Integrali
Naloge

Peter Andolšek

Februar 2025

1. Nedoločeni integral

Naloga 1.1 **Osnovna pravila.**[1]

(a) $\int \mathrm{d}x$

(b) $\int t \,\mathrm{d}x$

(c) $\int t^2 - t \,\mathrm{d}t$

(d) $\int z^7 - 6z^6 + 2 \,\mathrm{d}z$

(e) $\int \sqrt{x^5} + 3\sqrt[3]{x^2} + x^{-1} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{8x^3} \,\mathrm{d}x$

(g) $\int \left(t^2 - 1\right)(4 + 3t) \,\mathrm{d}t$

(h) $\int \sqrt{z}\left(z^2 - \frac{1}{4z}\right) \mathrm{d}z$

(i) $\int \frac{z^8 - 6z^5 + 4z^3 - 2}{z^4} \,\mathrm{d}z$

(j) $\int \sin x + \frac{10}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$

(k) $\int \sin z \cos z \,\mathrm{d}z$

(l) $\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{12}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

Naloga 1.2 **Uvedba nove spremenljivke.**

(a) $\int (8x - 12)(4x^2 - 12x)^4 \,\mathrm{d}x$

(b) $\int 5(z-4)\sqrt[3]{z^2 - 8z} \,\mathrm{d}z$

(c) $\int z^7 \left(8 + 3z^4\right)^8 \mathrm{d}z$

(d) $\int 90x^2 \sin\left(2 + 6x^3\right) \mathrm{d}x$

(e) $\int \frac{\tan(1-x)}{\cos(1-x)} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int (7y - 2y^3) e^{y^4 - 7y^2} \,\mathrm{d}y$

(g) $\int \frac{4w + 3}{4w^2 + 6w - 1} \,\mathrm{d}w$

(h) $\int 4\left(\frac{1}{z} - e^{-z}\right) \cos\left(e^{-z} + \ln z\right) \mathrm{d}z$

(i) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

(j) $\star \int \frac{6}{7 + y^2} \,\mathrm{d}y$

(k) $\star \int \frac{1}{\sqrt{4 - 9w^2}} \,\mathrm{d}w$

Naloga 1.3 **Integracija po delih.**

(a) $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$

(b) $\int x^2 \cos(4x) \,\mathrm{d}x$

(c) $\int y e^y \,\mathrm{d}y$

(d) $\star \int \ln|z| \,\mathrm{d}z$

(e) $\star \int \arctan t \,\mathrm{d}t$

Naloga 1.4 **Trigonometrični integrali.**

(a) $\int \sin^{10} x \cos x \,\mathrm{d}x$

(b) $\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) \mathrm{d}x$

(c) $\int \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

(d) $\int \sin(8x)\sin(7x) \,\mathrm{d}x$

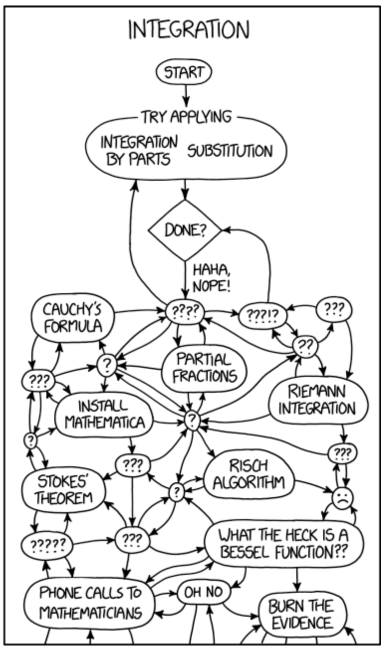
Naloga 1.5 $\star$ **Trigonometrične substitucije.**

(a) $\int \sqrt{1 - z^2} \,\mathrm{d}z$

(b) $\int \sqrt{t^2 - 1} \,\mathrm{d}t$

(c) $\int \sqrt{1 - 4z - 2z^2} \,\mathrm{d}z$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 36x + 37}} \,\mathrm{d}x$



[1] Večina primerov iz tega poglavja je povzetih s strani Paul's Online Notes

Naloga 1.6 * **Razcep na parcialne ulomke.**

(a) $\int \frac{x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,\mathrm{d}x$

2. Določeni integral

2.1 Izračun

Naloga 2.1 Izračunaj:

(a) $\int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{3}+1\,\mathrm{d}x$

(c) $\int\limits_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(e) $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x\,\mathrm{d}x$

(f) $\int\limits_0^R \frac{r^2}{1+r^2}\,\mathrm{d}r$

Naloga 2.2 Izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Namig: naloga nima zvezdice.

Naloga 2.3 * **Gaussov integral.**

Znani problem iz zgodovine matematike je izračun Gaussovega integrala:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Izračunamo ga lahko takole:

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Zadnji integral lahko izračunamo v polarnih koordinatah. Pokaži, da je $I=\sqrt{\pi}$.

Naloga 2.4 **Funkcija gama.**

Funkcija Γ je za pozitivna realna števila definirana takole:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Izračunaj $\Gamma(1)$.

