Vektorji
Naloge

Peter Andolšek
Oktober 2024

1. Koordinatni sistemi

Naloga 1.1

Sferične koordinate: $r \approx 6{,}16, \quad \theta \approx 71{,}1^\circ, \quad \phi \approx -59{,}0^\circ\,.$
Cilindrične koordinate: $s \approx 5{,}83, \quad z = 2, \quad \phi \approx -59{,}0^\circ\,.$

Naloga 1.2 (a)

$$r = 12\,500\,\mathrm{km}, \quad \delta = 50^\circ, \quad \alpha = 12{,}5^\circ$$

(b) ** Tretji Keplerjev zakon povezuje veliko polos a (v primeru krožnice je enaka polmeru) kroženja in obhodni čas t_0:

$$\frac{a^3}{t_0^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,.$$

Za $a = 12\,500\,\mathrm{km}$ dobimo $t_0 = 3{,}864\,\mathrm{h}$.
Naj se satelit najprej nahaja v točki $\mathbf{a}$ (ki je podana), po 1 uri pa v $\mathbf{b}$. Kót, ki ga oklepata oba vektorja, je

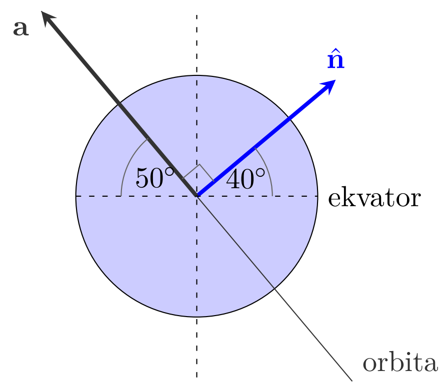
$$\phi = \frac{1\,\mathrm{h}}{3{,}864\,\mathrm{h}} \cdot 360^\circ = 93{,}16^\circ\,.$$

Uporabljajmo raje normalizirane vektorje, ki označujejo le smeri (da se nam ni treba ukvarjati z velikostmi). V tem primeru je

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a} = \begin{pmatrix} 0{,}6275 \\ 0{,}1391 \\ 0{,}7661 \end{pmatrix}\,.$$

V nadaljnjem nam bo prav prišla normala kroženja $\hat{\mathbf{n}}$. Z razmislekom in skico ugotovimo,[1] da mora za njeno deklinacijo in rektascenzijo veljati:

$$\delta' = 90^\circ - \delta = 40^\circ, \quad \alpha' = \alpha + 180^\circ = 192{,}5^\circ\,.$$



[1] Tukaj tudi uporabimo dejstvo, da se satelit v $\mathbf{a}$ nahaja v najvišji točki.

3

Za enotski vektor v tej smeri dobimo

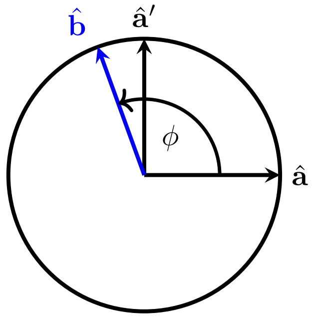
$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos\delta'\cos\alpha' \\ \cos\delta'\sin\alpha' \\ \sin\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7479 \\ -0{,}1658 \\ 0{,}6428 \end{pmatrix} .$$

Vektor, ki je pravokoten na $\hat{\mathbf{a}}$ in $\hat{\mathbf{n}}$ imenujmo $\hat{\mathbf{a}}'$ in naj bo obrnjen v smer, v katero satelit kroži:

$$\hat{\mathbf{a}}' = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -0{,}2164 \\ 0{,}9763 \\ 0{,}0000 \end{pmatrix} .$$

Vektor $\hat{\mathbf{b}}$ lahko sestavimo iz obeh pravokotnih vektorjev $\hat{\mathbf{a}}$ in $\hat{\mathbf{a}}'$ tako:

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}}\cos\phi + \hat{\mathbf{a}}'\sin\phi = \begin{pmatrix} -0{,}2507 \\ 0{,}9671 \\ -0{,}0422 \end{pmatrix} .$$



Dejanski položaj satelita dobimo tako, da enotski vektor pomnožimo z radijem kroženja a:

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}\, a = \begin{pmatrix} -3134 \\ 12089 \\ -528 \end{pmatrix} \mathrm{km} .$$

Naloga 1.3 Izračunani vektorji v kartezičnih komponentah so

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (0, 0, 1) \\ \mathbf{B} &= (\sin c, 0, \cos c) \\ \mathbf{C} &= (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b) \end{aligned}$$

Skalarno zmnožimo vektorja $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$. Pri tem se zavedamo, da je njun skalarni produkt enak kosinusu kóta med njima.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A ,$$

kar je že želeni izraz za kosinusni izrek.

