

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## Sprawozdanie | Interpolacja - Zagadnienia Lagrange'a i Hermite'a

Paweł Fornagiel | Informatyka rok II | Grupa 5

Data Wykonania: 12.04.2025 | Data Oddania: 15.04.2025

### 1. Analiza przypadku

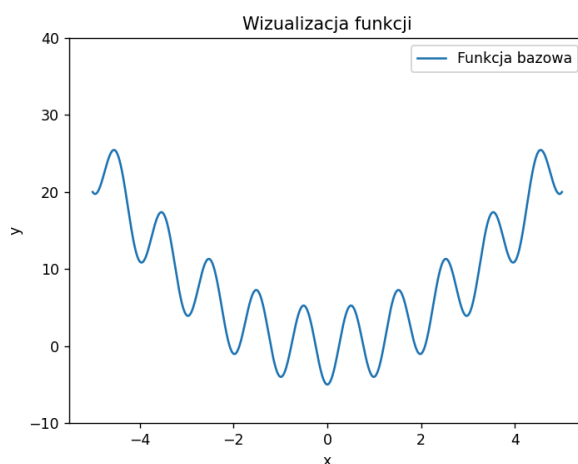
Dana jest funkcja

$$f(x) = x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right),$$

gdzie  $m = 5$  oraz  $k = 0.5$

określona dla  $x \in [-5; 5]$

(1.1)



Rysunek 1: Wykres funkcji  $f(x) = x^2 - m \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$

Niniejsze sprawozdanie podsumowuje i porównuje wyniki interpolacji wielomianowej dla zadanej funkcji w przypadku zagadnień **Hermite'a** oraz **Lagrange'a**. Celem jest analiza dokładności tych metod, wpływu rozmieszczenia węzłów (równoodległe vs. Czebyszewa) oraz obserwacja zjawisk takich jak efekt Rungego i problemy związane z błędami arytmetyki komputerowej.

Interpolacja zgodna z zagadnieniem Lagrange'a została przeprowadzona dwoma metodami:

- metodą **wzoru Lagrange'a**, konstruując wielomian interpolacyjny iteracyjnie jako sumę ważoną wielomianów bazowych Lagrange'a.
- metodą **Różnic Dzielonych** (ang. *Divided Differences*, Newtona), wykorzystującej postać Newtona wielomianu interpolacyjnego, obliczaną za pomocą ilorazów różnicowych.

Interpolacja zgodna z zagadnieniem Hermite'a została przeprowadzona z użyciem metody **Różnic Dzielonych** uwzględniając pierwszą pochodną interpolowanej funkcji daną wzorem:

$$f'(x) = 2x + \frac{m\pi}{k} \sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$
(1.2)

Interpolację przeprowadzono dla różnej liczby węzłów  $n$  - w przypadku poniższej analizy zdecydowano się ograniczyć do  $n \in \{5, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 25, 40, 50\}$ , co w wystarczającym stopniu pozwoliło zobrazować różnice pomiędzy zagadnieniami.

Dla każdego przypadku interpolacji porównano wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległych oraz pokrywających się z miejscami zerowi wielomianu Czebyszewa.

Dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję, wyznaczono za pomocą metryk przedstawionych w Sekcja 2.

## 2. Wyznaczenie dokładności interpolacji

Pomiar dokładności przeprowadzony został, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolacji dla  $m = 1000$  równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale  $x \in [-5; 5]$  z wykorzystaniem niżej wymienionych wskaźników

### 2.1. Błąd średniokwadratowy

Błąd średniokwadratowy wyrażony jest wzorem

$$E_s = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^l (W(x_i) - f(x_i))^2}}{l} \quad (2.1)$$

, gdzie

- $l$  - liczba punktów pomiaru błędu
- $f$  - funkcja z Wzór (1.1)
- $W$  - funkcja wielomianu interpolacji
- $x_i$  - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

### 2.2. Błąd maksymalny

Błąd maksymalny wyrażony jest wzorem

$$E_m = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} (|W(x_i) - f(x_i)|) \quad (2.2)$$

