

博弈类问题必备内容详解-上

前置知识:

讲解005、042 - 对数器、对数器打表找规律，一定要看

讲解030 - 异或运算

讲解066、067、068、069 - 动态规划基础

博弈专题分为上、下两期，本期为上期

上期为经典博弈问题的讲解：

巴什博弈(*Bash*)、尼姆博弈(*Nim*)、斐波那契博弈(*Fibonacci*)、威佐夫博弈(*Wythoff*)

通过这些讲解会发现，这些博弈问题在考场上要临时想清楚是不太可能的，所以需要下期内容

下期为SG函数、SG定理的内容，大多数博弈类问题都可以根据SG定理来解决

这才是最重要的！因为你不可能学完所有的博弈，但是你能具备解决博弈类问题的通用技巧

博弈类问题必备内容详解-上

博弈类问题大致分为，公平组合游戏、不公平组合游戏（绝大多数的棋类游戏）、反常游戏

只需要关注公平组合游戏(ICG)，反常游戏是公平组合游戏的变形，经济类博弈也不是课程所讨论的范围

- 1，两个玩家轮流行动且游戏方式一致
- 2，两个玩家对状况完全了解
- 3，游戏一定会在有限步数内分出胜负
- 4，游戏以玩家无法行动结束

博弈的双方都被认为是神之个体，因为所有玩家对状况完全了解，且充分为自己打算，绝对理性
当局面确定，结果必然注定，并且没有任何随机的成分

游戏中的每一个状态，最终导致的结果也必然注定，只有必胜态、必败态，两种状态

这一类博弈问题的结果没有任何意外，一方可以通过努力去改变结果是不可能的，这一点是反直觉的

常用对数器打表来找规律，讲解042的内容

博弈类问题必备内容详解-上

题目1

巴什博弈(*Bash Game*)

一共有 n 颗石子，两个人轮流拿，每次可以拿 $1\sim m$ 颗石子
拿到最后一颗石子的人获胜，根据 n 、 m 返回谁赢

博弈类问题必备内容详解-上

题目2

质数次方版取石子(巴什博弈扩展)

一共有 n 颗石子，两个人轮流拿

每一轮当前选手可以拿 p 的 k 次方 颗石子

当前选手可以随意决定 p 和 k ，但要保证 p 是质数、 k 是自然数

拿到最后一颗石子的人获胜

根据石子数返回谁赢

如果先手赢，返回"*October wins!*"

如果后手赢，输出"*Roy wins!*"

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4018>

博弈类问题必备内容详解-上

题目3

尼姆博弈(*Nim Game*)

一共有 n 堆石头，两人轮流进行游戏

在每个玩家的回合中，玩家需要选择任何一个非空的石头堆，并从这堆石头中移除任意正数的石头数量

谁先拿走最后的石头就获胜，返回最终谁会获胜

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2197>

关于 nim 博弈，我们来证明一下其正确性，非常重要
全网一定是我讲的最清楚

博弈类问题必备内容详解-上

题目4

反尼姆博弈(反常游戏)

一共有 n 堆石头，两人轮流进行游戏

在每个玩家的回合中，玩家需要选择任何一个非空的石头堆，并从这堆石头中移除任意正数的石头数量

谁先拿走最后的石头就失败，返回最终谁会获胜

先手获胜，打印John

后手获胜，打印Brother

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4279>

博弈类问题必备内容详解-上

题目5

斐波那契博弈(*Fibonacci Game* + *Zeckendorf*定理)

一共有 n 枚石子，两位玩家定了如下规则进行游戏：

先手后手轮流取石子，先手在第一轮可以取走任意的石子

接下来的每一轮当前的玩家最少要取走一个石子，最多取走上一次取的数量 2 倍

当然，玩家取走的数量必须不大于目前场上剩余的石子数量，双方都以最优策略取石子

你也看出来了，根据规律先手一定会获胜，但是先手想知道

第一轮自己取走至少几颗石子就可以保证获胜了

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P6487>

挺难！但是全网一定是我讲的最清楚，多听几遍吧，一定能理解的
本题揭示了想在考场上研究清楚博弈问题其实很扯淡，时间根本不够
所以非常需要通用技巧，下期就讲通用的技巧，*SG*函数、*SG*定理

博弈类问题必备内容详解-上

题目6

威佐夫博弈(Wythoff Game)

有两堆石子，数量任意，可以不同，游戏开始由两个人轮流取石子

游戏规定，每次有两种不同的取法

1) 在任意的一堆中取走任意多的石子

2) 可以在两堆中同时取走相同数量的石子

最后把石子全部取完者为胜者

现在给出初始的两堆石子的数目，返回先手能不能获胜

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2252>

小 \neq (大 - 小) * 黄金分割比例，先手赢

小 $=$ (大 - 小) * 黄金分割比例，后手赢

结论直接记住，算是博闻强识