Odvodi
Rešitve

Peter Andolšek
Januar 2024

1. Definicija odvoda

Naloga 1.1

(a) $f'(x) = 0$
(b) $f'(x) = 1$
(c) $f'(y) = 2y$
(d) $f'(x) = 3x^2$
(e) $f'(x) = nx^{n-1}$
(f) $f'(t) = 10t - 1$
(g) $f'(\theta) = \cos\theta$

2. Računanje odvodov

Naloga 2.1 Izračunaj prve odvode sledečih funkcij:

(a) $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + b$
(b) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^{5/2}}$
(c) $f'(x) = \sin x + x\cos x$
(d) $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$
(e) $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$
(f) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$
(g) $v'(x) = 3ke^{3x}$
(h) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{(x^2-1)^{3/2}}$
(i) $x'(t) = \dfrac{at}{\sqrt{at^2 - 3}}$
(j) $I'(\phi) = \dfrac{3}{9\phi^2 - 6\phi + 2}$
(k) $\theta'(z) = \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{10z - 1}{5z^2 - z}$
(l) $x'(t) = 5t(2\ln t + 1)$
(m) $f'(x) = -\sin\left(x^2e^x\right)\, xe^x(2+x)$
(n) $c'(\gamma) = \dfrac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}$

Naloga 2.2

(a)
$$f'(x) = 500x^{99} - 2 - 7x^{-2}; \quad f^{(100)}(x) = 5\cdot 100! + 7\cdot 100!\cdot x^{-101}$$

(b)
$$f'(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} + \frac{e\sqrt{\pi}}{2}x^{e/2-1} - 2x$$

(c)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1; \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = 0$$

(d)
$$p'(x) = -2xe^{-x^2}; \quad p''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

(e)
$$\dot{I}(t) = \frac{t}{t^2-1}; \quad \ddot{I}(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$$

(f)
$$c'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad c''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(g)

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \sin^2\gamma}}$$

3. Uporaba odvoda v matematiki

Naloga 3.1 $y = -4x - 1$

Naloga 3.2 $f'(x) = 3x^2 + x - 4$. Lokalna ekstrema sta $x = 1$ (maksimum) in $x = 4/3$ (minimum).

Naloga 3.3 $x = \pm\sigma$

Naloga 3.4

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{e^x}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{e^x}{2x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{e^x}{2}\right] = \infty$

(b) $\lim\limits_{w\to-4} \frac{\sin(\pi w)}{w^2 - 16} = \lim\limits_{w\to-4} \frac{\pi\cos(\pi w)}{2w} = -\frac{\pi}{8}$

(c) $\lim\limits_{z\to0} \frac{\sin(2z) + 7z^2 - 2z}{z^2(z+1)^2} = \lim\limits_{z\to0} \frac{2\cos(2z) + 14z - 2}{4z^3 + 6z^2 + 2z} = \text{ne obstaja}$

(d) $\lim\limits_{t\to\infty} \left[t\ln\left(1 + \frac{3}{t}\right)\right] = \lim\limits_{x\to0^+} \left[\frac{\ln(1+3x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to0^+} \left[\frac{3}{1+3x}\right] = 3$

(e) $\lim\limits_{x\to1} \left[(x-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = \lim\limits_{t\to0} \left[t\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$$= -\lim_{t\to0} \left[t\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = -\lim_{t\to0} \left[\frac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right] = -\lim_{t\to0}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

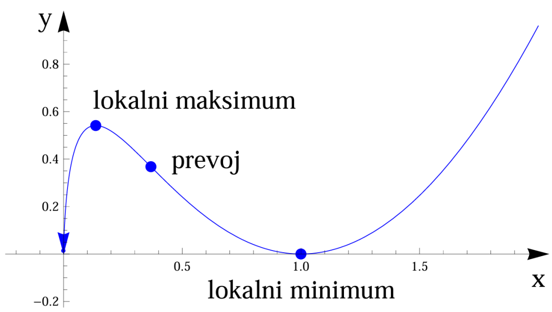
(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[e^x + x\right]^{1/x} = \exp\left[\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x}\right] = \exp\left[\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x}\right] = \exp(1) = e$

Naloga 3.5

(a) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$. Ko $x \to 0$, $f \to 0$. Ko $x \to \infty$, $f \to \infty$.
Ničla je v $x = 1$.

(b) $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$.
Stacionarni točki: maksimum v $x = e^{-2}$ in minimum v $x = 1$. Interval naraščanja $(0, e^{-2}] \cup [1, \infty)$, interval padanja $[e^{-2}, 1]$.
Ko $x \to 0$, $f' \to \infty$.
Ko $x \to \infty$, $f' \to \infty$.

(c) $f''(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}$.
Prevoj je v $x = e^{-1}$. Interval konkavnosti $(0, e^{-1}]$, interval konveksnosti $[e^{-1}, \infty)$.



