

ELEKTROMAGNETIZEM

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

PETER ANDOLŠEK

Maj 2025

1. izdaja

Kazalo

1	Osnove vektorske analize	1
1.1	Nabla	1
1.2	Integrali na vektorskih poljih	5
1.3	Osnovni izreki	6
1.4	Teorija polj	8
2	Elektrostatika	10
2.1	Naboj	10
2.2	Električna sila in polje	10
2.3	Maxwellovi enačbi elektrostatike	12
2.4	Električni potencial	13
2.5	Elektrostatska energija	16
2.6	Prevodniki in dielektriki	17
2.7	Kondenzator	17
3	Električni tok	19
3.1	Ohmov zakon	19
3.2	Kirchhoffova zakona	20
3.3	Delo in moč električnega toka	20
4	Magnetostatika	22
4.1	Magnetno polje	22
4.2	Magnetna sila	24
4.3	Vektorski potencial	26
5	Magnetna indukcija	27
5.1	Inducirana napetost	28
5.2	Faradayev zakon	28
6	Maxwellove enačbe	30
6.1	Ohranitev naboja	30
6.2	Maxwellove enačbe	30
6.3	Maxwellove enačbe v vakuumu	31
6.4	Elektromagnetno valovanje	32
	Dodatno branje	34

Poglavje 1

Osnove vektorske analize

Naloga elektromagnetizma je opisati elektromagnetno silo, torej vrsto interakcije med nabitimi delci. Teorijo je moč zapisati kot **teorijo polja**, ki opisuje, kako se vzpostavi elektromagnetno polje zaradi nabitih delcev in kako elektromagnetno polje narekuje nabitim delcem, kako naj se gibljejo. Za učinkovit opis polja je dobro poznati osnove uporabe odvodov in integralov za vektorska polja, kar imenujemo **vektorska analiza**.

1.1 Nabla

Često bomo uporabljali operator **nabla** ∇ , ki ga definiramo tako:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1.1.1)$$

Čeprav to ni vektor v navadnem smislu, pa lahko z njim pogosto delamo podobno kot z običajnim vektorjem. “Vektor” ∇ lahko množimo s skalarnim poljem T in dobimo gradient ∇T . Z vektorskim poljem \mathbf{v} lahko nabla množimo skalarno ali vektorsko – v tem primeru dobimo divergenco $\nabla \cdot \mathbf{v}$ in rotor $\nabla \times \mathbf{v}$.

Poznamo že **gradient** ∇T , ki deluje na skalarno polje T in je definiran tako:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (1.1.2)$$

Vemo tudi že, da lahko totalni diferencial skalarnega polja T zapišemo v sledeči obliki:

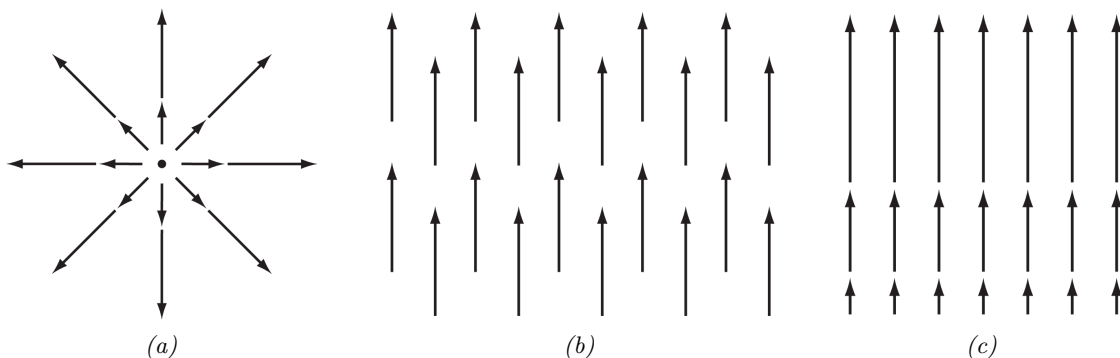
$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz = \nabla T \cdot d\mathbf{r} = |\nabla T| |d\mathbf{r}| \cos \theta, \quad (1.1.3)$$

kjer je vektor premika $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Očitno je prirastek funkcije dT največji, ko $\cos \theta = 1$, torej ko se premaknemo v smeri gradienta. V tej smeri velja $dT = |\nabla T| |d\mathbf{r}|$. Velja torej:

Gradient ∇T je vektorsko polje in kaže v vsaki točki v smeri največjega prirastka skalarnе funkcije T , medtem ko njegova velikost $|\nabla T|$ predstavlja hitrost prirastka (naklon) v tej smeri.

Divergenca je “skalarni produkt” ∇ z vektorskim poljem $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.1.4)$$



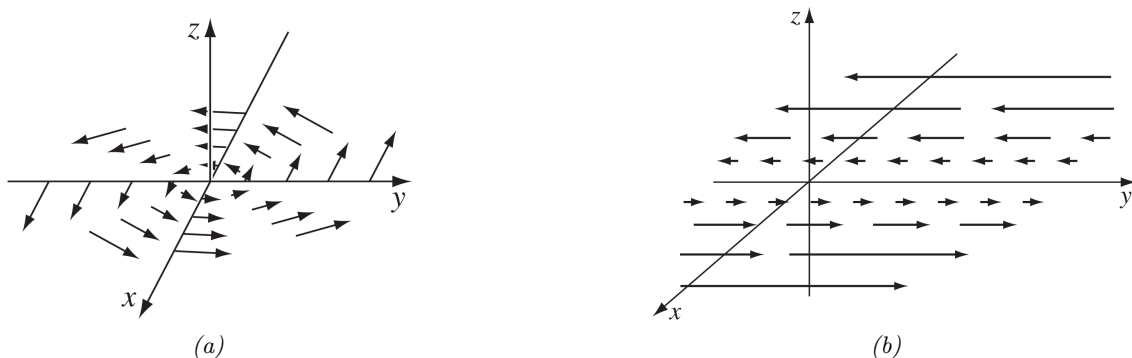
Slika 1.1: Na sliki (a) pričakujemo veliko pozitivno divergenco, na sliki (b) je divergenca 0, na sliki (c) pa ima vektorsko polje tudi izvire, zato bo tudi divergenca pozitivna.

Divergenca deluje na vektorsko polje, sama po sebi pa je skalarno polje. Geometrijsko si divergenco predstavljamo kot količino izvorov v vektorskem polju. Denimo, da je \mathbf{v} hitrostno polje na površini ribnika in na gladino posujemo nekaj prahu. Če se bo prah razširil, smo ga posipali na območje pozitivne divergence (v tisti točki imamo izvir). Če se prah združi, smo ga posuli na območje negativne divergence (v tisti točki imamo ponor).

Rotor je “vektorski produkt” operatorja ∇ z vektorskim poljem \mathbf{v} :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right). \quad (1.1.5)$$

Rotor je vektorsko polje in predstavlja vrtničnost vektorske funkcije okrog dane točke. Njegova velikost predstavlja jakost vrtničnosti, smer pa okvirno določimo po pravilu desne roke, kjer nam palec desne roke določa smer rotorja, če ostale prste ukrivljamo v smeri potovanja polja. Zopet si predstavljajmo \mathbf{v} kot hitrostno polje na gladini ribnika in naredimo mali križec iz dveh zobotrebcev. Če ima v neki točki polje neničeln rotor, potem se bo mali križec pričel vrteti.



Slika 1.2: Na obeh slikah pričakujemo neničeln rotor (saj je očitna vrtničnost: mali križec bi se začel vrteti) in po pravilu desne roke kaže v obeh primerih v smeri osi z .

Pravila vsot in produktov

Podobno kot imamo pri običajnem odvajanju pravilo vsote in produkta, lahko podobna pravila tvorimo tudi pri vektorskih operatorjih. Dokažemo jih lahko tako, da razpišemo vse izraze po definiciji operatorja ∇ .

Pravila vsot:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (1.1.6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1.7)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.1.8)$$

Množenje s konstanto:

$$\nabla(kf) = k\nabla f \quad (1.1.9)$$

$$\nabla \cdot (k\mathbf{A}) = k(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.1.10)$$

$$\nabla \times (k\mathbf{A}) = k(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.1.11)$$

Pravila produktov:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (1.1.12)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (1.1.13)$$

$$(1.1.14)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (1.1.15)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.1.16)$$

$$(1.1.17)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (1.1.18)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.1.19)$$

Drugi odvodi

Gradient, divergenca in rotor so le prvi odvodi. Če uporabimo ∇ dvakrat, lahko iznajdemo pet novih vrst odvodov.

Gradient ∇T je vektor, zato lahko operiramo z divergenco ali rotorjem. Začnimo z divergenco.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Ta objekt zaznamujemo z $\nabla^2 T := \nabla \cdot (\nabla T)$ in ga imenujemo **Laplacian** od T .

Včasih govorimo tudi o Laplacianu vektorja, kjer definiramo

$$\nabla^2 \mathbf{v} := (\nabla^2 v_x) \hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 v_y) \hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 v_z) \hat{\mathbf{z}} \quad (1.1.21)$$

Dva dvojna produkta imata zanimivo lastnost: pokažemo lahko namreč, da za vsa skalarna polja T in vektorska polja \mathbf{v} velja:

$$\nabla \times (\nabla T) = \mathbf{0} \quad (1.1.22)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1.23)$$

Na rotorju lahko operiramo z divergenco (kot smo že naredili v prejšnjem izreku) ali z rotorjem. Pri tem velja:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.1.24)$$

Preostane nam le še gradient divergence $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$, ki se pa v fiziki skorajda ne pojavlja, zato tudi nima posebnega imena ali identitete.

