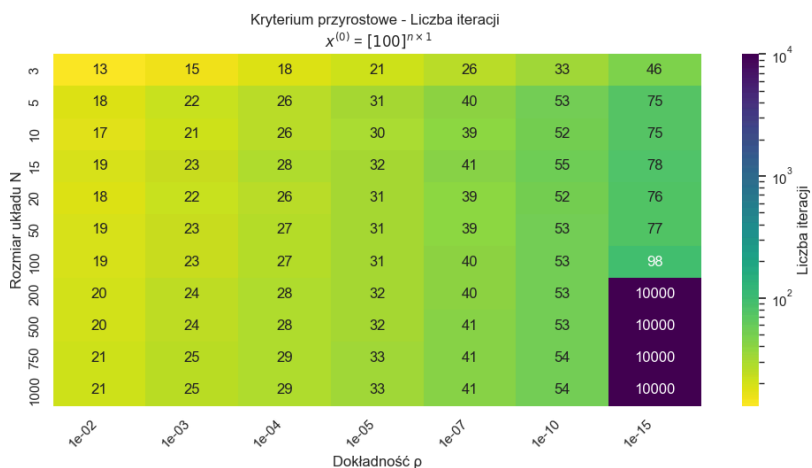


Rysunek 7: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$

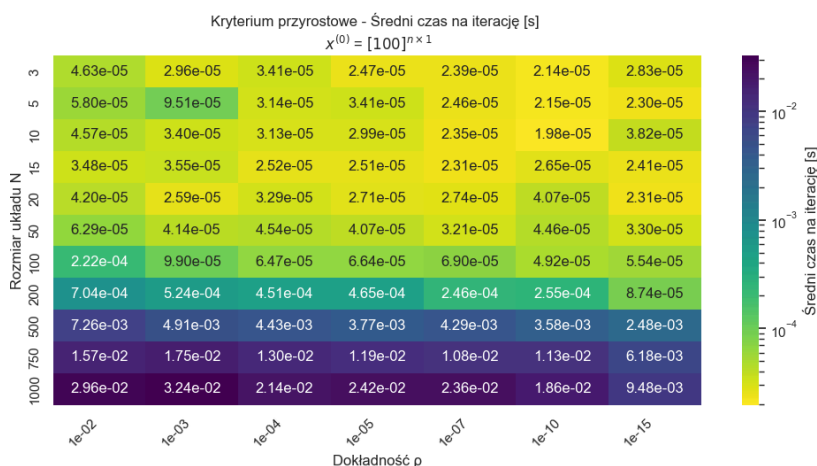
4.1.3. Wektor początkowy $x_3^{(0)} = [100]^{n \times 1}$



Rysunek 8: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



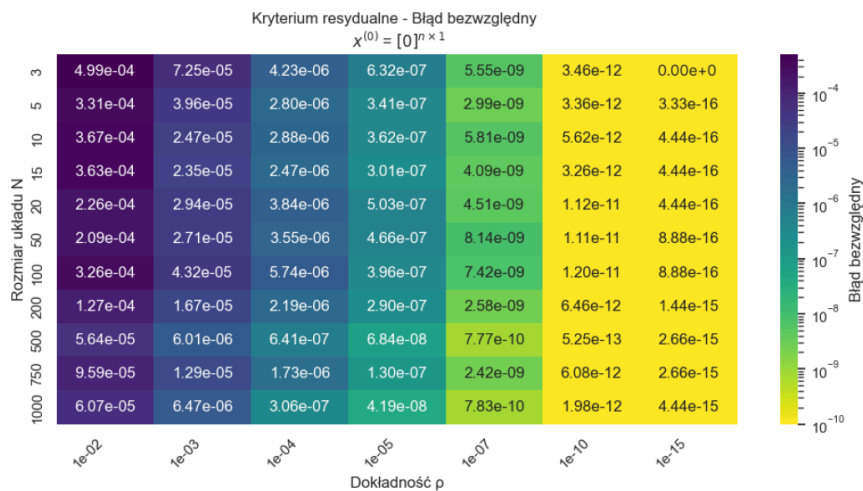
Rysunek 9: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