2. Osnove vektorske algebre

Naloga 2.1

$$\mathbf{r} = (2, -2, 1), \quad r = 3, \quad \hat{\mathbf{r}} = (2/3, -2/3, 1/3)$$

Naloga 2.2 Vemo, da $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot |\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}|$. Pravokotna projekcija $\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$ ima smer vektorja $\mathbf{A}$, zatorej

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = |\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}|\,\frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2} .$$

Naloga 2.3

$$C^2 = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

Naloga 2.4 Obravnavajmo kar najpreprostejšo kocko, ki je poravnana s koordinatnim sistemom in ima dolžino stranice 1. Ena izmed ploskovnih diagonal je $\mathbf{a} = (0,1,1)$, druga pa $\mathbf{b} = (1,1,0)$.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Vemo, da se kót nahaja na območju $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, tako da je odgovor:

$$\theta = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ\,.$$

Naloga 2.5 NE, vektorski produkt ni asociativen. Protiprimer: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}$ in $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{y}}$.

$$\hat{\mathbf{x}}\times(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}})\times\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}\times\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

Naloga 2.6

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\C_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_yC_z - B_zC_y\\B_zC_x - B_xC_z\\B_xC_y - B_yC_x\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B_yC_z - B_zC_y\\B_zC_x - B_xC_z\\B_xC_y - B_yC_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_yB_xC_y - A_yB_yC_x - A_zB_zC_x + A_zB_xC_z\\A_zB_yC_z - A_zB_zC_y - A_xB_xC_y + A_xB_yC_x\\A_xB_zC_x - A_xB_xC_z - A_yB_yC_z + A_yB_zC_y\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \begin{pmatrix}B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\\B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\\B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\\C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\\C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}A_yB_xC_y - A_yB_yC_x - A_zB_zC_x + A_zB_xC_z\\A_zB_yC_z - A_zB_zC_y - A_xB_xC_y + A_xB_yC_x\\A_xB_zC_x - A_xB_xC_z - A_yB_yC_z + A_yB_zC_y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}$$

Naloga 2.7 * Poračunajmo najprej kartezične koordinate planetov, saj je z njimi lažje računati. Uporabimo take koordinate, da velja

$$x = r\cos b\cos l\,,\quad y = r\cos b\sin l\,,\quad z = r\sin b\,.$$

Preračunajmo koordinate Zemlje in Jupitra ter izračunajmo vektor, ki kaže od Zemlje do Jupitra $\mathbf{r} := \mathbf{r}_{\text{Jupiter}} - \mathbf{r}_{\text{Zemlja}}$.

	x [AU]	y [AU]	z [AU]
$\mathbf{r}_{\text{Zemlja}}$	0,964 198 1	0,262 172 6	0,000 001 9
$\mathbf{r}_{\text{Jupiter}}$	1,652 281 0	4,777 697 3	−0,057 140 2
$\mathbf{r}$	0,688 082 9	4,515 524 7	−0,057 142 1

Ekliptična širina β za geocentričnega opazovalca je enaka kótu, ki ga oklepa vektor $\mathbf{r}$ z ekliptiko. Ta je enak

$$\beta = \arctan\frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} = -0^\circ\,43'\,0{,}3''\,.$$

3. Linearna neodvisnost

Naloga 3.1 $\star$ Označimo oglišča z (1), (2) in (3), razpolovišča z (1-2), (1-3) in (2-3) ter težišče s T. Ideja je, da uporabimo linearno neodvisnost vektorjev $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ po neki zanki, ki vključuje T: Začnimo v (1), nadaljujmo v (2), T in se vrnimo nazaj v (1).