, gdzie

- $l$  - liczba punktów pomiaru błędu
- $f$  - funkcja z Wzór (1.1)
- $W$  - funkcja wielomianu interpolacji
- $x_i$  - punkt, w którym dokonywany jest pomiar

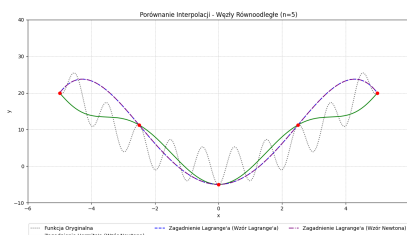
## 3. Dane techniczne

Zadanie zostało przeprowadzone z użyciem narzędzi o następujących parametrach:

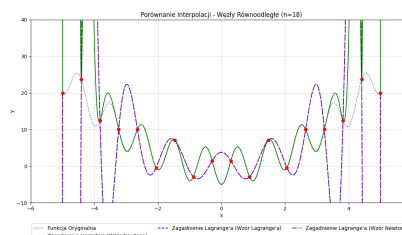
- Komputer HP EliteBook 840 G6:
  - System operacyjny: Windows 11 x64
  - Procesor Intel(R) Core(TM) i5-8365U CPU 1.60GHz 1.90 GHz
  - Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyter Notebook
- Język: Python 3.9.20
- Biblioteki języka: Numpy, Pandas, Matplotlib

## 4. Wizualizacja interpolacji dla wybranych liczb węzłów $n$

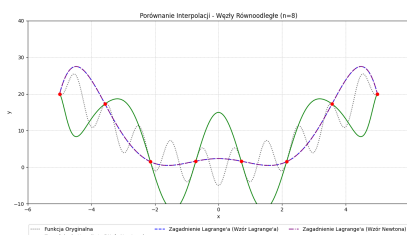
### 4.1. Węzły Równoodległe



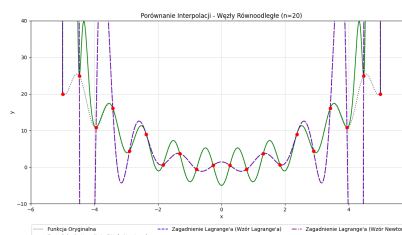
Rysunek 2: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 5



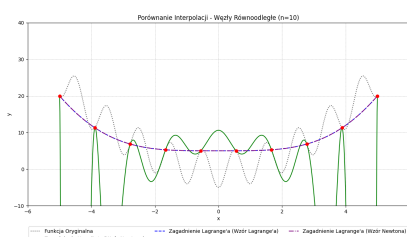
Rysunek 7: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 18



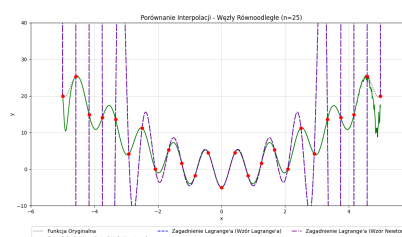
Rysunek 3: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 8



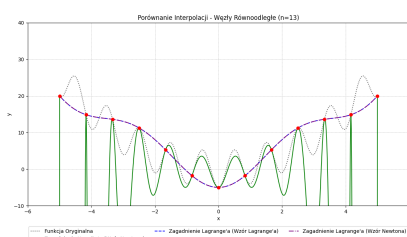
Rysunek 8: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 20



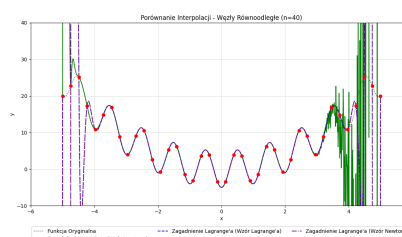
Rysunek 4: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 10



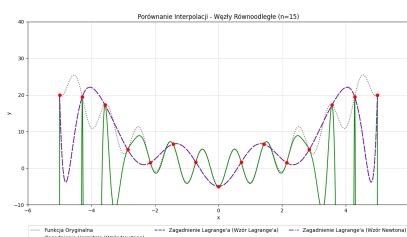
Rysunek 9: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 25



