Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie | Aproksymacja Trygonometryczna

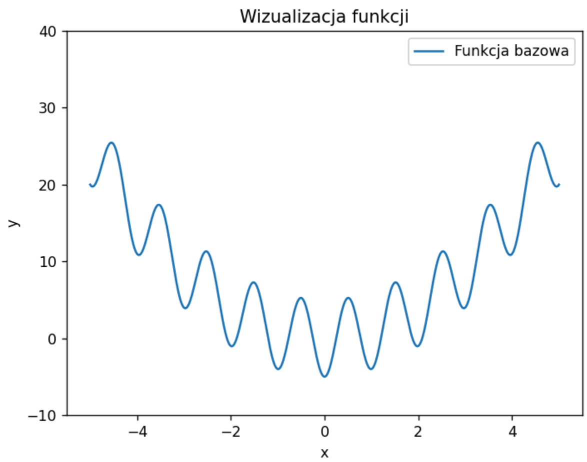
Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 30.04.2025 | Data Oddania: 15.04.2025

1. Analiza przypadku

Dana jest funkcja

$$\begin{aligned} &f(x) = x^2 - m\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right), \\ &\text{gdzie } m = 5 \text{ oraz } k = 0.5, \\ &\text{określona dla } \ x \in [-5; 5] \end{aligned} \tag{1.1}$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - m\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$

W poniższej pracy przeprowadzono analizę funkcji zadanej w problemie **aproksymacji średniokwadratowej** poprzez jej dyskretyzację przy użyciu **wielomianów trygonometrycznych** (będących dyskretnymi szeregami Fouriera).

W ramach eksperymentów numerycznych rozważono różne liczby punktów dyskretyzacji $n \in \{3, 5, ..., 100\}$ oraz różne stopnie wielomianów trygonometrycznych aproksymujących $m \in \{1, 2, ..., 20\}$ (odpowiadające liczbie uwzględnionych harmonicznych),

Celem badania wyznaczenie wartości funkcji w określonych punktach oraz skonstruowanie jej przybliżenia na podstawie tych danych, graficzna ilustracja oraz analiza wybranych i interesujących przypadków.

Aproksymacja **trygonometryczna** jest realizowana metodą **iteracyjnego wyznaczania współczynników wielomianu trygonometrycznego**. Należy wspomnieć, że w realizowanej metodzie stosunek liczby punktów dyskretyzacji do stopni wielomianów musi spełniać zależność $m < \frac{n}{2}$, aby problem pozostał dobrze uwarunkowany. Dodatkowo, aby metoda iteracyjna była poprawna, wymagane było odpowiednie **przekształcenie przedziału definicji wielomianów trygonometrycznych** z $[-\pi, \pi]$ na $[-5, 5]$.

2. Wyznaczenie dokładności aproksymacji

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości aproksymowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu trygonometrycznego aproksymacji dla $m = 1000$ równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-5; 5]$ z wykorzystaniem niżej wymienionych wskaźników

2.1. Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy (ang. *Minimum Square Error, MSE*) wyrażony jest wzorem

$$E_{ś} = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{l} \left(W(x_i) - f(x_i)\right)^2}}{l} \tag{2.1}$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - funkcja z Wzór (1.1)
- W - funkcja **wielomianu trygonometrycznego aproksymującego**
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

2.2. Błąd maksymalny

Błąd maksymalnych wyrażony jest wzorem

$$E_m = \max_{i \in \{1,2,\ldots,l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \tag{2.2}$$

, gdzie

- l - liczba punktów pomiaru błędu
- f - funkcja z Wzór (1.1)
- W - funkcja **wielomianu trygonometrycznego aproksymującego**
- x_i - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

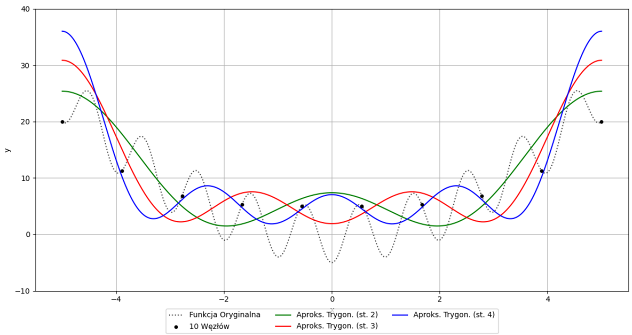
3. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