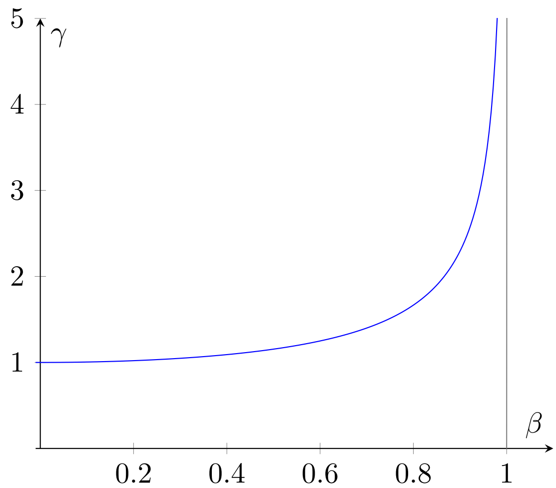
Naloga 3.6 $y'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

4. Uporaba odvoda v fiziki

Naloga 4.1

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

$\mathcal{D}_\gamma = (-1, +1)$, toda ker je hitrost vedno nenegativna, se omejimo na $[0, 1)$. Funkcija venomer narašča, poleg tega pa $\gamma'(0) = 0$, pri $\beta = 1$ pa naraste preko vseh mej. Velja še $\gamma(0) = 1$.



Naloga 4.2 Podobno kot pri kinematiki lahko trenutno hitrost reakcije izračunamo z odvodom:

$$v(t) = \dot{c}(t) = -kc_0e^{-kt} = -k\,c(t).$$

Kemiki sicer zahtevajo, da je hitrost vedno pozitivna (torej v našem primeru kc_0e^{-kt}), ampak to je precej nesmiselno, saj s tem izgubimo ključen podatek: ali se koncentracija snovi povečuje, ali se zmanjšuje.

Naloga 4.3 ⋆ Vpeljimo brezdimenzijski parameter

$$u = \frac{hc}{\lambda k T}$$

tako da se znebimo odvečnih konstant. Preostane nam:

$$B_\lambda = K \frac{u^5}{e^u - 1},$$

kjer je K sestavljena iz nekih konstant (njene vrednosti ne bomo potrebovali). Zahtevamo:

$$0 = \frac{\mathrm{d}B_\lambda}{\mathrm{d}u} = K \frac{5u^4(e^u - 1) - u^5 e^u}{(e^u - 1)^2}$$

Množimo z imenovalcem ulomka, nato pa terjamo, da mora biti preostali izraz $5u^4e^u - 5u^4 - u^5e^u$ enak 0. Preoblikujemo:

$$u = 5(1 - e^{-u})$$

To je transcendentna enačba in jo rešujemo iterativno. Dobimo

$$u = \frac{hc}{\lambda k T} = 4{,}965\,114\,232\ldots$$

Velja torej:

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{ku} = 2{,}897\,771\,955\ldots \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K},$$

kar imenujemo *Wienova konstanta* k_W.

Naloga 4.4 Spomnimo se definicij:

$$B_\nu = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\nu}, \qquad B_\lambda = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda}$$

Z verižnim pravilom lahko eno porazdelitev prevedemo v drugo, poleg tega pa vse pojavitve λ zamenjamo z c/ν.

$$B_\nu = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = B_\lambda \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = \frac{2h\nu^5}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \cdot \frac{c}{\nu^2} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

Pri tem smo še uporabili:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}; \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = -\frac{c}{\nu^2}$$

in zamolčali negativen predznak, ki izvira iz tega, da se pri višanju frekvence krajša valovna dolžina.

Naloga 4.5 Gostota svetlobnega toka, ki jo prejema rob ceste, je

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}\cos\theta,$$

kjer je θ vpadni kót in r oddaljenost od svetilke. S skice razberemo:

$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2/4}}; \qquad r = \sqrt{h^2 + a^2/4}.$$

Torej:

$$j(h) = \frac{P}{4\pi}\frac{h}{(h^2 + a^2/4)^{3/2}}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}h} = \frac{P}{4\pi}\frac{\left(h^2+a^2/4\right)^{3/2} - h\cdot\frac{3}{2}\left(h^2+a^2/4\right)^{1/2}\cdot 2h}{[\cdots]}$$

$$(h^2+a^2/4) - 3h^2 = 0$$

$$h = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Naloga 4.6 (a) Naj bosta A' in B' pravokotni projekcij točk A in B na ogledalo. Naj bo C točka odboja. Označimo $|A'C| = x$. Minimizirati želimo čas, toda ker je hitrost konstantna, lahko minimiziramo razdaljo. Potem velja:

$$D(x) = r_1 + r_2 = \sqrt{a_1^2 + x^2} + \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{a_1^2+x^2}} - \frac{(b-x)}{\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}}$$

$$\frac{x}{r_1} = \frac{b-x}{r_2}$$

Sledi, da sta trikotnika $\triangle AA'C$ in $\triangle BB'C$ podobna, torej sta vpadni in odbojni kót enaka.

(b)

$$ct(x) = n_1 r_1 + n_2 r_2 = n_1\sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2+x^2}} - \frac{n_2(b-x)}{\sqrt{a_2^2+(b-x)^2}}$$

$$n_1\frac{x}{r_1} = n_2\frac{b-x}{r_2}$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Biti nadaljevano ...