Poglavje 6

Vektorska analiza

Motivacija 6.1: Mali Faraday

Mali Faraday se igra z naboji in tokovi, ki povzročajo električno in magnetno polje. Skozi igro pride do štirih ugotovitev:

1. Naboji so izviri električnega polja.
2. Magnetno polje nima izvirov.
3. Tam, kjer se spreminja magnetno polje, pride do vrtincev električnega polja.
4. Tam, kjer je električen tok ali se električno polje spreminja, pride do vrtincev magnetnega polja.

Zelo izjemna odkritja, toda jih mali Faraday ne zna izraziti z enačbami. Ali mu lahko pomagaš?

Za zaključek se še posvetimo analizi skalarnih in vektorskih polj, s čimer se ukvarja *vektorska analiza.* Omejimo se na 3 dimenzije. *Skalarno polje* je tako funkcija treh koordinat, $T(\mathbf{r}) = T(x, y, z)$. Intuitivno si lahko predstavljamo skalarno polje kot predpis, ki vsaki točki pripiše neko vrednost. Primer je temperaturno polje. *Vektorsko polje* je vektorska funkcija več spremenljivk: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$, pri tem lahko $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ razpišemo po komponentah z $(v_x(\mathbf{r}), v_y(\mathbf{r}), v_z(\mathbf{r}))$. Vektorsko polje je predpis, ki vsaki točki pripiše nek vektor. Primer je hitrostno polje tekočine, ki vsaki točki pripiše hitrost tekočine v tej točki.

6.1. Vektorska algebra

Sedaj je na mestu, da na kratko pregledamo operacije z vektorji, kar se imenuje *vektorska algebra.*

6.1.1 Geometrijski pogled

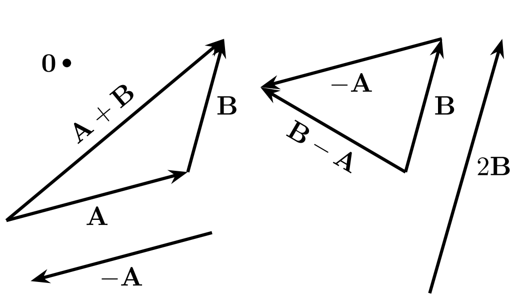
Definicija 6.2: Vektor

V najosnovnejšem smislu je *vektor* geometrijski objekt, ki ima *velikost* in *smer.* Zaznamujemo ga z mastno črko $\mathbf{A}$, v rokopisih pa običajno z vektorskim znakom $\vec{A}$.

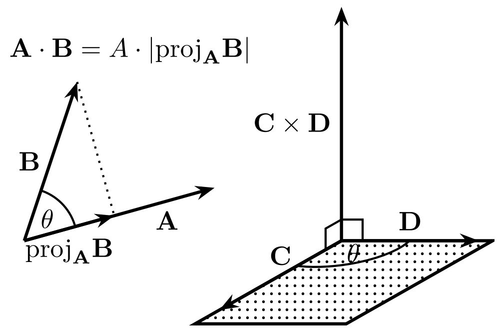
Definicija 6.3: Skalar

Za razliko od vektorja ima *skalar* le velikost.

Velikost vektorja $\mathbf{A}$ zaznamujemo z $|\mathbf{A}|$ ali preprosto A. Vektor z velikostjo 1 imenujemo *enotski vektor* in ga zaznamujemo s kapico $\hat{\mathbf{A}}$, vektor z velikostjo 0 pa je *ničelni vektor* $\mathbf{0}$. Vektor $(-\mathbf{A})$ ima enako velikost kot $\mathbf{A}$, toda ravno nasprotno usmerjenost. Ko vektorje prikazujemo s puščicami, jih lahko poljubno vzporedno premikamo, saj se s tem ne spreminja njihova velikost ali smer in je to še vedno isti vektor. Definiramo štiri vrste operacij, ki so prikazane na slikah 6.1 in 6.2.



Slika 6.1: **Vektorska aritmetika**



Slika 6.2: **Skalarni in vektorski produkt**

Seštevanje dveh vektorjev: Začetek vektorja $\mathbf{B}$ položimo na puščico vektorja $\mathbf{A}$. Vsota $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je vektor, ki ga dobimo, če povežemo začetek vektorja $\mathbf{A}$ s puščico premaknjenega vektorja $\mathbf{B}$. Seštevanje je komutativno $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ in asociativno $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$. Odštevanje definiramo s tem, da prištejemo nasprotni vektor: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

Množenje s skalarjem: Množenje vektorja s pozitivnim skalarjem a poveča velikost vektorja za faktor a, toda ohrani smer. Če je a negativen, se velikost poveča $|a|$-krat in se vektor obrne. Množenje s skalarjem je distributivno: $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$.

