Funkcije. Limite. Odvodi. Integrali. Diferencialne enačbe.

$$f(x) \qquad \nabla T \qquad \partial$$

$$x \mapsto x^2 \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}x \qquad \lim_{x \to \infty}$$

Peter Andolšek

December 2024

2. izdaja

Kazalo

Poglavje 1

Funkcija

Motivacija 1.1: Švicarski čevljar

Alexander ima za vsake hlače natanko določen par čevljev, ki jih obuje poleg hlač. Ali lahko iz podanega para čevljev vedno sklepamo, kakšne hlače bo oblekel?

Analiza se v splošnem ukvarja z enim od najosnovnejših konceptov matematike: s funkcijo. Intuitivno gledano je funkcija stroj, ki za nek vnešen objekt (recimo število) vrne nek drug objekt. Strogo gledano,

Definicija 1.2: Funkcija

Funkcija (*preslikava*) $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je predpis, ki vsakemu elementu $x \in \mathcal{A}$ (*argument*) določi nek element $f(x) \in \mathcal{B}$, ki mu pravimo *slika*. $\mathcal{A}$ se imenuje *domena* (definicijsko območje), $\mathcal{B}$ pa *kodomena* (zaloga vrednosti) preslikave.

Že na tem mestu nam pride prav definicija kartezičnega produkta.

Definicija 1.3: Kartezični produkt

Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ množici. *Kartezični produkt* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ teh dveh množic je množica vseh urejenih parov, ki imajo na prvem mestu element iz $\mathcal{A}$ in na drugem mestu element iz $\mathcal{B}$. Z matematičnim zapisom,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{\, (a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} \,\}$$

Poglejmo si produkt dveh množic realnih števil $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Na prvem mestu se lahko pojavi poljubno realno število, prav tako tudi na drugem. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je torej množica vseh (urejenih) parov realnih števil, kar je ravno številska ravnina. Elementi so na primer $(0, 0)$, $(3, 5/2)$, $(5/2, 3)$ in $(-\pi, 2)$. Nadaljujmo še naprej. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je torej množica vseh urejenih *trojic* realnih števil, kar ustreza elementom iz tridimenzionalnega prostora. Uporabno je uvesti nov zapis.

Definicija 1.4: Kartezična potenca

Kadar želimo n-krat kartezično zmnožiti množico $\mathcal{A}$, to zapišemo s potenco

$$\mathcal{A}^n := \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_{n\text{-krat}}$$

Primer je $\mathbb{R}^d$, ki torej ustreza elementom iz d-dimenzionalnega prostora. Opremljeni s kartezičnim produktom lahko sedaj uvedemo graf funkcije, ki je prikaz funkcije na dvodimenzionalni ravnini.

Definicija 1.5: Graf funkcije

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Če na ravnini $\mathbb{R}^2$ označimo vse pare točk $(x, f(x))$, dobimo *graf funkcije*. Koordinato x imenujemo *abscisa*, koordinato y pa *ordinata*.

1.1. Lastnosti funkcij

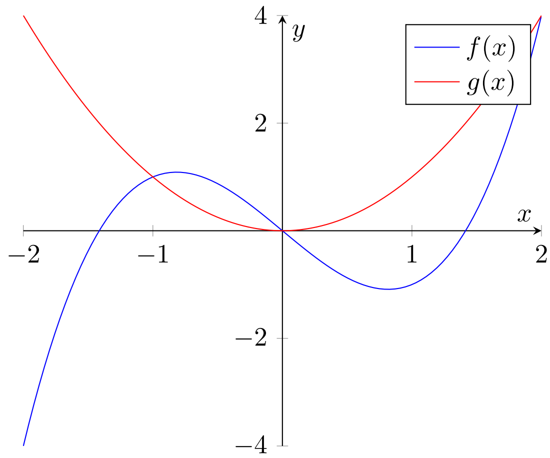
Funkcija mora biti obvezno definirana na vsej domeni in vsakemu elementu iz domene pripisati *natanko en* element iz kodomene. Tako recimo $\mathbb{R}$ ni domena funkcije $f = x^{-1}$, temveč mora biti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (realna števila brez ničle), saj f pri $x = 0$ ni definirana. Vsaka navpičnica iz poljubnega elementa domene mora sekati graf torej natanko enkrat.

Nasprotno kot pri domeni, smejo obstajati elementi iz kodomene, v katere se ne slika noben element iz domene. Funkcije, za katere pa taki elementi iz kodomene ne obstajajo, se imenujejo *surjektivne*.

Definicija 1.6: Surjektivna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funkcija. Če za vsak element $y \in \mathcal{B}$ obstaja tak element $x \in \mathcal{A}$, tako da $y = f(x)$, potem se funkcija imenuje *surjektivna* (angleško: *onto*).

Surjektivnost je opisana na sliki 1.1.



Slika 1.1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **f je surjektivna, g pa ni**

V nek element iz kodomene se sme slikati več elementov iz domene. Funkcije, pri katerih pa za vsak element iz kodomene velja, da se vanj slika največ en element iz domene (en ali nič), se imenujejo *injektivne*, kot je prikazano na sliki 1.2.

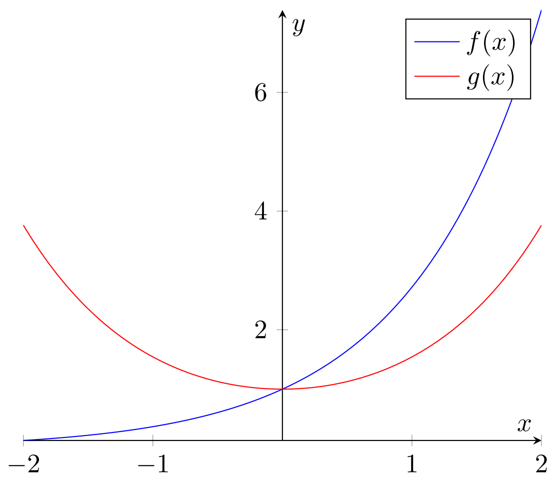
Definicija 1.7: Injektivna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funkcija. Naj bosta $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ poljubni števili. Če iz $x_1 \neq x_2$ sledi $f(x_1) \neq f(x_2)$, potem funkciji pravimo, da je *injektivna* (angleško: *one-to-one*).

Naj bosta $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ zopet poljubni števili. Če iz $f(x_1) = f(x_2)$ sledi $x_1 = x_2$, potem je funkcija injektivna.

Definicija 1.8: Bijektivna funkcija

Če je neka funkcija injektivna in surjektivna, ji pravimo *bijektivna* (angleško: *one-to-one and onto*).



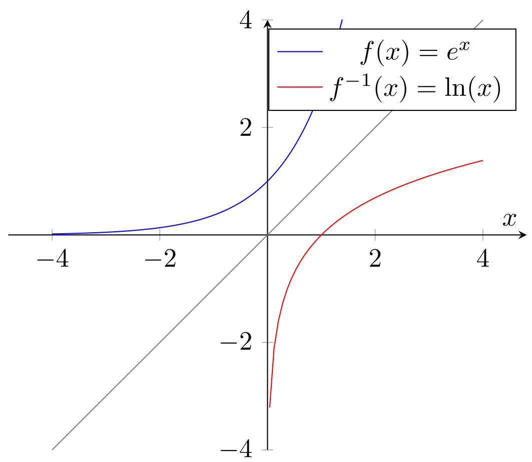
Slika 1.2: **$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f je injektivna, g pa ni**

Izrek 1.9: Injektivnost, surjektivnost in bijektivnost: geometrijski pogled

- Funkcija je *surjektivna*, če vsaka vodoravnica seka graf funkcije vsaj enkrat.
- Funkcija je *injektivna*, če vsaka vodoravnica seka graf funkcije največ enkrat.
- Funkcija je *bijektivna*, če vsaka vodoravnica seka graf funkcije natanko enkrat.

Bijektivnim funkcijam lahko pripišemo tudi inverzno funkcijo. Zakaj mora biti funkcija injektivna in surjektivna? – Pri obratu bi neinjektivne funkcije nekemu elementu iz nove domene pripisale več kot en element iz nove kodomene, kar krši definicijo funkcije (ki mora pripisati vsakemu elementu iz domene *enoličen* element iz kodomene). Podobno, nesurjektivne funkcije v nekaterih elementih nove domene niso definirane, kar ponovno krši definicijo funkcije. – Kljub temu lahko pogosto domeno in kodomeno zožamo, tako da dobimo bijektivno funkcijo, ki ji lahko pripišemo inverz. $f(x) = \sin x$ lahko tako zožamo na domeno $[-\pi/2, \pi/2]$ in kodomeno $[-1, 1]$, saj tako postane bijektivna. Inverz take zožane funkcije je ravno $\arcsin x$.

Graf inverzne funkcije lahko dobimo preprosto tako, da graf funkcije prezrcalimo preko linije $y = x$, kot je prikazano na sliki 1.3.



Slika 1.3: **$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sta le prezrcaljeni preko simetrale lihih kvadrantov**

Definicija 1.10: Inverzna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijektivna funkcija, ki elementu $x \in \mathcal{A}$ pripiše element $f(x) \in \mathcal{B}$. Inverzna funkcija $f^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ je taka funkcija, ki elementu $f(x) \in \mathcal{B}$ pripiše element $f^{-1}(f(x)) := x \in \mathcal{A}$.

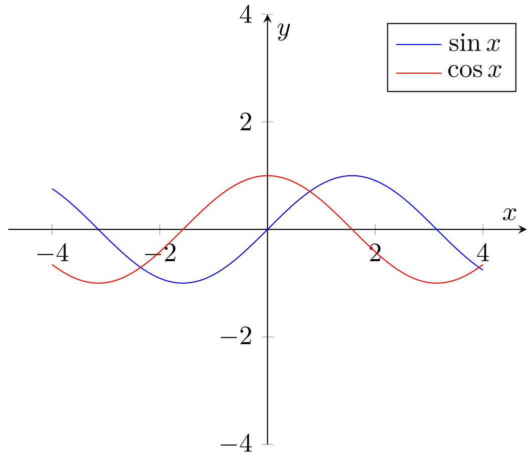
Zgled 1.11: Švicarski čevljar

Razrešimo zagato švicarskega čevljarja iz motivacije 1.1. Alexandrovo pravilo lahko opišemo s funkcijo $f : \mathcal{H} \to \mathcal{P}$, ki slika iz množice hlač $\mathcal{H}$ v množico parov čevljev $\mathcal{P}$. Naloga je ekvivalentna temu, da najdemo inverzno funkcijo f^{-1}. Toda v splošnem f ni niti injektivna niti surjektivna, tako da v splošnem inverz ne obstaja. Sledi, da iz podanega para čevljev ne moremo enolično sklepati na hlače, ki jih je oblekel. Ker v splošnem ni injektivna, mu lahko za nek par čevljev odgovarja več hlač, ker pa v splošnem ni surjektivna, pa mu za kakšen par čevljev ne odgovarjajo nobene hlače.

Posebno pozornost zaslužijo funkcije, ki so simetrične preko ordinate (sode) ali simetrične preko izhodišča (lihe), kot je prikazano na sliki 1.4.

Definicija 1.12: Sode in lihe funkcije

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija.
Če velja $f(x) = f(-x)$, imenujemo f *soda funkcija*.
Če velja $f(x) = -f(-x)$, imenujemo f *liha funkcija*.



Slika 1.4: $\sin x$ je liha (simetrična preko izhodišča), $\cos x$ pa je soda (simetrična preko y osi)

Sliko neke funkcije lahko ponovno vstavimo v neko drugo funkcijo, čemur pravimo kompozitum.