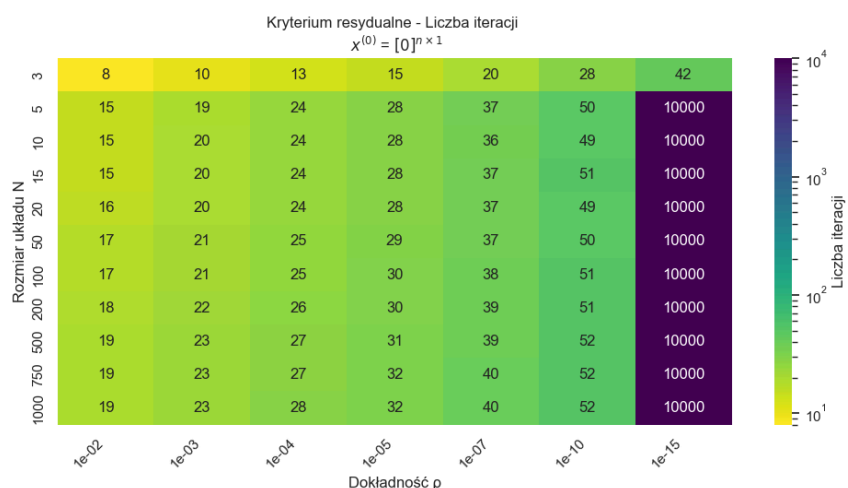
Rysunek 10: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium przyrostowego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$

4.2. Kryterium rezydualne

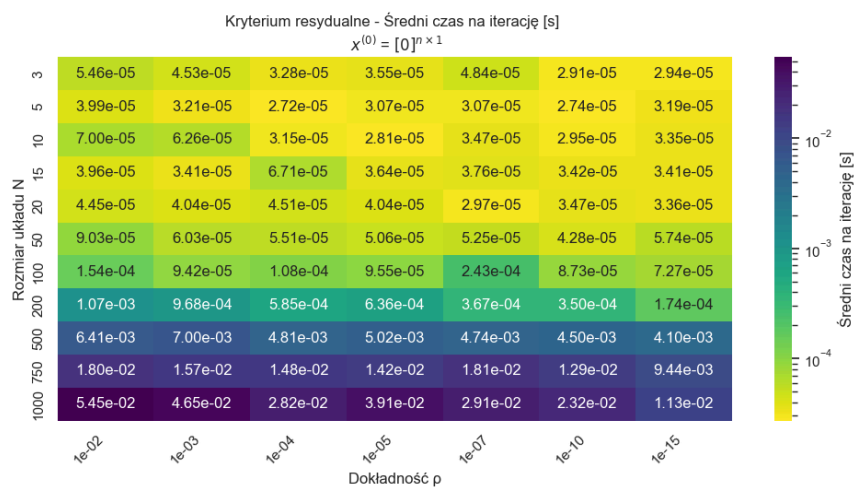
4.2.1. Wektor początkowy $x_1^{(0)} = [0]^{n \times 1}$



