

最小生成树

前置知识：

讲解025、026、027 - 堆的内容

讲解056、057 - 并查集的内容

讲解059~讲解065都是【必备】课程有关图的内容，建议从头开始学习

最小生成树：在 无向带权图 中选择一些边，在 保证连通性 的情况下，边的总权值最小

最小生成树可能不只一棵，只要保证边的总权值最小，就都是正确的最小生成树

如果无向带权图有 n 个点，那么最小生成树一定有 $n-1$ 条边

扩展：最小生成树一定是最小瓶颈树（题目5）

注意：最小生成树扩展很多，除了这节课讲的，大部分都是比赛需要的内容，有兴趣可以继续研究

最小生成树

*Kruskal*算法（最常用）

- 1 把所有的边，根据权值从小到大排序，从权值小的边开始考虑
- 2 如果连接当前的边不会形成环，就选择当前的边
- 3 如果连接当前的边会形成环，就不要当前的边
- 4 考察完所有边之后，最小生成树的也就得到了

证明略！

时间复杂度 $O(m * \log m) + O(n) + O(m)$

最小生成树

题目1

实现Kruskal算法

返回最小生成树的最小权值和

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3366>

最小生成树

*Prim*算法（不算常用）

- 1 解锁的点的集合叫 set （普通集合）、解锁的边的集合叫 $heap$ （小根堆）。 set 和 $heap$ 都为空。
- 2 可从任意点开始，开始点加入到 set ，开始点的所有边加入到 $heap$
- 3 从 $heap$ 中弹出权值最小的边 e ，查看边 e 所去往的点 x
 - A. 如果 x 已经在 set 中，边 e 舍弃，重复步骤3
 - B. 如果 x 不在 set 中，边 e 属于最小生成树，把 x 加入 set ，重复步骤3
- 4 当 $heap$ 为空，最小生成树的也就得到了

证明略！

时间复杂度 $O(n + m) + O(m * \log m)$

最小生成树

*Prim*算法的优化（**比较难，不感兴趣可以跳过**）请一定要对堆很熟悉！

- 1 小根堆里放(节点, 到达节点的花费), 根据 到达节点的花费 来组织小根堆
- 2 小根堆弹出(u 节点, 到达 u 节点的花费 y), y 累加到总权重上去, 然后考察 u 出发的每一条边
假设, u 出发的边, 去往 v 节点, 权重 w
 - A. 如果 v 已经弹出过了（发现过），忽略该边
 - B. 如果 v 从来没有进入过堆, 向堆里加入记录(v, w)
 - C. 如果 v 在堆里, 且记录为(v, x)
 - 1) 如果 $w < x$, 则记录更新成(v, w), 然后调整该记录在堆中的位置（维持小根堆）
 - 2) 如果 $w \geq x$, 忽略该边
- 3 重复步骤2, 直到小根堆为空

时间复杂度 $O(n+m) + O((m+n) * \log n)$

最小生成树

题目2

实现`Prim`算法

普通版 + 优化版

返回最小生成树的最小权值和

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3366>

最小生成树

题目3

水资源分配优化

村里面一共有 n 栋房子。我们希望通过建造水井和铺设管道来为所有房子供水。

对于每个房子 i ，我们有两种可选的供水方案：一种是直接在房子内建造水井

成本为 $wells[i - 1]$ （注意 -1 ，因为索引从0开始）

另一种是从另一口井铺设管道引水，数组 $pipes$ 给出了在房子间铺设管道的成本，

其中每个 $pipes[j] = [house1j, house2j, costj]$

代表用管道将 $house1j$ 和 $house2j$ 连接在一起的成本。连接是双向的。

请返回 为所有房子都供水的最低总成本

测试链接：<https://leetcode.cn/problems/optimize-water-distribution-in-a-village/>

最小生成树

题目4

检查边长度限制的路径是否存在

给你一个 n 个点组成的无向图边集 $edgeList$

其中 $edgeList[i] = [u_i, v_i, dis_i]$ 表示点 u_i 和点 v_i 之间有一条长度为 dis_i 的边
请注意，两个点之间可能有 超过一条边。

给你一个查询数组 $queries$ ，其中 $queries[j] = [p_j, q_j, limit_j]$

你的任务是对于每个查询 $queries[j]$ ，判断是否存在从 p_j 到 q_j 的路径
且这条路径上的每一条边都 严格小于 $limit_j$ 。

请你返回一个 布尔数组 $answer$ ，其中 $answer.length == queries.length$

当 $queries[j]$ 的查询结果为 $true$ 时， $answer$ 第 j 个值为 $true$ ，否则为 $false$

测试链接：

<https://leetcode.cn/problems/checking-existence-of-edge-length-limited-paths/>

最小生成树

最小生成树一定是最小瓶颈树
证明略！

题目5

繁忙的都市

一个非常繁忙的大都市，城市中的道路十分的拥挤，于是市长决定对其中的道路进行改造

城市的道路是这样分布的：城市中有 n 个交叉路口，有些交叉路口之间有道路相连

两个交叉路口之间最多有一条道路相连接，这些道路是双向的

且把所有的交叉路口直接或间接的连接起来了

每条道路都有一个分值，分值越小表示这个道路越繁忙，越需要进行改造

但是市政府的资金有限，市长希望进行改造的道路越少越好，于是他提出下面的要求：

1. 改造的那些道路能够把所有的交叉路口直接或间接的连通起来
2. 在满足要求1的情况下，改造的道路尽量少
3. 在满足要求1、2的情况下，改造的那些道路中分值最大的道路分值尽量小

作为市规划局的你，应当作出最佳的决策，选择哪些道路应当被修建

返回选出了几条道路 以及 分值最大的那条道路的分值是多少

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2330>