- Komputer HP EliteBook 840 G6:
  - System operacyjny: Windows 11 x64
  - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
  - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.9.20
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib

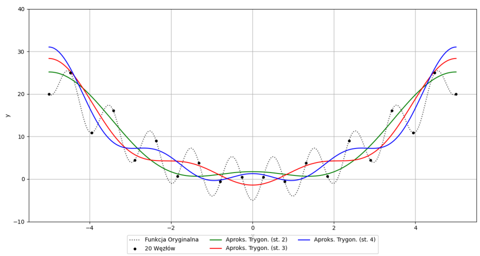
4. Wizualizacja aproksymacji dla stałej liczby węzłów n

4.1. Dla $n = 10$ węzłów

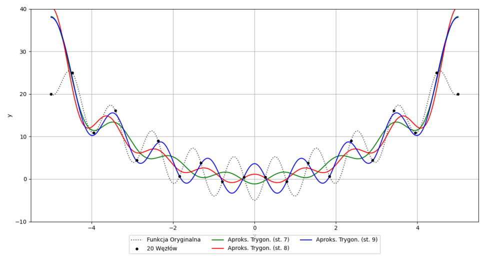


Rysunek 2: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 10 | Stopnie $m = 2, 3, 4$

4.2. Dla $n = 20$ węzłów

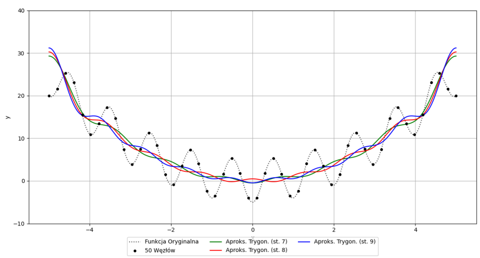


Rysunek 3: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 20 | Stopnie $m = 2, 3, 4$

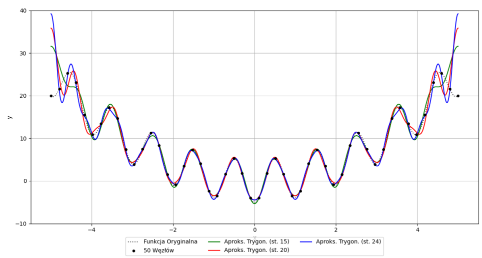


Rysunek 4: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 20 | Stopnie $m = 7, 8, 9$

4.3. Dla $n = 50$ węzłów

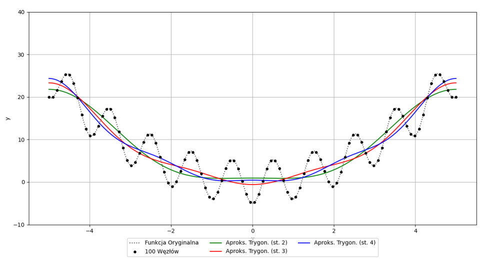


Rysunek 5: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 50 | Stopnie $m = 7, 8, 9$

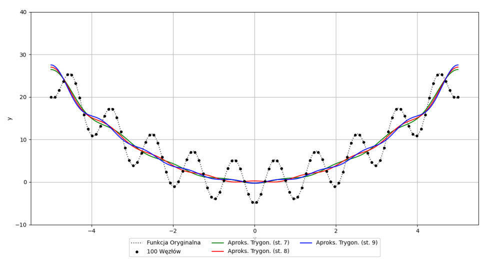


Rysunek 6: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 50 | Stopnie $m = 15, 20, 24$