Zgled: Vektorski operatorji gradient, divergenca, rotor in Laplacian

Naj bo skalarno polje $T(x, y, z) = x^3 + z \sin y$. Gradient je tedaj podan z

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = (3x^2, z \cos y, \sin y). \quad (1.1.25)$$

Laplacian je podan s sledečim izrazom:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 6x - z \sin y. \quad (1.1.26)$$

Sedaj naj bo podano vektorsko polje $\mathbf{v}(x, y, z) = (xy^2, z, z \sin y)$. Divergenca je skalarno polje

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = y^2 + \sin y, \quad (1.1.27)$$

rotor pa vektorsko polje

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) = ((z \cos y - 1), 0, -2xy). \quad (1.1.28)$$

Izračunamo lahko tudi Laplacian:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z) = (2x, 0, -z \sin y). \quad (1.1.29)$$

Nabla v ostalih koordinatnih sistemih

Včasih je prikladneje uporabljati koordinate, ki so primernejše za obdelavo primera. Z nekaj truda je možno izpeljati izraze za vektorske operatorje v najpogostejše uporabljenih alternativnih sistemih: sfernem in cilindričnem.

Sferne koordinate.

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.1.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (1.1.31)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (1.1.33)$$

Cilindrične koordinate.

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.1.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.1.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (1.1.36)$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1.1.37)$$

1.2 Integrali na vektorskih poljih

Integral po krivulji. Če integriramo vektorsko funkcijo \mathbf{v} po neki krivulji γ med točkama \mathbf{a} in \mathbf{b} , to zaznamujemo z

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.2.1)$$

Če velja $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, imenujemo to **integral po zaprti krivulji** ali **cirkulacija** in zaznamujemo z

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.2.2)$$

Čeprav se v tem primeru vrnemo nazaj v izhodišče, smo vmes integrirali po neki krivulji γ , zato v splošnem integral po zaprti krivulji ni enak 0. Najbolj znan primer integrala po krivulji je delo: $A = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. V splošnem je rezultat krivuljnega integrala odvisen od poti. Vektorska polja, za katera je integral neodvisen od poti, imenujemo **konzervativna**. Zanje za vsako pot γ velja

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.2.3)$$

Integral po površini. To je izraz oblike

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.2.4)$$

Pri tem je S neka poljubna površina znotraj 3-dimenzionalnega prostora in $d\mathbf{S}$ infinitezimalni vektor površine, ki kaže pravokotno na ta delček površine. Imamo seveda dve izbiri pravokotnega vektorja, kar je stvar dogovora. Če je ploskev S zaprta (kot balon), pa temu pravimo **integral po zaprti ploskvi** in ga označimo z

$$\oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.2.5)$$

Pri takšnih integralih je navada, da kaže $d\mathbf{S}$ ven iz volumna, ki ga S oklepa. Integrali po površini predstavljajo pojem pretoka. Če imamo podano hitrostno polje \mathbf{v} in polje gostote tekočine ρ , nam recimo integral $\Phi_m = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ pove masni pretok skozi ploskev S . Med drugim poznamo še prostorninski tok $\Phi_V = \iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, električni tok $I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$, pretok električnega polja $\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, pretok magnetnega polja $\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ in toplotni tok $P = \iint \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}$.

Integral po prostornini. To je izraz oblike

$$\iiint_{\mathcal{V}} T \, dV. \quad (1.2.6)$$

Pri tem smo skalarno polje T integrirali po volumnu $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^3$. Lahko bi integrirali tudi vektorsko polje, a imamo običajno opraviti s skalarnimi polji. V kartezičnih koordinatah je infinitezimalni element volumna $dV = dx \, dy \, dz$, v sfernih $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$, v cilindričnih pa $dV = r \, dz \, ds \, d\phi$. Če je $\rho = dm/dV$ skalarno polje gostote, nam $m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, dV$ pove skupno maso v volumnu \mathcal{V} .

Zgled: Integral po krivulji

Naj bo dano vektorsko polje $\mathbf{v} = (xy, y^3)$. Izračunajmo integral po poti γ , ki jo opisuje funkcija $y = x^2$ med $x = 0$ in $x = 1$.

Najprej želimo pot parametrizirati z nekim parametrom t , v našem primeru izberemo $t = x$. Zapišemo lahko $\mathbf{r} = (x, y) = (t, t^2)$ in $d\mathbf{r} = (1, 2t) \, dt$. Vektorsko polje je podano z $\mathbf{v} = (xy, y^3) = (t^3, t^6)$. Velja torej

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3 + 2t^7) \, dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^8}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (1.2.7)$$

Podobno lahko izračunamo tudi integrale po danih ploskvah. Z integrali po prostorninah pa imamo že od prej nekaj izkušenj.

1.3 Osnovni izreki

Dobro že poznamo osnovni izrek infinitezimalnega računa (ki ga lahko poimenujemo “osnovni izrek za odvode”):

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a). \quad (1.3.1)$$

Podobno lahko tudi za vsako vrsto “vektorskega” odvoda (gradient, divergenco in rotor) zapišemo osnovni izrek. Vsi so podobne oblike: integral odvoda po nekem območju (prostornina, površina ali krivulja) je povezan z vrednostmi funkcije na robovih (zaprta površina, zaprta krivulja ali točki).

Osnovni izrek o gradientih. Imamo podano skalarno funkcijo treh spremenljivk $T(x, y, z)$ in želimo izračunati spremembo te funkcije med točkama \mathbf{a} in \mathbf{b} . Vsakič se premaknemo za majhen interval $d\mathbf{r}$, pri čemer se vrednost funkcije spremeni za $dT = (\nabla T) \cdot d\mathbf{r}$. Če seštejemo vse majhne spremembe funkcije od \mathbf{a} do \mathbf{b} , dobimo

$$\int_{\gamma} dT = \int_{\gamma} (\nabla T) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.3.2)$$

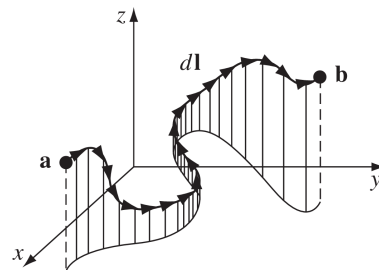
Toda $\int_{\gamma} dT$ je vedno preprosto ΔT , saj je to le seštevek malih prispevkov. Iz tega sledi, da je tudi integral neodvisen od poti. Sledi pomemben izrek.

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla T) \cdot d\mathbf{r} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}). \quad (1.3.3)$$

Ta izrek velja za poljubno pot: integral gradienta neke funkcije je torej neodvisen od poti. Če je $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, potem je razlika funkcije tudi enaka 0: $T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) = 0$. Velja torej

$$\oint_{\gamma} (\nabla T) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.3.4)$$

Geometrijska interpretacija: Denimo, da želimo izmeriti nadmorsko višino Triglava. Višino lahko izmerimo tako, da gremo peš od Tržaškega zaliva in seštevamo zmnožke naklonov in prepotovanih razdalj ($\nabla h \cdot d\mathbf{r}$). Lahko gremo tudi po kakšni drugi poti: rezultat je seveda neodvisen od poti. Osnovni izrek za gradiente nam pove, da bo rezultat enak, kot če bi na vrhu Triglava in ob morju postavili dva višinomera ter izračunali razliko.



Slika 1.3: Skica k osnovnem izreku o gradientih.

Osnovni izrek o divergencah. Za poljubno vektorsko polje \mathbf{v} in poljubno prostornino \mathcal{V} z mejo $\partial\mathcal{V}$ velja:

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.3.5)$$

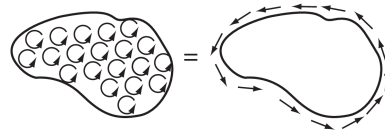
Geometrijska interpretacija: Če imamo podano hitrostno polje \mathbf{v} nestisljive tekočine, nam desna stran divergenčnega izreka pove skupni volumenski pretok skozi zaprto površino $\partial\mathcal{V}$. Če ni izvirov ($\nabla \cdot \mathbf{v}$), mora biti skupni volumenski pretok enak 0. Če so izviri, pa mora iz volumna izhajati tekočina.

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} (\text{izviri znotraj volumna}) &= \iint_{\partial\mathcal{V}} (\text{gostota toka}) \\ (\text{količina izvirov znotraj volumna}) &= (\text{skupni pretok skozi površino}) \end{aligned}$$

Osnovni izrek za rotorje. Za poljubno vektorsko polje \mathbf{v} in poljubno površino \mathcal{S} z robom $\partial\mathcal{S}$ velja

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.3.6)$$

Geometrijska interpretacija: Rotor meri vrtnčenje. Če integriramo rotor po površini, dobimo “skupno količino rotacije”. Izrek pravi, da jo lahko dobimo tudi tako, da naredimo obhod po robu površine. $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ se imenuje *cirkulacija* polja \mathbf{v} . Paziti pa moramo še na smeri. Recimo, da si že izberemo smer, v katero kažejo infinitezimalni deli površine \mathcal{S} . Krivuljni integral po $\partial\mathcal{S}$ moramo izračunati v smeri, v kateri kažejo prsti, ko desni palec usmerimo v smeri površine \mathcal{S} .



Slika 1.4: Skica k osnovnem izreku o rotorjih.

Površinski integral vektorske funkcije je običajno odvisen od izbire površine, toda integral rotorja je odvisen le od izbire meje. Če mejo skrčimo v točko, dobimo zaprto ploskev, toda integral po krivulji, skrčeni v točko, je enak 0:

$$\oint (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.3.7)$$

Integracija po delih

Podobno kot smo odkrili metodo integracije po delih pri funkcijah ene spremenljivke, lahko postopamo tudi sedaj s pravili za gradient/divergenco/rotor produkta in z osnovnimi izreki.

Za prikaz tehnike integrirajmo sledeči izraz na obeh straneh po nekem volumnu \mathcal{V} z mejo $\partial\mathcal{V}$:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla f) \quad (1.3.8)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (f\mathbf{v}) dV = \iiint_{\mathcal{V}} f(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot (\nabla f) dV \quad (1.3.9)$$

Z uporabo divergenčnega izreka $\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (f\mathbf{v}) dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ in preureditvijo členov dobimo:

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = - \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot (\nabla f) dV + \oint_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.3.10)$$

Kot pri enodimenzionalni integraciji po delih smo tudi tukaj premaknili odvod z ene funkcije na drugo, kar se izkaže za zelo uporabno metodo. Podobna pravila lahko izpeljemo tudi iz drugih pravil za odvod produkta.

