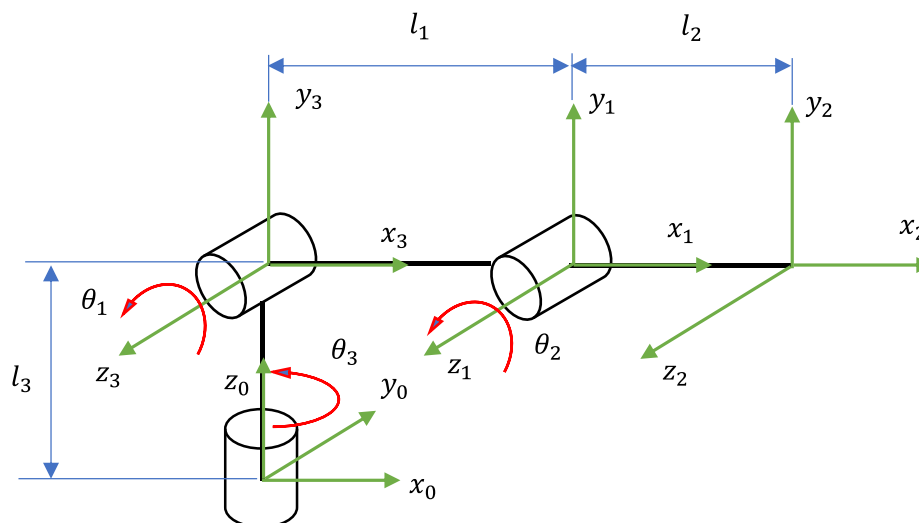


Advance Dynamic Final project report

Q1: Derive forward kinematics relationship, given all joint angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, what's the end effector position (x,y,z) as a function of joint angles and the robot parameters?

Solution

ทำการกำหนด Denavit-Hartenberg parameters โดยอ้างอิงจากรูปที่ 1 ซึ่งเราจะสามารถกำหนด Denavit-Hartenberg parameters (Robot parameters) ได้ดังตารางที่ 1

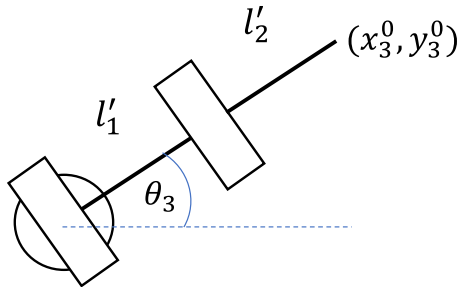


รูปที่ 1. โมเดลสำหรับการกำหนด Denavit-Hartenberg parameters

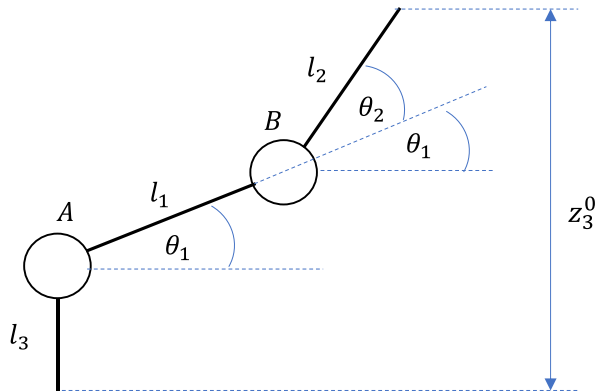
	θ	α	r	d
1	θ_1	0°	l_1	0
2	θ_2	0°	l_2	0
3	θ_3	90°	0	l_3

ตารางที่ 1. Denavit-Hartenberg parameters

ทำการหาสมการ Forward kinematics ด้วยการใช้ Graphical Method โดยอ้างอิงจากรูปที่ 2 และ รูปที่ 3