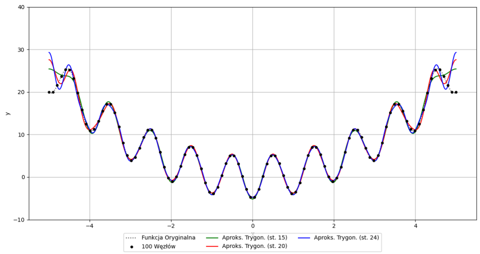
4.4. Dla $n = 100$ węzłów



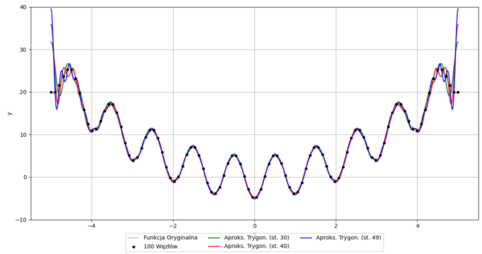
Rysunek 7: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 2, 3, 4$



Rysunek 8: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 7, 8, 9$



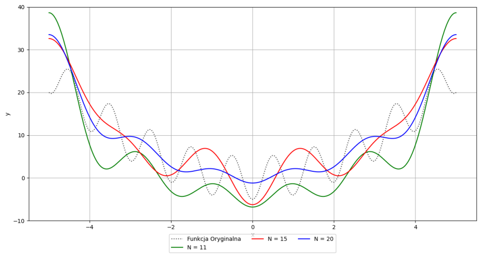
Rysunek 9: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 15, 20, 24$



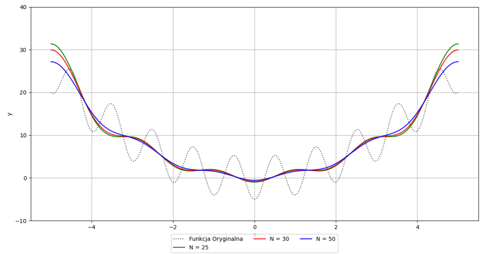
Rysunek 10: Wizualizacja Aproksymacji | Liczba węzłów = 100 | Stopnie $m = 30, 40, 49$

5. Wizualizacja aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu trygonometrycznego m

5.1. Dla stopnia $m = 5$

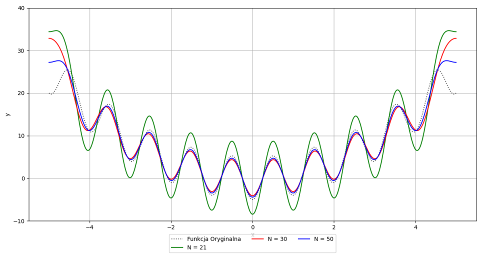


Rysunek 11: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 5 | Liczby węzłów $n = 11, 15, 20$

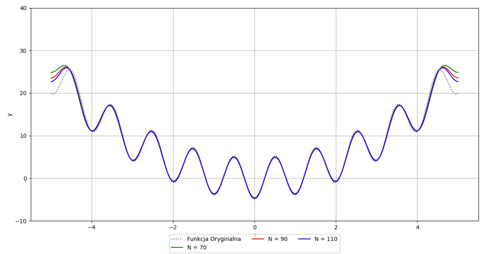


Rysunek 12: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 5 | Liczby węzłów $n = 25, 30, 50$

5.2. Dla stopnia $m = 10$

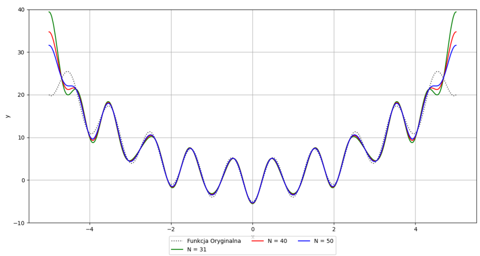


Rysunek 13: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 10 | Liczby węzłów $n = 21, 30, 50$

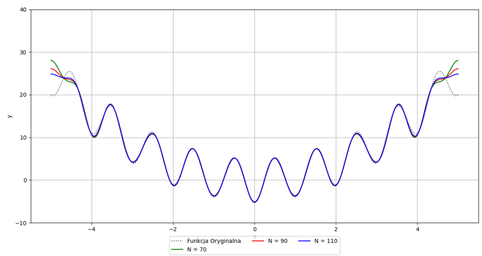


Rysunek 14: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 10 | Liczby węzłów $n = 70, 90, 110$

