

# Integrali

## Naloge

PETER ANDOLŠEK  
Februar 2025

### 1. Nedoločeni integral

#### Naloga 1.1 Osnovna pravila.<sup>1</sup>

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\int dx$  | (h) $\int \sqrt{z} \left( z^2 - \frac{1}{4z} \right) dz$ |
| (b) $\int t dx$  | (i) $\int \frac{z^8 - 6z^5 + 4z^3 - 2}{z^4} dz$          |
| (c) $\int t^2 - t dt$                                      | (j) $\int \sin x + \frac{10}{\sin^2 x} dx$               |
| (d) $\int z^7 - 6z^6 + 2 dz$                               | (k) $\int \sin z \cos z dz$                              |
| (e) $\int \sqrt{x^5} + 3\sqrt[3]{x^2} + x^{-1} dx$         | (l) $\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{12}{\sqrt{1-x^2}} dx$  |
| (f) $\int \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{8x^3} dx$ |  |
| (g) $\int (t^2 - 1)(4 + 3t) dt$                            |  |

#### Naloga 1.2 Uvedba nove spremenljivke.

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\int (8x - 12)(4x^2 - 12x)^4 dx$         | (g) $\int \frac{4w + 3}{4w^2 + 6w - 1} dw$                               |
| (b) $\int 5(z - 4)\sqrt[3]{z^2 - 8z} dz$      | (h) $\int 4 \left( \frac{1}{z} - e^{-z} \right) \cos(e^{-z} + \ln z) dz$ |
| (c) $\int z^7 (8 + 3z^4)^8 dz$                | (i) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$                                |
| (d) $\int 90x^2 \sin(2 + 6x^3) dx$            | (j) $\int \frac{6}{7 + y^2} dy$  |
| (e) $\int \frac{\tan(1 - x)}{\cos(1 - x)} dx$ | (k) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9w^2}} dw$                                  |
| (f) $\int (7y - 2y^3)e^{y^4 - 7y^2} dy$       |  |

#### Naloga 1.3 Integracija po delih.

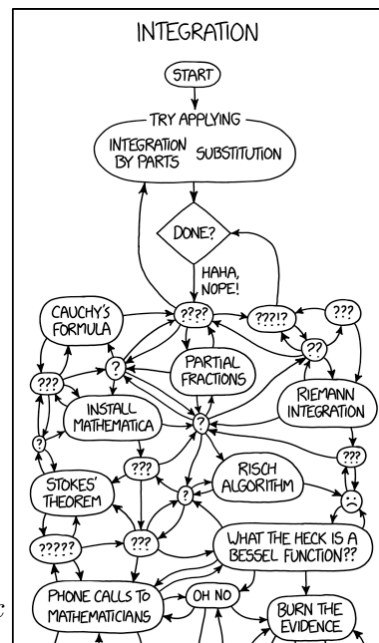
- |                            |                         |
|----------------------------|-------------------------|
| (a) $\int x \cos x dx$     | (d) $\int \ln  z  dz$   |
| (b) $\int x^2 \cos(4x) dx$ | (e) $\int \arctan t dt$ |
| (c) $\int ye^y dy$         |                         |

#### Naloga 1.4 Trigonometrični integrali.

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| (a) $\int \sin^{10} x \cos x dx$  | (c) $\int \cos^4 t dt$          |
| (b) $\int \sin^3 \left( \frac{2}{3}x \right) \cos^4 \left( \frac{2}{3}x \right) dx$ | (d) $\int \sin(8x) \sin(7x) dx$ |

#### Naloga 1.5 \* Trigonometrične substitucije.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| (a) $\int \sqrt{4 - 9z^2} dz$      | (d) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 36x + 37}} dx$ |
| (b) $\int (7t^2 - 3)^{5/2} dt$     | (e) $\int \cos x \sqrt{9 + 25 \sin^2 x} dx$    |
| (c) $\int \sqrt{1 - 4z - 2z^2} dz$ |  |



<sup>1</sup>Večina primerov iz tega poglavja je povzetih s strani [Paul's Online Notes](#)

**Naloga 1.6** \* Razcep na parcialne ulomke.

(a)  $\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx$

(b)  $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx$

**2. Določeni integral****2.1 Izračun****Naloga 2.1** Izračunaj:

(a)  $\int_1^2 x^2 dx$

(d)  $\int_0^\pi \sin^2 x dx$

(b)  $\int_0^1 \frac{x^2}{3} + 1 dx$

(e)  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(c)  $\int_0^\pi \sin x dx$

(f)  $\int_0^R \frac{r^2}{1 + r^2} dr$

**Naloga 2.2** Izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

*Namig: naloga nima zvezdice.***Naloga 2.3** \* Gaussov integral.

Znani problem iz zgodovine matematike je izračun Gaussovega integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Izračunamo ga lahko takole:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

Zadnji integral lahko izračunamo v polarnih koordinatah. Pokaži, da je  $I = \pi$ .**Naloga 2.4** Funkcija gama.Funkcija  $\Gamma$  je za pozitivna realna števila definirana takole:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(a) Izračunaj  $\Gamma(1)$ .