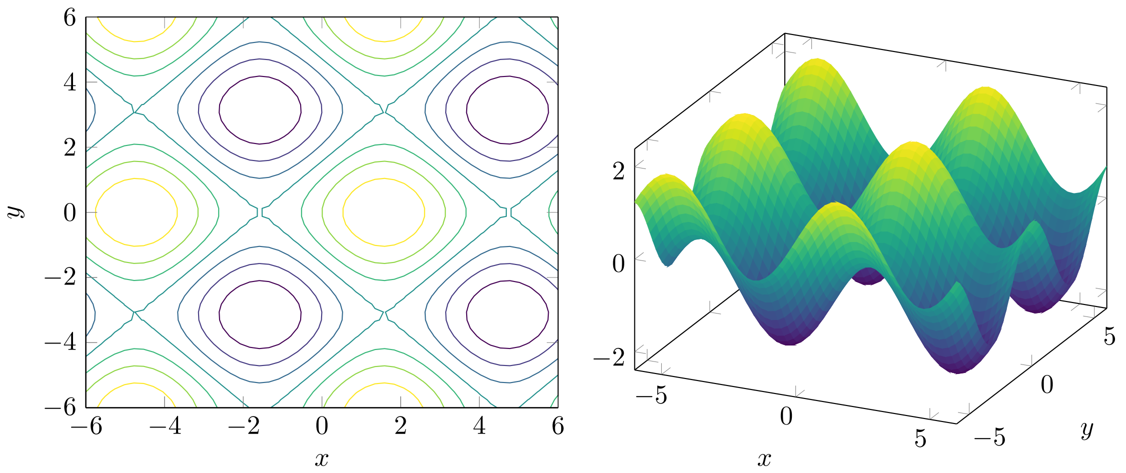
Definicija 1.13: Kompozitum funkcij

Naj bosta $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funkciji. Definiramo *kompozitum* funkcij

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathcal{A} &\to \mathcal{C} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{aligned}$$

1.2. Vektorske funkcije več spremenljivk

Sedaj smo se venomer ukvarjali s funkcijo, ki je številu iz enodimenzionalne domene $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ pripisala število iz enodimenzionalne kodomene $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$. V fiziki pa običajno nastopajo funkcije iz večdimenzionalne domene (saj prostor ni le enodimenzionalen), ki slikajo v večdimenzionalno domeno (kot bomo videli, so takšne funkcije vektorji). Najprej si pa oglejmo funkcije več spremenljivk.



Slika 1.5: **Dva načina prikaza grafa $f(x, y) = \sin x + \cos y$ s plastnicami in tridimenzionalno sliko. Funkcijo dveh spremenljivk $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si lahko predstavljamo kot podatek o reliefu na dvodimenzionalnem površju.**

Definicija 1.14: Funkcija več spremenljivk

Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funkcija, ki ima domeno $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$ in kodomeno $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$. Takšno funkcijo imenujemo *funkcija več spremenljivk*. Pri tem lahko element iz $\mathbb{R}^d$ zaznamujemo z $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_d)$, tako da takšno funkcijo zaznamujemo z

$$f = f(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{x}$ zapisujemo z $\vec{x}$, kadar pišemo s prosto roko. Zapis uvedemo zato, ker je tudi vektor nenazadnje urejena množica svojih komponent in si s tem skrajšamo pisanje

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ torej preslika element (x, y) v $f(\,(x, y)\,)$, kar lahko krajše zapišemo z $f(x, y)$. Primer prikaza takšne funkcije je na sliki 1.5. Koncept lahko razvijemo nadalje v funkcijo, ki slika med $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.15: Vektorska funkcija več spremenljivk

Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funkcija, ki slika iz domene $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m$ v kodomeno $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$. Imenujemo jo *vektorska funkcija več spremenljivk* in zaznamujemo z

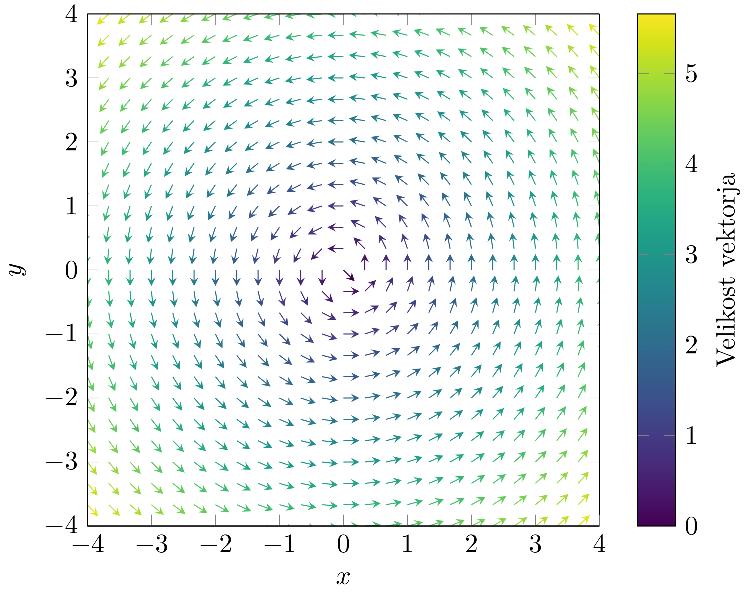
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{A}$ in $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{B}$.

Takšno funkcijo lahko zapišemo tudi po komponentah.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

Takšne funkcije se v fiziki povsod pojavljajo, saj si lahko vektorsko funkcijo več spremenljivk $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ predstavljamo kot vektorsko polje v d-dimenzionalnem prostoru, kot kaže slika 1.6. Zavedati pa se moramo, da lahko vsakič takšno funkcijo zapišemo po komponentah.



Slika 1.6: **Prikaz grafa funkcije $\mathbf{f}(x, y) = (-y, x)$, torej $f_1(x, y) = -y$ in $f_2(x, y) = x$. Na tem grafu kažejo puščice le smer, barva pa njihovo velikost (da se izognemo prekrivanju puščic). Funkcijo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si lahko predstavljamo kot vektorsko polje 2-d vektorjev na 2-d površini.**

Vektorsko polje lahko predstavimo na več načinov. Iz same definicije sledi, da ga lahko predstavimo kot prostor, v katerem je v vsaki točki postavljena puščica. Seveda lahko narišemo le končno število puščic. Drug način je, da uporabimo *silnice*. Silnica je krivulja, za katero velja, da je v vsaki njeni točki tangenta vzporedna z vektorjem v tisti točki. Če opazujemo električno polje točkastega naboja, bo njegovo električno polje $\mathbf{E}$ kazalo radialno navzven. Posledično bodo radialne tudi silnice.

Poglavje 2

Limita

Motivacija 2.1: Želva in solata

Želva zagleda sočno glavo solate, ki se nahaja na $x = 0$. Začne ob času $t = 0$ in se giblje po odvisnosti $x(t) = (t+1)^{-1}$ (x v metrih, t v sekundah). Ali bo kdaj dosegla solato?

Velik preboj v razvoju analize se je zgodil z odkritjem limite, saj je pojem limite tesno povezan z zveznostjo funkcije in tudi s pojmom odvoda ter integrala.

Poznamo limito zaporedja in limito funkcije, toda v nadaljevanju se omejimo na limito funkcije, saj bomo z njo definirali pojme, kot so odvod in integral.

Neformalno lahko limito definiramo takole: Limita funkcije v točki a je enaka L, če je na neskončno majhni okolici točke a funkcija (približno) enaka L. Formalno,

Definicija 2.2: Limita funkcije

Limita funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki a je enaka L, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$, ki zadošča $0 < |x - a| < \delta$, velja $|f(x) - L| < \epsilon$.

Limito označimo z

$$L = \lim_{x\to a} f(x).$$

Ta definicija je precej abstraktna in je za osnovne namene fizike ter astronomije ni potrebno poznati, lahko pa pomaga pri globljem razumevanju teorije. Definicijo si lahko predstavljamo takole: oseba A si lahko izbere poljuben $\epsilon > 0$, ki predstavlja odmik funkcije od limite v smeri y. Če limita obstaja, lahko oseba B najde tak odmik $\delta > 0$ od limite v smeri x, da bo funkcija za vsak x znotraj območja $(a - \delta, a + \delta)$ ležala znotraj intervala $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. ϵ naj nas spomne na napako (*error*) funkcije, δ pa na razliko (*difference*).

Pripomba 2.3: Enosmerne limite

Pogosto limita ne obstaja, obstaja pa limita z ene smeri. Če se recimo točki a bližamo z desne in iščemo limito, rečemo taki limiti *desna* in jo označimo z

$$\lim_{x\to a^+} f(x).$$

Podobno *levo* limito označimo z

$$\lim_{x\to a^-} f(x).$$

Mali znak + pri desni limiti lahko obrazložimo s tem, da se limiti bližamo z desne oziroma iz pozitivne smeri. Analogno si lahko interpretiramo tudi levo limito. Limita obstaja natanko tedaj, ko sta limiti z obeh smeri enaki:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = c$$

Za računanje z limitami veljajo intuitivna pravila.

Izrek 2.4: Računanje z limitami

Če obstajajo vse navedene posamezne limite, potem veljajo sledeča pravila:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \implies \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

2.1. Računanje limit

Limite je možno računati iz definicije, toda to je običajno precej mukotrpno. Na srečo poznamo mnogo izrekov in taktik, ki nam računanje limit precej olajšajo. Spoznali bomo direktno substitucijo, faktorizacijo, množenje s konjugatom, neprave limite racionalnih funkcij in l'Hôpitalovo pravilo.

Direktna substitucija

Na tem mestu bežno omenimo še definicijo zveznosti.

Definicija 2.5: Zvezna funkcija

Funkcija f je zvezna v a, če in samo če velja

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Definicijo zveznosti lahko uporabimo v svoj prid: kadar je funkcija v točki a zvezna, lahko torej preprosto vstavimo a v limito:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Primer je limita

$$\lim_{x\to 10}\frac{x}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Faktorizacija

Kadar limitiramo kvocient dveh polinomov (*racionalna funkcija*), lahko najprej vsak polinom faktoriziramo in pokrajšamo iste faktorje, kot kaže sledeči zgled.

Zgled 2.6: Uporaba faktorizacije

Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Funkcija znotraj limite v $x = 1$ sploh ni definirana, kaj šele zvezna, tako da ne moremo uporabiti direktne substitucije, lahko pa izraz faktoriziramo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Pri tem smo sicer vmes delili z $(x-1)$, kar je pri $x = 1$ enako 0, toda deljenje z ničlo je pri običajni algebri prepovedano. Tukaj je bil ta korak legitimen, saj nas ne zanima obnašanje funkcije v sami točki $x = 1$, temveč le v njeni *zelo bližnji* okolici, kjer pa $x - 1 \neq 0$.

Množenje s konjugatom

Kadar se v ulomku pojavijo koreni, je pogosto koristno množiti ulomek s konjugatom izraza s korenom.

Zgled 2.7

Izračunajmo limito

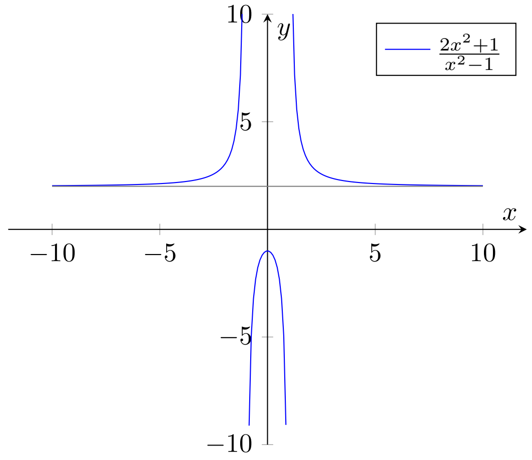
$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$$

Če v izraz direktno vstavimo $x = 4$, dobimo $0/0$, kar ni v redu. Namesto tega lahko množimo s konjugatom števca $(2 + \sqrt{x})$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \lim_{x\to 4} \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(4-x)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Neprave limite racionalnih funkcij

Posebne limite so *neprave limite*, kjer limitiramo proti $\pm\infty$. Za racionalne funkcije oblike $P(x)/Q(x)$, kjer sta $P(x)$ in $Q(x)$ polinoma, lahko preprosto izračunamo limito za $\pm\infty$, saj postanejo vsi ostali členi zanemarljivi v primerjavi z vodilnim. Ulomek lahko nato le še pokrajšamo. Primer takšne funkcije je na sliki 2.1.



Slika 2.1: **Graf $\frac{2x^2+1}{x^2-1}$ se bliža vrednosti 2 v neskončnosti: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1} = 2$.**

Izrek 2.8: Neprave limite racionalnih funkcij

Izračunajmo limito racionalne funkcije, ko se x bliža pozitivni neskončnosti (velja pa postopek tudi za negativno neskončnost). Naj $P(x) = p_m x^m + \cdots + p_1 x + p_0$ in $Q(x) = q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0$ polinoma (s stopnjama m in n). Pri tem lahko vse nevodilne člene v neskončnosti zanemarimo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_m x^m + \cdots}{q_n x^n + \cdots} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_m x^m}{q_n x^n} = \frac{p_m}{q_n} \lim_{x\to\infty} x^{m-n}$$

Če je stopnja polinoma P manjša od stopnje Q $(m < n)$, je limita 0.