Rysunek 11: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$

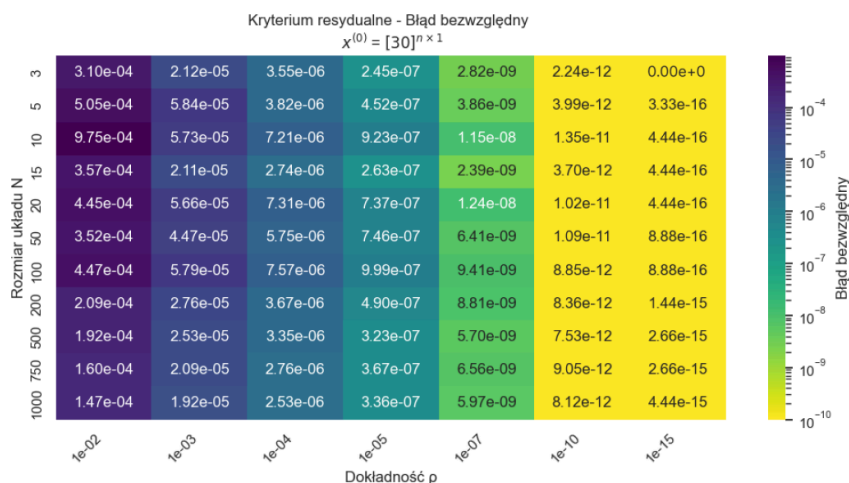


Rysunek 12: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$

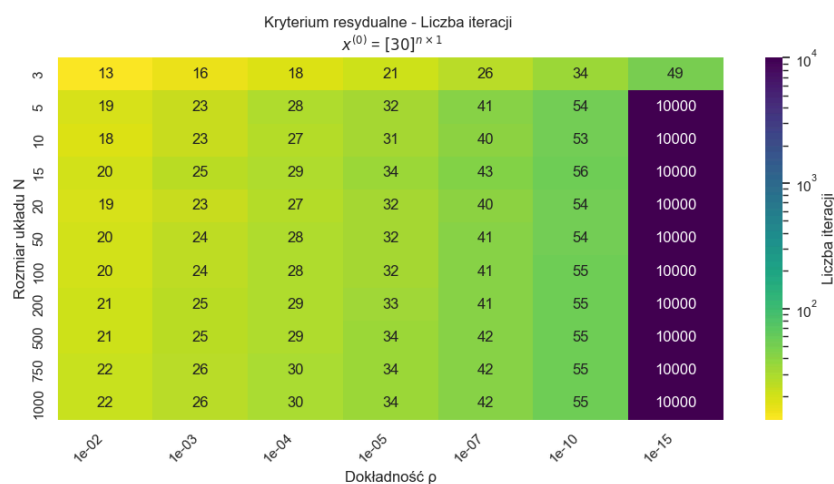


Rysunek 13: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_1^{(0)}$

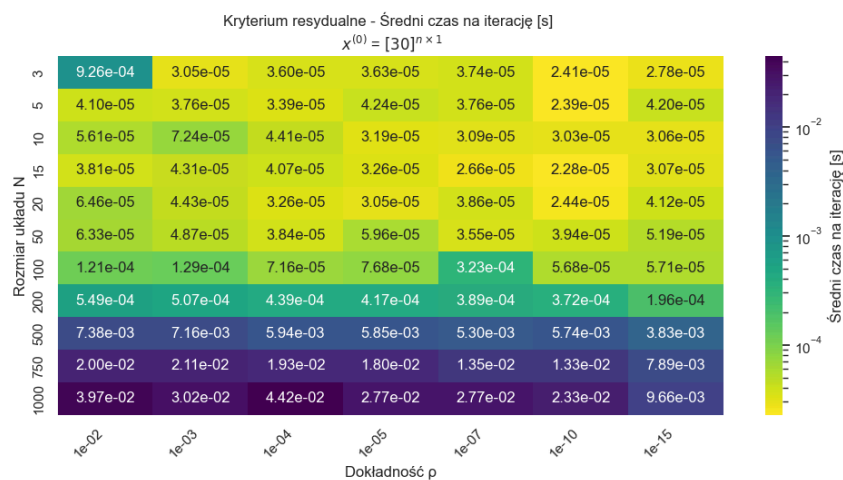
4.2.2. Wektor początkowy $x_2^{(0)} = [30]^{n \times 1}$