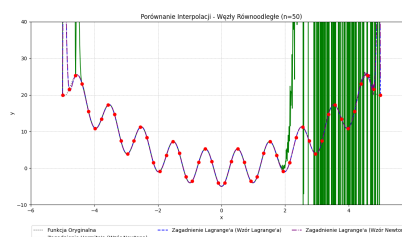
Rysunek 5: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 13



Rysunek 10: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 40

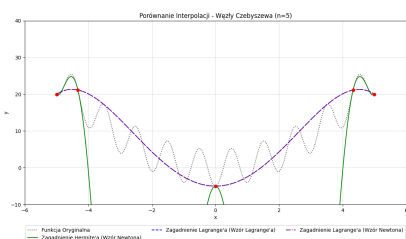


Rysunek 6: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 15

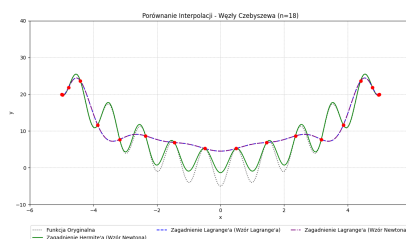


Rysunek 11: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe | Liczba węzłów = 50

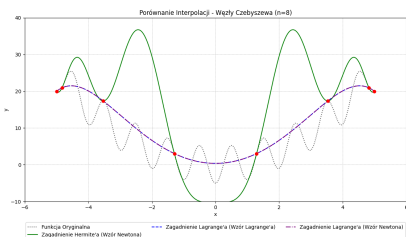
## 4.2. Węzły Czebyszewa



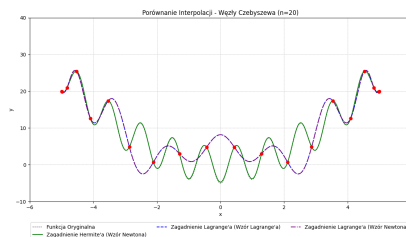
Rysunek 12: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 5



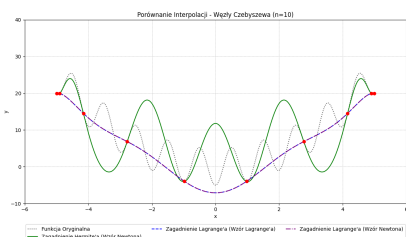
Rysunek 17: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 18



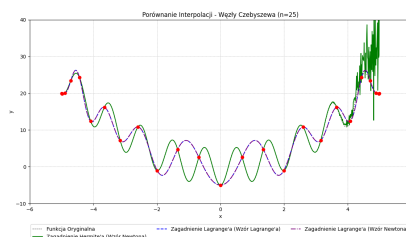
Rysunek 13: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 8



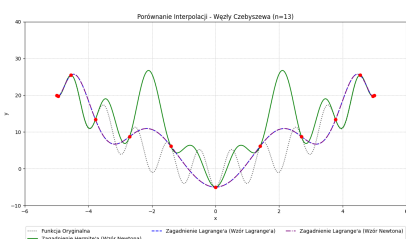
Rysunek 18: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 20



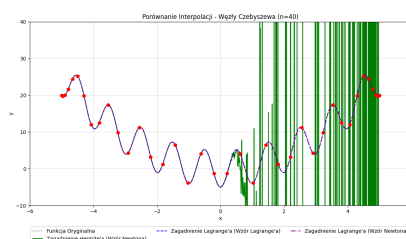
Rysunek 14: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 10



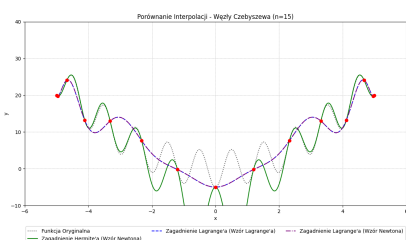
Rysunek 19: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 25



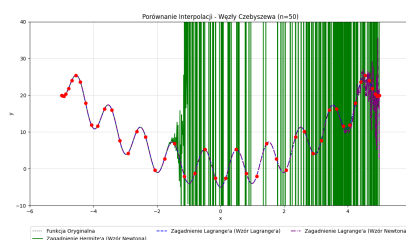
Rysunek 15: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 13



Rysunek 20: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 40



Rysunek 16: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 15



Rysunek 21: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Czebyszewa | Liczba węzłów = 50