1.4 Teorija polj

Že od Faradaya naprej je celoten elektromagnetizem izražen z električnim in magnetnim poljem \mathbf{E} in \mathbf{B} . Maxwell je celotno teorijo reduciriral na štiri enačbe, ki podajo divergenco ter rotor obeh polj.

Ob tem pa naletimo na pomembno vprašanje: Ali je vektorsko polje enolično določeno, če imamo podana njegovo divergenco in rotor? Denimo, da poznamo divergenco in rotor vektorskega polja \mathbf{F} :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \quad (1.4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (1.4.2)$$

Pri tem mora biti $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$, saj je divergenca rotorja vedno 0. Poleg tega gre v običajnih življenjskih primerih polje \mathbf{F} v neskončnosti proti 0.¹ **Helmholtzev izrek** nam pravi, da je polje \mathbf{F} tako enolično določeno.

Sedaj si oglejmo posebna primera vektorskih polj:

Irotacijska polja. To so polja, kjer povsod velja $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Če rotor vektorskega polja povsod izgine, ga lahko zapišemo kot gradient neke skalarne funkcije, ki jo imenujemo **skalarni potencial** V :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \iff \mathbf{F} = -\nabla V. \quad (1.4.3)$$

Negativni predznak je pri tem preprosto stvar dogovora.

Pretekle sklepe za irotacijska polja lahko združimo v zanimivo obliko; vse sledeče lastnosti so ekvivalentne (če je izpolnjena ena, iz nje sledijo vse ostale):

- (a) Povsod velja $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- (b) $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ je za fiksni končni točki neodvisen od poti.
- (c) Za vsako zaprto zanko velja $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
- (d) \mathbf{F} lahko zapišemo kot gradient neke skalarne funkcije: $\mathbf{F} = -\nabla V$.

Skalarni potencial ni enoličen, saj mu lahko dodamo poljubno konstanto, ki ne bo vplivala na dejansko polje, $\nabla(V + \lambda) = \nabla V$.

¹To pri veliko idealiziranih primerih ne velja – vzemimo kar neskončno nabito ploščo ali neskončno žico pod tokom.

Brezizvirna polja. To so polja, kjer povsod velja $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

Če divergenca vektorskega polja povsod izginje, ga lahko zapišemo kot rotor neke vektorske funkcije, ki ji pravimo **vektorski potencial** \mathbf{A} :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.4.4)$$

Tudi vektorski potencial ni enoličen, saj mu po enačbi 1.1.22 lahko prištejemo gradient poljubne funkcije, $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \lambda) = \nabla \times \mathbf{A}$. Podobno kot pri irrotacijskih poljih so sledeče lastnosti za brezizvirno polje ekvivalentne:

- (a) Povsod velja $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.
- (b) Za neko mejo ∂S je $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ neodvisen od izbire površine.
- (c) Za vsako zaprto ploskev velja $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
- (d) \mathbf{F} lahko zapišemo kot rotor neke vektorske funkcije: $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Podpoglavje zaključimo s pomembnim izrekom, ki velja za vsa vektorska polja, ne glede na njihovo divergenco ali rotor:

Za vsako vektorsko polje \mathbf{F} obstajata takšna skalarni potencial V in vektorski potencial \mathbf{A} , da ga lahko zapišemo kot

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.4.5)$$

Opremljeni s potrebnimi matematičnimi orodji se lahko naposled lotimo obdelave elektromagnetizma.

Poglavje 2

Elektrostatika

2.1 Naboj

Osnovna količina v elektromagnetizmu je **naboj**. Običajno ga označimo s črkami q , Q ali e , ima pa enoto *coulomb* $C = A s$ ter je intrinzična lastnost delca (tako kot masa) in se pri vseh procesih ohrani (za razliko od mase, ki se pri relativističnih trkih ne ohrani). Zavzame lahko le diskretne vrednosti, kar pomeni, da se lahko pojavlja le v celoštevilskih mnogokratnikih **osnovnega naboja** $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} C$. Delce z nabojem imenujemo **nabiti**, brez njega pa so delci **nevtralni**.

2.2 Električna sila in polje

Osnovna značilnost nabitih delcev je, da med njimi deluje elektromagnetna sila, ki jo je v splošnem zelo težko izračunati, saj je pri tem treba upoštevati še razne relativistične efekte. Če so delci pri miru, lahko silo izračunamo lažje – s takimi enostavnejšimi sistemi se ukvarja **elektrostatika**.

Obravnavamo dva mirujoča nabita delca z nabojema q_1 in q_2 na položajih \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 . Velikost sile na 2. delec je podana s Coulombovim zakonom:¹

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.2.1)$$

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} A m/V s$ je **influenčna konstanta**,² ki opisuje jakost električne sile. Električna sila je vektor in zadosti močnemu zakonu o akciji in reakciji.³ Istoznačni naboji se med sabo odbijajo, nasprotnoznačni pa privlačijo. Več električnih sil seštejemo vektorsko.

Coulombova slika elektrostatike je torej preko sil med delci. V Maxwellovi sliki pa naboji okrog sebe ustvarijo **električno polje**, ki ga opišemo z jakostjo električnega polja \mathbf{E} , ki nato deluje na nabite delce. Jakost električnega polja je definirana tako, da na delec z nabojem q deluje sila:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.2.2)$$

Na delce s pozitivnim nabojem tako kaže sila v smeri električnega polja, za negativne naboje pa v nasprotni.

¹Ima enako obliko kot Newtonov gravitacijski zakon: sila je odvisna od zmnožka dveh lastnosti delcev (mase oziroma naboja) in pada s kvadratom razdalje. Pri gravitaciji je prenosorazmernostni koeficient G , pri elektriki pa $1/4\pi\epsilon_0$.

² V označuje *volt*, ki ga bomo spoznali v kratkem.

³Spomnimo se: električna sila torej kaže v smeri zveznice med delcema in velja $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Iz Coulombovega zakona lahko določimo električno polje v \mathbf{r} okoli točkastega naboja Q , ki leži v \mathbf{r}' :⁴

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.2.3)$$

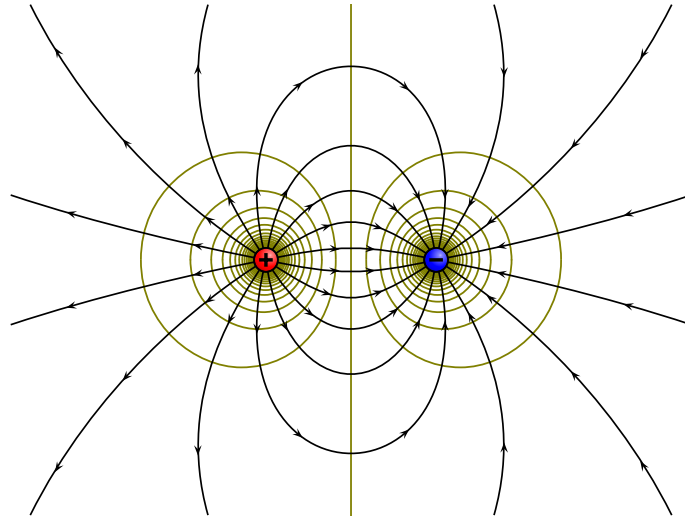
Vektorji električnega polja kažejo stran od pozitivnih nabojev in proti negativnim.

Za električno polje velja princip superpozicije, ki pravi, da je za več nabojev $1, 2, \dots, n$ električno polje vektorska vsota posameznih prispevkov:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n. \quad (2.2.4)$$

Praktična uporaba polja \mathbf{E} je ta, da lahko najprej določimo električno polje v vsaki točki zaradi porazdelitve podanih nabojev, kasneje pa lahko s tem izračunamo še dejansko silo na delec $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Za zdaj služi le kot matematično orodje, pozneje pa bomo videli, da je to osrednji objekt elektromagnetizma.

Če posamezne vektorje električnega polja povežemo, dobimo **silnice**. Nabiti delci se gibljejo po silnicah: pozitivni v njihovi smeri, negativni pa v nasprotno smer. Silnice izvirajo v pozitivnih nabojih in poniknejo v negativnih.



Slika 2.1: Električni dipol s prikazanimi silnicami in ekvipotencialnimi ploskvami.

Diskretno porazdelitev naboja lahko opišemo s podatki o velikostih nabojev in njihovih položajih. Če je naboj razporejen na dolžini, ga opišemo z dolžinsko gostoto $\lambda = dq/dl$, če je porazdeljen površinsko, ga opišemo s površinsko gostoto $\sigma = dq/dS$, najpogosteje pa je naboj porazdeljen po prostornini in ga opišemo s prostorninsko **gostoto naboja** $\rho = dq/dV$. Tako dobimo za jakost električnega polja v točki \mathbf{r} (pri tem integriramo naboje po koordinatah \mathbf{r}' in prostornini $dV' = d^3\mathbf{r}'$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.2.5)$$

Pri tem lahko namesto prostorninsko porazdeljenih nabojev (pri katerih $dq = \rho dV$) uporabimo izraz za dolžinsko porazdeljene $dq = \lambda dl$ oziroma površinsko porazdeljene naboje $dq = \sigma dS$.

⁴S tem začnemo uporabljati dogovor, da koordinate prostora za izračun polja označujemo z \mathbf{r} , koordinate izvorov (nabojev) pa z \mathbf{r}' .