รูปที่ 2 มุมมองด้านบนของโมเดล



รูปที่ 3 มุมมองด้านข้างของโมเดล

$$x_3^0 = (l'_1 + l'_2) \cos \theta_3 \quad (1)$$

$$y_3^0 = (l'_1 + l'_2) \sin \theta_3 \quad (2)$$

$$l'_1 = l_1 \cos \theta_1 \quad (3)$$

$$l'_2 = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4)$$

และจากสมการที่ 1,2,3 และ 4 เราจะได้ Forward Kinematic ของโมเดลดังแสดงในสมการด้านล่าง

$$x_3^0 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \cos \theta_3$$

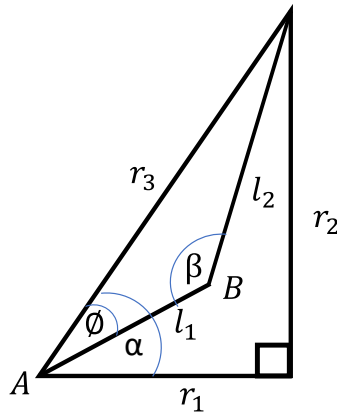
$$y_3^0 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \sin \theta_3$$

$$z_3^0 = l_3 + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Q2: Derive inverse kinematics relationship, given the end effector position (x,y,z), what are the joint angles (theta1, theta2, theta3) as a function of (x,y,z) and the robot parameters?

Solution

ทำการหาสมการ Forward kinematics ด้วยการใช้ Graphical Method โดยอ้างอิงจากรูปที่ 2 รูปที่ 3 และ รูปที่ 4



รูปที่ 4. แสดงสามเหลี่ยมเพื่อการหาสมการ Inverse kinematics

$$\theta_1 = \alpha - \phi \quad (5)$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \beta \quad (6)$$

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (7)$$

$$r_1 = \sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2} \quad (8)$$

$$r_2 = z_3^0 - l_3 \quad (9)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (10)$$

$$l_2^2 = l_1^2 + r_3^2 - 2l_1r_3 \cos \phi$$

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{l_2^2 - l_1^2 - r_3^2}{-2l_1r_3} \right) \quad (11)$$

$$r_3^2 = l_1^2 + r_2^2 - 2l_1l_2 \cos \beta$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 - l_1^2 - l_2^2}{-2l_1l_2} \right) \quad (12)$$

จากสมการ 5-12 เราจะได้ Inverse kinematics ดังแสดงด้านล่าง

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{y_3^0}{x_3^0} \right)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{z_3^0 - l_0}{\sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2}} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{l_2^2 - l_1^2 - r_3^2}{-2l_1r_3} \right)$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{r_3^2 - l_1^2 - l_2^2}{-2l_1l_2} \right)$$

ตรวจสอบ Forward kinematic และ Inverse kinematic โดยใช้เส้นทางการเคลื่อนที่ (path of motion) ดังสมการด้านล่าง