Rysunek 14: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$

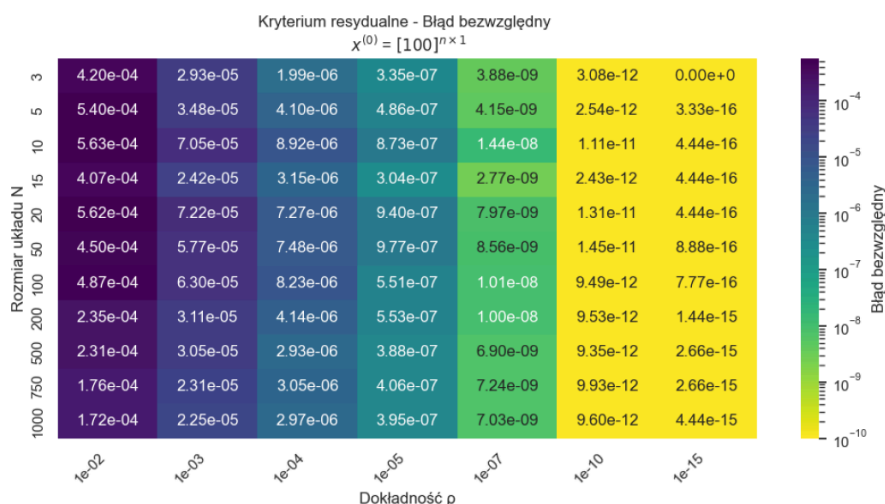


Rysunek 15: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$

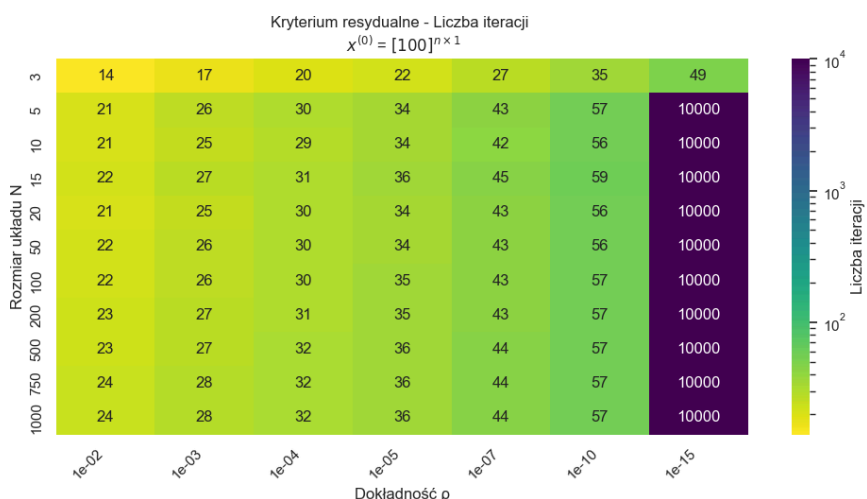


Rysunek 16: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_2^{(0)}$

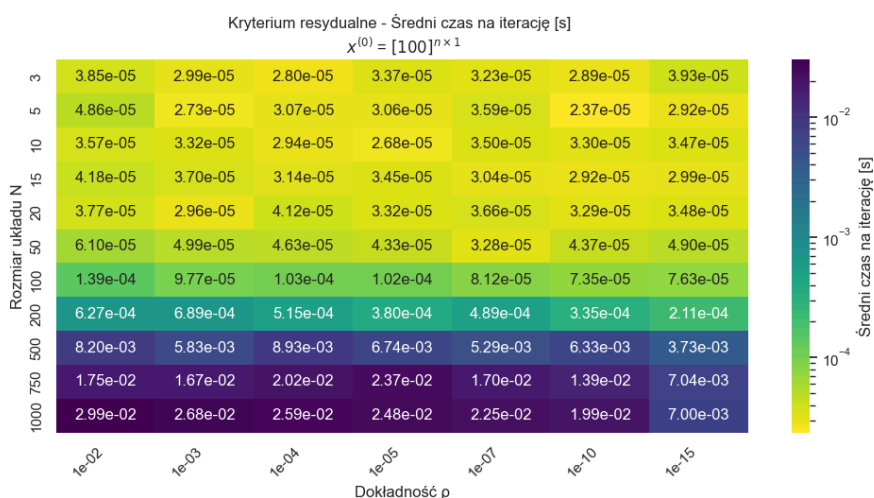
4.2.3. Wektor początkowy $x_3^{(0)} = [100]^{n \times 1}$