5.3. Dla stopnia $m = 15$

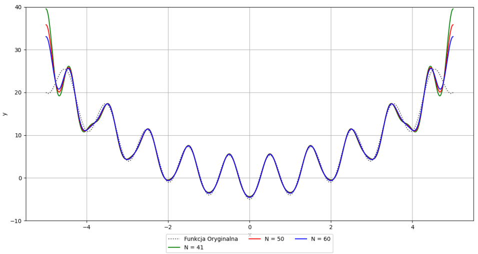


Rysunek 15: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 15 | Liczby węzłów $n = 31, 40, 50$

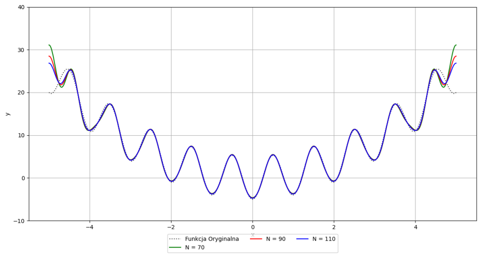


Rysunek 16: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 15 | Liczby węzłów $n = 70, 90, 110$

5.4. Dla stopnia $m = 20$



Rysunek 17: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 20 | Liczby węzłów $n = 41, 50, 60$

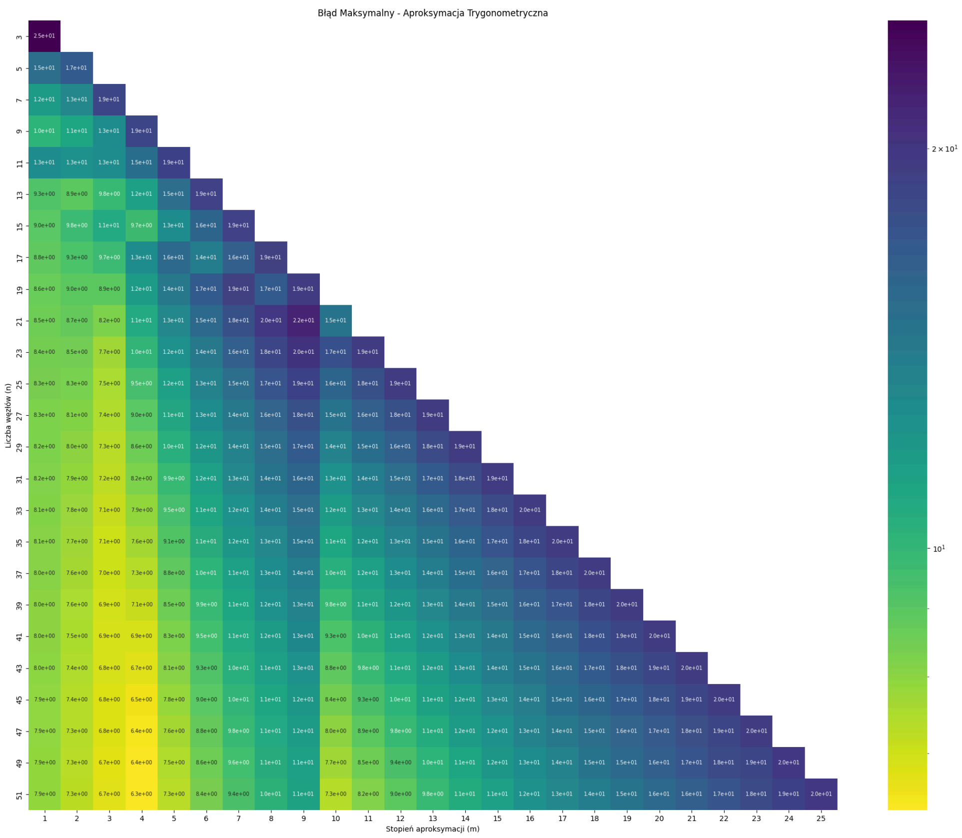


Rysunek 18: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 20 | Liczby węzłów $n = 70, 90, 110$

