

# 高斯消元解决同余方程组

前置知识

讲解041 - 同余原理(加法、减法、乘法)，一定要掌握

讲解099 - 逆元和除法同余，其中还讲了逆元的线性递推，一定要掌握

讲解133 - 高斯消元基本过程解析，专题第1节，视频前65分钟的内容，一定要掌握

高斯消元专题的讲述顺序

专题1：高斯消元解决加法方程组，讲解133

专题2：高斯消元解决异或方程组，讲解134

专题3：高斯消元解决同余方程组，讲解135，本节

# 高斯消元解决同余方程组

以下内容在讲解**133**已经重点讲述，就是讲解**133**的视频前**65**分钟的讲述，请保证已经掌握

高斯消元流程图解，以加法方程组为例，但是解决其他方程组也一样

高斯消元如果需要严格区分：矛盾、多解、唯一解，流程图解

高斯消元解决任何方程组的理解重点

- 1**，列出方程组，注意需要扩充方程组的情况：表达式冗余，补充变量；表达式不足，补充表达式
- 2**，消元的过程，尤其是严格区分：矛盾、多解、唯一解，正确写法要掌握！
- 3**，解是如何对应的，尤其注意主元和自由元的概念
- 4**，矩阵最后结果的含义，主元可能依赖某些自由元才能决定值，但是自由元之间一定相互独立、互不影响

高斯消元的过程时间复杂度 $O(n^3)$ ， $n$ 为扩充后的方程个数

# 高斯消元解决同余方程组

本节课只是把加法方程组换成了同余方程组而已，[课上重点图解](#)

但是注意，最后求解主元的值，需要除以主元系数，除的方式是乘以逆元，[课上重点图解](#)

同时注意，同余消元时，如果想保留主元和自由元之间的正确关系，需要特别处理，[课上重点图解](#)

[绝大多数教程并没有提到这一点，需要引起重视！](#)

# 高斯消元解决同余方程组

## 题目1

格子全变成0的操作方案

有一个 $n*m$ 的二维网格，给定每个网格的初始值，一定是0、1、2中的一个

如果某个网格获得了一些数值加成，也会用 $\%3$ 的方式变成0、1、2中的一个

比如有个网格一开始值是1，获得4的加成之后，值为 $(1+4)\%3 = 2$

有一个神奇的刷子，一旦在某个网格处刷一下，该网格会获得2的加成

并且该网格上、下、左、右的格子，都会获得1的加成

最终目标是所有网格都变成0，题目保证一定有解，但不保证唯一解

得到哪一种方案都可以，打印一共需要刷几下，并且把操作方案打印出来

$1 \leq n, m \leq 30$

测试链接：<https://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=5755>

# 高斯消元解决同余方程组

## 题目2

工具工厂

一共有 $n$ 种工具，编号 $1 \sim n$ ，一共有 $m$ 条记录，其中一条记录格式如下：

**4 WED SUN 13 18 1 13**

表示有个工人一共加工了**4**件工具，从某个星期三开始工作，到某个星期天结束工作  
加工的工具依次为**13**号、**18**号、**1**号、**13**号

每个工人在工作期间不休息，每件工具都是串行加工的，完成一件后才开始下一件  
每种工具制作天数是固定的，并且任何工具的制作天数最少**3**天、最多**9**天

但该数据丢失了，所以现在需要根据记录，推断出每种工具的制作天数

如果记录之间存在矛盾，打印"*Inconsistent data.*"

如果记录无法确定每种工具的制作天数，打印"*Multiple solutions.*"

如果记录能够确定每种工具的制作天数，打印所有结果

$1 \leq n, m \leq 300$

测试链接：<http://poj.org/problem?id=2947>