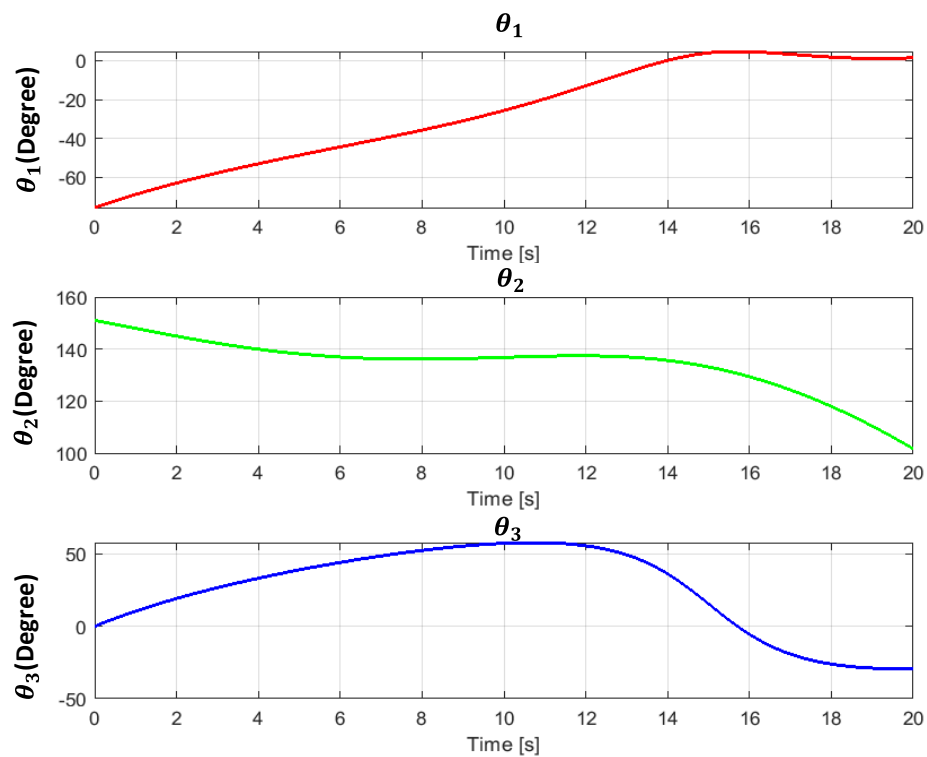
$$x = 0.5 \cos(t/5) + 0.05t$$

$$y = 0.5 \sin(t/5) + 0.05t$$

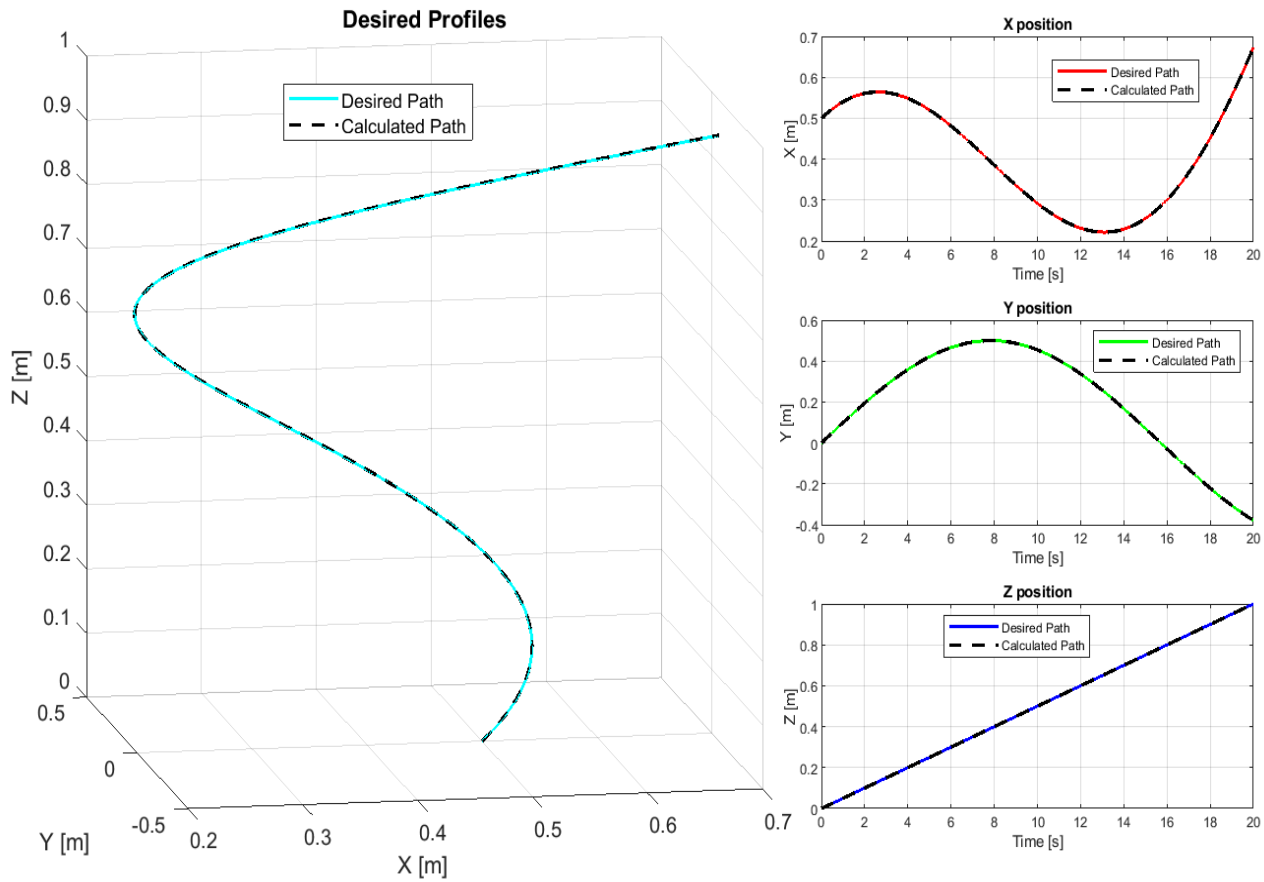
$$z = \frac{t}{20}$$

$$t = \text{time(second)}$$

ผลการตรวจสอบเป็นไปดังรูปที่ 5. และ รูปที่ 6. ซึ่งยืนยันได้ว่าทั้ง Forward kinematic และ Inverse kinematic นั้นถูกต้อง



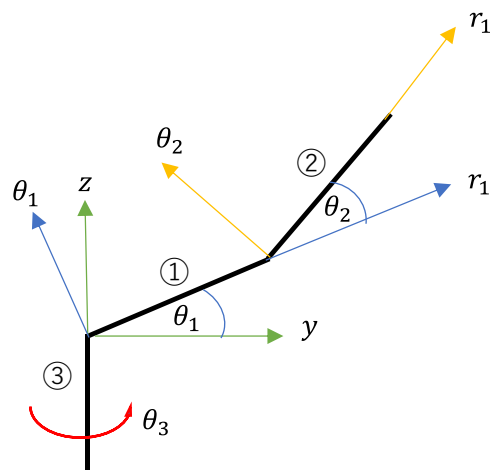
รูปที่ 5. ค่าของมุมซึ่งหาได้จากการแทนค่า x, y, z ซึ่งได้จาก Path of motion ลงใน Inverse kinematic equation



รูปที่ 6. เส้นการเคลื่อนที่ที่ต้องการและการตรวจสอบ Forward kinematic
โดยใช้ค่ามุมที่ได้จาก Inverse kinematic แทนค่าลงไปใน Forward kinematic equation
แล้วทำการ plot ค่าเทียบกับค่าซึ่งได้จาก Path of motion โดยตรง

Q3: Derive the equations of motion (EOMs) of this 3-DOFs Scalar Robot Manipulator.

ทำการกำหนดเฟรมของระบบดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7. เฟรมของระบบสำหรับการหาสมการการเคลื่อนที่ (EOMs)

จากตัวแปรที่โจทย์กำหนดเราจะสามารถหาสมการพลังงานจลน์ของลิ้งค์แต่ละลิ้งค์ได้ดังแสดงข้างล่าง

$$T_1 = \frac{1}{2} (I_{O_1} \dot{\theta}_3^2 \cos^2 \theta_1 + I_{O_1} \dot{\theta}_1^2) \quad (13)$$