2.3 Maxwellovi enačbi elektrostatične

Pretok električnega polja skozi neko površino je sorazmeren s številom silnic, ki jo prebadajo, in ga definiramo tako:

$$\Phi_E = \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.3.1)$$

Če obdamo naboj q s kroglo in integriramo, dobimo:

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.3.2)$$

Očitno je rezultat neodvisen od polmera krogle, saj površina narašča z r^2 , jakost električnega polja pa z r^{-2} . Podrobnejša izpeljava pokaže, da se rezultat ne spremeni niti v primeru, da oklepajoča površina ni sfera. Seveda pa zaradi principa superpozicije velja tudi za poljubno veliko nabojev. Sklep imenujemo **Gaussov zakon v integralni obliki** in nam pove, da je električni pretok skozi poljubno zaprto površino sorazmeren z nabojem znotraj površine:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{znotraj}}}{\epsilon_0}. \quad (2.3.3)$$

Zapišemo ga lahko še nekoliko drugače. Z uporabo osnovnega izreka o divergenci dobimo:

$$\iiint (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{znotraj}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV. \quad (2.3.4)$$

Za poljuben volumen velja torej $\iiint (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) dV = 0$, kar je lahko izpolnjeno tedaj, ko

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.3.5)$$

Izraz imenujemo **Gaussov zakon v diferencialni obliki**. Ker vemo, da nam divergenca pove količino izvirov, ga lahko z besedami preberemo kot *električno polje ima izviere v nabojih*. Podoben Gaussov zakon srečamo tudi v Newtonovi gravitaciji: v integralni obliki je $\oiint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{\text{znotraj}}$, v diferencialni obliki pa je $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho$.

Električno polje točkastega naboja kaže radialno navzven in tako je očitno rotor električnega polja povsod ničlen – *elektrostatsko polje nima vrtincev*. To dejstvo zaradi načela superpozicije velja tudi v primeru splošnih porazdelitev:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (2.3.6)$$

Iz tega in iz lastnosti irotacijskih polj sledi za poljubno zaprto zanko

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.3.7)$$

Enačbi 2.3.5 in 2.3.6 imenujemo **Maxwellovi enačbi elektrostatične**. Po Helmholtzevem izreku nam podana porazdelitev nabojev $\rho(\mathbf{r}')$ in robni pogoj $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0}$ (ko $\mathbf{r} \rightarrow \infty$) popolnoma enolično določita električno polje. Kot bomo videli, pa bo v primeru gibajočih se nabojev potrebno sistem enačb še nekoliko dodelati.

Zgled: Električno polje homogeno nabite krogle

Gaussov zakon je zelo uporaben v primerih, ki se ponašajo s kakšno simetrijo. Obravnavajmo homogeno nabito kroglo polmera R in nabojem Q . Zaradi rotacijske simetrije problema sklepamo, da mora električno polje kazati radialno navzven. Izberimo si sedaj takšno površino, ki bo to simetrijo čim bolj izkoristila – dobro se obnese krogla z nekim polmerom r . V tem primeru je namreč električni pretok $\Phi_E = 4\pi r^2 E$. Če je $r \geq R$, je naboj znotraj krogle podan s Q . V tem primeru po Gaussovem zakonu dobimo:

$$\Phi_E = q/\epsilon_0 \longrightarrow 4\pi r^2 E = Q/\epsilon_0 \longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.3.8)$$

Če je $r < R$, je naboj znotraj krogle:

$$q = \frac{Q}{4\pi R^3/3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}. \quad (2.3.9)$$

Po Gaussovem zakonu dobimo sedaj:

$$\Phi_E = q/\epsilon_0 \longrightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{R^3\epsilon_0} \longrightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (2.3.10)$$

Če povzamemo ugotovitve in dodamo še smer električnega polja, dobimo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{\mathbf{r}}, & r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r \geq R. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Še posebej je pomembno spoznanje, da se električno polje zunaj sferno simetrične porazdelitve obnaša tako, kot da bi bil ves naboj zbran v središču simetrije. Če nadomestimo $1/4\pi\epsilon_0$ z $-G$ in Q z M , pa lahko dobimo še rezultate za gravitacijsko polje, saj zadosti ekvivalentnim enačbam.

2.4 Električni potencial

Po 1.4.3 lahko električno polje zapišemo kot gradient skalarne funkcije, ki jo imenujemo **potencial** U (enota *volt* $V = J/C = W/A$):

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (2.4.1)$$

Izraz lahko obrnemo takole:

$$U = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.4.2)$$

kjer smo po dogovoru za izhodišče izbrali neskončnost. Če definicijo 2.4.1 vstavimo v Gaussov izrek 2.3.5, dobimo **Poissonovo enačbo**:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.4.3)$$

Pogosto rešujemo Poissonovo enačbo v delu prostora, kjer ni nabojev. V tem primeru jo imenujemo **Laplaceova enačba**, ki se pogosto pojavlja v naprednejših metodah reševanja elektrostatskih problemov:

$$\nabla^2 U = 0. \quad (2.4.4)$$

Potencial običajno raje uporabljamo kot električno polje, saj je skalarno polje, s katerim je lažje delati kot s trojico komponent. Poleg tega tudi zanj velja princip superpozicije $U = U_1 + \dots + U_n$. Ploskve enakega potenciala imenujemo **ekvipotencialne ploskve** in imajo v elektrostatiki podobno vlogo kot izohipse v kartografiji. Primer ekvipotencialnih ploskev je na sliki 2.1.

Za točkasti naboj Q v izhodišču po definiciji 2.4.2 dobimo:

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.4.5)$$

Za poljubno končno porazdelitev nabojev tako dobimo:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.4.6)$$

Zgled: Električno polje okrog neskončne nabite žice

Električno polje lahko izračunamo z enačbo 2.2.5. Naj bo $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ in $\mathbf{r}' = (x, 0, 0)$, torej $d\mathbf{r}' = |d\mathbf{r}'| = dx$, kjer gre x od $-\infty$ do ∞ . S tem uporabimo enačbo 2.2.5, prilagojeno za konstantni dolžinski naboj:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \lambda d\mathbf{r}' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx. \quad (2.4.7)$$

x komponenta zaradi lihega integranda v tej smeri ne preživi, torej ima polje neničelno le z komponento:

$$E_z = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \stackrel{x=z\tan\theta}{=} \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{z^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}. \quad (2.4.8)$$

Polje lahko torej v splošnem zapišemo s cilindričnimi koordinatami tako:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}}. \quad (2.4.9)$$

S tem lahko izračunamo tudi potencial, ki je le funkcija koordinate s .

$$U(s) = - \int_{s_0}^s \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} ds = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right). \quad (2.4.10)$$

Pri tem smo si izbrali poljubno izhodišče s_0 . Neskončnosti v tem primeru za izhodišče ne moremo izbrati, ker je porazdelitev naboja neskončno razsežna in električno polje v neskončnosti ne gre proti 0. Zato tudi ne moremo direktno uporabiti 2.4.6.

Določimo električno polje še z Gaussovim zakonom. Že zaradi simetrijskih razlogov lahko sklepamo, da mora električno polje kazati v smer $\hat{\mathbf{s}}$. Izberimo si tak valj, ki ima os poravnano z žico, polmer s in višino l . K električnem pretoku ne prispevata osnovni ploskvi (ker sta usmerjeni pravokotno na \mathbf{E}), tako da imamo le prispevek plašča: $\Phi_E = 2\pi slE$. Naboj znotraj ploskve je $q = \lambda l$. Po Gaussovem zakonu je torej:

$$2\pi slE = \lambda l / \epsilon_0 \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}. \quad (2.4.11)$$

Tako smo električno polje dobili neprimerljivo hitreje. Zgled nas uči, da je v primeru posebej simetričnih objektov koristno uporabiti Gaussov zakon. Če imamo sferno simetrične objekte, za Gaussovo površino uporabimo sfero, če imamo cilindrično simetrične objekte (kot v tem primeru), uporabimo valj, če imamo pa opravka z neskončno ravnino, uporabimo prizmo.

Zgled: Električni dipol

Električni dipol sestavljata dva naboja $+q$ in $-q$ na razdalji a . Naj naboja ležita na osi z (pozitivni naj leži višje od negativnega) in naj bo na sredi med njima izhodišče. Razdalja do pozitivnega naboja je po kosinusnem izreku $r_+ = \sqrt{r^2 + (a/2)^2 + 2r(a/2)\cos\theta}$, do negativnega naboja pa je $r_- = \sqrt{r^2 + (a/2)^2 + 2r(a/2)\cos(\pi - \theta)}$. Potencial na razdalji r je torej podan z

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2/4 + ra\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2/4 - ra\cos\theta}} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} \cos\theta, \quad (2.4.12)$$

kjer smo (v neprikazanih korakih) uporabili izraz $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ in zanemarili vse previsoke rede člena $(a/r) \ll 1$. Električni dipol opišemo z električnim dipolnim momentom \mathbf{p}_e , ki je po velikosti enak $p_e = qa$ in kaže od negativnega proti pozitivnemu naboju. Rezultat lahko tako zapišemo v obliki:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (2.4.13)$$

Električno polje lahko dobimo z gradientom, kar lahko naredimo na dva načina – lahko uporabimo izraz 2.4.12 v sfernih koordinatah in izračunamo gradient po obrazcu 1.1.30, lahko pa delamo v brezkoordinatni obliki 2.4.13, uporabimo obrazce 1.1.6 – 1.1.19 in $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{r}/r$ ter tako dobimo

$$\mathbf{E} = -\nabla U = \frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.4.14)$$

Izračunajmo še navor na električni dipol, ki se nahaja v točki \mathbf{r}_0 , v homogenem polju:

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{a}}{2} \right) \times (q\mathbf{E}) + \left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{a}}{2} \right) \times (-q\mathbf{E}) = (q\mathbf{a}) \times \mathbf{E}. \quad (2.4.15)$$

Velja torej

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E}. \quad (2.4.16)$$

Energijo dipola v električnem polju spet vpeljemo kot nasprotno vrednost opravljenega dela iz ravnovesne lege, toda sedaj ne gledamo integrala sile po poti, ampak navora po kotu. Za izhodišče si izberemo $\phi = \pi/2$, kar naj bo usmerjenost dipola pravokotno na električno polje.

$$W_{\mathbf{p}_e} = - \int_{\pi/2}^{\phi} \mathbf{M} \cdot d\phi = \int_{\pi/2}^{\phi} p_e E \sin\phi d\phi = -p_e E \cos\phi. \quad (2.4.17)$$

$$W_{\mathbf{p}_e} = -\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}. \quad (2.4.18)$$