(1-3) je podano z $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3)$, torej je vektor iz (2) do T podan z $m[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_2]$ za nek $m \in \mathbb{R}$. Podobno je vektor iz T v (3) podan z $l[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_1]$ za nek $l \in \mathbb{R}$. Vsota po celotni zanki je

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m\left[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_2\right] + l\left[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_1\right] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_1(-1 + m/2 - l) + \mathbf{r}_2(1 - m + l/2) + \mathbf{r}_3(m/2 + l/2) = \mathbf{0}$$

Ker so trije vektorji linearno neodvisni, morajo biti vsi koeficienti enaki 0, toda zadoščata že dva, na primer koeficient vektorja $\mathbf{r}_3$, ki poda $m = -l$, in koeficient vektorja $\mathbf{r}_1$:

$$\frac{m}{2} - l = 1$$
$$\frac{m}{2} + m = 1$$
$$m = \frac{2}{3}$$

Če želimo določiti položaj T, moramo preprosto prišteti vektor iz (2) v T in vektor položaja (2). Dobimo

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_2 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) - \mathbf{r}_2\right] = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3).$$

4. Vektorji v vsakdanjem življenju

Naloga 4.1 **(*Mat. v fiz. in tehn.*).** Naj bo x os obrnjena proti vzhodu in y proti severu. Hitrost letala glede na zrak je $\mathbf{v}' = (600, 0)\,\mathrm{km/h}$, hitrost zraka pa je $\mathbf{v}_0 = (80/\sqrt{2}, 80/\sqrt{2})\,\mathrm{km/h}$. Zrak daje letalu dodatno hitrost, tako da je hitrost letala glede na tla enaka:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' = (657, 57)\,\mathrm{km/h}\,.$$

Velikost hitrosti je $v = 659\,\mathrm{km/h}$, giblje pa se v smeri azimuta

$$A = \arctan\frac{v_x}{v_y} = 85°\,.$$

Naloga 4.2 (a) Ker $\mathbf{r}_1' = \mathbf{0}$, je $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}$. Izračunamo $r = |\mathbf{r}| = 2{,}29\,\mathrm{m}$ in vse količine vstavimo v izraz za jakost električnega polja:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} 150\,\mathrm{MV/m} \\ 300\,\mathrm{MV/m} \\ -75\,\mathrm{MV/m} \end{pmatrix}\,.$$

Velikost je $E = 340\,\mathrm{MV/m}$.

(b) Izračunajmo še prispevek drugega naboja. Sedaj imamo

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_2' = \begin{pmatrix} 1{,}0\,\mathrm{m} \\ 2{,}0\,\mathrm{m} \\ 0{,}5\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

in $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2'| = 2{,}29\,\mathrm{m}$. Vstavimo to v izraz:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2'|^3} = \begin{pmatrix}-220\,\mathrm{MV/m}\\ -450\,\mathrm{MV/m}\\ -110\,\mathrm{MV/m}\end{pmatrix}.$$

V skladu s principom superpozicije je skupno električno polje podano z

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix}-74\,\mathrm{MV/m}\\ -149\,\mathrm{MV/m}\\ -187\,\mathrm{MV/m}\end{pmatrix}.$$

Velikost je $E = 250\,\mathrm{MV/m}$.

(c) $\theta = 138°$, $\phi = 243°$

5. Enačba premice

Naloga 5.1 (*IOAA 2024*). Največji mrk.

(a) Velja $\delta + \theta = 90°$, torej:

$$\delta_\mathrm{S} = 21°\,30'\,15{,}9'', \qquad \delta_\mathrm{L} = 21°\,12'\,18{,}4''\,.$$

(b) Velja $\alpha = \phi + \mathtt{GST}$, torej dobimo:

$$\alpha_\mathrm{S} = 4^\mathrm{h}\,21^\mathrm{m}\,7{,}3^\mathrm{s}\,, \qquad \alpha_\mathrm{L} = 4^\mathrm{h}\,21^\mathrm{m}\,12{,}6^\mathrm{s}\,.$$

(c)

	Središče Sonca	Središče Lune
x	$1{,}342 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$	$3{,}185 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
y	$-4{,}327 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$	$-1{,}025 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
z	$5{,}557 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$	$1{,}298 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$