$I_{O_1} = I_{c_1} + m_1 l_{c_1}^2$ (I_{O_1} is moment of inertia of link 1 around rotation point)

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c_2}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_{c_2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right. \\ \left. + (l_{c_2} \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_3 \cos \theta_1)^2 \right] \\ + \frac{1}{2} [I_{c_2} \dot{\theta}_3^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + I_{c_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \quad (14)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{c_3} \dot{\theta}_3^2 \quad (15)$$

สมการพลังงานจลน์ของมอเตอร์ในแต่ละลิ้งค์

$$T'_1 = \frac{1}{2} k_1^2 I_{M_1} \dot{\theta}_1^2 \quad (16)$$

$$T'_2 = \frac{1}{2} M_2 [l_1^2 \dot{\theta}_3^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2] + \frac{1}{2} I_{M_2} (\dot{\theta}_1 + k_2 \dot{\theta}_2)^2 \quad (17)$$

$$T'_3 = \frac{1}{2} k_3^2 I_{M_3} \dot{\theta}_3^2 \quad (18)$$

สมการพลังงานศักย์

$$V = m_1 g l_{c_1} \sin \theta_1 + m_2 g [l_1 \sin \theta_1 + l_{c_2} \sin(\theta_1 + \theta_2)] + M_2 g l_1 \sin \theta_1 \quad (19)$$