Če je polje uniformno, potem deluje na dipol le navor, ne pa tudi sila. Če pa se polje nekoliko spreminja, pa bo na en naboj dipola delovala druga sila kot na drugega in posledično se bo pojavila sila na dipol:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q \Delta \mathbf{E}. \quad (2.4.19)$$

Spremembo električnega polja med obema nabojema lahko izračunamo s smernim odvodom:

$$\Delta \mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (2.4.20)$$

Za silo dobimo tako

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_e \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (2.4.21)$$

V elektrostatiiki imamo torej predvsem opravka s sledečimi tremi količinami: \mathbf{E} , U in ρ . Če poznamo eno, lahko iz nje izračunamo vse ostale prek sledečih zvez:

$$\rho \rightarrow \mathbf{E} : \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (2.4.22)$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \rho : \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad (2.4.23)$$

$$\mathbf{E} \rightarrow U : \quad U = - \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.4.24)$$

$$U \rightarrow \mathbf{E} : \quad \mathbf{E} = -\nabla U, \quad (2.4.25)$$

$$U \rightarrow \rho : \quad \nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0, \quad (2.4.26)$$

$$\rho \rightarrow U : \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.4.27)$$

2.5 Elektrostatska energija

Električno potencialno energijo definiramo kot negativno opravljeno delo (tako smo naredili že pri mehaniki):

$$W_e = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5.1)$$

Opazimo, da velja

$$W_e = qU. \quad (2.5.2)$$

Potencial je torej električna energija na enoto naboja.

Za točkasta naboja q_1 in q_2 na razdalji r tako za elektrostatsko energijo dobimo

$$W_e = q_1 U(\mathbf{r}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.5.3)$$

Potencialno energijo sistema točkastih delcev dobimo tako, da seštejemo prispevke 2.5.3 za vse pare (kjer pazimo, da parov ne štejemo dvakrat). Lahko pa pare namensko štejemo dvakrat in izraz delimo z 2:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

kjer smo uporabili potencial $U(\mathbf{r}_i)$ na položaju delca i . Za zvezno porazdelitev dobimo:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.5.5)$$

Izraz predstavlja energijo, ki jo je potrebno vložiti v sistem delcev, ki mirujejo na velikih razdaljah, da jih zložimo v želeno porazdelitev. Obstaja pa ljubek način, kako zgornji rezultat zapišemo še drugače: uporabimo Gaussov zakon $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ in integriramo po delih.

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) U(\mathbf{r}') dV = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \mathbf{E} \cdot (\nabla U) dV + \oint U \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Integrirajmo po vsem prostoru. \mathbf{E} pada z $1/r^2$, U pada z $1/r$, površina pa narašča z r^2 , tako da pričakujemo, da bo drugi člen pri neskončno veliki površini limitiral proti 0. Poleg tega velja $\mathbf{E} = -\nabla U$, tako da lahko zapišemo:

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 dV'. \quad (2.5.7)$$

Sedaj lahko definiramo **gostoto električne energije**:

$$W_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (2.5.8)$$

Imamo torej dva načina, kako gledamo na energijo porazdelitve nabojev. Po enačbi 2.5.5 se energija nahaja v nabojih, kar je originalna Coulombova slika. Po Maxwellu pa lahko z enačbo 2.5.7 razumemo energijo tako, kot da se nahaja v električnem polju po celem prostoru.

2.6 Prevodniki in dielektriki

Materiali se po svojih električnih lastnostih razlikujejo. Grobo jih lahko ločimo na dve skupini glede na njihovo sposobnost prevajanja električnega toka: prevodnike in dielektrike (izolatorje).

Prevodnik je material, ki ima neskončno zalogo popolnoma prostih elektronov, ki se lahko prosto premikajo po snovi. Električno polje je *znotraj* prevodnika pri elektrostatiki vedno enako $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Če to ne bi bilo res, bi se prevodniški elektroni (nabiti delci) začeli gibati, potem pa to več ne bi bila elektrostatika. Podobno lahko sklepamo, da mora biti na površini prevodnika električno polje usmerjeno pravokotno na površino, saj če bi imelo neničelno tangentno komponento, bi se elektroni zopet začeli gibati. Če pa imamo neničelno pravokotno komponento, pa to ne predstavlja problema, saj večinoma elektroni ne morejo zapustiti kovine. Po Gaussovem zakonu je znotraj prevodnika $\epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{0}) = \rho = 0$ in je ves naboj na površini porazdeljen tako, da znotraj prevodnika izniči vsa električna polja. Silnice so pravokotne na površino in prevodnik je ekvipotencialna ploskev (potencial je enak po vsem materialu).

Nasprotno od tega so pri **dielektriku** elektroni vezani na atome in lahko le rahlo odstopajo od svoje običajne pozicije. Njihova prerazporeditev v materialu pa ni zanemarljiva, saj električno polje zmanjšajo za faktor $\epsilon \geq 1$, ki se imenuje dielektričnost materiala. V praksi lahko v vseh enačbah ϵ_0 le nadomestimo z $\epsilon\epsilon_0$ in dobimo enačbe za obnašanje polja v dielektriku. V vakuumu je $\epsilon = 1$.

Pri vseh materialih se pojavi še pojav **influence**, kjer neko telo privlači vse vrste nabojev. To se zgodi zaradi popolne ali delne prerazporeditve elektronov v dielektriku/prevodniku.

2.7 Kondenzator

Kondenzator je skupek dveh prevodnikov, en je nabit s $+Q$, drugi pa z $-Q$. Ker sta prevodnika ekvipotencialni ploskvi, lahko definiramo potencialno razliko (napetost) med njima U . Ker je Poissonova enačba linearna, dvakrat večji naboj pomeni dvakrat večjo napetost in vedno velja sorazmerje

$$Q = CU. \quad (2.7.1)$$

Konstanti C rečemo **kapacitivnost** kondenzatorja in je odvisna le od njegovih geometrijskih lastnosti, torej oblike prevodnikov in oddaljenosti med njima. Enota za kapacitivnost je *farad* $F = \text{As/V}$. Seznam nekaterih kapacitivnosti je v tabeli.

Vrsta	Ploščati	Krogelni	Valjasti
C	$\frac{\epsilon_0 S}{d}$	$\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	$\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$

Če imamo namesto vakuumu znotraj kondenzatorja dielektrik, se kapacitivnost poveča, saj ϵ_0 nadomestimo z $\epsilon\epsilon_0$.

Zgled: Kapacitivnost krogelnega kondenzatorja

Na primeru krogelnega kondenzatorja bomo pokazali, kako se v splošnem izpelje kapacitivnost kondenzatorja. Najprej predpostavimo, da se na notranji krogli s polmerom R_1 nahaja sferno simetrično porazdeljen naboj $-Q$, na zunanji s polmerom R_2 pa naboj Q . Polje med kondenzatorjema je:

$$E = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.7.2)$$

torej je napetostna razlika med obema prevodnikoma enaka

$$U = - \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = Q \frac{(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}. \quad (2.7.3)$$

Sedaj le še odčitamo kapacitivnost, saj velja $U = Q/C$:

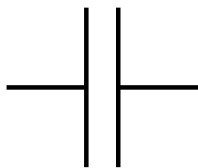
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (2.7.4)$$

Izračunajmo potrebno delo, da nabijemo kondenzator:

$$A = \int U \, dq = \int \frac{q}{C} \, dq = q^2/2C = CU^2/2 \quad (2.7.5)$$

Energija kondenzatorja je torej

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 \quad (2.7.6)$$



Slika 2.2: Simbol za označevanje kondenzatorja v tokokrogih.



Slika 2.3: Različne izvedbe kondenzatorjev.

Poglavje 3

Električni tok

Sedaj obravnavajmo urejeno premikanje električnega naboja. Oglejmo si tanko žico, po kateri se premikajo naboji. **Električni tok** I definiramo kot količino naboja, ki se skozi neko točko žice pretoči v nekem času:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \lambda v. \quad (3.0.1)$$

Včasih pripišemo toku še vektorski značaj (\mathbf{I}), tako da kaže v smeri premikanja nabitih delcev. Ker imajo elektroni negativen predznak, je tok usmerjen ravno v nasprotno smer od premikanja elektronov. V primeru zveznih porazdelitev tokov definiramo še **gostoto električnega toka**, ki je enaka električnemu toku na površino, ki je pravokotna na električni tok:

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{I}}{dS_{\perp}} = \rho \mathbf{v}. \quad (3.0.2)$$

Pri tem je ρ gostota nabojev, ki se premikajo. Žice pod tokom so nevtralne, čeprav skozi njih teče tok – v tem primeru se gibljejo le prevodniški elektroni.

3.1 Ohmov zakon

Po žici se tok ne pretaka brez vzroka. Običajno je za to zaslužen vir napetosti, ki vzdržuje konstantno napetost (razliko potencialov) med dvema točkama tokokroga. Na nekem elementu tokokroga sta tok in napetost povezana z **Ohmovim zakonom**:

$$U = RI. \quad (3.1.1)$$

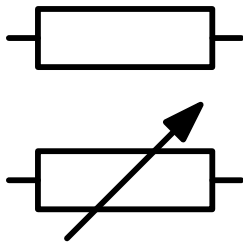
Pri tem je R **upornost** tega elementa. Element tokokroga, katerega namen je nuditi upornost, je **upornik**. Upor kvadrastega upornika je odvisen od materiala, preseka S in dolžine l :

$$R = \zeta \frac{l}{S} \quad (3.1.2)$$

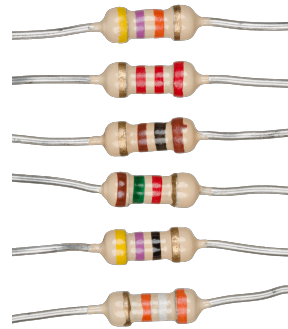
ζ je specifična upornost in je značilna lastnost materiala. Namen žice je prenašati tok s čim manj izgubami, zato je njena specifična upornost zelo majhna. Upornost idealne žice je enaka 0. Velja še $U = El$ in $I = JS$, torej lahko zapišemo splošno relacijo v mediju s prevodnostjo $\sigma = 1/\zeta$ (z enoto $(\Omega \text{ m})^{-1}$):¹

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.1.3)$$

¹V tem primeru σ ne označuje površinske gostote nabojev. Črke je potrebno žal na vsake toliko časa reciklirati.