(d) Želeni vektor dobimo tako, da normaliziramo $\mathbf{r}_\mathrm{L} - \mathbf{r}_\mathrm{S}$:

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix}-0{,}885\,462\\ 0{,}285\,500\\ -0{,}366\,669\end{pmatrix}.$$

(e) * Enačba premice osi Luninega senčnega stožca je $\mathbf{r}_\mathrm{L} + t\hat{\mathbf{r}}$. Želimo najti takšno točko na tej premici, da bo oddaljenost iz izhodišča do te točke enaka R. To pomeni, da mora veljati:

$$(\mathbf{r}_\mathrm{L} + t\hat{\mathbf{r}})^2 = t^2 + 2\mathbf{r}_\mathrm{L}\cdot\hat{\mathbf{r}}t + \mathbf{r}_\mathrm{L}^2 = R^2\,.$$

To je kvadratna enačba in ima dve rešitvi:

$$t_1 = 3{,}649\,555\,07 \cdot 10^8, \qquad t_2 = 3{,}527\,987\,88 \cdot 10^8$$

Dve rešitvi sta zato, ker os Luninega senčnega stožca prebode Zemljino kroglo dvakrat. Uporabimo manjšo vrednost (t_2), saj ta ustreza točki, ki je bližje Luni. Položaj na površju Zemlje je torej

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_\mathrm{L} + t_2\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix}6110\,\mathrm{km}\\ -1776\,\mathrm{km}\\ 440\,\mathrm{km}\end{pmatrix}.$$

V običajnem zemljepisnem sistemu je to torej:

$$\phi = 3°\,57', \qquad \lambda = -16°\,12'\,.$$

3

Naloga 5.2 ** Pretvorimo podane sferne koordinate opazovališč v kartezične krajevne vektorje, s katerimi bo lažje operirati v nadaljevanju. To storimo s standardno pretvorbo iz sfernih (upoštevamo, da je radialna razdalja enaka vsoti polmera Zemlje in nadmorske višine) v kartezične koordinate in dobimo

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 4285{,}70\,\mathrm{km} \\ 1109{,}04\,\mathrm{km} \\ 4591{,}98\,\mathrm{km} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 4192{,}34\,\mathrm{km} \\ 170{,}30\,\mathrm{km} \\ 4803{,}60\,\mathrm{km} \end{pmatrix}$$

Sedaj pretvorimo v kartezične koordinate še vektor, ki kaže od opazovališča približno proti ISS. Pazimo, da ga izrazimo z istimi kartezičnimi koordinatami, kot krajevna vektorja opazovališč. Deklinacija je sama po sebi projekcija geografske širine na nebesno sfero, rektascenzija pa se od projekcije geografske dolžine razlikuje le za nek konstanten faktor, ki je ravno `GST`. Definirajmo torej nek kót

$$H_1 = \alpha_1 - \mathtt{GST} = -52{,}720\,83^\circ, \quad H_2 = \alpha_2 - \mathtt{GST} = 35{,}679\,17^\circ\,,$$

ki je ravno projekcija geografske dolžine na nebesno sfero. Tako dobimo vektorja usmerjenosti preko klasičnih pretvorb.

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}566\,192 \\ -0{,}743\,794 \\ 0{,}355\,243 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}810\,628 \\ 0{,}582\,048 \\ 0{,}064\,049 \end{pmatrix}$$

Nik pravi, da je možen položaj ISS podan z

$$\mathbf{v}_1(t_1) = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{s}_1\,,$$

Petra pa pravi, da je podan z

$$\mathbf{v}_2(t_2) = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{s}_2\,,$$

kjer t_1 in t_2 zavzameta poljubne vrednosti. Če bi oba opazovalca izmerila parametre poljubno natančno, bi se premici sekali na položaju ISS, v resnici pa sta zaradi rahle (vedno prisotne) napake mimobežni. Ideja je taka, da najprej poiščemo najkrajšo daljico med obema premicama $\mathbf{v}_1(t_1)$ in $\mathbf{v}_2(t_2)$. Za tako daljico bo veljalo, da je pravokotna na oba smerna vektorja $\mathbf{s}_1$ in $\mathbf{s}_2$. Veljati mora torej:

$$(\mathbf{v}_1(t_1) - \mathbf{v}_2(t_2)) \cdot \mathbf{s}_1 = 0$$
$$(\mathbf{v}_1(t_1) - \mathbf{v}_2(t_2)) \cdot \mathbf{s}_2 = 0$$

