

负环和差分约束

前置知识

讲解065 - *spfa*算法判断负环、*Floyd*算法

从讲解059到讲解065是图的基础内容章节，不熟悉的同学可以集中学习一下

本节课讲述

差分约束的两种形式

差分约束转化成利用*spfa*算法判断负环

若干变量确定的差分约束建图

差分约束和*Floyd*算法结合

注意：差分约束还可以和其他内容结合，比如强连通分量等内容，会在【挺难】阶段进一步讲述

负环和差分约束

差分约束的两种形式

形式1, 给定若干个不等式, 类似 $x_i - x_j \leq c_i$, 判断所有不等式是否有解, 有解给出变量的一组解
其中 x_i 、 x_j 均为变量, c_i 均为常量

形式2, 给定若干个不等式, 类似 $x_i - x_j \geq c_i$, 判断所有不等式是否有解, 有解给出变量的一组解
其中 x_i 、 x_j 均为变量, c_i 均为常量

形式1和形式2可以相互转化, 形式1判断负环(最短路), 形式2判断无限增加的环(最长路)

设置一个连通超级源点, 然后利用spfa算法实现判断, 时间复杂度 $O(n * m)$, n 为节点数, m 为边数

得到一组变量的解($ans_1, ans_2 \dots ans_n$), 那么就有无穷多解($ans_1+d, ans_2+d \dots ans_n+d$)

课上重点图解

负环和差分约束

题目1

负环和差分约束模版题

一共有 n 个变量，编号 $1 \sim n$ ，给定 m 个不等式，每个不等式的形式为

$X_i - X_j \leq C_i$ ，其中 X_i 和 X_j 为变量， C_i 为常量

如果不等式存在矛盾导致无解，打印"NO"

如果有解，打印满足所有不等式的其中一组解(X_1, X_2, \dots)

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^3$

$-10^4 \leq C_i \leq +10^4$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5960>

形式1 + 判断负环

形式2 + 判断无限增加的环

负环和差分约束

题目2

小k的农场

一共有 n 个农场，编号 $1 \sim n$ ，给定 m 条关系，每条关系是如下三种形式中的一种

关系1 $a \ b \ c$ ：表示农场 a 比农场 b 至少多种植了 c 个作物

关系2 $a \ b \ c$ ：表示农场 a 比农场 b 至多多种植了 c 个作物

关系3 $a \ b$ ：表示农场 a 和农场 b 种植了一样多的作物

如果关系之间能推出矛盾，打印" No "，不存在矛盾，打印" Yes "

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^3$

$1 \leq c \leq 5 * 10^3$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1993>

基础模版题

负环和差分约束

题目3

布局奶牛

编号 1 到编号 n 的奶牛从左往右站成一排，你可以决定任意相邻奶牛之间的距离

有 m_1 条好友信息，有 m_2 条情敌信息，好友间希望距离更近，情敌间希望距离更远

每条好友信息为： $u\ v\ w$ ，表示希望 u 和 v 之间的距离 $\leq w$ ，输入保证 $u < v$

每条情敌信息为： $u\ v\ w$ ，表示希望 u 和 v 之间的距离 $\geq w$ ，输入保证 $u < v$

你需要安排奶牛的布局，满足所有的好友信息和情敌信息

如果不存在合法方案，返回 -1

如果存在合法方案，返回 1 号奶牛和 n 号奶牛之间的最大距离

如果存在合法方案，并且 1 号奶牛和 n 号奶牛之间的距离可以无穷远，返回 -2

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4878>

题目的模型转化成差分约束建图

负环和差分约束

若干变量确定的差分约束建图

如果有些变量直接确定了值，如何判断给定的不等式关系是否有解？

超级源点的设计

- 1, 连通超级源点，比如 0 号点，向所有节点连接权值为 0 的有向边，保证图的连通性
- 2, 限制超级源点，比如 $n+1$ 号点，然后对直接确定了值的节点连接一组正、负的边
- 3, 利用`spfa`判断负环，如果出现了负环说明有矛盾
- 4, 特别注意，连通超级源点 和 限制超级源点，一定要分离

课上重点图解

负环和差分约束

题目4

倍杀测量者

如果 A 的分数 $\geq B$ 的分数 $\times k$, k 是正实数, 就称 A k 倍杀 B , 或称 B 被 A k 倍杀了

一场比赛中, 一共有 n 个选手, 有 $m1$ 条誓言记录, 有 $m2$ 条选手得分记录, 得分只可能是正实数

类型1的誓言 $u\ v\ k$: 选手 u 没有 k 倍杀 选手 v , 那么选手 u 就穿女装

类型2的誓言 $u\ v\ k$: 选手 u 被选手 v k 倍杀了, 那么选手 u 就穿女装

选手的得分 $u\ w$: 选手 u 得了 w 分, 如果某选手没有得分记录, 按照尽量不穿女装的情况推测

你希望看到比赛后有人穿女装, 但不想看到很多人穿女装, 于是想制定正实数 ans , 效果如下

类型1的誓言, 比例调整成 $(k-ans)$, 类型2的誓言, 比例调整成 $(k+ans)$, 即提高了穿女装的条件

计算 ans 最大多少, 依然有人穿女装, 保留小数点后4位, 如果不干预也没人穿女装, 返回 -1

测试链接: <https://www.luogu.com.cn/problem/P4926>

二分答案 + $x_i / x_j \geq C_i$ 转化为普通差分约束的形式 + 若干变量确定的差分约束建图

负环和差分约束

题目5

天平

一共有 n 个砝码，编号 $1 \sim n$ ，每个砝码的重量均为1克，或者2克，或者3克

砝码与砝码之间的关系是一个 $n * n$ 的二维数组 s

$s[i][j] == '+'$ ，砝码 i 比砝码 j 重 $s[i][j] == '-'$ ，砝码 i 比砝码 j 轻

$s[i][j] == '='$ ，砝码 i 和砝码 j 重量一样 $s[i][j] == '?'$ ，砝码 i 和砝码 j 关系未知

数据保证至少存在一种情况符合该矩阵

给定编号为 a 和 b 的砝码，这两个砝码一定会放在天平的左边，你要另选两个砝码放在天平右边

返回有多少种方法，一定让天平左边重($ans1$)，一定让天平一样重($ans2$)，一定让天平右边重($ans3$)

$1 \leq n \leq 50$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2474>

差分约束 + Floyd算法