Slika 3.1: Simbola za označevanje upornika oz. spremenljivega upornika v tokokrogih.



Slika 3.2: Prikazani so uporniki, katerih upornost in natančnost izdelave je običajno zakodirana v prikazani barvni kodi.

Enačba nam pove, kako je električno polje učinkovito pri poganjanju električnega toka. Za veliko prevodnost (ki je značilna za prevodnike) vidimo, da je za dani tok potrebno zelo malo električno polje, ki ga lahko zato pogosto (v ustreznih okoliščinah) zanemarimo.

3.2 Kirchhoffova zakona

Opazujemo poljubno vozlišče. Naboj se na njem ne nabira, zato mora biti vsota vseh tokov, ki dotekajo in odtekaajo, enaka 0. To je 1. Kirchhoffov zakon ali Kirchhoffov zakon za tokove:

$$\sum_{\text{vozlišče}} I_i = 0 \quad (3.2.1)$$

Pri tem moramo tokove, ki odtekaajo, šteti za negativne.

Sedaj opazujemo poljubno zaprto zanko. Električni potencial je v vsaki točki enolično definiran, zato mora biti vsota vseh napetosti po zaprti zanki enaka 0. To je 2. Kirchhoffov zakon ali Kirchhoffov zakon za napetosti:

$$\sum_{\text{zaprta zanka}} U_i = 0 \quad (3.2.2)$$

S tema dvema zakonoma lahko določimo tokove in napetosti na vsakem elementu v vezju.

3.3 Delo in moč električnega toka

Spomnimo se, da je potencial enak električni potencialni energiji na enoto naboja. To pomeni, da delec pri prehodu napetosti U prejme velikost dela $A = qU$.

Moč, ki se troši na nekem elementu vezja, je

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{dq}{dt} U = UI \quad (3.3.1)$$

kjer je U potencialna razlika na tem elementu. Za moč, ki se troši na uporniku, uporabimo

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (3.3.2)$$

Te enačbe veljajo za vsak trenutek, tako da jih lahko uporabimo tudi za spreminjajoče se tokove. V tem primeru naj bo $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Moč, ki se troši na uporniku, je $P = RI^2 = RI_0^2 \cos^2 \omega t = P_0 \cos^2 \omega t$, tako da je povprečna moč enaka

$$\langle P \rangle = \langle P_0 \cos^2 \omega t \rangle = P_0 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{P_0}{2} \quad (3.3.3)$$

$\langle \cdot \rangle$ pri tem označuje povprečno vrednost po času. Pogosto vpeljemo efektivno napetost $U_{\text{ef}} = \sqrt{\langle U(t)^2 \rangle} = U_0/\sqrt{2}$ in efektivni tok $I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I(t)^2 \rangle} = I_0/\sqrt{2}$. Z njima je povprečna moč, ki se troši na uporniku, enaka $\langle P \rangle = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}}$.

V splošnem, če sta tok $I(t) = I_0 \cos \omega t$ in napetost $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \delta)$ fazno zamaknjena, je povprečna moč enaka

$$\langle P \rangle = P_0 \langle \cos \omega t \cos(\omega t + \delta) \rangle = \frac{P_0}{2} \cos \delta = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta \quad (3.3.4)$$

Poglavje 4

Magnetostatika

Eksperimentalno lahko opazimo, da se žici pod isto obrnjenim tokom privlačita, če pa je tok v eni žici obrnjen v nasprotno smer, pa se odbijata. Tega ne moremo pojasniti z elektrostatično silo, saj opazimo, da testni naboj interagira z nevtralno žico pod tokom le, če se giblje. Sila je v resnici **magnetna** in jo je tipično težje opisati kot elektrostatsko silo.

V naravi (za razliko od električnih nabojev) ne moremo zapaziti magnetnih nabojev (monopolov). Magnet ima vedno dva pola. Če ga prečno prerežemo na pol, nastaneta dva nova magneta, vsak z dvema poloma. Količina, ki opiše magnet, je magnetni dipolni moment \mathbf{p}_m z enoto A m^2 . Je vektor in kaže od južnega pola proti severnemu polu magneta.

4.1 Magnetno polje

Pri opisu magnetne sile nam koristi pojem **magnetnega polja**, ki deluje s silo na gibajoče se delce in z navorom na magnetne dipole. Pogosto opišemo magnetno polje z gostoto magnetnega polja \mathbf{B} , ki ima enoto *tesla* $\text{T} = \text{Vs/m}^2$. Smer polja \mathbf{B} je definirana tako, da kaže v tisto smer, kamor bi se obrnil severni pol majhnega magneta. Podobno kot pri električnem polju lahko vektorje magnetnega polja povežemo v silnice, ki jih lahko prikažemo z železovimi opilki. Vektorji polja \mathbf{B} zunaj magneta izvirajo na severnih polih in poniknejo na južnih polih. Ker izvorov magnetnega polja ni, velja **Gaussov zakon za magnetizem**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.1.1)$$

Če integriramo po poljubnem volumnu in na levi strani uporabimo osnovni izrek za divergence, dobimo Gaussov zakon za magnetizem v integralski obliki:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (4.1.2)$$

Elektrostatsko polje ima izvire, ne pa vrtincev, magnetostatsko polje pa nima izvorov, ima pa vrtince, kar imenujemo **Ampèrov zakon**:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.1.3)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/A m}$ je **indukcijska konstanta** in opisuje jakost magnetnih pojavov. Podobno kot pri dielektrikih, če nas zanima magnetno polje znotraj para- oz. diamagnetnih materialov, namesto μ_0 uporabimo $\mu\mu_0$, kjer je μ **relativna permeabilnost**.

Če obe strani enačbe 4.1.3 integriramo po poljubni površini in na levi strani uporabimo osnovni izrek za rotorje, dobimo Ampèrov zakon v integralski obliki:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_{\text{znotraj}}. \quad (4.1.4)$$

Izviri magnetnega polja so lahko trajni magneti, lahko pa so tudi žice pod tokom. Gostoto magnetnega polja v točki \mathbf{r} v magnetostatiki dobimo z **Biot-Savartovim zakonom**:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.1.5)$$

Kot običajno, količine s črticami označujejo tokovno porazdelitev, brez črtice pa točko, v kateri računamo polje. Če imamo opravka z zvezno distribucijo toka, lahko Biot-Savartov zakon splošneje zapišemo tako:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (4.1.6)$$

Zgled: Magnetno polje okrog neskončne žice

Izračunajmo magnetno polje okrog neskončne žice. Postavimo koordinatni sistem tako, da je žica postavljena na osi x in je podana z $\mathbf{r}' = (t, 0, 0)$, kjer $t \in \mathbb{R}$. Sledi torej $d\mathbf{r}' = (dt, 0, 0)$. Točka, v kateri računamo polje, naj se nahaja na $\mathbf{r} = (0, 0, z)$. Z enačbo 4.1.5 dobimo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(dt, 0, 0) \times (-t, 0, z)}{(z^2 + t^2)^{3/2}}. \quad (4.1.7)$$

Komponenta B_y je edina neničelna:

$$B_y = -\frac{\mu_0 I z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(z^2 + t^2)^{3/2}} \stackrel{t=z \tan \theta}{=} -\frac{\mu_0 I z}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{z^2} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi z}. \quad (4.1.8)$$

Če sedaj postavimo cilindrični sistem tako, da je žica poravnana z osjo sistema, lahko končni odgovor zapišemo tako:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}. \quad (4.1.9)$$

Smer polja neskončne žice v praksi določimo s **pravilom desne roke**: s palcem desne roke pokažemo v smeri toka, ostali prsti pa nam kažejo smer magnetnih silnic.

Dosti lažje lahko zgornji rezultat pokažemo z Ampèrovim zakonom – če se namreč zavedamo, da kaže magnetno polje tangencialno in je odvisno le od oddaljenosti od žice, lahko uporabimo za krivuljo krog z radijem s , ki leži v ravnini, normalni na smer toka. Dobimo

$$2\pi s B = \mu_0 I. \quad (4.1.10)$$

Rezultat lahko preoblikujemo in dobimo zopet zgornji izraz, toda tokrat dosti lažje.

Majhna krožna zanka pod tokom na velikih razdaljah deluje kot magnetni dipol. Dipolni moment take zanke je enak

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}. \quad (4.1.11)$$

\mathbf{S} je vektor, ki ima velikost ploščine zanke in kaže v smer, ki jo narekuje tok po pravilu desne roke.

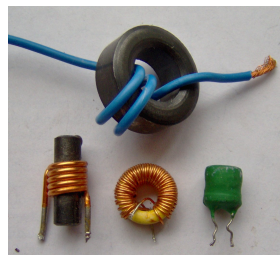
Tuljava je večkrat zvita žica v obliki valja. Njen namen v vezjih je nuditi močno magnetno polje, podobno kot je namen upornika nuditi upor. Gostota magnetnega polja znotraj tuljave je precej homogena in podana z

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}, \quad (4.1.12)$$

kjer je N število ovojjev, l pa dolžina tuljave. Smer lahko določimo tako, da s pravilom desne roke pogledamo, kam kaže magnetno polje zaradi delčka žice.



Slika 4.1: Simbol za označevanje tuljave v tokokrogih.



Slika 4.2: Različne izvedbe tuljav.