จากสมการที่ 13-19 นำมาแทนค่าใน Lagrange Equation เพื่อหา EOMs

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_j}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_j}{\partial q_i} + \frac{\partial V_j}{\partial q_i} = Q_i$$

EOM (1)

$$[I_O + m_2 (l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos \theta_2) + I_{c_2} + k_1^2 I_{M_1} + M_2 l_1^2 + I_{M_1}] \ddot{\theta}_1 \\ + [m_2 (l_{c_2}^2 + l_1 l_{c_2} \cos \theta_2) + I_{c_2} + I_{M_2} k_2] \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_{c_2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ + [m [l_{c_2} \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin \theta_1] [l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1] \\ + [I_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_1 \sin \theta_1 (I_{c_1} + M_2 l_1^2)]] \dot{\theta}_3^2 \\ + m_1 g l_{c_1} \cos \theta_1 + m_2 g [l_1 \cos \theta_1 + l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2)] + M_2 g l_1 \cos \theta_1 = u_1$$

EOM (2)

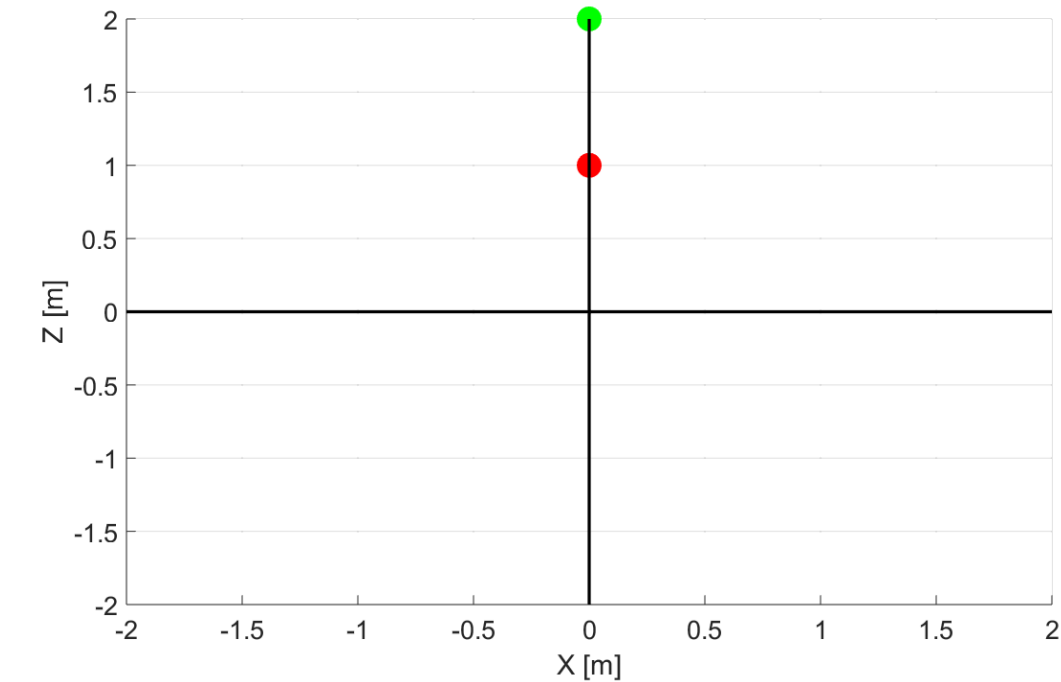
$$\begin{aligned} & [m_2(l_{c_2}^2 + l_1 l_{c_2} \cos \theta_2) + I_{c_1} + I_{M_2} k_2^2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_{c_2}^2 + I_{c_2} + I_{M_2} k_2^2] \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_{c_2} \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ & + [m_2 l_{c_2} \sin(\theta_1 + \theta_2) (l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1) \\ & + I_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)] \dot{\theta}_3^2 + m_2 g l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) = u_2 \end{aligned}$$

EOM (3)

$$\begin{aligned} & [I_{c_1} \cos^2 \theta_1 + m_2 (l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1)^2 + I_{c_1} \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + I_{c_3} + M_2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 \\ & + k_3^2 I_{M_3}] \ddot{\theta}_3 \\ & + [-2I_{O_1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ & - 2m_2 (l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1) (l_{c_2} \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) \\ & - 2I_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - 2M_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1] \dot{\theta}_3 = u_3 \end{aligned}$$

