Całki podstawowe

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int a\,dx = ax + C, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Wzory wynikające z całek podstawowych

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+p^2}\,dx = \frac{1}{p}\,\arctan\frac{x}{p} + C,\ p \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{p^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{p}\arcsin\frac{x}{p} + C,\ p \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+p}}\,dx = \ln|\,x + \sqrt{x^2+p}\,| + C,\ p \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left(\tan\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right) + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sqrt{x^2+p}\,dx = \frac{1}{2}\left[p\ln|\,x+\sqrt{x^2+p}\,| + x\sqrt{x^2+p}\right] + C, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{p^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[p^2\arcsin\frac{x}{p} + x\sqrt{p^2-x^2}\right] + C, \quad p \in \mathbb{R}$$

Podstawienia Całek Niewymiernych

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \qquad \text{gdzie } a \neq 0,\ \Delta = b^2 - 4ac \neq 0,$$

oraz R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych

Powyższą całkę rozwiązujemy używając **podstawień Eulera**:

I. $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} - t$, jeśli $a > 0$,

II. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$, jeśli $c > 0$,

III. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t$, jeśli $\Delta > 0$.

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^k \sqrt{ax^2+bx+c}},\, dx,\ k \in \mathbb{Z} \quad \to \quad t = \frac{1}{x-x_0} \quad \to$$ Metoda Współczynników Nieoznaczonych

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx \quad \to$$ Metoda Współczynników Nieoznaczonych

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx \quad \to \quad t^s = \left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|,\ s = \mathrm{NWW}(q_1, \ldots, q_n)$$

gdzie R jest funkcją $n+1$ zmiennych, a NWW - największa wspólna wielokrotność

Całki trygonometryczne

Usuwanie potęg z funkcji sinus i cosinus

- Potęgi parzyste

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- Potęgi nieparzyste

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx \quad \to \quad t = \cos x$$

$$\int \cos^n x \sin^m x\, dx \quad \to \quad t = \sin x$$

n - potęga nieparzysta, m - dowolna potęga

Iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\sin[(\alpha+\beta)x] + \sin[(\alpha-\beta)x]\right]$$

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos[(\alpha-\beta)x] - \cos[(\alpha+\beta)x]\right]$$

$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x]\right]$$

Podstawienie tangensa połówkowego

Zamienia całki o wyrazach $\boldsymbol{\sin x}$ i $\boldsymbol{\cos x}$ na całki funkcji wymiernych

$$t = \tan\frac{x}{2},\quad x = 2\text{arctan}\ t,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Podstawienie tangensowe

Zamienia całki o wyrazach $\boldsymbol{\sin^2 x}$, $\boldsymbol{\cos^2 x}$, $\boldsymbol{\sin x \cos x}$, $\boldsymbol{\tan x}$, $\boldsymbol{\cot x}$ na całki funkcji wymiernych

$$t = \tan\ x,\quad x = \text{arctan}\ t,\quad dx = \frac{dt}{1+t^2},\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\quad \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

Wybrane Wzory rekurencyjne

$$\int \sin^n(px)dx = -\frac{\sin^{n-1}(px)\cos(px)}{np} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(px)dx,$$

$$\int \cos^n(px)dx = \frac{\cos^{n-1}(px)\sin(px)}{np} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(px)dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+p^2)^n} = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{x}{(x^2+p^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\int \frac{1}{(x^2+p^2)^{n-1}}$$

Karty opracowane na podstawie skryptu dr Frydrycha, OpenAGH oraz ćwiczeń z mgr Bratuszewską