

扩展欧几里得和二元一次不定方程

前置知识

讲解**139** - 裴蜀定理和扩展欧几里得算法

上节课讲述

裴蜀定理及其证明，扩展欧几里得算法详解，常见题目解析

本节课讲述

扩展欧几里得算法和二元一次不定方程结合的内容，常见题目解析

扩展欧几里得和二元一次不定方程

二元一次不定方程，也叫丢番图方程(*Diophantine Equation*), $ax + by = c$
扩展欧几里得算法可以对二元一次不定方程，进行解如何变化的讨论

a 和 b 是不全为0的整数， d 为 a 和 b 的最大公约数

如果 $ax + by = c$ ， c 不是 d 的整数倍，那么方程无整数解，否则有无穷多整数解。这是上节课内容

如果 $ax + by = d$ ， d 为 $\gcd(a, b)$ ，其中一个特解是 (x_0, y_0)

那么通解可以表示为： $x = x_0 + (b/d) * n$ $y = y_0 - (a/d) * n$ n 为任意整数

如果 $ax + by = c$ ， c 为 d 的整数倍，根据上面的特解，可以得到该等式的一个特解 (x_0', y_0')

其中， $x_0' = x_0 * (c / d)$ ， $y_0' = y_0 * (c / d)$

那么通解可以表示为： $x = x_0' + (b/d) * n$ $y = y_0' - (a/d) * n$ n 为任意整数

课上重点图解，如此一来，就有了讨论解如何变化的工具

扩展欧几里得和二元一次不定方程

题目1

二元一次不定方程模版

给定 a 、 b 、 c ，求解方程 $ax + by = c$

如果方程无解打印 -1

如果方程无正整数解，但是有整数解

打印这些整数解中， x 的最小正数值， y 的最小正数值

如果方程有正整数解，打印正整数解的数量，同时打印所有正整数解中， x 的最小正数值， y 的最小正数值， x 的最大正数值， y 的最大正数值

$1 \leq a, b, c \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5656>

扩展欧几里得和二元一次不定方程

题目2

青蛙的约会

有一个周长为 l 的环，从环的 O 位置开始，规定只能沿着顺时针方向不停转圈

青蛙 A 在环的 $x1$ 位置，每秒跳 m 个单位，青蛙 B 在 $x2$ 位置，每秒跳 n 个单位

只有在某时刻，青蛙 A 和青蛙 B 来到环的同一个位置，才算相遇

如果两只青蛙相遇不了，打印"*Impossible*"

如果可以相遇，打印两只青蛙至少多久才能相遇

$1 \leq l \leq 3 * 10^9$

$1 \leq x1, x2, m, n \leq 2 * 10^9$

$x1 \neq x2$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1516>

扩展欧几里得和二元一次不定方程

题目3

格点连线上有几个格点

二维网格中只有 x 和 y 的值都为整数的坐标，才叫格点

给定两个格点， A 在 $(x1, y1)$ ， B 在 $(x2, y2)$

返回 A 和 B 的连线上，包括 A 和 B 在内，一共有几个格点

$-10^9 \leq x1, y1, x2, y2 \leq 10^9$

测试链接：<https://lightoj.com/problem/how-many-points>

扩展欧几里得和二元一次不定方程

题目4

机器人的移动区域

二维网格中只有 x 和 y 的值都为整数的坐标，才叫格点

某个机器人从格点 $(0,0)$ 出发，每次机器人都走直线到达 $(x + dx, y + dy)$ 的格点

一共移动 n 次，每次的 (dx, dy) 都给定，途中路线不会交叉，输入保证机器人最终回到 $(0,0)$

机器人走的路线所围成的区域一定是多边形，输入保证机器人一定沿着逆时针方向行动

返回多边形的内部一共几个格点，多边形的边上一共几个格点，多边形的面积

$3 \leq n \leq 100$

$-100 \leq dx, dy \leq 100$

测试链接：<http://poj.org/problem?id=1265>

鞋带公式 + *Pick*定理，课上重点图解

计算几何的更多内容，会在【挺难】阶段讲述

扩展欧几里得和二元一次不定方程

题目5

无法组成的最大值

一共有 a 、 b 两种面值的硬币， a 和 b 一定互质，每种硬币都有无限个

返回 a 和 b 无法组成的钱数中，最大值是多少

题目的输入保证存在最大的无法组成的钱数

$1 \leq a, b \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3951>