(b) Pokaži, da velja
$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

(c) Pokaži, da za naravna števila n velja:
$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

(d) Pokaži, da $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. *Namig:* integral prevedi na Gaussov integral.

2.2 Uporaba določenega integrala

Naloga 2.5 V kartezičnih koordinatah lahko zgornji lok krožnice s polmerom R zapišemo tako:

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Z integralom po x izračunaj obseg kroga.

Naloga 2.6 Konstruiramo kozarec za vino tako, da funkcijo $A \sin kx$ zavrtimo okrog x osi na intervalu $[0, 9\,\mathrm{cm}]$. Kolikšno površino stekla potrebujemo in koliko litrov vina lahko natočimo v kozarec? $A = 8\,\mathrm{cm}$ in $k = 0{,}2\,\mathrm{cm}^{-1}$.

Naloga 2.7 Kolikšen je volumen stožca s polmerom R in višino h?

Naloga 2.8 Povprečna vrednost.
Povprečno vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ lahko izračunamo tako:

$$\langle f \rangle_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Izračunaj sledeči povprečni vrednosti:

(a) $\langle e^x \rangle_{[-1,\,3]}$

(b) $\langle \sin^2 \theta \rangle_{[0,\,n\pi]}$

Naloga 2.9 (*Introd. to QM*). ⋆ Valovna funkcija.
Valovna funkcija $\Psi(x, t)$ v kvantni mehaniki opisuje stanje kvantnega delca. Integral kvadrata absolutne vrednosti valovne funkcije $|\Psi|^2$ na nekem intervalu predstavlja verjetnost, da zaznamo delec na tem območju:

$$\mathcal{P}_{[a,\,b]} = \int_a^b |\Psi|^2\,\mathrm{d}x$$

Seveda mora veljati $\mathcal{P}_{[-\infty,\,+\infty]}$, čemur pravimo, da mora biti valovna funkcija *normalizirana*.

Naj bo valovna funkcija podana z

$$\Psi(x, t) = A e^{-\lambda |x|} e^{-i\omega t},$$

kjer so A, λ in ω pozitivne realne konstante.

Normaliziraj Ψ. (To pomeni: izračunaj A.)

2.3 Večkratni integrali

Naloga 2.10 Izračunaj sledeče dvojne integrale:

(a) $\iint_{\mathcal{D}} (6y\sqrt{x} - 2y^3)\,\mathrm{d}A \qquad \mathcal{D} = [1, 4] \times [0, 3]$

(b) $\iint_{\mathcal{D}} \left(y e^{y^2 - 4x} \right)\,\mathrm{d}A \qquad \mathcal{D} = [0, 2] \times [0, \sqrt{8}]$

(c) ⋆ $\iint_{\mathcal{D}} (42y^2 - 12x)\,\mathrm{d}A \qquad \mathcal{D} = \{\, (x, y) \mid 0 \le x \le 4, (x-2)^2 \le y \le 6 \}$

Naloga 2.11 Izračunaj volumen, ki leži pod $f(x, y) = 9x^2 + 4xy + 4$ in nad pravokotnikom $[-1, 1] \times [0, 2]$ v xy ravnini.

2.4 Integrali v drugih koordinatnih sistemih

Naloga 2.12 Vztrajnostni momenti.
Vztrajnostni moment homogenega telesa z gostoto ρ okoli neke osi izračunamo takole:

$$J = \rho \int r_\perp^2 \, \mathrm{d}V.$$

$r_\perp$ označuje pravokotno oddaljenost točke telesa do osi.

Izračunaj vztrajnostne momente sledečih teles (vsa telesa imajo maso M). Uporabi takšne koordinate, v katerih bo računanje najlažje.

(a) Palica dolžine L, okrog pravokotne osi skozi središče palice.
(b) Valj z višino H in polmerom R, okrog geometrijske osi.
(c) Kvader s stranicami a, b in c; okrog osi, ki je vzporedna stranici c.
(d) Krogla s polmerom R, okrog geometrijske osi.

Naloga 2.13 $\star$ **Gravitacijska energija zvezde.**
Sferno simetrična zvezda z maso M in polmerom R ima profil gostote:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha .$$

(a) Izračunaj $M_r(r)$, ki označuje skupno maso zvezde znotraj radija r. Veljati mora torej $M_r(R) = M$.
(b) Izračunaj skupno gravitacijsko potencialno energijo zvezde, če veš, da za lupino z maso $\mathrm{d}M_r$ na oddaljenosti r od središča velja, da je njena gravitacijska potencialna energija enaka

$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} = -\frac{GM_r \, \mathrm{d}M_r}{r}.$$

Naloga 2.14 $\star$ Če naboj q postavimo na razdaljo d od neskončne ozemljene plošče, se bo na plošči inducíral ploščinski naboj:

$$\sigma(r) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} = -\frac{qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}},$$

kjer je r oddaljenost dane točke od projekcije položaja naboja na ploščo. Kolikšen je skupni inducirani naboj na plošči?