

Kompleksna števila

Naloge

PETER ANDOLŠEK
Oktober 2024

1. Imaginarna enota

Naloga 1.1 Koliko je i^{2024} ?

2. Kompleksna števila

2.1 Algebrska oblika

Naloga 2.1 Zapiši vsa kompleksna števila, ki zadostijo sledeči enačbi:

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

Naloga 2.2 Izračunaj sledeče izraze:

- (a) $(4 - 5i)(12 + 11i)$
- (b) $(-3 - i) - (6 - 7i)$
- (c) $8i(10 + 2i)$
- (d) $\frac{7 - i}{2 + 10i}$

Naloga 2.3 Naj bo $z = 2 - 3i$ in $w = -1 + 3i$. Koliko je:

- (a) $z + w$
- (b) $w - z$
- (c) wz
- (d) w/z
- (e) $\text{Im}(z/w) + z$

Naloga 2.4 Naj bo $z_1 = -1$ in $z_2 = 2 + 2i$. Geometrijsko določi minimalno vrednost izraza $|w - z_1| + |w - z_2|$, kjer $w \in \mathbb{C}$.

2.2 Kompleksni konjugat

Naloga 2.5 Pokaži sledeče lastnosti konjugatov:

- (a) $(z^*)^* = z$
- (b) $(z + w)^* = z^* + w^*$
- (c) $(zw)^* = z^*w^*$
- (d) $\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$, če $w \neq 0$

Naloga 2.6 Fourierjeva vrsta je izraz

$$f(x) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx/P}, \quad x \in [-P/2, P/2].$$

Zapiši izraz za $f^*(x)$. Namig: perioda P je realno število.

2.3 Trigonometrična in eksponentna oblika

Naloga 2.7 Minka je na zgornjo polovico kompleksne ravnine narisala kvadrat, ki ima podani točki $z_1 = 0$ in $z_2 = 6,54 + 2,34i$. Kateri sta drugi dve točki z_3 in z_4 ?

Naloga 2.8 Podani imamo dve števili v eksponentnem zapisu:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Koliko je razdalja v kompleksni ravnini med njima?

Naloga 2.9 Pokaži, da

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},$$

kar imenujemo **de Moivreova formula**.

Naloga 2.10 * Z de Moivreovo formulo pokaži, da velja

$$\cos 3\phi = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi.$$

Naloga 2.11 Pokaži, da

$$\frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots} = 1 - 2 + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \dots.$$

Naloga 2.12 Koliko je $\sin(i\pi/2)$?

Naloga 2.13 * Polinomska enačba n -tega reda ima največ n različnih kompleksnih rešitev. Katera kompleksna števila rešijo spodnjo enačbo?

$$x^n = 1$$

Naloga 2.14 ** Katera kompleksna števila z rešijo enačbo $\cos z = 2$?