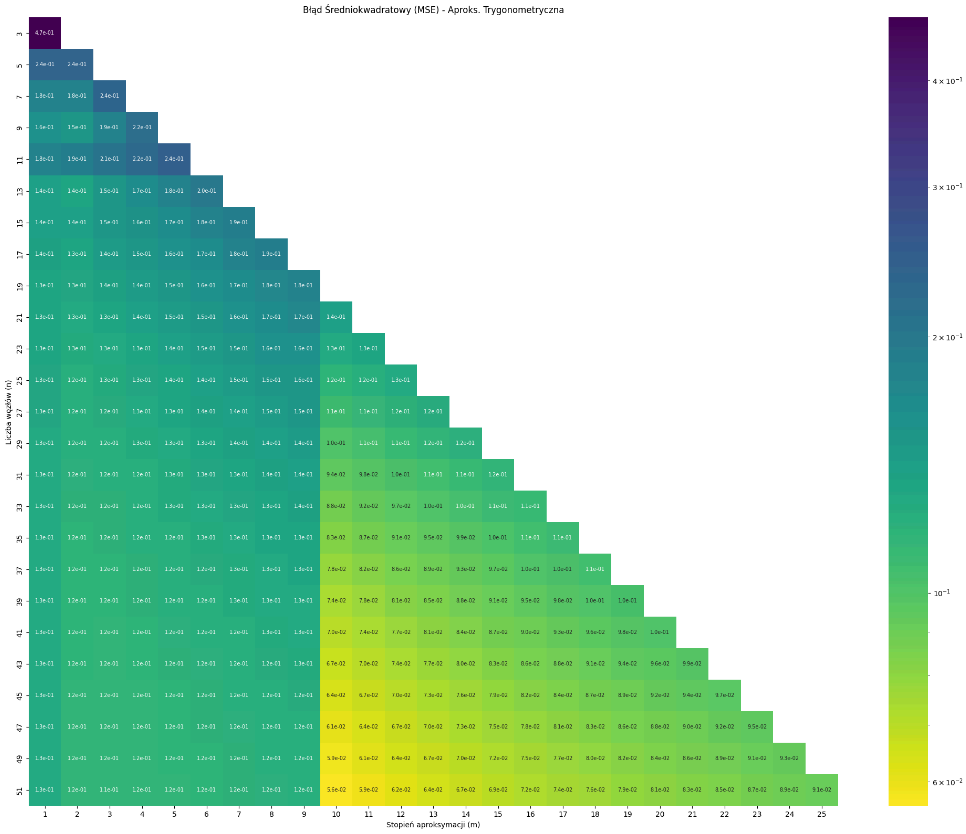
6. Analiza błędów aproksymacji

Poniższe wykresy w postaci *„map ciepła”* przestawiają dokładną skalę błędów aproksymacji **trygonometrycznej** dla błędu maksymalnego E_m (Rysunek 19) oraz średniokwadratowego $E_ś$ (Rysunek 20). Wyniki zostały przedstawione dla $n \leq 51$ w celu zachowania czytelności.

Można zauważyć, że wraz ze wzrostem stopnia **wielomianu trygonometrycznego** m (liczby harmonicznych) dla danej liczby węzłów n widoczna jest następująca zależność: do $m = 9$ wartości błędu rośnie bądź jest stała, podczas gdy dla $m = 10$ wartości błędu dokonują nagłego spadku, po czym zaczynają wzrastać.