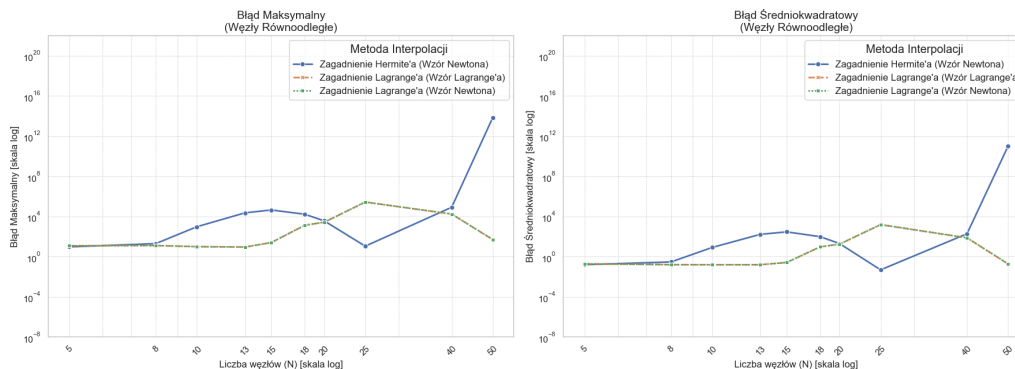
## 5. Porównanie wyników błędów interpolacji

Tabela 1 oraz Rysunek 23, Rysunek 22 przedstawiają błędy dla interpolacji zgodnie z zagadnieniami Lagrange'a oraz Hermite'a, umożliwiając bezpośrednie porównanie błędów maksymalnego i Średniokwadratowego dla wybranych liczb węzłów  $n$  i obu typów rozmieszczenia węzłów.

Porównanie błędów interpolacji Lagrange'a, Newtona i Hermite'a												
N	Lagrange (Wzór Lagrange'a)				Lagrange (Wzór Newtona)				Hermite (Wzór Newtona)			
	Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa		Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa		Węzły Równoodległe		Węzły Czebyszewa	
	$E_m$	$E_s$	$E_m$	$E_s$	$E_m$	$E_s$	$E_m$	$E_s$	$E_m$	$E_s$	$E_m$	$E_s$
5	12.3422	0.1937	9.6136	0.1538	12.3422	0.1937	9.6136	0.1538	9.4902	0.1594	182.4011	3.2817
8	12.8234	0.1599	9.5401	0.1447	12.8234	0.1599	9.5401	0.1447	19.9380	0.3002	31.9845	0.4912
10	9.9975	0.1580	11.4844	0.1584	9.9975	0.1580	11.4844	0.1584	945.8090	8.2141	18.3348	0.2683
13	9.0784	0.1580	11.6917	0.1639	9.0784	0.1580	11.6917	0.1639	23202.6130	168.0571	27.0396	0.2781
15	25.5350	0.2655	10.0216	0.1387	25.5350	0.2655	10.0216	0.1387	44551.9556	293.6789	26.5474	0.2602
18	1352.4200	9.5209	10.4109	0.1594	1352.4200	9.5209	10.4109	0.1594	16740.6276	98.1436	3.6483	0.0392
20	2682.4142	17.6888	13.6283	0.1593	2682.4142	17.6888	13.6283	0.1593	3671.6354	20.1495	0.3342	0.0032
25	274492.0911	1554.4210	10.9438	0.1211	274492.0911	1554.4210	10.9438	0.1211	11.1294	0.0488	39.6411	0.0852
40	17530.3061	75.2057	0.0504	0.0007	17530.3061	75.2057	0.1115	0.0008	83489.7119	190.8583	1.106e+11	2.490e+08
50	50.6894	0.1900	5.205e-06	7.933e-08	50.8731	0.1920	17.3461	0.0460	6.925e+13	1.008e+11	1.345e+21	3.642e+18