4.2 Magnetna sila

Tako kot smo za električno silo določili $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, velja podobno tudi za magnetno silo. Značilnost magnetne sile je, da deluje le na gibajoče se nabite delce. Natančneje, enaka je

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.2.1)$$

Uporabili smo vektorski produkt, pri katerem lahko izračunamo smer sile s pravilom desne roke. Zaradi njega je sila vedno pravokotna na \mathbf{B} in \mathbf{v} , zato magnetna sila ne opravlja dela, saj je pravokotna na premik. Vektorju hitrosti lahko le spreminja smer.

Zgled: Ciklotronsko gibanje

Nabiti delci se v magnetnem polju gibljejo po ukrivljenih tirih. Če elektron poženemo z neko hitrostjo v pravokotno na polje B , bo velikost sile sprva znašala $F = qvB$. Ker je sila pravokotna na hitrost, bo le spreminjala smer hitrosti (ne pa tudi velikosti), ker je pravokotna na magnetno polje, pa bo delec še vedno krožil v ravnini pravokotno na B . Sledi, da je pravokotna sila konstantna in venomer podana s $F = qvB$. Gibanje je zato krožno in veljati mora $m\omega^2 r = qvB = q\omega r B$. Velja torej

$$\omega_c = \frac{qB}{m}, \quad (4.2.2)$$

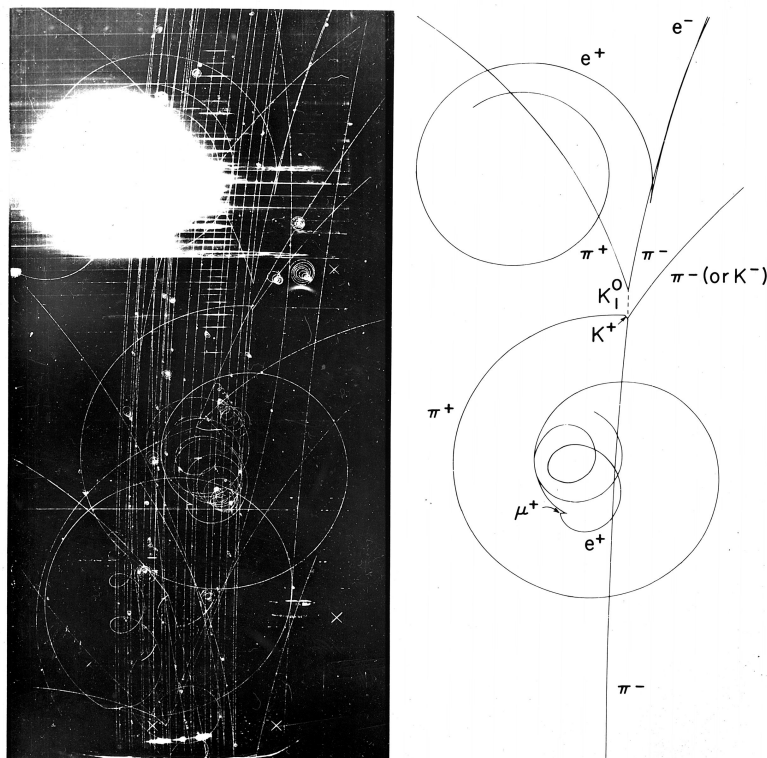
čemur pravimo **ciklotronska frekvenca**. Gibanje delcev pravokotno na magnetno polje je standardni način za določanje gibalne količine delca, saj velja

$$p = mv = m\omega r = qBr. \quad (4.2.3)$$

Če delce opazujemo v znanem magnetnem polju in poznamo njihov naboj, lahko s polmerom kroženja r določimo gibalno količino in tako dobimo popolnejši opis dogajanja v, recimo, mehurčni celici. Delec v realnosti izgublja energijo zaradi trkov z atomi in lastnega (sinhrotronskega) sevanja, zato se giblje po spirali.

Ciklotronsko gibanje se izkorišča v pospeševalniku delcev, imenovanem **ciklotron**. To je krožna priprava s stalnim prečnim magnetnim poljem, ki je sestavljena iz dveh polkrožnih elektrod, kjer se z neko določeno frekvenco spreminja polariteta. Elektrodi služita za pospeševanje delcev (dovajanje energije pri prehodu neke napetosti), delcem pa se pri tem polmer kroženja večja, saj se jim večja tudi gibalna količina. Ker je ciklotronska frekvenca neodvisna od radija, je lahko frekvenca izmenjevanja polaritete elektrod konstantna za vse radije, kar je priročno, saj vse delce na vseh radijih pospešujemo optimalno.

Problem se pojavi, ko začnejo delci dosegati hitrosti, ki so primerljive s hitrostjo svetlobe c , saj je treba takrat za računanje uporabiti posebno teorijo relativnosti. Po tej teoriji je v resnici krožna frekvenca odvisna od radija kroženja, kar je pri majhnih hitrostih zanemarljivo, ne pa pri večjih. S tem razlogom se mora delce pospeševati v gručah in sproti prilagajati frekvenco napetosti. Za še večje hitrosti je potreben **sinhrotron**, primer katerega sta Veliki hadronski trkalnik (LHC) v Ženevi in Hadron-Elektron-Ringanlage (HERA) v Hamburgu.



Slika 4.3: V mehurčni celici lahko neposredno opazujemo nabite osnovne delce, saj ti ionizirajo pregreto kapljevino, skozi katero potujejo. Na sliki je bilo prisotno tudi magnetno polje, posledično pa se nabiti delci gibljejo po spiralah.

Elektroni znotraj vodnika se prav tako gibljejo, zato mora delovati magnetna sila tudi na žico pod tokom. Sila na majhen kosček žice je

$$d\mathbf{F} = I(d\mathbf{r}' \times \mathbf{B}). \quad (4.2.4)$$

$d\mathbf{r}'$ je vektor, ki kaže v smeri toka in ima velikost dolžine dela vodnika.

Zgled: Sila med dvema vzporednima vodnikoma

Ugotovili smo že, da je magnetno polje okrog vodnika podano z $B = \mu_0 I / 2\pi s$. S tem rezultatom lahko enostavno izračunamo še silo med dvema vzporednima vodnikoma (vsak ima dolžino L), ki sta na razdalji $s \ll L$. Magnetno polje prve žice na mestu druge je pravokotna na smer toka, tako da je velikost sile podana s $F = ILB = \mu_0 I^2 L / 2\pi s$. Smer magnetnega polja prve žice določimo s pravilom desne roke (kjer usmerimo palec vzdolž toka in sklepamo, da magnetno polje kaže v smereh ukrivljanja ostalih prstov), silo na druge žice pa določimo tudi s pravilom desne roke (kjer pa usmerimo kazalec v smeri toka, sredinec v smeri magnetnega polja, palec nam pa kaže smer sile). Če pravilno izvedemo celotno proceduro, vidimo, da se žici, v katerih teče tok v isto smer, privlačita, če pa teče tok v drugi v nasprotni smeri kot v prvi, pa se odbijata.

Čeprav imajo magnetni dipoli (tokovne zanke) popolnoma drug izvor kakor električni dipoli (skupek dveh različno nabitih delcev), so enačbe za oboje presenetljivo podobne. Na magnetne dipole v magnetnem polju deluje navor, ki je enak

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (4.2.5)$$

Za tuljavo velja $\mathbf{p}_m = NIS$, tako da je navor na tuljavo enak $\mathbf{M} = NIS \times \mathbf{B}$. Energija magnetnega dipola je

$$W_{\mathbf{p}_m} = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (4.2.6)$$

Sila se pojavi le v nehomogenem magnetnem polju:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (4.2.7)$$

Magnetno polje samega dipola je podano z

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}_m}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (4.2.8)$$

4.3 Vektorski potencial

Spomnimo se, da zaradi Gaussovega zakona za magnetizem 4.1.1 lahko zaradi enačbe 1.4.4 zapišemo magnetno polje kot rotor neke funkcije. Ker torej velja $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, lahko zapišemo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.3.1)$$

za neko funkcijo \mathbf{A} , ki jo imenujemo **vektorski potencial**. Če uporabljamo namesto gostote magnetnega polja \mathbf{B} vektorski potencial \mathbf{A} , avtomatično zadostimo Gaussovemu zakonu, saj $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, saj je divergenca rotorja vedno enaka 0. Ostane le še Ampèrov zakon:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.3.2)$$

Kot lahko skalarneemu potencialu U prištejemo poljubno konstantno funkcijo (ne da bi spremenili dejansko polje \mathbf{E}), lahko tudi vektorskemu potencialu prištejemo poljuben gradient skalarne funkcije, saj $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A}$, saj je rotor gradienta enak 0. To svobodo uporabimo tako, da izberemo takšen λ , da dobimo takšen \mathbf{A} , da zanj povsod velja $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Izkaže se, da takšen λ vedno obstaja. Zgornji izraz se pri izbiri takšne umeritve reducira v

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.3.3)$$

Zopet smo dobili Poissonovo enačbo in rešitev je zopet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (4.3.4)$$

Za dolžinske tokove je to seveda podano z

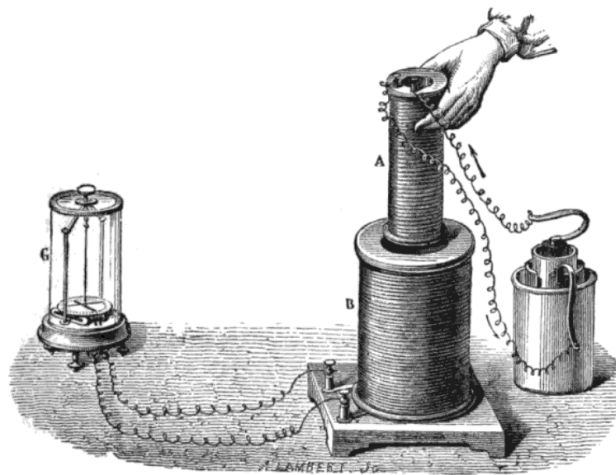
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (4.3.5)$$

Poglavje 5

Magnetna indukcija

Leta 1831 je Michael Faraday izvedel serijo poskusov, ki jih lahko strnemo takole:

- (a) Sprememba toka v primarni tuljavi povzroči napetostni sunek v sekundarni tuljavi.
- (b) Relativno gibanje primarne napram sekundarni tuljavi povzroči napetostni sunek v sekundarni tuljavi.
- (c) Relativno gibanje permanentnega magneta in sekundarne tuljave povzroči sunek napetosti v sekundarni tuljavi.