Rysunek 19: Wizualizacja błędów aproksymacji trygonometrycznej - Błąd Makysmalny E_m

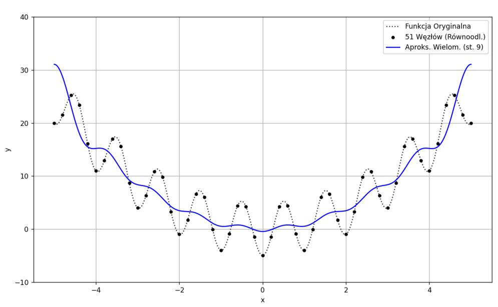


Rysunek 20: Wizualizacja błędów aproksymacji trygonometrycznej - Błąd Średnikowadratowy $E_ś$

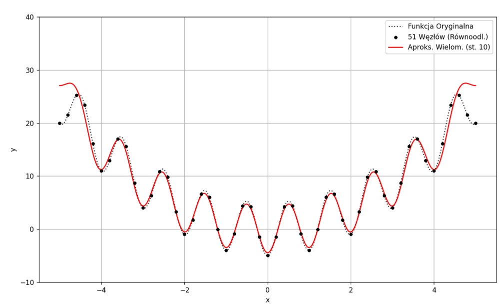
7. Analiza przypadków szczególnych

Nagły spadek błędu aproksymacji - korelacja pomiędzy ilością ekstremów

Dla $n = 10$ występuje nagły spadek błędu aproksymacji. Po analizie wykresów dla $m \in \{9, 10\}$ i stałej wartości n (Rysunek 21, Rysunek 22) można stwierdzić, że stopień wielomianu trygonometrycznego jest wystarczający do dopasowania się funkcji trygonometrycznych do kształtu funkcji. Jest to prawdopodobnie związane z faktem, że ilość ekstremów lokalnych funkcji na przedziale $[-5, 5]$ wynosi 21, która to liczba jest równa $2m + 1$ dla $m = 10$. **Ilość ekstremów kombinacji liniowej funkcji trygonometrycznych pokrywa się z ilością (z dokładnością do 1) ekstremów aproksymowanej funkcji**.



Rysunek 21: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 9 | Liczba węzłów n = 51



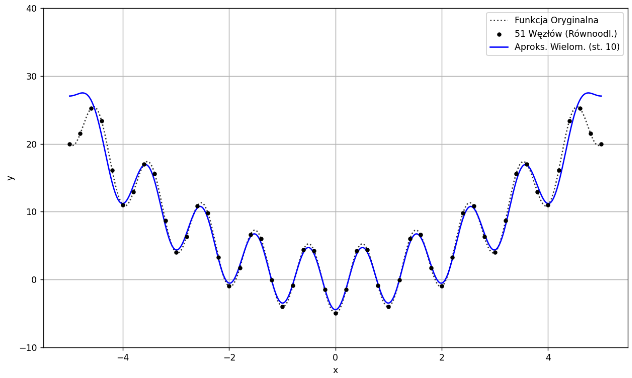
Rysunek 22: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego m = 10 | Liczba węzłów $n = 51$

Dokładność przybliżenia względem zmiennych parametrów

Dla ustalonej liczby węzłów, zwiększanie stopnia **wielomianu trygonometrycznego** m prowadzi do poprawy dokładności przybliżenia, tylko przez osiągnięcie wartości większej lub równej optymalnej $m = 10$. Dla $m > 10$ można zaobserwować **stabilizację lub niewielki wzrost błędu, a także możliwe oscylacje (szczególnie przybliżając funkcje nieokresowe lub z nieciągłościami - zjawisko Gibbsa)**.

Z kolei **przy stałym stopniu** trygonometrycznym m, zwiększanie liczby węzłów n zazwyczaj poprawia dokładność aproksymacji, pozwalając lepiej wyznaczyć współczynniki Fouriera.

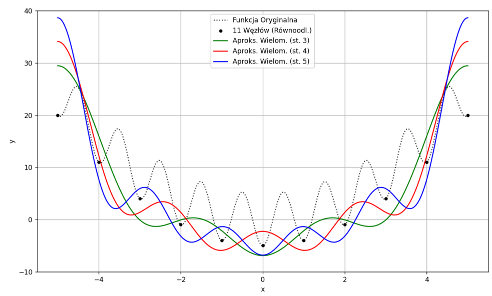
Aproksymacja trygonometryczna o najlepszym dopasowaniu