Če sta stopnji enaki $(m = n)$, je $x^{m-n} = x^0 = 1$, tako da velja:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_m}{q_n}$$

Če je stopnja polinoma P večja od stopnje Q $(m > n)$, je limita lahko pozitivna ali negativna neskončnost. Razmislimo, kako se obnaša funkcija $\frac{p_m}{q_n} x^{m-n}$ v neskončnosti. Za sod $(m-n)$ bo imela x^{m-n} v obeh neskončnostih limito $+\infty$, za lih $(m-n)$ pa bo imela x^{m-n} v pozitivni neskončnosti limito $+\infty$ in v negativni $-\infty$. Za dejansko limito izraza $\frac{p_m}{q_n}x^{m-n}$ moramo limito x^{m-n} še množiti s predznakom izraza $\frac{p_m}{q_n}$.

Zgled 2.9: Limite racionalnih funkcij

Oglejmo si primer s slike 2.1. Ko limitiramo proti neskončnosti, lahko zanemarimo vse člene, ki niso vodilni, tako da dobimo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}2=2$$

Za primerjavo si oglejmo sledečo limito, kjer limitiramo proti negativni neskončnosti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2}{-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{-2x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=\infty$$

V zadnjem koraku smo ugotovili, da gre x v negativni neskončnosti proti $-\infty$, ko pa to zmnožimo z $-3/2$, pa dobimo rezultat, da je limita enaka $-3/2\cdot(-\infty)=\infty$.

Za zaključek rešimo še nalogo iz motivacije 2.1. Enačba $x(t)=(t+1)^{-1}=0$ nima rešitev, torej želva ne bo dosegla solate ob nobenem času t. Oglejmo si še limito, ko $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$$

Izkaže se, da se bo želva solati vendarle neskončno približala, toda je ne bo dosegla v nobenem (končnem) času t. Dostikrat pravimo, da jo bo dosegla *v neskončnem času.*

L'Hôpitalovo pravilo

Kadar se pri direktni substituciji pojavijo izrazi oblike $0/0$ ali ∞/∞, lahko limito izračunamo z *l'Hôpitalovim pravilom.* Preprosto odvajamo števec in imenovalec ter evalviramo limito novega ulomka.[1] Tako lahko limitiramo tudi izraze oblike 1^∞, $0\cdot(\pm\infty)$, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$, če jih prej preoblikujemo v ulomek.

Izrek 2.10: L'Hôpitalovo pravilo

Če sta funkciji f in g odvedljivi v okolici točke a (ne rabita biti odvedljivi v sami točki a), in če sta obe limiti $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$ enaki 0 ali $\pm\infty$, in če limita kvocienta odvodov obstaja, potem velja

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Zgled 2.11: Uporaba l'Hôpitalovega pravila

Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Pri direktni substituciji dobimo izraz $0/0$, zato pomislimo na uporabo l'Hôpitalovega pravila. Odvod števca je $\cos x$, odvod imenovalca pa 1, tako da velja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos(0)=1$$

[1] Odvode sicer definiramo šele v naslednjem poglavju, vendarle pa so uporabni že sedaj.

Eulerjevo število

Nazadnje omenimo še limito, ki se pogosto pojavi:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ko lahko v limiti izpostavimo ta izraz, lahko limito običajno izrazimo s številom e.

Zgoraj navedene metode so precej formalne, v praksi pa lahko narišemo graf in na podlagi njegovega obnašanja predvidomo limite.

Zgled 2.12: Limite v RL tokokrogu

Zaporedno v vezje vežemo upornik R, tuljavo L in vir napetosti U. Ob $t = 0$ vzpostavimo tokokrog. Tok v vezju je podan s formulo

$$I(t) = U/R\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

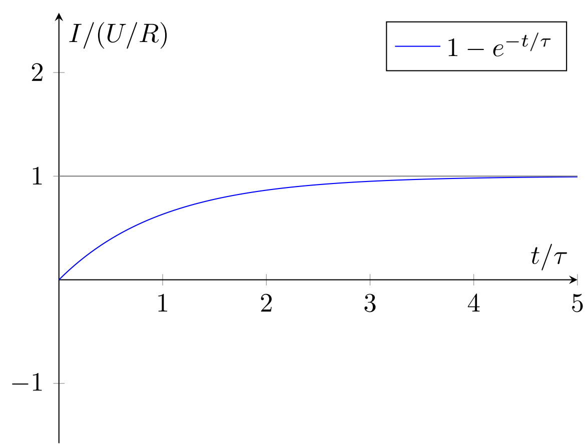
kjer $\tau = L/R$. Z uporabo limit lahko določimo, da

$$I(0) = \lim_{t \to 0} I(t) = 0$$

in

$$I(\infty) = \lim_{t \to \infty} I(t) = U/R.$$

To pomeni, da tuljava sprva deluje kot odprta sponka, po dolgem času pa je tok skozi njo enak, kot če bi bila namesto nje le idealna žica, kot kaže slika 2.2. Tako nam limite dajo dodaten vpogled v fizikalno dogajanje, z njimi pa lahko tudi preverimo svoje izpeljave. Točno take limite bi namreč pričakovali tudi brez dolge izpeljave.



Slika 2.2: **Odvisnost toka od časa v RL tokokrogu.**

Poglavje 3

Odvod

Motivacija 3.1: Trenutna hitrost

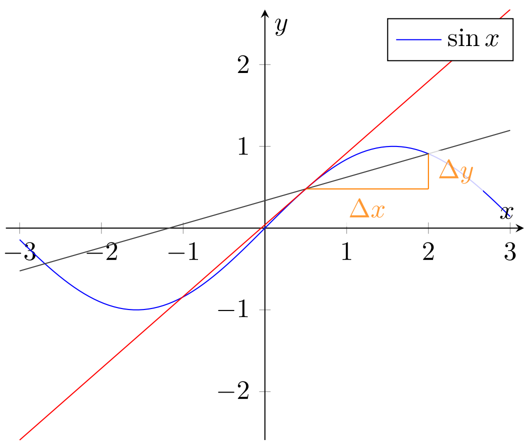
Tajna obveščevalna služba nam je zaupala podatek, da je položaj mravlje podan s funkcijo $x(t) = 2t^2 - t - 3/4$ (x v centimetrih, t v sekundah). Kakšna je hitrost mravlje v odvisnosti od časa $v(t)$?

Fizike pogosto zanima dogajanje in spremembe. Denimo, da imamo podan položaj v odvisnosti od časa $x = x(t)$. Že iz osnovne šole vemo, kako se izračuna povprečno hitrost med časoma t_0 in t_1:

$$v_{\text{pov}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Ta koncept želimo nadgraditi. Recimo, da želimo vedeti *trenutno* hitrost ob času t_0, torej hitrost, ki jo pokaže merilec hitrosti v avtu. Časovni interval Δt moramo pri tem znižati na 0 (kot kaže slika 3.1), toda pri tem bi delili z 0. Ravno pri tem nam lahko pomaga limita:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$



Slika 3.1: **Siva črta je sekanta pri $x_0 = 0{,}5$ z $\Delta x = 1{,}5$. Če pošljemo $\Delta x \to 0$, dobimo tangento na graf, ki jo lahko dobimo tudi z odvodom (rdeča črta).**

S tem smo že prišli do izraza za *odvod*. Dobljene rezultate spravimo v matematično obliko:

Definicija 3.2: Odvod funkcije

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Odvod funkcije f definiramo z limito:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Izberimo si neko točko a, skozi katero na graf potegnemo tangento. $f'(a)$ nam pove smerni koeficient te tangente.

Definicija 3.3: Odvedljivost funkcije

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *odvedljiva* v točki a, če obstaja $f'(a)$. Splošneje, funkcija f je odvedljiva (na splošno), če odvod obstaja v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$.

Zavedajmo se, da odvod ponovno slika $f'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, torej je definiran v vsaki točki (seveda, če je funkcija f tam odvedljiva). Če si izberemo neko točko a, lahko dobimo odvod v tej točki preprosto tako, da izračunamo $f'(a)$ (odvod *evalviramo*).

Pripomba 3.4: Notacija za odvode

V rabi je več notacij (zapisov) za odvod:

(a) **Lagrangeev zapis**: $f'(x)$ za odvod, $f'(a)$ za evalvacijo v točki a.

(b) **Leibnizev zapis**: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ za odvod, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_a$ za evalvacijo v točki a.

(c) **Newtonov zapis**: $\dot{f}(x)$ za odvod, $\dot{f}(a)$ za evalvacijo v točki a.

Lagrangeev zapis v fiziki običajno uporabljamo za odvode po kraju, Newtonov zapis pa za odvode po času. Kadar želimo biti eksplicitni in nedvoumno zapisati količino, po kateri odvajamo, pa uporabimo Leibnizev zapis. Poleg teh treh notacij pa so v uporabi tudi druge, recimo f_x ali $D_x f$ za odvod f po x.

Pri tem je vredno omeniti, da lahko Lagrangeev in Newtonov zapis (za zdaj) uporabljamo le pri funkcijah ene spremenljivke (s takimi smo imeli opraviti sedaj), pri Leibnizevem zapisu pa moramo nedvoumno zapisati, po kateri spremenljivki odvajamo.

Definicija 3.5: Višji odvodi

Odvod funkcije f lahko še enkrat odvajamo, da dobimo *drugi odvod*:

$$f''(x) := (f'(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Analogno definiramo tudi n-ti odvod:

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))'.$$

Pripomba 3.6: Notacija za višje odvode

Tudi za višje odvode poznamo različne notacije:

(a) **Lagrangeev zapis**: $f''(x)$ za drugi odvod, ... $f^{(n)}(x)$ za n-ti odvod.

(b) **Leibnizev zapis**: $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ za drugi odvod, ... $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ za n-ti odvod.

(c) **Newtonov zapis**: $\ddot{f}(x)$ za drugi odvod, $\dddot{f}(x)$ za tretji odvod ...

Pripomba 3.7: Razumevanje Leibnizevega zapisa

Od drugih dveh se še najbolj razlikuje Leibnizev zapis, ki pa se sicer izredno pogosto pojavlja v fiziki in astronomiji, zato je dobro poznati njegov pomen. V osnovi predstavlja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ operator, ki deluje na funkcijo $f = f(x)$ in ji pripiše odvod

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f) := f'(x).$$

Lahko pa odvod krajše zapišemo tudi kot

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f).$$

Opazimo podobnost z definicijo naklona sekante $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Na podlagi tega lahko Leibnizev zapis interpretiramo kot naklon sekante, ko neke končne razlike Δf in Δx vse bolj manjšamo, dokler ne pridemo do *infinitezimalno majhnih* razlik $\mathrm{d}f$ in $\mathrm{d}x$ (imenovanih *diferenciali*). Tako dobi zapis za odvod močen fizikalen pomen, saj recimo osnovnošolsko definicijo hitrosti $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ prelevimo v $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

S tem postane logičen zapis drugega (in pa tudi višjega) odvoda

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\right] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}.$$

Posebno pozornost namenimo še točkam, kjer je odvod enak 0.

Zgled 3.8: Iskanje stacionarnih točk

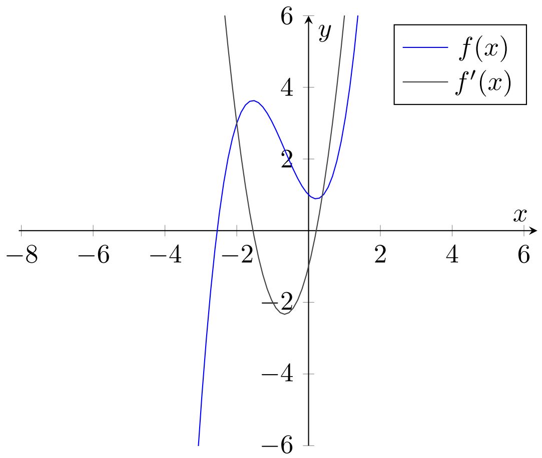
Kadar velja $f'(a) = 0$, imenujemo točko a *stacionarna točka*: to je lahko lokalni minimum, maksimum ali pa sedlo. Sedlo si lahko predstavljamo kot polico, kjer se začasno funkcija izravna, v resnici pa tam nima ekstrema. Primer je recimo ničla pri x^3. Zavedati pa se moramo, da s to metodo dobimo le lokalne minimume, ne pa nujno tudi globalnih.