Rysunek 17: Błąd maksymalny $\|x\|_{\max}$ dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



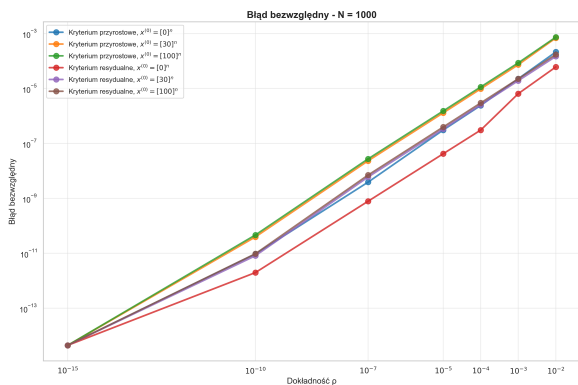
Rysunek 18: Liczba iteracji dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$



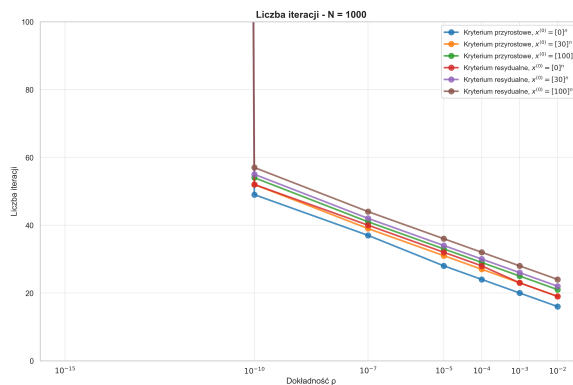
Rysunek 19: Średni czas obliczeń dla metody Jacobiego w przypadku kryterium rezydualnego oraz wektora początkowego $x_3^{(0)}$

5. Porównanie kryteriów stopu

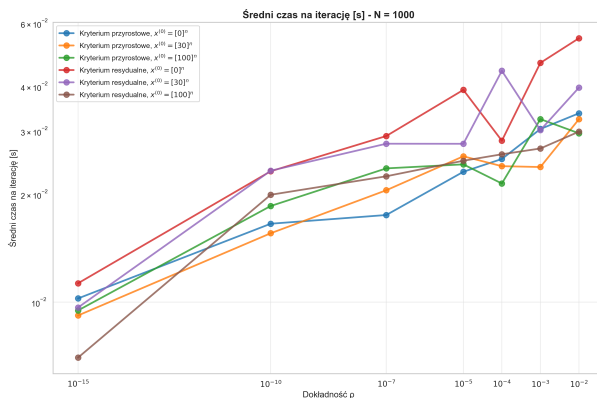
Poniżej przedstawiono wykresy porównujące działanie kryterium przyrostowego oraz kryterium rezydualnego dla macierzy o rozmiarze $n = 1000$, dla różnych wartości progu zbieżności ρ oraz dla wektora początkowego $x_1^{(0)} = [0]^{1000 \times 1}$.



Rysunek 20: Porównanie błędów maksymalnych $\|x\|_{\max}$ dla kryterium przyrostowego i rezydualnego ($n = 1000$)



Rysunek 21: Porównanie liczby iteracji dla kryterium przyrostowego i rezydualnego ($n = 1000$)



Rysunek 22: Porównanie średniego czasu obliczeń dla kryterium przyrostowego i rezydualnego ($n = 1000$)

Analizując powyższe wykresy porównawcze dla rozmiaru macierzy $n = 1000$ (Rysunek 20, Rysunek 21, Rysunek 22), można zauważyć, że wyniki uzyskane przy użyciu kryterium przyrostowego oraz kryterium rezydualnego nie różnią się znacząco pod względem osiąganego błędów maksymalnych, liczby iteracji oraz średniego czasu obliczeń.