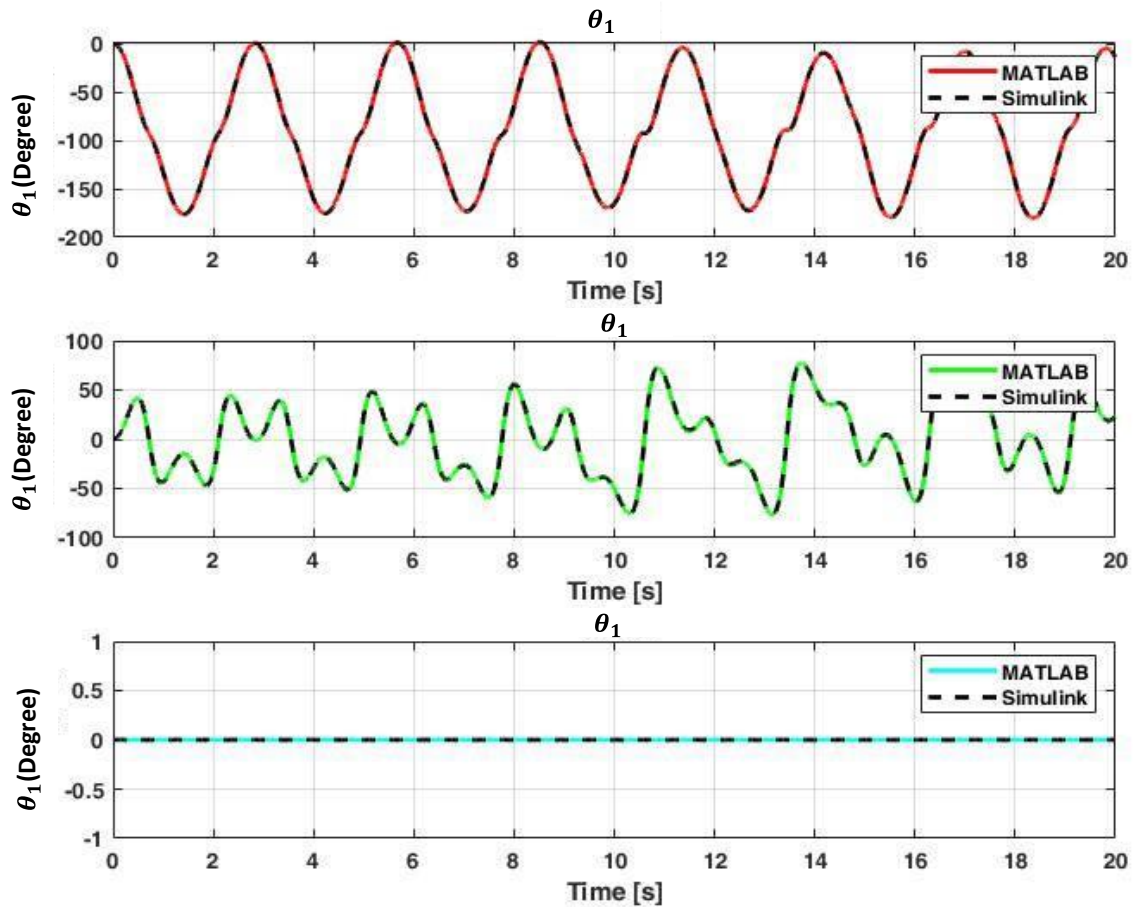
จัดรูปของสมการให้สามารถแสดงผลในรูปของ matrix ได้ เพื่อนำไปใช้งานใน Matlab ต่อไป (อ้างอิง Matlab code ในภาคผนวก)

ตรวจสอบความถูกต้องของ EOMs ด้วยการกำหนดค่า $\theta_1 = 90$ deg, $\theta_2 = 0$ deg, $\theta_3 = 0$ deg ซึ่งจะได้ตำแหน่งของแขนหุ่นยนต์ค้างอยู่ตลอดเวลาดังรูปที่ 8