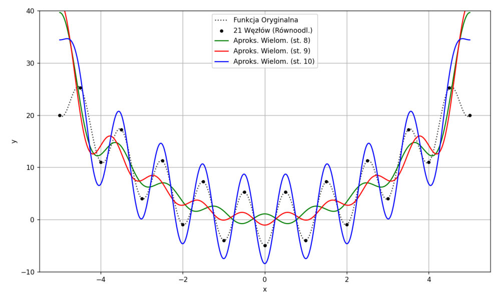
Rysunek 23: **Aproksymacja Trygonometryczna** o najmniejszym błędzie średniokwadratowym | $n = 51, m = 10$

Na podstawie Rysunek 20 można wyciągnąć wnioski, że najlepsze dopasowanie **aproksymacji trygonometrycznej**, wśród wartości $n \leq 51$ oraz $m \leq 25$, ma miejsce dla $n = 51$ oraz $m = 10$ z wartością błędu $\boldsymbol{E_ś \approx 0.056}$. W tym przypadku, liczba harmonicznych m przyjmuje wartość optymalną, co pozwala na stabilną aproksymację bez nadmiernego dopasowania do szumu czy artefaktów brzegowych.

Przypadek węzłów na ekstremach lokalnych funkcji



Rysunek 24: Aproksymacja Trygonometryczna | Węzły w lokalnych minimach | $n = 11, m = 3, 4, 5$



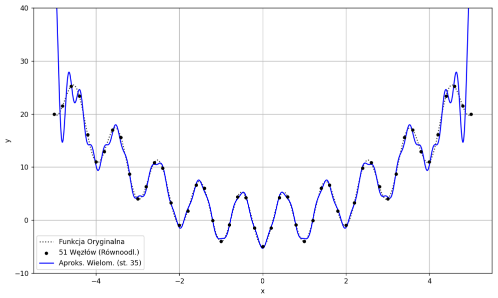
Rysunek 25: Aproksymacja Trygonometryczna | Węzły w lokalnych ekstremach | $n = 21, m = 8, 9, 10$

W przypadku występowania węzłów aproksymacji **na minimach lokalnych** funkcji f (liczba węzłów $n = 11$) (Rysunek 24) nie ma miejsca szczególnego zachowania funkcji aproksymującej ze względu na małą liczbę węzłów. Można jedynie zauważyć, że funkcja przebiega w pobliżu węzłów aproksymacji, co jest oczekiwanym zachowaniem.

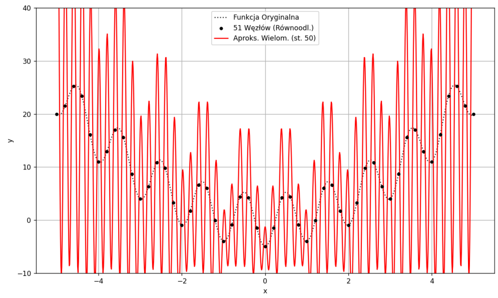
W przypadku **maksimów lokalnych** funkcji f (liczba węzłów $n = 21$) (figura po prawej), **aproksymacja trygonometryczna** podobnie stara się przejść blisko węzłów. Tak jak w wyżej opisanych przypadkach, przy zastosowaniu liczby harmonicznych $m = 10$ przybliżenie ulega gwałtownej poprawie.

Przypadek stopni wielomianów $m \geq \frac{n}{2}$

W przypadku, gdy wielomianu trygonometryczne przyjmują stopnie $m \geq 2$ rozpatrywany problem staje się źle uwarunkowany. Mimo, że istnieje możliwość wyznaczenia wielomianu iteracyjnie, aproksymacja staje się nierzetelna i widoczne są nagłe oscylacje oraz pogorszenie wartości aproksymacji. Efekty oscylacji, szczególnie widoczne przy krańcach przedziału, mogą także być związane z występowaniem **Efektu Gibbsa**.



Rysunek 26: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego $m = 35$ | Liczba węzłów $n = 51$



Rysunek 27: Wizualizacja Aproksymacji | Stopień wielomianu trygonometrycznego $m = 50$ | Liczba węzłów $n = 51$