Naravo stacionarne točke (minimum, maksimum, sedlo) lahko določimo kar z grafa ali pa pogledamo predznak odvoda na obeh straneh stacionarne točke. Primer: za $f(x) = x^4$ imamo $f'(x) = 4x^3$, torej je v $x = 0$ stacionarna točka. Levo od $x = 0$ ima odvod negativen predznak (torej funkcija pada), desno pa pozitiven (torej funkcija narašča). Sledi, da je v $x = 0$ lokalni minimum.

Naravo stacionarne točke pa lahko določimo tudi z drugim odvodom.

$$\begin{cases} f''(a) < 0 & \text{funkcija ima v } a \text{ lokalni maksimum} \\ f''(a) > 0 & \text{funkcija ima v } a \text{ lokalni minimum} \\ f''(a) = 0 & \text{o naravi stacionarne točke s tem testom ne moremo povedati ničesar} \end{cases}$$

Če velja $f''(a) = 0$, potem moramo uporabiti še višje odvode, dokler ne dobimo neničelnega rezultata.



Slika 3.2: **Lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ (modra) dobimo tako, da poiščemo ničle odvoda $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ (siva). Prevoj se zgodi pri ničli drugega odvoda $f''(x) = 6x + 4 = 0$, levo od njega je funkcija konkavna, desno pa konveksna.**

Pripomba 3.9: Pomen drugih odvodov

Prvi odvod si lahko preprosto predstavljamo kot naklon tangente na krivuljo v neki točki. Intuitiven pomen ima pa tudi drugi odvod, ki namreč predstavlja vbočenost/izbočenost funkcije,

$$\begin{cases} f''(a) = 0 & \text{funkcija ima v } a \text{ prevoj} \\ f''(a) < 0 & \text{funkcija je v } a \text{ konkavna} \\ f''(a) > 0 & \text{funkcija je v } a \text{ konveksna} \end{cases}$$

3.1. Pravila za odvajanje

Opremljeni s teoretičnimi znanji o odvodih lahko začnemo z računanjem odvodov dejanskih funkcij. Poznamo nekaj osnovnih pravil za odvajanje:

Izrek 3.10: Pravila za odvajanje

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (kf(x))' &= kf'(x) \\ [f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ [g(f(x))]' &= g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

Čeravno so sprva nekatera pravila neintuitivna, se z dovolj prakse prav vsako vtisne v spomin. Poleg tega se lahko pravilo za odvod kompozituma zelo lepo zapiše z uporabo Leibnizevega zapisa:

$$[g(f(x))]' = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g'(f(x))f'(x)$$

Izrek 3.11: Odvodi elementarnih funkcij

$f(x)$	$f'(x)$	Opombe
c	0	
x^r	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{R}, r \neq 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$1/x$	$x > 0$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$x > 0, a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$x \neq (n + \frac{1}{2})\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1 - x^2}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1 - x^2}$	$-1 < x < 1$
$\arctan x$	$1/(1 + x^2)$	
$\operatorname{arccot} x$	$-1/(1 + x^2)$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$	
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{x^2 + 1}$	
$\operatorname{arcosh} x$	$1/\sqrt{x^2 - 1}$	$1 < x$
$\operatorname{artanh} x$	$1/(1 - x^2)$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arcoth} x$	$1/(1 - x^2)$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

S pomočjo odvodov elementarnih funkcij in pravil za odvajanje lahko izračunamo odvod katerekoli elementarne funkcije.

Zgled 3.12: Trenutna hitrost

Sedaj lahko rešimo motivacijo 3.1. Podan imamo le položaj $x(t) = 2t^2 - t - 3/4$. Če to odvajamo po času, dobimo hitrost:

$$v(t) = \dot{x}(t) = 2 \cdot 2t - 1 = 4t - 1$$

Ker je x podan v centimetrih in t v sekundah, ima dobljena hitrost enote centimetri na sekundo.

Zgled 3.13: Skiciranje funkcij

Ko izpeljemo neko odvisnost, jo želimo podrobneje raziskati oz. preveriti s tem, da izrišemo graf. Najlepše rezultate dobimo z računalnikom, ki v funkcijo vstavi mnogo numeričnih vrednosti, kljub temu pa nam veščina skiciranja grafov funkcij pogosto pride prav pri razumevanju lastnosti funkcije.

Najprej funkcijo analiziramo, kar pomeni, da raziščemo:

(a) definicijsko območje in limite na robovih definicijskega območja,
(b) odvod ter intervale naraščanja in padanja, stacionarne točke,
(c) drugi odvod ter intervale konveksnosti in konkavnosti, prevoje,
(d) ostale pomembnejše lastnosti.

Skicirajmo funkcijo $f(x) = e^{-1/x}$.

(a) Funkcija je definirana v vseh točkah razen v $x = 0$. Sledi, da $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Robovi definicijskega območja so $-\infty$, 0 in $+\infty$. Tako za negativno kot tudi pozitivno neskončnost velja sledeča limita:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-1/x} = \lim_{t \to 0} e^{-t} = 1.$$

Ko se bližamo izhodišču z desne:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0.$$

Ko pa se bližamo izhodišču z leve:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^{-t} = \infty.$$

(b) Odvod izračunamo s pravili:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}.$$

Eksponentna in kvadratna funkcija sta na definicijskem območju vedno pozitivni, torej funkcija povsod narašča. Limita odvoda, ko se z desne bližamo izhodišču, je:

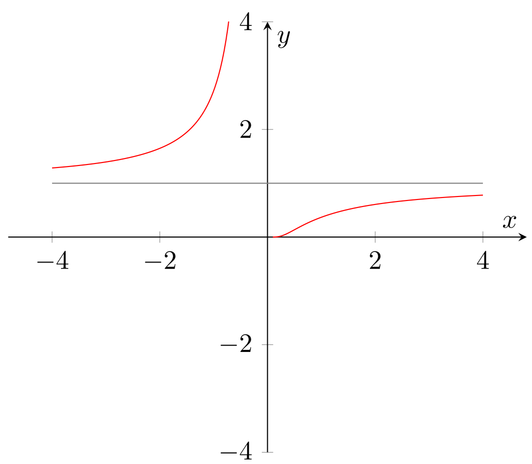
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{u \to \infty} u^2 e^{-u} = 0.$$

(c) Drugi odvod je

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} e^{-1/x}(1 - 2x).$$

Prva dva faktorja sta vedno pozitivna, torej o konveksnosti odloča le $(1 - 2x)$. Na intervalu $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$ je funkcija konveksna, na intervalu $(1/2, \infty)$ je konkavna, pri $x = 1/2$ pa je prevoj.

Z zbranimi ugotovitvami lahko enostavno skiciramo graf. Računalniško generiran izris grafa je na sliki 3.3.



Slika 3.3: **Graf funkcije, ki jo želimo skicirati.**

3.2. Implicitno odvajanje

Tako kot lahko obema stranema enačbe prištejemo neko konstanto, lahko tudi obe strani odvajamo po isti spremenljivki.

Zgled 3.14

Denimo, da je $y = y(x)$ funkcija, za katero velja sledeča enačba:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Lahko bi izrazili y in ga odvajali, kot smo že vajeni (nekaj problemov bi nam sicer povzročala dvolična definicija funkcije y, saj imamo zgornjo in spodnjo polkrožnico). Toda sedaj uporabimo drugačen pristop. Obe strani izvorne enačbe odvajajmo po x:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Pri tem smo pazili, ker $y = y(x)$ ni konstanta, ampak funkcija spremenljivke x. Če zgornjo enačbo preoblikujemo, dobimo:

$$y'(x) = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\pm\sqrt{R^2 - x^2}},$$

kar bi lahko v tem primeru ugotovili tudi na ekspliciten način. Mnogokdaj pa je implicitno odvajanje hitrejše, pogosto pa eksplicitno sploh ne moremo izraziti funkcije. Implicitno odvajanje je ključno tudi pri reševanju diferencialnih enačb, saj se veljavnost enačbe pri odvajanju obeh strani ne spremeni.

3.3. Taylorjev razvoj

Sedaj iščemo tak polinom $g(x) = g_0 + g_1(x-a) + g_2(x-a)^2 + \cdots$, da se bo karseda dobro približal funkciji f v točki a, kjer predpostavimo, da je f neskončnokrat odvedljiva. Ko je $x = a$, nam ostane le člen g_0, tako da mora veljati $g_0 = f(a)$. Nadalje želimo da se tudi vsi višji odvodi od f in g v $x = a$ ujemajo. g odvajamo n-krat in pri $x = a$ velja $g^{(n)}(a) = n!\, g_n = f^{(n)}(a)$, saj vsi ostali členi izginejo. Fakulteta je definirana z $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ [1] in se pojavi zaradi ponavljajoče se uporabe pravila za odvajanje potence. Zapišimo funkcijo f sedaj z dobljenimi koeficienti.

Izrek 3.15: Taylorjeva vrsta

Naj bo f funkcija, ki je neskončnokrat odvedljiva pri številu a. Okoli a jo lahko razvijemo v *Taylorjevo vrsto*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Pri tem je $n!$ fakulteta števila n in $f^{(n)}(a)$ n-ti odvod v a.

Pogosto razvijamo okrog $a = 0$. Takemu posebnemu primeru pravimo *Maclaurinova vrsta*.

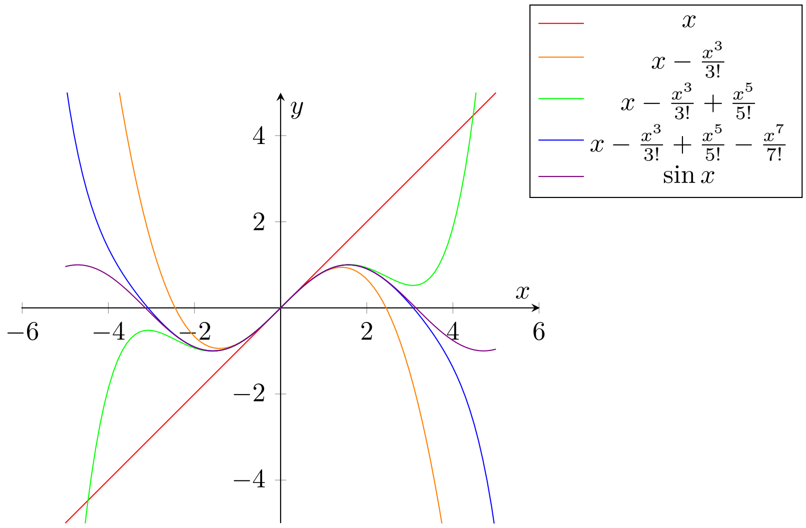
[1] Pri tem velja $0! = 1$.

Izrek 3.16: Maclaurinova vrsta

Naj bo f funkcija, ki je neskončnokrat odvedljiva v 0. Okrog izhodišča jo lahko razvijemo v *Maclaurinovo vrsto*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

Taylorjeva vrsta nam služi kot približek za funkcijo. Kadar namreč $x - a$ ni prevelik, so višji členi zanemarljivi v primerjavi z začetnimi.



Slika 3.4: **Bližanje funkciji $\sin x$ z vse več členi Maclaurinove vrste.**

Zgled 3.17: Taylorjevi razvoji nekaj funkcij

Oglejmo si Maclaurinov razvoj funkcije e^x. Vsi odvodi so enaki $f^{(n)}(x) = e^x$, torej $f^{(n)}(0) = 1$ in so koeficienti kar $a_n = \frac{1}{n!}$:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

Kadar nas zanima obnašanje e^x v zelo bližnji okolici izhodišča, zato navadno vzamemo $e^x \approx 1 + x$, po potrebi pa lahko obdržimo tudi nekaj višjih členov.

Oglejmo si še Maclaurinovo vrsto za $\sin x$. Po kratkem razmisleku vidimo, da so vrednosti n-tega odvoda v 0 enaki: 0, +1, 0, −1, 0, +1, 0, −1, ...

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \end{aligned}$$

Podobno velja tudi za kosinus:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\end{aligned}$$

Iz razvojev sledi, da za majhne kote x velja $\sin x \approx x$ in $\cos x \approx 1 - x^2/2$. Pri kosinusu smo obdržali dva člena, saj ima $\cos x \approx 1$ za večino namenov premajhno natančnost. Po potrebi lahko obdržimo tudi višje člene.