Imamo torej dve enačbi z dvema neznankama t_1 in t_2, kar zadošča za enolično rešitev. Če razpišemo zgornji sistem enačb, dobimo:

$$t_1 + (-0{,}048\,800)\,t_2 = 720{,}545$$
$$0{,}048\,800\,t_1 + (-1)\,t_2 = -608{,}51$$

Rešitev sistema je

$$t_1 = 752{,}03$$
$$t_2 = 645{,}21$$

torej

$$\mathbf{v}_1(t_1) = \begin{pmatrix} 4711{,}49\,\mathrm{km} \\ 549{,}68\,\mathrm{km} \\ 4859{,}13\,\mathrm{km} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2(t_2) = \begin{pmatrix} 4715{,}37\,\mathrm{km} \\ 545{,}85\,\mathrm{km} \\ 4844{,}92\,\mathrm{km} \end{pmatrix}$$

Oba vektorja kažeta na skoraj isto točko, kar nam vlije zaupanje v Petro in Nika. Rešitev ocenimo z razpoloviščem daljice.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4713{,}4\,\mathrm{km} \\ 547{,}8\,\mathrm{km} \\ 4852{,}0\,\mathrm{km} \end{pmatrix}$$

Pretvorjeno v sferne koordinate to znese v:

$$\lambda = 6{,}63^\circ$$
$$\phi = 45{,}64^\circ$$
$$h = 409\,\mathrm{km}$$

Napako v položaju ocenimo kot polovico dolžine daljice:

$$\Delta = |\mathbf{v}_1(t_1) - \mathbf{v}_2(t_2)|/2 = 8\,\mathrm{km}\,.$$

6. Integrali

Naloga 6.1 (a) * V našem primeru računamo magnetno polje v izhodišču, torej $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Biot-Savartov zakon nam pove, da je prispevek vsakega dolžinskega elementa $\mathrm{d}\mathbf{r}'$ enak:

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (-\mathbf{r}')}{r'^3}\,.$$

Velikost vektorja $\mathbf{r}'$ je vedno enaka a. $\mathrm{d}\mathbf{r}'$ je usmerjen v smeri toka, zato je $\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (-\mathbf{r}')$ vedno enak $a\hat{\mathbf{z}}\,\mathrm{d}r'$. Če seštejemo vse prispevke $\mathrm{d}r'$, dobimo skupni obseg kroga, oziroma $2\pi a$. Dobimo torej:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{a\hat{\mathbf{z}}\,\mathrm{d}r'}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\hat{\mathbf{z}}\,2\pi a}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{\mathbf{z}}\,.$$

(b) ** Tokrat velja $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$ in $\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ več ne kaže v z smer. Toda vemo, da se morajo vsi prispevki v ostalih smereh izničiti (zaradi simetrije oz. z eksplicitnim poračunanjem ostalih komponent integralov), tako da opazujmo le z projekcijo. $(\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))_z = \sqrt{z^2 + a^2}\cos\phi\,\mathrm{d}r'$. Dobimo torej:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\sqrt{z^2 + a^2}\cos\phi\,\hat{\mathbf{z}}\,\mathrm{d}r'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}\,.$$

Naloga 6.2 * Naj plošča leži na ravnini xy. Zaradi simetrije problema mora kazati električno polje v z smeri (posamezni nasprotni prispevki izničijo vse ostale komponente). Natančneje, električno polje nad ploščo kaže navzgor, pod njo pa navzdol. Uporabimo prizmo, ki ima osnovni ploskvi vzporedni z ravnino in stranske ploskve pravokotne. Prispevki s stranskih ploskev k integralu ne doprinesejo (saj je električno polje pravokotno na normalo ploskve), prispevki z obeh osnovnih ploskev pa doprinesejo $2ES$, kjer je E velikost električnega polja na osnovni ploskvi in S površina ene ploskve. Naboj znotraj izbranega volumna je σS, torej po Gaussovem zakonu sledi

$$\epsilon_0\,2ES = \sigma S$$
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Zanimivo, velikost električnega polja ni odvisna od razdalje z.