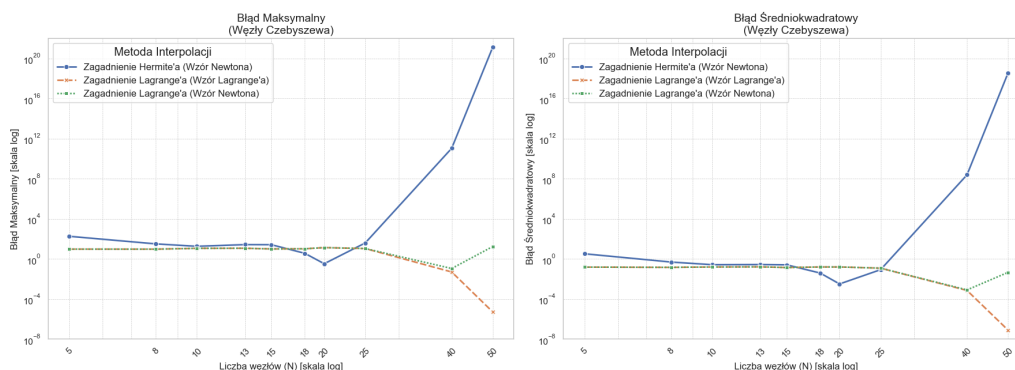
Tabela 1: Porównanie błędów interpolacji zagadnienia Lagrange'a i Hermite'a dla wybranych liczb węzłów  $n$ .

Porównanie Błędów Interpolacji - Węzły Równoodległe



Rysunek 22: Wykres błędów wielomianu interpolacji | Węzły Równoodległe

Porównanie Błędów Interpolacji - Węzły Czebyszewa



Rysunek 23: Wykres błędów wielomianu interpolacji | Węzły Czebyszewa

Teoretycznie, interpolacja wykonana zgodnie z zagadnieniem Lagrange'a obydwoma metodami powinna dawać identyczne wielomiany interpolacyjne i tym samym identyczne błędy dla obliczeń dokładnych. W praktyce, dla większej liczby węzłów, mogą pojawić się różnice wynikające z **błędów numerycznych**, szczególnie w implementacji **metody Newtona** opartej na ilorazach różnicowych, co jest widoczne w danych dla  $n=50$  (Rysunek 11, Rysunek 21).

W przypadku interpolacji zgodnej z zagadnieniem Hermite'a, przez potrzebę wykonania dwukrotnej liczby obliczeń podczas korzystania z metody Różnic Dzielonych, **błądu arytmetyczne** zaczynają występować znacząco wcześniej niż ma to miejsce w przypadku zagadnienia Lagrange'a, co czyni interpolację niemiarodajną już dla  $n > 25$  (Rysunek 20), w przeciwieństwie do tej metody w przypadku zagadnienia Lagrange'a, gdzie błędy arytmetyczne są widoczne dopiero dla  $n \approx 50$ .

Dla rozpatrywanej funkcji, interpolacja zagadnienia Hermite'a jest skuteczniejsza w przypadku węzłów Czebyszewa  $n \approx 20$  (Rysunek 18) oraz węzłów równoodległych dla  $n \approx 25$ , co obrazują Rysunek 23 oraz Rysunek 22, mimo błędów obliczeniowych spowodowanych arytmetyką widocznych na wykresie (Rysunek 9). W innych przypadkach, interpolacja zagadnieniem Lagrange'a daje mniejsze błędy względem przyjętych metryk.

## 6. Analiza porównawcza omawianych przypadków interpolacji

### Charakterystyka Wielomianów Interpolacji

W przypadku analizowanej funkcji, można zauważyć, że w przypadku małej liczby węzłów  $n = 5, 8, 10$  (Rysunek 2, Rysunek 3), dla węzłów równoodległych jak i Czebyszewa, interpolacja **Hermite'a** skutkuje wielomianem charakteryzującym się **znacznymi oscylacjami**, podczas, gdy interpolacja **Lagrange'a** daje wielomian o **gładkim przebiegu**. W miarę wzrostu liczby węzłów, interpolacja Hermite'a zaczyna lepiej dopasowywać się do przebiegu zmienności funkcji  $f$ , podczas gdy w interpolacji Lagrange'a zaczyna być widoczny efekt Rungego oraz silne oscylacje dla węzłów równoodległych (Rysunek 9).