3.4. Diferenciali

Količine, kot je $\mathrm{d}x$, imenujemo *diferenciali*. Formalno ne spadajo med realna števila, lahko pa se pretvarjamo, da lahko operiramo z njimi na popolnoma običajen način. Tako lahko zapišemo sledečo identiteto:

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = y'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Matematiki se sicer nad takšnimi manipulacijami zmrdujejo, toda diferenciali so vsesplošno uporabni v vsej fiziki in takšen način upravljanja je zelo dobrodošel.[2] Diferencial si lahko namreč predstavljamo kot zelo majhno razliko.

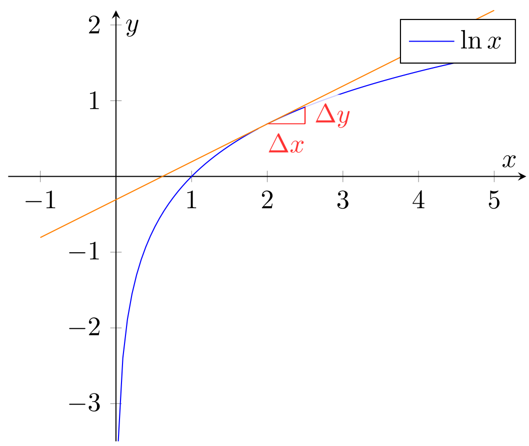
Ponovno si oglejmo zgornjo enačbo. Lahko jo interpretiramo kot navodilo, kako so povezane majhne razlike v y in x smeri:

$$\Delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Delta x,$$

kjer naj bosta obe spremembi zelo majhni. Recimo, da obravnavamo funkcijo $y(x) = x^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$. Postavimo se v točko $a = 1$. Če se premaknemo v smeri x za 0.1 enote, se y koordinata spremeni za približno

$$\Delta y = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_1 \Delta x = 2 \cdot 0.1 = 0.2.$$

Vse manjše spremembe obravnavamo, vse manjša je dejanska napaka. V limiti $\Delta x \to 0$ je rezultat točen.



Slika 3.5: **Na grafu $f(x) = \ln x$ (ki ima odvod $f'(x) = 1/x$) se premaknemo s točke $x = 2$ proti desni za $\Delta x = 0{,}5$. Krivuljo $f(x)$ lahko v točki $x = 2$ približamo s tangento, tako da lahko spremembo funkcije ocenimo z $\Delta y = f'(x)\,\Delta x = \frac{1}{2}0{,}5 = 0{,}25$.**

[2]Izkaže se, da je tudi v resnici popolnoma veljaven. V zgodnjih 1960-ih je Abraham Robinson razvil teorijo *nestandardne analize*, ki uporablja *hiperrealna števila* in postavi diferenciale na popolnoma trdna matematična tla.

Pripomba 3.18: Analiza napak

Diferenciale uporabljamo tudi pri analizi napak. Če recimo izmerimo količino x z napako Δx, želimo pa vedeti napako količine $y = x^2$, bomo preprosto diferenciale nadomestili z napakami, saj so običajno zanemarljive: $\Delta y = 2x\,\Delta x$. To je dosti bolj pregledno kot pa $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$, naš način pa lahko tudi posplošimo na funkcije več argumentov. Za običajne funkcije ene spremenljivke $f = f(x)$ imamo torej

$$\Delta f = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| \Delta x.$$

Absolutne vrednosti smo dodali zato, ker imajo napake vedno pozitivno vrednost. Za splošne funkcije več spremenljivk $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, kjer so te spremenljivke neodvisne, pa imamo

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}.$$

Pravimo, da se *neodvisne napake seštevajo v kvadraturi.* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ so parcialni odvodi, ki jih bomo spoznali v poglavju 3.7.

3.5. Porazdelitve

Kljub temu je na tem mestu primeren razmislek: kako naj si interpretiramo izraz $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$? Odvod po volumnu to definitivno ne more biti, saj masa ni funkcija položaja (ne moremo reči, da ima neka točka določeno maso). Namesto tega je masa lastnost nekega volumna: $m = m(\mathcal{V})$. Kadar imamo disjunktna volumna $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$, tako recimo sledi

$$m(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2) = m(\mathcal{V}_1) + m(\mathcal{V}_2).$$

Taki količini pravimo *porazdelitev.* Poznamo še porazdelitve naboja, sil, toplotnega toka, svetlobnega toka ... Pri tem moramo paziti na nesmisle, kot je “temperaturna porazdelitev” po volumnu, saj zanjo ne velja aditivnost pri disjunktnih volumnih. Lepši izraz je temperaturni profil ali temperaturno polje.

Poznamo diskretne, zvezne in mešane porazdelitve. Diskretno porazdelitev mase lahko opišemo z navedenimi masami m_i na posameznih položajih $\mathbf{r}_i$. Diskretno porazdelitev spektra lahko opišemo s frekvencami črt ν_i in njihovimi močmi P_i.

Porazdelitve mase v razsežnem telesu pa ne moremo opisati z diskretno, pač pa z zvezno porazdelitvijo. To pomeni, da v nobeni točki ne sedi končna masa in da obstaja limita kvocienta $\mathrm{d}m/\mathrm{d}V$. Predstavljati si moramo, da volumen okrog neke točke vse bolj manjšamo, dokler ne dosežemo nekega zelo majhnega volumna $\mathrm{d}V$, v katerem izmerimo maso $\mathrm{d}m$. Z limito je definirana gostota:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

V resnici poglobljeno poznavanje teorije distribucij za nas ni potrebno. Sklep tega poglavja je le ta, da lahko zapis $\frac{\mathrm{d}dy}{\mathrm{d}dx}$ včasih predstavlja običajen pojem odvoda (torej naklon tangente na grafu), lahko pa tudi limitni postopek iz zgornje enačbe. Primer običajnega odvoda je hitrost $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (torej naklon tangente na grafu $x(t)$), gostote $\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ pa vsekakor ne moremo razumeti kot naklon tangente na grafu $m(V)$. V resnici je to kvocient majhnega delčka mase $\mathrm{d}m$ in majhnega volumna $\mathrm{d}V$.

3.6. Odvajanje vektorjev

Oglejmo si sedaj funkcije $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, ki torej za nek argument t vrnejo vektor $\mathbf{f}(t)$. Odvajanje vektorjev ni težavno, saj preprosto odvajamo po vsaki izmed njegovih komponent. Oglejmo si najbolj domač primer, ko $d = 3$. Naj bo $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ poljubna vektorska funkcija in t poljuben parameter. Potem:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right).$$

Poleg tega veljajo tudi običajna pravila, prenešena v vektorski svet, recimo,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{v}\times\mathbf{u}] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{u} + \mathbf{v}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Implicitno lahko seveda odvajamo tudi vektorske enačbe.

3.7. Parcialni odvodi

Pri funkcijah več spremenljivk pa se situacija zakomplicira.

Najprej ponovimo pojem diferenciala funkcije ene spremenljivke: $f = f(x)$. Če želimo izračunati odvod, se po x osi premaknemo za $\mathrm{d}x$ in pogledamo, za koliko se nam spremeni funkcija $\mathrm{d}f$. Odvod je preprosto kvocient teh dveh infinitezimalno majhnih sprememb: $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Če želimo dobiti to spremembo funkcije (diferencial) $\mathrm{d}f$, preprosto zmnožimo odvod s premikom v x smeri $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

Sedaj obravnavajmo funkcijo dveh spremenljivk $f = f(x, y)$. Funkcijo si lahko intuitivno predstavljamo kot podatek o višini reliefa v odvisnosti od položaja na dvodimenzionalni domeni, kot je prikazano na sliki 1.5. Sedaj je definicija diferenciala bolj problematična. Pri enodimenzionalni funkciji smo se pri izračunu $\mathrm{d}f$ namreč lahko premikali v smeri x, sedaj pa imamo dve smeri x oz. y, v kateri se premaknemo za $\mathrm{d}x$ oz. $\mathrm{d}y$. Intuitivno si lahko predstavljamo, da iščemo spremembo reliefa, če se premaknemo proti vzhodu za $\mathrm{d}x$ in proti severu za $\mathrm{d}y$. Pri tem nam pomaga definicija *parcialnega odvoda*:

Definicija 3.19: Parcialni odvod

Parcialni odvod funkcije n spremenljivk $f = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ po x_i označimo z $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oz. f_x in izračunamo tako, da f preprosto odvajamo po x_i, pri čemer obravnavamo ostale argumente kot konstante.

Formalno definiramo parcialni odvod z limito,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(a_1,\ldots,a_n)} := \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)}{h}.$$

Pri tem je potrebno razlikovati med točko $(a_1, \ldots, a_n)$, v kateri računamo odvod, ter parametri $x_1, \ldots, x_n$ funkcije.

Intuitivno si lahko predstavljamo, da nam parcialni odvod funkcije f po x pove naklon funkcije v smeri x osi. Izračun parcialnega odvoda v resnici ni prav nič težji od običajnega odvoda funkcije ene spremenljivke.

Zgled 3.20: Izračun parcialnega odvoda

Za primer si vzemimo funkcijo $f(x, y) = x^2 + xy$ ter poračunajmo oba parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2 + xy] = \frac{\partial}{\partial x}[x^2] + y\frac{\partial}{\partial x}[x] = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 + xy] = \frac{\partial}{\partial y}[x^2] + x\frac{\partial}{\partial y}[y] = x$$

Sedaj smo opremljeni z dovolj orodji, da si pogledamo splošno infinitezimalno spremembo funkcije $\mathrm{d}f$ pri premiku v x smeri za $\mathrm{d}x$ in v y smeri za $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Podobno velja tudi za poljubne funkcije več spremenljivk.

Izrek 3.21: Diferencial funkcije več spremenljivk

Naj bo $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija n spremenljivk. Diferencial funkcije je podan z

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

Na primeru zgleda 3.20 imamo torej

$$\mathrm{d}f = (2x + y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

Včasih pa so parametri funkcije med seboj odvisni. Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija, kjer so tudi argumenti $x_i(t)$ funkcije nekega parametra: $f = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Zanima nas, za koliko se spremeni f, ko t spremenimo za $\mathrm{d}t$, pri čemer se $x_i(t)$ spreminjajo. Rezultat nam pove *totalni odvod* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, ki je podan z:

Definicija 3.22: Verižno pravilo za funkcijo več spremenljivk

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija n spremenljivk, kjer so lahko tudi x_i funkcije nekega parametra t. *Totalni odvod* dobimo z verižnim pravilom za funkcije več spremenljivk:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

To pravilo se ves čas uporablja v fiziki, kar si oglejmo na zgledu.

Zgled 3.23: Gibanje zraka in opis temperature

Opazujmo atmosfero, ki jo obravnavajmo v kartezičnem koordinatnem sistemu xyz. Temperaturno polje opišemo s funkcijo $T = T(x, y, z, t)$.

V tem primeru nam $\frac{\partial T}{\partial x}$ predstavlja spremembo temperature, če spreminjamo le koordinato x in ohranimo ostale parametre konstantne (torej opazujemo ob konstantnem času). Podobno velja, da $\frac{\partial T}{\partial t}$ predstavlja spremembo temperature v času na nekem konstantnem kraju.

Sedaj pa opazujmo gibanje nekega delčka zraka, ki se premika po neki trajektoriji $\mathbf{r}(t)$. Odvod temperature po času v tem delčku zraka predstavlja totalni odvod, ki ga izračunamo z verižnim pravilom za funkcijo več spremenljivk:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \\ &= \frac{\partial T}{\partial x}v_x + \frac{\partial T}{\partial y}v_y + \frac{\partial T}{\partial z}v_z + \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Drugi parcialni odvodi zadostijo lepi identiteti:

Izrek 3.24: Schwarzev izrek

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Če ima f zvezne druge parcialne odvode, velja

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

To lahko zapišemo tudi tako:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

oziroma $f_{xy} = f_{yx}$.