รูปที่ 8. แสดงภาพของแขนหุ่นยนต์เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นตามโจทย์ที่ได้รับ

นอกจากนั้นทางกลุ่มได้มีการทำการจำลองเพิ่มเติมจากที่โจทย์กำหนด ด้วยการจำลองโดย Matlab เทียบกับ Simulink เมื่อกำหนดค่าตั้งต้นใหม่เป็น $\theta_1 = 0 \text{ deg}$, $\theta_2 = 0 \text{ deg}$, $\theta_3 = 0 \text{ deg}$ โดยผลที่ได้จะเป็นไปตามรูปที่ 9 สำหรับวิดีโอที่ได้จากการจำลองสมการสามารถอ้างอิงได้จากไฟล์ Matlab Freefall.wmv และ Simulink Freefall.mp4

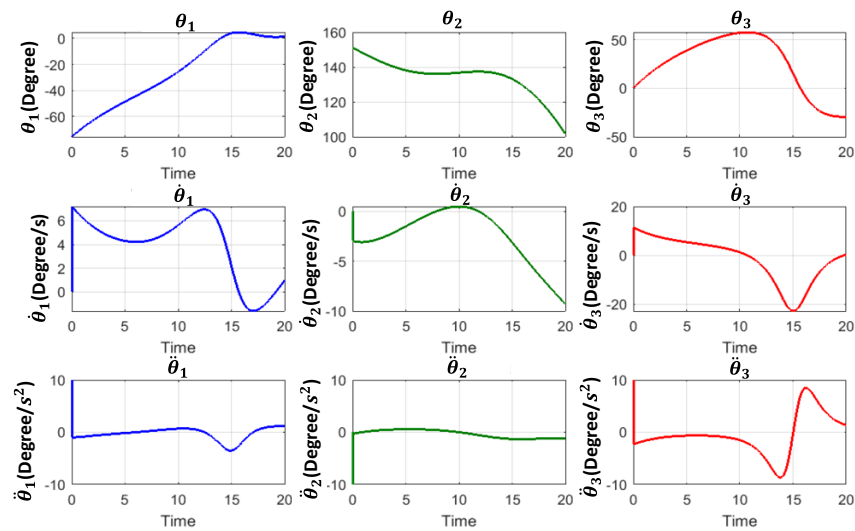


รูปที่ 9. แสดงผลการจำลองระบบโดยเปรียบเทียบระหว่าง Matlab และ Simulink

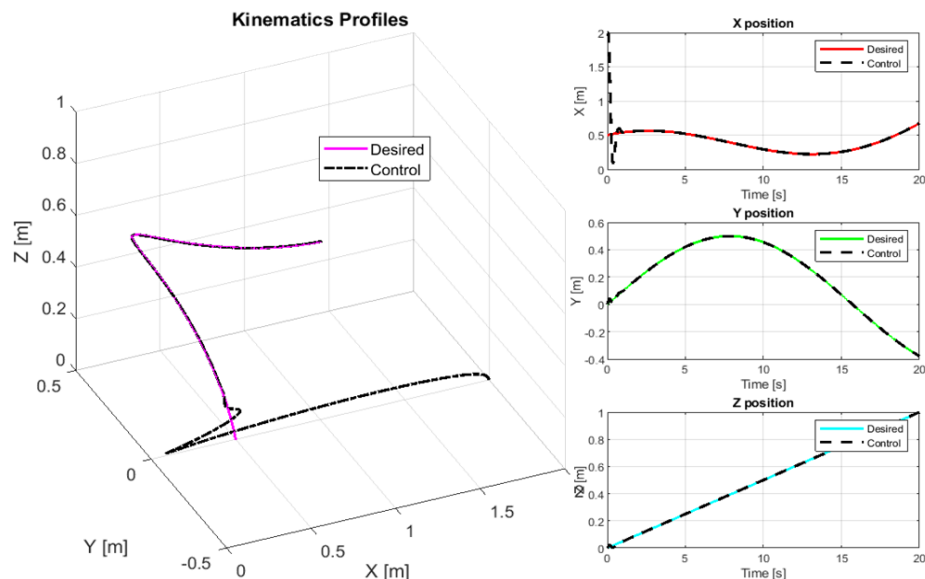
Q4: Create the controller for trajectory tracking. You may create the desired trajectory of the end effector. You should adapt the control law derivation from the case of 2-DOFs Scalar robot manipulator. First thing to check is that the simulation result should be the same if there's no rotation at joint 3 (θ_3 is fixed). If your model is valid from this point, then let explore the controller performance when operating in 3D space. A well-designed controller should be robustly stable and achieve the tracking performance (small tracking error). Note that tracking error = desired goal – actual response (i.e. error of θ_1 = desired θ_1 – actual θ_1).