Skalarni produkt: Skalarni produkt dveh vektorjev je skalar in je definiran z

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} := AB\cos\theta,$$

kjer je θ kót med njima. Je komutativen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ in distributiven $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Geometrijsko gledano je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ produkt A s projekcijo $\mathbf{B}$ na $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot |\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}|$$

Če sta dva vektorja vzporedna, je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. V posebnem primeru velja torej

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$$

Če sta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ pravokotna, velja $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Vektorski produkt: Vektorski produkt dveh vektorjev je definiran z

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} := AB\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ je enotski vektor, ki kaže pravokotno na ravnino, ki vsebuje $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Ker sta tako možna dva enotska vektorja, rešimo dvoumnost s *pravilom desne roke*: kazalec usmerimo v smeri vektorja $\mathbf{A}$, sredinec v smeri $\mathbf{B}$ in pogledamo smer palca, ki nam kaže smer $\hat{\mathbf{n}}$. Vektorski produkt je distributiven $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ in *antikomutativen* $(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Geometrijsko gledano je $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ površina paralelograma, ki ga oklepata $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Iz definicije sledi, da

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

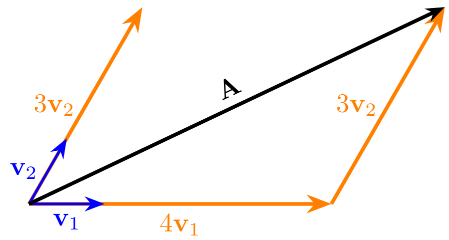
Linearna kombinacija in neodvisnost

Definicija 6.4: Linearna kombinacija

Linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ je izraz oblike

$$\mathbf{v} = m_1\mathbf{r}_1 + \cdots + m_k\mathbf{r}_k; \quad m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{R}.$$

Intuitivno si linearno kombinacijo predstavljamo kot množico vseh vektorjev, ki se jih da sestaviti iz danih vektorjev s skalarnim množenjem in seštevanjem vektorjev, kot je prikazano na sliki 6.3.



Slika 6.3: **Vsak vektor v ravnini lista lahko zapišemo kot linearno kombinacijo navedenih vektorjev $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$. Prikazan primer za $\mathbf{A} = 4\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$.**

Definicija 6.5: Linearna neodvisnost

Množica vektorjev $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ je *linearno neodvisna*, če nobenega izmed njih ne moremo zapisati kot linearno kombinacijo ostalih.

Izrek 6.6: Pogoj za linearno neodvisnost

Množica vektorjev $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ je linearno neodvisna, če in samo če je rešitev sledeče enačbe lahko samo $a_1 = \cdots = a_k = 0$:

$$a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + \cdots + a_k\mathbf{r}_k = \mathbf{0}$$

Definicija 6.7: Baza prostora

Če množica vektorjev $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ *pokrije prostor* (se da vsak vektor iz prostora zapisati kot njihovo linearno kombinacijo) in so linearno neodvisni, potem to množico imenujemo *baza prostora*. Število potrebnih vektorjev je enolično določeno in ga imenujemo *dimenzija prostora n*.

6.1.2 Komponente

Vektorji v čisti geometrijski obliki nam le malokrat pomagajo. Za naprednejše namene razdelimo vektor na *vektorske komponente*:

$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}} \tag{6.1}$$

Pri tem so $\hat{\mathbf{i}}$ (kjer je $i = x, y, z$) trije bazni vektorji. Od sedaj naprej privzamemo, da so *ortonormalni*:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1; \qquad \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0.$$

Komponente lahko na kratko zapišemo tudi v obliki stolpca ali vrstice:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} = (A_x, A_y, A_z) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Če enačbo 6.1 skalarno množimo z baznim vektorjem $\hat{\mathbf{x}}$, nam ostane

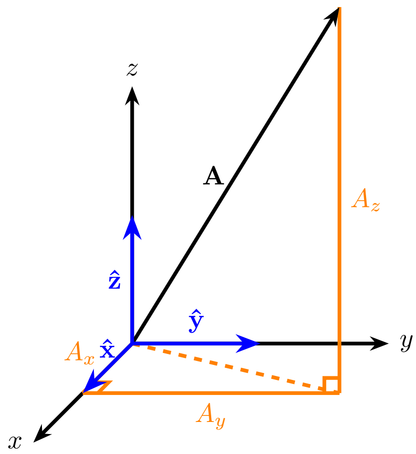
$$\boxed{A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}}$$

Analogno velja tudi za $\hat{\mathbf{y}}$ in $\hat{\mathbf{z}}$. Pri tem smo uporabili ortonormalnost vektorjev.