3.8. Gradient

Omejimo se sedaj na skalarna polja v tridimenzionalnem prostoru, torej funkcije $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Najlažje si je predstavljati temperaturno polje v prostoru $T(x, y, z)$. Kot smo izvedeli v prejšnjem poglavju, se pri premiku za $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ in $\mathrm{d}z$ po ustreznih oseh spremeni T za

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\mathrm{d}z$$

Izraz nas spominja na skalarni produkt dveh vektorjev:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (\boldsymbol{\nabla} T) \cdot (\mathrm{d}\mathbf{l})\end{aligned}$$

kjer je $\mathrm{d}\mathbf{l} := \mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$ infinitezimalni vektor premika in $\boldsymbol{\nabla} T$ *gradient* od T.

Definicija 3.25: Gradient

Gradient funkcije $T(x, y, z)$ definiramo z

$$\boldsymbol{\nabla} T := \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Gradient je vektor in ima torej velikost ter smer. Raziščimo njegov geometrijski pomen s tem, da še enkrat zapišemo spremembo $\mathrm{d}T$ in uporabimo definicijo skalarnega produkta:

$$\boxed{\mathrm{d}T = \boldsymbol{\nabla} T \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = |\boldsymbol{\nabla} T||\mathrm{d}\mathbf{l}|\cos\theta}$$

Kót θ je kót med premikom $\mathrm{d}\mathbf{l}$ in vektorjem $\boldsymbol{\nabla} T$. $\mathrm{d}T$ je torej za nek konstanten $|\mathrm{d}\mathbf{l}|$ največji, ko je $\theta = 0$ in je torej $\mathrm{d}\mathbf{l}$ usmerjen v smeri gradienta.

Če v tej smeri največjega naklona delimo z $|\mathrm{d}\mathbf{l}|$, ugotovimo, da je $|\boldsymbol{\nabla} T|$ enak naklonu v tej smeri.

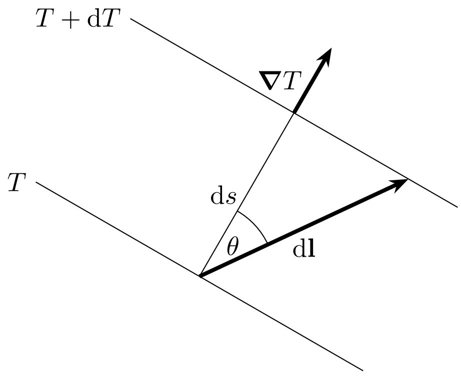
Če opazujemo premik, ki je pravokoten na $\boldsymbol{\nabla} T$, velja $\boldsymbol{\nabla} T \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}T$, torej kaže takšen premik v smeri črte, kjer ima funkcija T enake vrednosti (plastnice).

Izrek 3.26: Geometrijska interpretacija gradienta

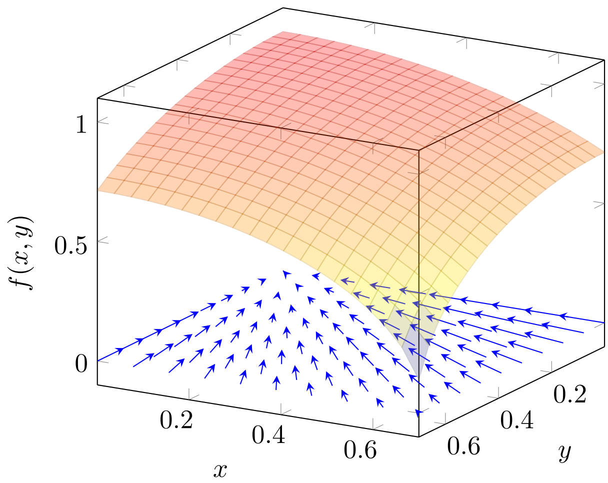
Gradient $\boldsymbol{\nabla} T$ je vektor, ki v neki točki kaže v smeri največjega spreminjanja funkcije T in ima velikost $|\boldsymbol{\nabla} T|$, ki pove naklon funkcije v tej smeri.

Gradient je pravokoten na plastnice funkcije (črte enake vrednosti T).

Razumevanje podkrepimo z intuicijo. Denimo, da stojimo na pobočju nekega hriba, ki ima višino podano v odvisnosti od geografske širine ter dolžine: $h = h(\phi, \lambda)$. Smer največjega klanca je smer gradienta $\boldsymbol{\nabla} h$. Naklon v tej smeri je enak $|\boldsymbol{\nabla} h|$. Plastnice bodo vedno pravokotne na smer največjega naklona.



Slika 3.6: **H geometrijski interpretaciji gradienta. Vsako zvezno odvedljivo skalarno polje lahko v bližnji okolici približamo z vzporednimi *ekvipotencialnimi ploskvami*, kjer je vrednost skalarnega polja konstantna. Gradient je usmerjen pravokotno na vsako ekvipotencialno ploskev. Kadar se premaknemo za malo razdaljo $\mathrm{d}\mathbf{l}$, se vrednost funkcije spremeni za $\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial s}\mathrm{d}s = |\boldsymbol{\nabla} T|\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{\nabla} T \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$.**



Slika 3.7: **Modro vektorsko polje je gradient funkcije $f(x, y)$. Kaže v smeri največjega naklona in je sorazmeren z naklonom v tej smeri.**

Izrek 3.27: Stacionarne točke

Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke, nam $\boldsymbol{\nabla} T = \mathbf{0}$ poda ekstreme, ki jih imenujemo *stacionarne točke*: maksimum, minimum, sedlo ali "rama".

Poglavje 4

Integral

4.1. Nedoločeni integral

Motivacija 4.1: Kje je Luka?

Aleš je vlomil v Lukovo pametno uro in dobil podatke o njegovi hitrosti v odvisnosti od časa, ki jih približamo s sledečo funkcijo: (hitrost v m/s, čas v s)

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t^2 + 2t + 3.$$

Poleg tega se spomni, da ga je ob času $t = 0$ videl na $x(0) = 2$. Ali lahko določi Lukov položaj $x(t)$ za vsak čas t?

Marsikdaj želimo operacijo odvoda obrniti: za podan naklon krivulje v vseh točkah želimo določiti izvorno funkcijo. To storimo z nedoločenim integralom:

Definicija 4.2: Nedoločeni integral

Če poznamo funkcijo F, potem nam *nedoločeni integral*

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$$

pove množico vseh funkcij f, ki zadoščajo $F(x) = f'(x)$.

Dodatek konstante je potreben, saj se odvod funkcije f ne spremeni, če v vsaki točki dodamo neko konstanto C. [1]

Pojem "nedoločeni" integral razlikujemo od določenega integrala, saj nedoločeni integral pri znaku za integriranje nima dopisanih mej (ni določen). Nenavaden zapis integrala bomo razumeli v poglavju o določenih integralih.

Navedimo nekaj integralov, ki jih že poznamo zaradi znanih odvodov nekaterih elementarnih funkcij:

[1] Če je definicijsko območje sestavljeno iz več nepovezanih intervalov, potem je v resnici C poljubna odsekoma konstantna funkcija.

Izrek 4.3: Integrali nekaterih funkcij

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C; \; r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

Pozor! Integral konstantne funkcije ni enak 0, temveč $\int k \, \mathrm{d}x = k \int 1 \, \mathrm{d}x = kx + C$.

4.1.1 Taktike integriranja

Tudi pri integriranju poznamo osnovna pravila, a niso tako neposredna kot pri odvajanju. *Za integriranje je potrebno dosti več truda kot pa za odvajanje.*

Izrek 4.4: Osnovna pravila za integriranje

$$\int k f(x) \, \mathrm{d}x = k \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int f'(x) g(x) \, \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x$$

Integracija po delih (*per-partes*)

Zadnje pravilo se imenuje integracija po delih (*per partes*): inverz pravila za odvod produkta, s katerim lahko prenesemo odvod na drugo funkcijo. Izvira iz dejstva, da velja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)\, g(x)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g(x) + f(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$. Če ta izraz integriramo na obeh straneh, dobimo

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)\, g(x)) \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g(x) \, \mathrm{d}x + \int f(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x$$

$$f(x)\, g(x) = \int f'(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x + \int f(x)\, g'(x) \, \mathrm{d}x$$

Zgled 4.5

Integrirajmo spodnji integral po delih:

$$\int x^r \ln x \, \mathrm{d}x; \quad r \neq -1.$$

Izberimo $f(x) = \ln x$, torej $f'(x) = 1/x$ in $g'(x) = x^r$, torej $g(x) = x^{r+1}/(r+1)$. Dobimo:

$$\int x^r \ln x \, \mathrm{d}x, = \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \int \frac{x^{r+1}}{r+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} \left(\ln x - \frac{1}{r+1}\right) + C$$

Uvedba nove spremenljivke (u substitucija)

Integracija po delih je inverz pravila za odvod produkta, poznamo pa tudi pravilo, ki je inverz pravila za odvod kompozituma:

$$f'(g(x))g'(x) = [f(g(x))]'$$

Denimo, da integrand lahko zapišemo v obliki $f'(g(x))g'(x)$:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Trik je v tem, da uvedemo novo spremenljivko $u := g(x)$, tako da $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)$ in iz tega $g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Če uvedene količine vstavimo v zgornji izraz, dobimo

$$\boxed{\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(u)\,\mathrm{d}u.}$$

Če poznamo integral funkcije $f'(u)$, lahko dobimo $f(u)$, kamor le še vstavimo $u = g(x)$. Abstraktno formulacijo izreka utemeljimo s konkretnim primerom:

Zgled 4.6

Izračunaj integral

$$\int x\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: definirajmo $u = x^2$, torej $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$, iz česar sledi $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$. Če to dvoje vstavimo v integral, dobimo

$$\int x\cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + C.$$

Pravilnost integrala lahko vedno preverimo z odvodom:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + C\right] = x\cos\left(x^2\right),$$

kar potrdi naš rezultat.

Integrali so lahko zelo raznoliki in za uspešno integriranje je potrebno imeti veliko izkušenj. Naprednejše tehnike, ki se jih v tem besedilu nismo dotaknili in si jih lahko zainteresirani bralec pogleda sam, vključujejo razcep na parcialne ulomke, integriranje z nastavkom, univerzalno trigonometrično substitucijo in kompleksni krivuljni integral.

4.2. Določeni integral

Posvetimo se sedaj popolnoma drugačnemu problemu: zanima nas ploščina pod grafom funkcije.

Definicija 4.7: Določeni integral

Predznačeno ploščino pod grafom funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) imenujemo *določeni integral* funkcije f na intervalu (a,b) in jo označimo tako:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Če je $a < b$ štejemo ploščine nad absciso za pozitivne, po absciso pa za negativne.

Zapis nedoločenega integrala si lahko intuitivno predstavljamo takole: opazujemo tanek navpičen pravokotnik pod funkcijo f s stranicama $\mathrm{d}x$ in $f(x)$, torej majhno ploščino $f(x)\,\mathrm{d}x$. Vsota ploščin pod krivuljo je v resnici vsota teh majhnih prispevkov, kar zapišemo z $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kjer smo označili še meje območja.

Taka definicija nam sama po sebi le poda način za zapis ploščine pod krivuljo, toda izkaže se, da je tesno povezana z nedoločenim integralom:

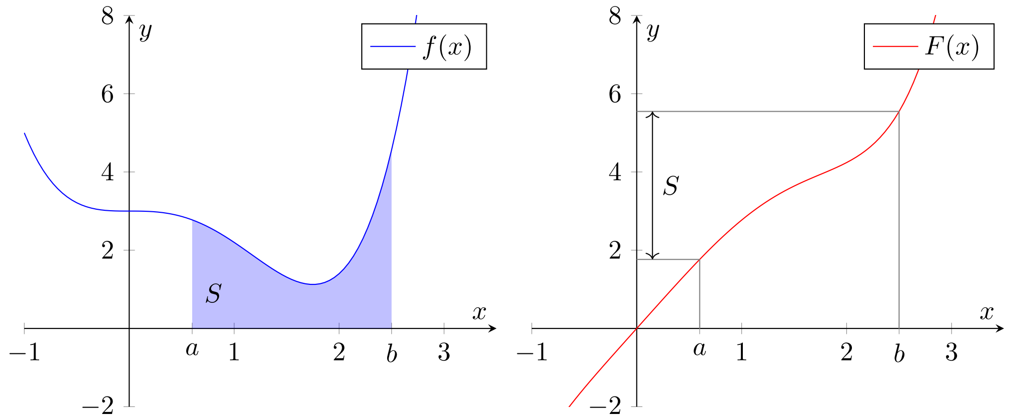
Izrek 4.8: Osnovni izrek infinitezimalnega računa

Želimo najti ploščino pod funkcijo $f(x)$ na intervalu (a, b). Definiramo

$$F(x) := \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Želena ploščina je enaka:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$$



Slika 4.1: **Prikaz osnovnega izreka infinitezimalnega računa. Želimo izračunati ploščino pod grafom funkcije $f(x)$ med a in b. Ploščina je enaka razliki $F(b) - F(a)$, kjer $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.**

Tak preprost izrek je v resnici izredno močan. Pravi, da sta navidezno popolnoma nepovezana koncepta inverza odvoda in ploščine pod grafom funkcije f v resnici povezana s preprostim postopkom: poiščemo nedoločeni integral od f ter ga evalviramo pri b in a in rezultata odštejemo. Dobljeno število je natanko iskana ploščina, kot je prikazano na sliki 4.1.

