

倍增算法和ST表

前置知识

讲解003、讲解006 - 二进制基础、二分搜索基础

讲解041 - 辗转相除法求最大公约数，本节课题目3需要

讲解066、讲解067、讲解068、讲解069 - 动态规划基础，想系统学习动态规划看讲解066~讲解088

本节课讲述：

倍增算法、ST表

注意：

从下节课讲解118开始，会安排树上问题的专题，包括树上倍增、lca问题等等

倍增算法和ST表

关于二进制的两个小问题

- 1, 给定一个正数 x , 已知 x 一定可以用 m 个二进制位表示, 从高位到低位打印 x 每一位的状态
- 2, 给定一个正数 x , 打印 $\leq x$ 最大的 2 的幂, 到底是 2 的几次方, 要掌握防止溢出的写法

倍增算法和ST表

倍增算法和ST表

线段上有 n 个点，给定每个点 i 往右边跳1步能最远覆盖的点 $jump[i]$

已知从任意点出发都能到达最后的点，并且在 $i < j$ 时，必有 $jump[i] \leq jump[j]$

1) 如何构建一张表

可以查询从任意点出发：跳1步、跳2步、跳4步、跳8步..每回最远能到达的点

也就是可以查询，从任意点 i 出发，任意跳(2 的 p 次方)步，最远能到达的点

2) 如何快速计算任意的两点之间，最少跳几步能到达？

构建出的表叫做ST表(Sparse Table)

构建方式： $st[i][p] = st[i][p-1][p-1]$ ， p 代表：跳2的 p 次方步，表大小为 $n * \log n$

利用ST表，从 x 到 y 跳跃的过程中，先从最大步长开始，每次步长减少一半去尝试，最终得到答案

时间复杂度 $O(\log n)$

课上重点图解

倍增算法和ST表

倍增算法 + ST表应用题目

题目1

国旗计划

给定点的数量 m ，点的编号 $1 \sim m$ ，所有点围成一个环

i 号点一定顺时针到达 $i+1$ 号点，最终 m 号点顺指针回到 1 号点

给定 n 条线段，每条线段 (a, b) ，表示线段从点 a 顺时针到点 b

输入数据保证所有线段可以把整个环覆盖

输入数据保证每条线段不会完全在另一条线段的内部

也就是线段之间可能有重合但一定互不包含

返回一个长度为 n 的结果数组 ans ， $ans[x]$ 表示一定选 x 号线段的情况下

至少选几条线段能覆盖整个环

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4155>

倍增算法和ST表

构建更多类型的ST表，先解决一个实际的问题，然后再做总结
题目2

ST表维护最大值和最小值

给定一个长度为 n 的数组 arr ，一共有 m 次查询

每次查询 $arr[l \sim r]$ 上的最大值和最小值

每次查询只需要打印最大值-最小值的结果

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2880>

倍增算法和ST表

ST表的适用范围

如果A区间和B区间可能有重叠的部分

但是并不影响A+B区间的答案，能通过 A区间答案 和 B区间答案 就加工出来

那么对应的区间询问，就是一个可重复贡献问题

例如：区间最大值，区间最小值、区间公约数等，但是区间求和就不符合这个要求

再例如：区间按位与、区间按位或，ST表都能高效地解决

ST表的优势和劣势

RMQ问题(Range Maximum/Minimum Query)可以用ST表维护，也可以用线段树等结构维护

ST表的优势：构建过程时间复杂度 $O(n * \log n)$ ，单次查询时间复杂度 $O(1)$ ，代码量较小

ST表的劣势：需要空间较大，能维护的信息非常有限，不支持修改操作

倍增算法和ST表

题目3

ST表维护最大公约数

给定一个长度为 n 的数组 arr ，一共有 m 次查询

每次查询 $arr[l \sim r]$ 上所有数的最大公约数

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1890>

倍增算法和ST表

ST表应用题目

题目4

出现次数最多的数有几个

给定一个长度为 n 的数组 arr ，该数组一定是有序的

一共有 m 次查询，每次查询 $arr[l \sim r]$ 上出现次数最多的数有几个

题目查看：<https://www.luogu.com.cn/problem/UVA11235>

题目提交：<https://vjudge.net/problem/UVA-11235>