### Effekt Rungego

Zjawisko Rungego, charakteryzujące się dużymi oscylacjami wielomianu interpolacyjnego w pobliżu krańców przedziału, jest wyraźnie widoczne dla **węzłów równoodległych** we wszystkich testowanych metodach.

- W interpolacji **Lagrange'a/Newtona** efekt ten zaczyna być zauważalny dla  $n \approx 15$  i nasila się gwałtownie dla większych  $n$  (Rysunek 8, Rysunek 9).
- W interpolacji **Hermite'a** efekt Rungego pojawia się wcześniej, już dla  $n \approx 8$  (Rysunek 3), a jego maksimum (największe błędy) obserwuje się w okolicach  $n = 15$  (Rysunek 6). Po tym punkcie, dla węzłów równoodległych, błąd chwilowo maleje (aż do  $n \approx 25$ ), zanim ponownie wzrośnie z powodu błędów numerycznych.

### Błędy Arytmetyczne

Wraz ze wzrostem liczby węzłów  $n$ , obliczenia, wykonane metodą Newtona, stają się podatne na błędy arytmetyki komputerowej i problemy ze stabilnością numeryczną.

- W interpolacji **Lagrange'a** metodą Newtona problemy te stają się widoczne dla  $n > 40$  (Rysunek 10). Propagacja błędów zaokrągleń w rekurencyjnych obliczeniach ilorazów różnicowych prowadzi do dużych niedokładności.
- W interpolacji **Hermite'a**, która wykorzystuje bardziej złożoną tabelę ilorazów różnicowych (uwzględniając pochodne i powtórzone węzły), błędy numeryczne pojawiają się znacząco wcześniej, już dla  $n \approx 20$  (dla węzłów Czebyszewa, Rysunek 18) lub  $n \approx 25$  (dla węzłów

równoodległych, Rysunek 9). Prowadzi to do gwałtownego wzrostu błędów dla  $n > 20 - 30$ , jak widać w tabeli Tabela 1 dla  $n = 30$  i  $n = 50$ .

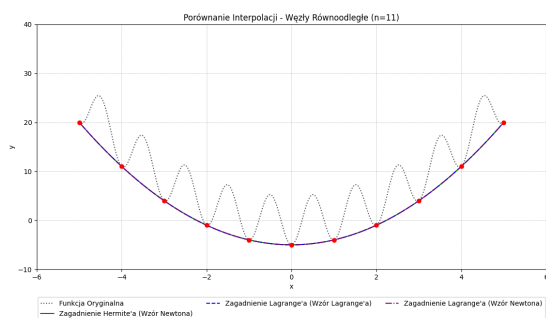
### Najlepsze Dopasowanie Wielomianu Interpolującego

Najlepsze dopasowanie wielomianu interpolującego można zauważyć w przypadku zagadnienia Lagrange'a dla  $n \approx 40$  używając wzoru Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa. W tym przypadku błąd średniokwadratowy wynosi  $E_g = 0.0007$  (Tabela 1), co jest najmniejszą wartością błędu wśród testowanej liczby węzłów.

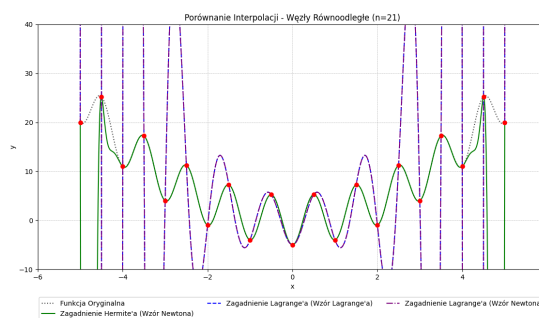
Interpolacja zgodna z zagadnieniem Hermite'a prowadzi do akceptowalnego dopasowania wielomianu do funkcji w przypadku znacząco mniejszej liczby węzłów  $n = 20$ . W tym przypadku błąd średniokwadratowy wynosi  $E_g = 0.0032$  (Tabela 1), co osiągnięte jest dzięki wykorzystaniu przez zagadnienie Hermite'a informacji o pierwszej pochodnej interpolowanej funkcji  $f$ .