S sodostjo in lihostjo si lahko pomagamo pri evalviranju nekaterih integralov. Če integriramo po območju s središčem v 0 in je funkcija soda (simetrična glede na ordinato), potem lahko že z grafa vidimo, da je ploščina dvakrat večja, kot če bi integrirali po polovici tega intervala. Če pa integriramo po podobnem območju in je funkcija liha (simetrična glede na izhodišče), pa se bosta ploščini natanko odšteli in dobili bomo 0.

Izrek 4.9: Sodost/lihost pri integriranju

Če je funkcija f soda, potem

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Če pa je funkcija f liha, potem

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Namesto nesmiselne matematike si raje zatočišče poiščimo v intuitivni fiziki. Koncept integrala lahko naravno uporabimo v številnih procesih, ko imamo opravka z odvodom neke funkcije in želimo določiti izvorno funkcijo.

Očiten primer je hitrost $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Položaj lahko dobimo takole: $x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$. Toda to še ni vse. Delec je lahko začel svojo pot ob $t = 0$ v poljubnem kraju $x(0) = a$; v vsakem primeru reši enačbo $v = \dot{x}$.

Priložiti moramo toliko začetnih pogojev, kolikor je red diferencialne enačbe (maksimalni red odvoda). V našem primeru imamo opravka le s prvim odvodom, tako da je potrebno priložiti le en začetni pogoj. Recimo, da priložimo položaj ob času 0: $x(0) = x_0$. S tem imamo sedaj enolično določen položaj $x(t)$ ob vsakem času.

Zgled 4.10: Integrali v kinematiki

Osnovne integrale lahko uporabimo v kinematiki, kjer imamo opravka običajno le s položajem x, hitrostjo $v = \dot{x}$ in pospeškom $a = \dot{v} = \ddot{x}$. Vse naštete količine so običajno funkcije časa t.

Opravimo račun za premo enakomerno gibanje, kjer $v = \dot{x} = \text{konst.}$ Iz $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ sledi

$$x = \int v\,\mathrm{d}t = vt + C,$$

saj je v konstanta. Priložiti je potrebno tudi začetni pogoj, recimo da poznamo $x(0) = x_0$. Ob času 0 je $x = v \cdot 0 + C = C$, torej $C = x_0$. Sledi, da je položaj podan z

$$x = vt + x_0,$$

kar seveda poznamo že iz osnovne šole.

Opravimo račun še za konstanten pospešek $a = \dot{v} = \text{konst.}$ Analogno kot prej iz začetnega pogoja $v(0) = v_0$ sledi

$$v = \int a\,\mathrm{d}t = at + v_0.$$

Vemo, da $v = \dot{x}$, poleg tega pa denimo, da imamo priložen še drugi začetni pogoj $x(0) = x_0$. Dobimo,

$$x = \int v\,\mathrm{d}t = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Sedaj smo namreč morali priložiti 2 začetna pogoja, saj je $a = \ddot{x}$ enačba drugega reda.

Kaj pa, če bi pri enakomernem gibanju poznali recimo začetni pogoj $x(2\,\mathrm{s}) = x_1$? V tem primeru,

$$x(2\,\mathrm{s}) = x_1 = v \cdot 2\,\mathrm{s} + C,$$

torej $C = x_1 - v \cdot 2\,\mathrm{s}$ in sledi

$$x(t) = vt - v \cdot 2\,\mathrm{s} + x_1 = v \cdot (t - 2\,\mathrm{s}) + x_1.$$

Zgled 4.11: Kje je Luka?

Z novimi veščinami lahko pomagamo Alešu in poiščemo Luka! Podano enakost iz motivacije 4.1 preprosto integriramo na obeh straneh po času od 0 do t:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^t (t^2 + 2t + 3)\,\mathrm{d}t \\
x(t) - x(0) &= \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t \\
x(t) &= \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t + x(0) = \\
&= \frac{t^3}{3} + t^2 + 3t + 2
\end{aligned}$$

Tako lahko res za vsak čas t Aleš določi Lukov položaj.

Integriranje pa ni le omejeno po času, ampak lahko integriramo tudi po ostalih funkcijah ali porazdelitvah: položaju, površini, masi, volumnu, energiji, valovni dolžini ... Možnosti so praktično neomejene. Pri tem se moramo najprej vedno odločiti, *po čem* bomo integrirali. Vedno si integriranje lahko predstavljamo kot seštevanje majhnih prispevkov. Tako lahko recimo skupno maso telesa določimo z integriranjem gostote po volumnu: $m = \int \rho \, \mathrm{d}V$. To seveda dobimo iz same definicije gostote $\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$.

Pripomba 4.12: Notacija

Dostikrat imamo opravka z določenim integralom, čeprav na integralu ni zapisanih mej; tedaj integriramo po vsem razpoložljivem območju. Nenazadnje pa se v praksi uporablja veliko zapisov, ki nikakor niso matematično strogi. Omenimo le enega.

Denimo, da želimo poiskati funkcijo položaja $x(t)$ ($x(0) = 0$) s podano funkcijo hitrosti $v(t)$. V ta namen je potrebno integrirati od 0 do t. Spremenljivka, po kateri integriramo, ne more biti t, saj je to meja integrala. Uvedimo neko pomožno spremenljivko t', da ne pride do zmešnjave. Pravi odgovor je tako podan z

$$x(t) = \int_0^t v(t') \, \mathrm{d}t'$$

Ker pa ne želimo pri vsaki integraciji uvesti polno nepotrebnih simbolov, uporabljamo kar sledeči zapis:

$$x(t) = \int_0^t v(t) \, \mathrm{d}t$$

Ker so takšni integrali v fiziki zelo pogosti, se bo tudi takšna notacija zelo pogosto pojavila. Vedno pa je potrebno imeti v mislih, kaj v resnici predstavlja tak malomaren zapis.

4.3. Integrali višjih redov

Do sedaj smo integrirali funkcije ene spremenljivke, sedaj pa integrirajmo funkcije več spremenljivk $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, kjer je d dimenzija prostora. Oglejmo si za začetek dvojne integrale, kar bomo kasneje posplošili.

Funkcija dveh spremenljivk $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ slika iz ravnine $\mathbb{R}^2$ v realna števila $\mathbb{R}$. V tem primeru lahko računamo integral po neki površini $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, kjer je infinitezimalni element površine $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, ki je mali kvadratek s stranicama $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}y$. S tem dobimo prostornino pod ploskvijo grafa, kar označimo z

$$S = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, \mathrm{d}A$$

Za splošne domene $\mathcal{D}$ je take integrale precej težko poračunati. Omejimo se raje na take domene, kjer je le ena meja odvisna od druge, na primer $\mathcal{D} = [x_1, x_2] \times [y_1(x), y_2(x)]$. Takšne integrale lahko poračunamo tako, da razdelimo domeno na tanke trakove. Za našo domeno $\mathcal{D} = [x_1, x_2] \times [y_1(x), y_2(x)]$ (kjer so od x odvisne le meje po y) na primer velja:

Izrek 4.13: Dvojni integral, kjer je le ena meja odvisna

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, \mathrm{d}A = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Za obraten primer $\mathcal{D} = [x_1(y), x_2(y)] \times [y_1, y_2]$ integriramo v obratnem vrstnem redu.

Kadar je domena kvadrat, torej $\mathcal{D} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ in torej meje integriranja niso odvisne od koordinat, velja:

Izrek 4.14: Fubinijev izrek

Kadar ima integral absolutne vrednosti integranda končno vrednost, lahko zamenjamo vrstni red integriranja pri integraciji na $\mathcal{D} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$:

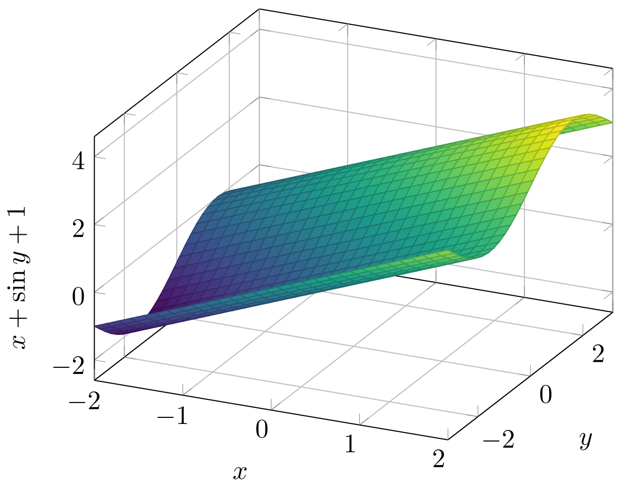
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

Sicer se izračuna obeh integralov lahko močno razlikujeta, toda data enak rezultat.

Kadar želimo izračunati površino neke domene $\mathcal{D}$ lahko preprosto vstavimo $f(x,y) = 1$, in integriramo le infinitezimalne elemente površine $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$:

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}A$$

Analog v eni dimenziji je preprosto $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x = x_2 - x_1$, kar je res dolžina intervala.



Slika 4.2: **Ploskev $f(x,y) = x + \sin y + 1$ na domeni $\mathcal{D} = [-2, 2] \times [-\pi, \pi]$. Pri iskanju volumna pod to ploskvijo (integraciji) razdelimo domeno na majhne kvadratke s ploščino $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.**

Zgled 4.15: Volumen pod grafom

Izračunajmo volumen pod grafom $f(x,y) = x + \sin y + 1$ na območju, ki je podano z $0 < x < 2$ in $-\pi < y < \pi$.

Meje so konstantne (območje je pravokotnik), zato razdelimo območje na trakove konstantnega y. Funkcijo najprej integriramo po vsakem traku, nato pa integriramo še vse trakove.

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

Izračunajmo najprej notranji integral:

$$\int_0^2 (x + \sin y + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\sin y + x\right]\Big|_0^2 = 4 + 2\sin y$$

Vstavimo to v začetni integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (4 + 2\sin y)\,\mathrm{d}y = [4y - 2\cos y]|_{-\pi}^{\pi} = 8\pi$$

Integral bi lahko sicer izračunali tudi v drugačnem zaporedju s tem, da bi domeno razdelili na trakove konstantnega x.

Podobni sklepi, kot smo jih naredili za integrale drugega reda, sledijo tudi za integrale višjih redov.

Integrale lahko računamo tudi v kakšnih drugih koordinatnih sistemih, kjer volumenski element $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ nadomestimo z nekim drugim izrazom. V sferičnih koordinatah uporabimo sledeči volumenski element:

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

v cilindričnih koordinatah pa:

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi.$$

Zgled 4.16: Prostornina krogle

Izračunajmo volumen krogle s polmerom R:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\text{krogla}} \mathrm{d}V = \\ &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \\ &= \left(\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) = \\ &= \frac{R^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Poglavje 5

Diferencialne enačbe

Motivacija 5.1: Kozmolog

Žan je odkril, da obstaja enačba, ki zmore opisati razvoj vesolja: *Friedmannova enačba.* Pred tem je že odkril funkcijo $\rho = \rho(a)$, ki opiše, kako se gostota snovi spreminja z velikostjo vesolja. (Velikost vesolja opisuje skalirni faktor a.) Sedaj želi napovedati razvoj vesolja s Friedmannovo enačbo za takšno materijo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(a).$$

Kako naj se loti tega problema, izračuna funkcijo $a(t)$ in tako napove končno usodo vesolja?

