

# Kompleksna števila

## Naloge

PETER ANDOLŠEK  
Oktober 2024

### 1. Imaginarna enota

**Naloga 1.1** Koliko je  $i^{2024}$ ?

### 2. Kompleksna števila

#### 2.1 Algebrska oblika

**Naloga 2.1** Zapiši vsa kompleksna števila, ki zadostijo sledeči enačbi:

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

**Naloga 2.2** Izračunaj sledeče izraze:

- (a)  $(4 - 5i)(12 + 11i)$
- (b)  $(-3 - i) - (6 - 7i)$
- (c)  $8i(10 + 2i)$
- (d)  $\frac{7 - i}{2 + 10i}$

**Naloga 2.3** Naj bo  $z = 2 - 3i$  in  $w = -1 + 3i$ . Koliko je:

- (a)  $z + w$
- (b)  $w - z$
- (c)  $wz$
- (d)  $w/z$
- (e)  $\text{Im}(z/w) + z$

**Naloga 2.4** Naj bo  $z_1 = -1$  in  $z_2 = 2 + 2i$ . Geometrijsko določi minimalno vrednost izraza  $|w - z_1| + |w - z_2|$ , kjer  $w \in \mathbb{C}$ .

#### 2.2 Kompleksni konjugat

**Naloga 2.5** Pokaži sledeče lastnosti konjugatov:

- (a)  $(z^*)^* = z$
- (b)  $(z + w)^* = z^* + w^*$
- (c)  $(zw)^* = z^*w^*$
- (d)  $\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$ , če  $w \neq 0$

**Naloga 2.6** Fourierjeva vrsta je izraz

$$f(x) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx/P}, \quad x \in [-P/2, P/2].$$

Zapiši izraz za  $f^*(x)$ . Namig: perioda  $P$  je realno število.

## 2.3 Trigonometrična in eksponentna oblika

**Naloga 2.7** Minka je na zgornjo polovico kompleksne ravnine narisala kvadrat, ki ima podani točki  $z_1 = 0$  in  $z_2 = 6,54 + 2,34i$ . Kateri sta drugi dve točki  $z_3$  in  $z_4$ ?

**Naloga 2.8** Podani imamo dve števili v eksponentnem zapisu:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Koliko je razdalja v kompleksni ravnini med njima?

**Naloga 2.9** Pokaži, da

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},$$

kar imenujemo **de Moivreova formula**.

**Naloga 2.10** \* Z de Moivreovo formulo pokaži, da velja

$$\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi.$$

**Naloga 2.11** Pokaži, da

$$\frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots} = 1 - 2 + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \dots.$$

**Naloga 2.12** Koliko je  $\sin(i\pi/2)$ ?

**Naloga 2.13** \* Polinomska enačba  $n$ -tega reda ima največ  $n$  različnih kompleksnih rešitev. Katera kompleksna števila rešijo spodnjo enačbo?

$$x^n = 1$$

**Naloga 2.14** \*\* Katera kompleksna števila  $z$  rešijo enačbo  $\cos z = 2$ ?