ใช้การ Path of motion เดียวกับการตรวจสอบ Forward kinematic และ Inverse Kinematic equation โดยได้ผลการควบคุมเป็นไปดังรูปที่ 10, 11, 12 และ 13

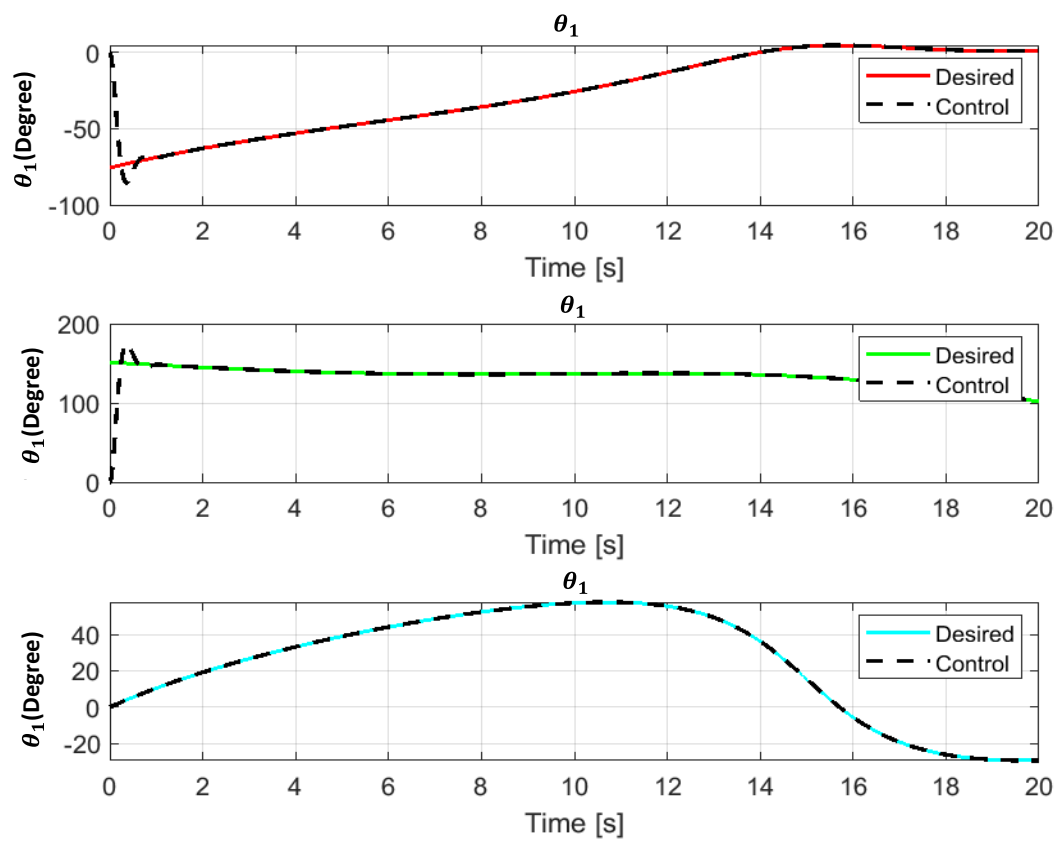
สำหรับวิดีโอที่ได้จากการจำลองการควบคุมสามารถอ้างอิงได้จากไฟล์ Matlab control.wmv และ Simulink control.mp4



รูปที่ 10. แสดงผลการควบคุม



รูปที่ 11. แสดงผลการควบคุม



รูปที่ 12. แสดงผลการควบคุม