Diferencialne enačbe (DE) so enačbe, kjer imamo poleg običajnih operacij še operacije odvodov. Že v gimnaziji pri nihanju obravnavamo enačbo $a = -\omega^2 x$, toda to ni nič drugega kot $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Tudi Newtonov zakon je v resnici DE pod krinko: $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$. Tipično reševanje fizikalnega problema izgleda tako, da najprej zapišemo diferencialno enačbo, ki opisuje problem, in jo nato rešimo.

Reševanje diferencialnih enačb je izredno široko poglavje, zato se ga bomo tukaj le dotaknili. Najbolj bridko spoznanje je, da ne obstaja splošen način reševanja. Poznamo pa določena orodja, ki jih lahko uporabimo na le določenih tipih DE, zato si je dobro pogledati klasifikacijo. Sicer bomo reševali le najenostavnejše, toda za naprednejše namene moramo poznati tudi naprednejša orodja, zato si bomo kar sedaj ogledali grobo razdelitev.

Vrsta: Ko dobimo v roke DE, lahko že takoj naprej pogledamo, kakšne vrste odvodov vsebuje. Če vsebuje le običajne odvode, je to *navadna diferencialna enačba* (ODE), če pa vsebuje tudi parcialne odvode, pa jo imenujemo *parcialna diferencialna enačba* (PDE). Primeri ODE so eksponentna rast, Newtonov zakon in dušeno nihanje. PDE pa so na primer transportna enačba, toplotna enačba in pa valovna enačba. Tukaj obravnavamo le ODE.

Red: Zelo pomembna informacija je tudi, kakšnega reda je največji odvod, saj je potrebno DE integrirati tolikokrat, kolikor je red te enačbe. Recimo,

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

je PDE 4. reda.

Stopnja: Najvišjo potenco nekega odvoda imenujemo stopnja.

Linearnost: ODE lahko imenujemo linearna, če se vsi odvodi pojavijo linearno, torej le kot prva potenca, ne smemo pa jih niti množiti med sabo. Torej je linearna enačba taka, za katero je stopnja enaka 1. Če to ne velja, je enačba nelinearna. Linearno ODE lahko zapišemo v obliki:

$$a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = b(x).$$

Če pri tem velja $b(x) = 0$, imenujemo ODE *homogena*, sicer pa *nehomogena*. Če so členi $a_i(x)$ konstantni, potem pravimo, da ima linearna ODE konstantne koeficiente. $b(x)$ pri tem ne rabi biti nujno konstantna.

Integracija diferencialne enačbe pomeni, da njen red zmanjšamo za ena. Kot pri vsaki integraciji, se tudi tukaj pojavi nek prosti parameter $(+C)$, ki ga moramo kasneje izračunati z uporabo začetnih pogojev. Enačbo drugega reda je potrebno integrirati dvakrat, pri tem se pojavita dva prosta parametra, torej potrebujemo (običajno) dva začetna pogoja za enolično rešitev. Integracija Newtonovega zakona (ODE drugega reda) je v resnici energijski zakon, saj smo red enačbe znižali za 1. (V kinetični energiji se pojavi le $\dot{\mathbf{x}}$, v potencialni pa $\mathbf{x}$.)

5.1. Ločitev spremenljivk

Še posebej pogoste so enačbe oblike

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,g(y).$$

Takšni enačbi se reče *separabilna*. Rešimo jo s sledečo proceduro:
Najprej spremenljivke ločimo, tako da je vsaka stran odvisna le od ene:

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}.$$

Nato lahko na obeh straneh brez problema integriramo:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y.$$

Za tem le še izrazimo $y = y(x)$ in s tem dobimo želeno rešitev. Pri integraciji smo dobili še prosti parameter, ki ga je potrebno specificirati z začetnimi pogoji. Metodo najlažje spoznamo s preprostim zgledom:

Zgled 5.2: Radioaktivni razpad

Pri radioaktivnem razpadu opazujemo število jeder v odvisnosti od časa $N(t)$. Jedra razpadajo naključno, tako da je delež razpadlih jeder $\frac{\mathrm{d}N}{N}$ kar sorazmeren času $\mathrm{d}t$ (v dvakrat daljšem majhnem času bo razpadel dvakrat večji delež jeder). Torej,

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda\,\mathrm{d}t.$$

Negativni predznak namreč izvira iz dejstva, da se število obstoječih jeder s časom manjša. Sorazmernostna konstanta λ se imenuje *razpadna konstanta*. Torej, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$. Diferencialna enačba je separabilna:

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = \int -\lambda\,\mathrm{d}t.$$

Iz tega dobimo

$$\ln N = -\lambda t + C,$$

kjer moramo konstanto C določiti iz začetnih pogojev. Enačbo preoblikujemo v

$$N = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} e^{C}.$$

Opazimo, da ob času $t = 0$ velja $N(0) = e^C$. Tako definiramo $N_0 := e^C$ in dobimo

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Kakor vemo, se to res sklada z realnostjo. Iz preprostega razmišljanja na začetku smo torej dobili eksponentno odvisnost. Moč diferencialnih enačb je v tem, da bo za vse enačbe oblike $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$ veljala eksponentna odvisnost. Primeri vključujejo absorpcijo svetlobe in zvoka, viskozni upor in polnjenje/praznjenje tuljave/kondenzatorja.

Pripomba 5.3: Nedoločeno ali določeno integriranje?

Ponovno si oglejmo separabilno DE:

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$$

Pred kratkim smo povedali, da tako enačbo integriramo, nakar dobimo neko integracijsko konstanto, ki jo moramo izračunati iz začetnega pogoja. Obstaja pa bližnjica. Integriramo lahko namreč med dvema stanjema, ki ju poznamo. Če recimo vemo, da $y(x_1) = y_1$ in $y(x_2) = y_2$, potem lahko integriramo:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$$

Na primeru Zgleda 5.2; rečemo, da ob času $t = 0$ velja $N = N(0) = N_0$, ob času $t = t_1$ pa $N = N(t_1)$,

$$\begin{aligned}\int_{N_0}^{N(t_1)} \frac{\mathrm{d}N}{N} &= \int_0^{t_1} -\lambda\,\mathrm{d}t\\ \ln\left(\frac{N(t_1)}{N_0}\right) &= -\lambda t_1\\ N(t_1) &= N_0 e^{-\lambda t_1}\\ N(t) &= N_0 e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo še preimenovali $t_1 \to t$, kar lahko seveda brez problema naredimo. Tako preimenovanje pa se dogaja precej pogosto, tako da v praksi pisno sploh ne razlikujemo med t_1 in t, tako da bi običajno zgornji račun zapisali le kot

$$\int_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N}{N} = \int_0^{t} -\lambda\,\mathrm{d}t$$

Kljub temu pa se moramo zavedati, da se v ozadju dogaja preimenovanje in da t v integralni meji predstavlja nek čas, do katerega integriramo, t v izrazu $\mathrm{d}t$ pa čas, po katerem integriramo (od 0 do t_1, ki smo ga preimenovali v t). Taka praksa pa je v navadi, da skrajšamo postopek za en trivialen korak in da se izognemo definiciji preveč spremenljivk.

Zgled 5.4: Kozmolog

Sedaj lahko tudi pomagamo Žanu iz motivacije z začetka poglavja. Friedmannova enačba s podanim $\rho(a)$ je separabilna, saj jo lahko preoblikujemo v

$$\begin{aligned}\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= a\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho(a)}\\ \int_{a(0)}^{a(t)} \frac{1}{a\sqrt{\rho(a)}}\,\mathrm{d}a &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\int_0^t \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}t\end{aligned}$$

Ker Žan ve, da se takšno vesolje širi ($\dot{a} > 0$), je pri korenjenju upošteval le pozitivni predznak. Če nam torej uspe integrirati integral na levi strani, lahko izrazimo $a = a(t)$, toda brez podane odvisnosti $\rho(a)$ ne moremo nadaljevati.

Recimo, da Žan predpostavi, da v njegovem vesolju prevladuje snov. V tem primeru iz 1. zakona termodinamike sledi, da je gostota snovi odvisna od skalirnega faktorja prek

$$\rho = \rho_0 a^{-3}$$

Žan že ve (kot prekaljeni kozmolog), da čas običajno začnemo šteti ob začetku vesolja: velja torej $a(0) = 0$. Če izraz za $\rho(a)$ vstavi v zgornji integral, dobi

$$\int_0^{a(t)} \frac{1}{a\sqrt{\rho(a)}}\,\mathrm{d}a = \int_0^{a(t)} \frac{1}{a\sqrt{\rho_0 a^{-3}}}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\int_0^{a(t)} a^{1/2}\,\mathrm{d}a = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\rho_0}}\bigg|_0^{a(t)} = \frac{a(t)^{3/2}}{\sqrt{\rho_0}}$$

Če dobljeni integral vstavi v zgornjo enačbo in jo preoblikuje, dobi

$$a(t) = \sqrt[3]{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}t^{2/3}$$

V takšnem vesolju se torej skalirni faktor spreminja z $a \propto t^{2/3}$.

5.2. Linearne homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Linearne homogene enačbe s konstantnimi koeficienti so enačbe oblike:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i y^{(i)} = 0.$$

Pri taki vrsti enačb so še posebej pogoste enačbe drugega reda, ki jih bom sedaj uporabljal kot primer:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

Enačbo poskusimo rešiti z ugibanjem. Poskusimo z *nastavkom* $y(x) = Ae^{rx}$:

$$0 = ar^2Ae^{rx} + brAe^{rx} + cAe^{rx} = (ar^2 + br + c)Ae^{rx}.$$

Enačbo rešijo torej takšni nastavki, za katere velja zgornja kvadratna enačba, ki jo imenujemo *karakteristična enačba*:

$$r_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ker je enačba linearna in homogena, bo vsota dveh rešitev tudi rešitev. Torej je rešitev zgornje enačbe tudi

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.$$

To je torej ena rešitev, imamo pa tudi dva prosta parametra, kar je dovolj za enačbo drugega reda. Zato trdim, da je to tudi splošna rešitev te diferencialne enačbe. Metodo lahko posplošimo na poljubno linearno homogeno ODE s konstantnimi koeficienti poljubne stopnje.

Nazaj na primer enačbe drugega reda: Če so eksponenti kompleksni, se da rešitev izraziti s kombinacijo eksponenta, sinusa in kosinusa, če pa je ničla karakteristične enačbe $r = r_{1,\,2}$ dvojna, je splošna rešitev izjemoma oblike $y(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$.

Zgled 5.5: Dušeno nihanje

Določimo gibanje dušenega nihala, ki naj začne v mirovanju ($\dot{x}(0) = 0$) v $x(0) = x_0$. Dušeno nihanje opisuje sledeča diferencialna enačba:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Rešimo jo lahko z zgornjo metodo, zato uporabimo nastavek $x(t) = e^{rt}$ in preko karakteristične enačbe dobimo

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ x(t) &= Ae^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} = \\ &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right) = \\ &= e^{-\gamma t}\left(C\sinh\left(t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right) + D\cosh\left(t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)\right) \end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo rezultat izrazili še s hiperboličnima funkcijama $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ in $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. Če upoštevamo začetna pogoja, dobimo:

$$x_{\gamma>\omega_0}(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cosh\left(t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)$$

Zgornji rezultat sicer velja vedno, toda če $\gamma^2 < \omega_0^2$, potem bomo dobili imaginarne eksponente, kar se da lepše zapisati s trigonometričnima funkcijama $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ in $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{it\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} + Be^{-it\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\right) = \\ &= e^{-\gamma t}\left(C\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right) + B\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Če uporabimo začetne pogoje:

$$x_{\gamma<\omega_0}(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cos\omega t; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

Amplituda torej eksponentno pada, poleg tega pa nihalo niha z rahlo manjšo frekvenco, kot če ne bi bilo dušeno.

V mejnem primeru, ko $\gamma^2 = \omega^2$, dobimo dvojno ničlo $-\gamma$, torej je splošna rešitev $x_{\gamma=\omega}(t) = Ae^{-\gamma} + Bte^{-\gamma} = e^{-\gamma}(A + Bt)$

Raznih tehnik, taktik in trikov je še mnogo, toda v praksi bo večina diferencialnih enačb separabilnih, homogenih linearnih s konstantnimi koeficienti ali pa rešljivih s kakšno prekanjeno substitucijo. Toda na tem mestu zaključimo obdelavo. Svet diferencialnih enačb je preprosto preobsežen in naša obdelava je pomenila le prvih nekaj korakov v njegove globine.