Fakt, że interpolacja zgodna z zagadnieniem Lagrange'a daje globalnie znacząco lepiej dopasowany do funkcji wielomian względem zagadnienia Hermite'a spowodowane jest występowaniem **błędów arytmetyki**, opisanych w Sekcja 5.

## 7. Analiza przypadków szczególnych



Rysunek 24: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe na minimach lokalnych | Liczba węzłów = 11



Rysunek 25: Porównanie Metod Interpolacji | Węzły Równoodległe na ekstremach lokalnych | Liczba węzłów = 21

### Występowanie Węzłów Interpolacji na Minimach Lokalnych $f$

W przypadku występowania węzłów interpolacji na minimach lokalnych funkcji  $f$  (Rysunek 24), każda z metod interpolacji daje ten sam efekt - wynikowy wielomian interpolacyjny jest funkcją gładką, która przechodzi przez wszystkie węzły bez gwałtownych oscylacji.

### Występowanie Węzłów Interpolacji na Ekstremach Lokalnych $f$

W przypadku występowania węzłów interpolacji na ekstremach lokalnych funkcji  $f$  (Rysunek 25) w znacznym stopniu widoczny jest **efekt Rungego**. W przypadku interpolacji Hermite'a występuje on wyłącznie na krańcach przedziału funkcji interpolowanej, podczas gdy w przypadku interpolacji Lagrange'a, efekt ten jest widoczny w znacznej części przebiegu funkcji.

## 8. Wnioski

### Wpływ rozmieszczenia węzłów na dokładność interpolacji

Interpolacja z użyciem węzłów **równoodległych** charakteryzuje się większą podatnością na występowanie efektu Rungego, który objawia się gwałtownymi oscylacjami interpolowanego. Dla stosunkowo małych wartości liczby węzłów (np. ( $n=5, 8, 10$ )) oba podejścia (Lagrange'a oraz



Hermite'a) dają przyzwoite rezultaty, jednak przy rosnącej liczbie węzłów oscylacje te powodują pogorszenie dokładności interpolacji.

Rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu **Czebyszewa** znacząco ogranicza problem oscylacji, dzięki czemu otrzymane wielomiany interpolacyjne są bardziej zbliżone do oryginalnej funkcji na całym przedziale. Takie podejście wykazuje wyższą dokładność, co potwierdza minimalne wartości błędu średniokwadratowego, szczególnie zauważalne dla metody Lagrange'a).

### **Zbieżność interpolacji i stabilność numeryczna**

W teorii, interpolacja zgodna z zagadnieniem Lagrange'a powinna generować identyczne wielomiany niezależnie od przyjętej metody konstrukcji (zór Lagrange'a lub wzór Newtona). W praktyce jednak zbieżność otrzymanych wielomianów jest ograniczona problemami arytmetyki komputerowej, zwłaszcza w implementacji metody Newtona.

Interpolacja Hermite'a, która oprócz wartości funkcji korzysta również z informacji o jej pierwszej pochodnej, teoretycznie umożliwia uzyskanie lepszego dopasowania dla mniejszej liczby węzłów – jest to szczególnie użyteczne w przypadkach, gdy funkcja zmienia się szybko lub gdy znana jest jej analityczna pochodna. Jednakże podwójna liczba obliczeń powoduje, że już dla ( $n > 20, 25$ ) błędy numeryczne zaczynają dominować, co skutkuje pogorszeniem zbieżności interpolacji.

### **Zależność wyboru metody implementacyjnej od potrzeb i zastosowań**

**Interpolacja Lagrange'a** jest bardziej ogólna i zapewnia lepszą stabilność numeryczną przy dużej liczbie węzłów, zwłaszcza gdy użyte są węzły Czebyszewa. Metoda ta powinna być preferowana w przypadkach, gdzie wymagane jest globalne przybliżenie funkcji bez konieczności uwzględniania informacji o pochodnych.

**Interpolacja Hermite'a** będzie miała zastosowanie, gdy oprócz wartości funkcji dostępne są również analityczne pochodne. Pozwala to na uzyskanie wyższego stopnia dokładności przy mniejszej liczbie punktów, należy jednak pamiętać o zwiększonej podatności na błędy numeryczne, co może ograniczać jej użyteczność w zadaniach wymagających wysokiej stabilności obliczeniowej.