Drobne fluktuacje są widoczne, szczególnie dla mniejszych wartości progu zbieżności ρ , jednak ogólny trend i rząd wielkości badanych metryk pozostają bardzo zbliżone dla obu kryteriów stopu. Wskazuje to na podobną efektywność obu kryteriów w kontekście badanych parametrów dla tej konkretnej metody i problemu.

6. Wnioski

Zbieżność Metody

Analiza promienia spektralnego (ρ_s) macierzy iteracji $D^{-1}R$ wykazała, że dla wszystkich badanych rozmiarów macierzy n , wartość ρ_s była mniejsza od 1. Promień spektralny rósł wraz ze wzrostem n , stabilizując się w okolicach wartości 0.6065 dla większych macierzy. Potwierdza to teoretyczny warunek zbieżności metody Jacobiego dla analizowanego układu równań.

Wpływ Parametrów na Proces Iteracyjny

Rozmiar macierzy (n): Wzrost rozmiaru macierzy n skutkował zwiększeniem liczby iteracji

potrzebnych do osiągnięcia zadanego progu zbieżności ρ oraz proporcjonalnym wzrostem średniego czasu wykonania pojedynczej iteracji.

Próg zbieżności (ρ): Zmniejszanie wartości progu zbieżności ρ (czyli zwiększanie wymaganej dokładności) prowadziło do wzrostu liczby iteracji. Dla bardzo małych wartości ρ (np. 10^{-15}), często **osiągnano maksymalny limit iteracji** (10000), co sugeruje, że osiągnięcie tak wysokiej precyzji może być ograniczone precyzją maszynową.

Wektor początkowy ($\mathbf{x}^{(0)}$): Testowane wektory początkowe ($\mathbf{x}_1^{(0)}$, $\mathbf{x}_2^{(0)}$, $\mathbf{x}_3^{(0)}$) miały niewielki, choć zauważalny wpływ na liczbę iteracji i niekiedy na końcowy błąd bezwzględny. Różnice te nie były jednak na tyle duże, aby jednoznacznie faworyzować którykolwiek z wektorów w każdym przypadku – optymalny wybór mógłby zależeć od kombinacji n i p .

Dokładność rozwiązania: Osiągany błąd bezwzględny był, zgodnie z oczekiwaniami, niższy dla mniejszych wartości progu ρ . Wartości błędów zbliżone do precyzji maszynowej (rzędu 10^{-15} , 10^{-16}) były obserwowane dla najbardziej rygorystycznych progów.

Porównanie kryteriów stopu

Oba kryteria stopu – przyrostowe oraz rezydualne (Sekcja 1.4) – wykazały podobne ogólne trendy pod względem liczby iteracji i średniego czasu obliczeń dla badanych n (przykład dla $n = 1000$ - Sekcja 5).

Kryterium rezydualne często prowadziło do osiągnięcia niższego (lepszego) końcowego błędu bezwzględnego rozwiązania w porównaniu do kryterium przyrostowego dla tej samej wartości progu ρ (co widać na Rysunku 20).

Dla dokładności rzędu 10^{-15} kryterium rezydualne osiągał maksymalną liczbę iteracji, mimo bliskości uzyskanego wyniku do dokładności. Efekt ten spowodowany prawdopodobnie jest faktem, że mimo iż metoda formalnie zbiega do rozwiązania, praktycznie dochodzi do punktu, w którym **różnice między kolejnymi iteracjami są mniejsze niż maszyna jest w stanie zarejestrować** (około epsilon maszynowego).

Mimo pewnych fluktuacji, ogólna efektywność i rząd wielkości badanych metryk (błąd, liczba iteracji, czas) były zbliżone dla obu kryteriów, co sugeruje ich porównywalną użyteczność dla badanego problemu, przy czym kryterium rezydualne może oferować nieco lepszą kontrolę nad błędem samego rozwiązania.