Sedaj lahko vektorske operacije z uporabo lastnosti vektorjev zapišemo s komponentami:

Seštevanje dveh vektorjev: Preprosto seštejemo komponenti vsakega vektorja.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) + (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}}$$



Slika 6.4: **Komponente vektorja $\mathbf{A} = 1\,\hat{\mathrm{x}} + 2\,\hat{\mathrm{y}} + 3\,\hat{\mathrm{z}}$ v ortonormalni bazi. Vidimo tudi, da je velikost vektorja preprosto posplošitev Pitagorovega izreka na 3 dimenzije, saj je dolžina črtkane črte $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ in torej dolžina vektorja $\mathbf{A}$ res $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.**

Množenje s skalarjem: Vsako komponento posebej množimo s skalarjem:

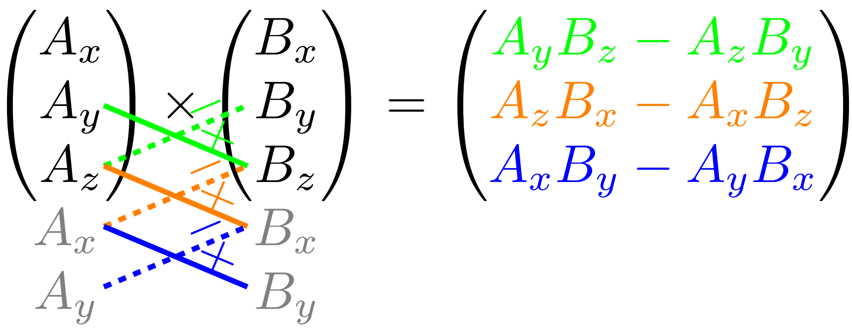
$$\begin{aligned} a\mathbf{A} &= a(A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (aA_x)\hat{\mathbf{x}} + (aA_y)\hat{\mathbf{y}} + (aA_z)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Skalarno množenje: i-ti komponenti obeh vektorjev zmnožimo in jih seštejemo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned}$$

Posledica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ je torej, da velikost vektorja izračunamo z

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



Slika 6.5: **Mnemonika za vektorsko množenje. Najprej prepišemo komponenti x in y. Nato zmnožimo obe komponenti, ki sta povezani z debelo zeleno črto, in odštejemo zmnožek komponent, ki sta povezani s črtkano zeleno črto: to je x komponenta. Postopek ponovimo za komponenti y (oranžna) in z (modra).**

Vektorsko množenje: To množenje ima najtežje pravilo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \times (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

To sledi iz identitet med baznimi vektorji, kot so recimo $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = 0$ in $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}}$. Komponente vektorskega produkta le navidezno nimajo vzorca: uporabna mnemonika je prikazana na sliki 6.5. Rezultat lahko kompaktno zapišemo z determinanto:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Ker je vektorski produkt zopet vektor, ga lahko skalarno oz. vektorsko množimo še s tretjim vektorjem, čemur pravimo *trojni produkt*.

Skalarni trojni produkt: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Geometrijsko je $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ prostornina paralelepipeda s stranicami $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$, saj je $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ površina osnove, $|\mathbf{A} \cos\theta|$ pa višina. Sledi,

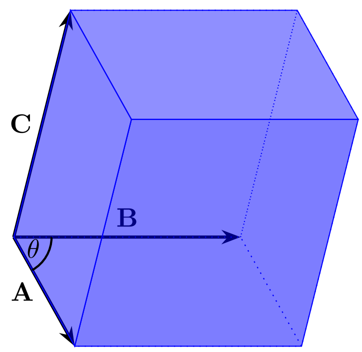
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Pri tem se mora ohraniti abecedni red, saj imajo obratni izrazi nasproten predznak, na primer

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$$

Zamenjamo pa lahko vektorski in skalarni produkt, če smo pozorni na oklepaje:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$



Slika 6.6: **Prikaz trojnega skalarnega produkta. Označen je paralelepiped (telo s paroma vzporednimi šestimi ploskvami), ki ga oklepajo vektorji A, B in C. Prostornina tega paralelepipeda je $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Ker je kót med $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ in C manjši od $90°$, je njun skalarni produkt res pozitiven. Če bi uporabili $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, bi dobili ravno nasproten predznak. Ker je ploščina neodvisna od tega, katera vektorja vzamemo za osnovo (pri čemer čuvamo na predznake), velja recimo $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.**

Vektorski trojni produkt: Ta primer se da enostavno poenostaviti:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Podobno lahko poenostavimo tudi *višje vektorske produkte*, na primer

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$