(b) Pokaži, da velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

(c) Pokaži, da za naravna števila  $n$  velja:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

(d) Pokaži, da  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . *Namig:* integral prevedi na Gaussov integral.

## 2.2 Uporaba določenega integrala

**Naloga 2.5** V kartezičnih koordinatah lahko zgornji lok krožnice s polmerom  $R$  zapišemo tako:

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Z integralom po  $x$  izračunaj obseg kroga.

**Naloga 2.6** Konstruiramo kozarec za vino tako, da funkcijo  $A \sin kx$  zavrtimo okrog  $x$  osi na intervalu  $[0, 9 \text{ cm}]$ . Kolikšno površino stekla potrebujemo in koliko litrov vina lahko natočimo v kozarec?  $A = 8 \text{ cm}$  in  $k = 0,2 \text{ cm}^{-1}$ .

**Naloga 2.7** Kolikšen je volumen stožca s polmerom  $R$  in višino  $h$ ?

**Naloga 2.8 Povprečna vrednost.**

Povprečno vrednost funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$  lahko izračunamo tako:

$$\langle f \rangle_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Izračunaj sledeči povprečni vrednosti:

(a)  $\langle e^x \rangle_{[-1, 3]}$

(b)  $\langle \sin^2 \theta \rangle_{[0, n\pi]}$

**Naloga 2.9 (Introd. to QM). \* Valovna funkcija.**

Valovna funkcija  $\Psi(x, t)$  v kvantni mehaniki opisuje stanje kvantnega delca. Integral kvadrata absolutne vrednosti valovne funkcije  $|\Psi|^2$  na nekem intervalu predstavlja verjetnost, da zaznamo delec na tem območju:

$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \int_a^b |\Psi|^2 dx$$

Seveda mora veljati  $\mathcal{P}_{[-\infty, +\infty]}$ , čemur pravimo, da mora biti valovna funkcija *normalizirana*.

Naj bo valovna funkcija podana z

$$\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t},$$

kjer so  $A$ ,  $\lambda$  in  $\omega$  pozitivne realne konstante.

Normaliziraj  $\Psi$ . (To pomeni: izračunaj  $A$ .)

## 2.3 Večkratni integrali

**Naloga 2.10** Izračunaj sledeče dvojne integrale:

(a)  $\iint_{\mathcal{D}} (6y\sqrt{x} - 2y^3) dA \quad \mathcal{D} = [1, 4] \times [0, 3]$

(b)  $\iint_{\mathcal{D}} (ye^{y^2-4x}) dA \quad \mathcal{D} = [0, 2] \times [0, \sqrt{8}]$

(c) \*  $\iint_{\mathcal{D}} (42y^2 - 12x) dA \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, (x-2)^2 \leq y \leq 6\}$

**Naloga 2.11** Izračunaj volumen, ki leži pod  $f(x, y) = 9x^2 + 4xy + 4$  in nad pravokotnikom  $[-1, 1] \times [0, 2]$  v  $xy$  ravnini.

## 2.4 Integrali v drugih koordinatnih sistemih

### Naloga 2.12 Vztrajnostni momenti.

Vztrajnostni moment homogenega telesa z gostoto  $\rho$  okoli neke osi izračunamo takole:

$$J = \rho \int r_{\perp}^2 dV.$$

$r_{\perp}$  označuje pravokotno oddaljenost točke telesa do osi.

Izračunaj vztrajnostne momente sledečih teles (vsa telesa imajo maso  $M$ ). Uporabi takšne koordinate, v katerih bo računanje najlažje.

- Palica dolžine  $L$ , okrog pravokotne osi skozi središče palice.
- Valj z višino  $H$  in polmerom  $R$ , okrog geometrijske osi.
- Kvader s stranicami  $a$ ,  $b$  in  $c$ ; okrog osi, ki je vzporedna stranici  $c$ .
- Krogla s polmerom  $R$ , okrog geometrijske osi.

### Naloga 2.13 \* Gravitacijska energija zvezde.

Sferno simetrična zvezda z maso  $M$  in polmerom  $R$  ima profil gostote:

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right)^{\alpha}.$$

- Izračunaj  $M_r(r)$ , ki označuje skupno maso zvezde znotraj radija  $r$ . Veljati mora torej  $M_r(R) = M$ .
- Izračunaj skupno gravitacijsko potencialno energijo zvezde, če veš, da za lupino z maso  $dM_r$  na oddaljenosti  $r$  od središča velja, da je njena gravitacijska potencialna energija enaka

$$dW_p = -\frac{GM_r dM_r}{r}.$$

**Naloga 2.14** \* Če naboj  $q$  postavimo na razdaljo  $d$  od neskončne ozemljene plošče, se bo na plošči inducirala ploščinski naboj:

$$\sigma(r) = \frac{dq}{dS} = -\frac{qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}},$$

kjer je  $r$  oddaljenost dane točke od projekcije položaja naboja na ploščo. Kolikšen je skupni inducirani naboj na plošči?