Slika 5.1: Faradayeva izvedba eksperimenta, ki je pomagal odkriti magnetno indukcijo.

Še posebej problematično se mu je zdelo dejstvo, da se magnetna indukcija ne pojavi v primeru mirovanja. Napetost (in posledično električno polje) ima izvor tudi v spremenljivih magnetnih poljih. Wilhelm Lenz je strnil zgornje sklepe v **Lenzovo pravilo**:

*Sprememba magnetnega pretoka skozi tokokrog inducira takšen električni tok, ki generira magnetno polje tako, da nasprotuje spremembi prvotnega magnetnega pretoka.*¹

Za primer si pogledajmo okroglo prevodno zanko v vakuumu. Če povečujemo gostoto magnetnega polja v pozitivni smeri z osi, se bo električni tok induciral v smeri urinega kazalca, saj tok v taki smeri ustvari magnetno polje v negativni smeri z osi, ki nasprotuje prvotni spremembi.

¹Podoben princip zasledimo pri 3. Newtonovem zakonu v mehaniki in Le Châtelierovim načelom v kemiji

5.1 Inducirana napetost

Velikost inducirane napetosti po poljubni zanki lahko izračunamo s Faradayevim pravilom o pretoku:

$$U_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.1.1)$$

Z negativnim predznakom smo ponazorili, da se napetost inducira v taki smeri, da nasprotuje spremembi magnetnega polja. Pri tem je $\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ magnetni pretok. Sprememba Φ_B se lahko tako zgodi zaradi spremembe gostote magnetnega polja ali zaradi spremembe površine.

Za krožno zanko, ki leži pravokotno na homogeno magnetno polje, velja $\Phi_B = BS$. Za valjasto tuljavo z N ovoji pod tokom I velja za lastno inducirano magnetno polje $\Phi_B = NBS = \mu_0 N^2 SI/l$. Izkazuje se, da je pri tuljavi vsake oblike magnetni pretok premosorazmeren s tokom. Konstanto L , ki je odvisna od geometričnih lastnosti tuljave, imenujemo (lastna) **induktivnost** tuljave in ima enoto *henry* H.

$$\Phi_B = LI \quad (5.1.2)$$

Za valjasto tuljavo je tako $L = \mu_0 N^2 S/l$.

Faradayevo pravilo lahko prepišemo v obliko, ki je za tuljave bolj primerna, če vstavimo $\Phi_B = LI$:

$$U_i = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.1.3)$$

Drugače rečeno, tuljava bo začela v tokokrogu “delovati” takrat, ko se bo električni tok skozi njo spreminjal. Delovala bo tako, da bo želela spremembe električnega toka minimizirati. Če je električni tok skozi njo konstanten, se obnaša kot običajni prevodnik.

Izračunajmo delo, ki ga potrebujemo za zagon valjaste tuljave. Velja

$$dA = dW_{\mathbf{p}_m} = -\mathbf{p}_m \cdot d\mathbf{B} = NIS \cdot \frac{\mu_0 N dI}{l} = LI dI \quad (5.1.4)$$

Ker je $A = \int dA = \int_0^I LI dI$, je potrebno delo (za vsako tuljavo) enako $A = LI^2/2$, kar je tudi magnetna potencialna energija tuljave:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (5.1.5)$$

Za valjasto tuljavo je $W_m = \mu_0 N^2 SI^2/2l$, torej je gostota magnetne energije $w_m = W_m/Sl = \mu_0 N^2 I^2/2l^2 = B^2/2\mu_0$. To velja tudi v splošnem za vsako magnetno polje:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (5.1.6)$$

5.2 Faradayev zakon

Inducirana napetost nam pove skupno delo na enoto naboja, ki ga prejme delec pri obhodu ene zanke. Velja torej

$$U_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.2.1)$$

Po drugi strani seveda velja

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2.2)$$

Tako dobimo **Faradayev zakon** v integralni obliki:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.2.3)$$

Če uporabimo osnovni izrek za rotorje, dobimo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.2.4)$$

Iz tega sledi Faradayev zakon v diferencialni obliki:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.2.5)$$

Spoznanje iz elektrostatike, da električno polje nima vrtincev, torej v primeru spreminjajočih magnetnih polj ne velja več. *Spreminjajoče magnetno polje inducira električno polje.*

Sedaj je potrebno popraviti potenciale: nekdanj smo lahko zapisali električno in magnetno polje kot $\mathbf{E} = -\nabla U$ in $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, saj električno polje ni imelo vrtincev, magnetno pa ne izvorov. Zdaj vemo, da ima tudi električno polje vrtince in ga torej ne moremo zapisati kot gradient potenciala. Trdim, da lahko zapišemo električno polje v obliki

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.2.6)$$

kjer je \mathbf{A} isti vektorski potencial kot za magnetno polje. Res, če izračunamo rotor električnega polja, dobimo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla U) - \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.2.7)$$

kar se ujema s Faradayevim zakonom. S tem popravkom torej uspešno upoštevamo še možnost spreminjajočih se magnetnih polj in torej vrtincev električnega polja. Izkaže se, da je takšen opis popoln – električno in magnetno polje lahko torej s skalarnim potencialom U in vektorskim potencialom \mathbf{A} zapišemo tako:

$$\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.2.8)$$

Poglavje 6

Maxwellove enačbe

6.1 Ohranitev naboja

Omenimo še dejstvo, ki ga prej skorajda nismo omenili: naboj se lokalno ohranja. To pomeni, da za poljubno zaprto površino velja, da je skupni tok prek površine enak ustreznemu zmanjšanju naboja znotraj površine:

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (6.1.1)$$

Enačbo lahko prepišemo tako:

$$\iiint (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV = -\frac{d}{dt} \iiint \rho dV = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (6.1.2)$$

Velja torej **kontinuitetna enačba**:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6.1.3)$$

Če vzamemo divergenco Ampèrovega zakona, dobimo (ker je divergenca rotorja vedno enaka nič):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}), \quad (6.1.4)$$

kar ni konsistentno z želeno enačbo 6.1.3. Dilemo rešimo tako, da Ampèrovemu zakonu dodamo *Maxwellov popravek* $\mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, saj tako dobimo:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\rho / \epsilon_0), \quad (6.1.5)$$

kar pa ustreza kontinuitetni enačbi. Opazimo, da Ampèrov zakon z Maxwellovim popravkom implicira, da tudi spreminjajoče električno polje inducira magnetno polje.

6.2 Maxwellove enačbe

Sklenimo torej celotni razvoj elektromagnetizma v štirih enačbah, ki jih imenujemo **Maxwellove enačbe**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gaussov zakon za elektriko}) \quad (6.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gaussov zakon za magnetizem}) \quad (6.2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayev zakon}) \quad (6.2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampèrov zakon}) \quad (6.2.4)$$

Zapišemo jih lahko tudi v integralni obliki. Za poljubne prostornine \mathcal{V} z robom $\partial\mathcal{V}$ in poljubne površine \mathcal{S} z robom $\partial\mathcal{S}$ velja:

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV \quad (6.2.5)$$

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.2.6)$$

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.2.7)$$

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.2.8)$$

Znani izvori ρ in \mathbf{j} s podanim robnim pogojem, da $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0}$, ko $r \rightarrow \infty$, enolično določajo polji \mathbf{E} in \mathbf{B} . Obe polji pa na naboje delujeta z **Lorentzovo silo**:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.2.9)$$

To je celotna vsebina elektrodinamike, preostali pojmi (recimo induktivnost) so le definicije.

6.3 Maxwellove enačbe v vakuumu

V vakuumu ni izvorov ρ in \mathbf{j} ter Maxwellove enačbe zavzamejo sledečo obliko:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.3.4)$$

Če vzamemo rotor Faradayevega zakona 6.3.3, dobimo po enačbi za dvojni rotor 1.1.24:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (6.3.5)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (6.3.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (6.3.7)$$

Uporabili smo še enačbi 6.3.1 in 6.3.3 ter Schwartzev izrek, ki pravi, da lahko vrstni red parcialnih odvodov med sabo zamenjamo. Na podoben način lahko predelamo še Ampèrov zakon 6.3.4:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (6.3.8)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (6.3.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (6.3.10)$$

Maxwellove enačbe v vakuumu smo tako razklopili na magnetni in električni del.

6.4 Elektromagnetno valovanje

Oglejmo si sedaj sledečo diferencialno enačbo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (6.4.1)$$

Enostavno lahko preverimo, da je za poljubno funkcijo $f(x)$ rešitev enačbe $f(x - ct)$ (ki opisuje gibanje začetne (ob času $t = 0$) motnje $f(x)$ v pozitivno smer x s hitrostjo c) in tudi $f(x + ct)$ (ki opisuje gibanje začetne motnje v negativno smer x s hitrostjo c). Enodimenzionalna valovna enačba torej dopušča poljubna valovanja s hitrostjo c . Naravna posplošitev enodimenzionalne valovne enačbe na tri dimenzije je sledeča:

$$\nabla^2 A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (6.4.2)$$

Rešitve te enačbe lahko sestavimo iz funkcij oblike

$$A = A_0 f(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad (6.4.3)$$

kjer $\hat{\mathbf{n}}$ označuje smer valovanja. Izraz zadosti valovni enačbi za poljubno funkcijo f . Sedaj lahko jasno vidimo, da sta izraza 6.3.7 in 6.3.10 ravno valovni enačbi za električno in magnetno polje. V vakuumu se torej pojavi valovanje električnega in magnetnega polja s hitrostjo

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (6.4.4)$$

Takšno valovanje imenujemo **elektromagnetno valovanje**. Če valovanje potuje skozi dielektrik oziroma magnetizirano snov, je potrebno nadomestiti ϵ_0 z ϵ in μ_0 z μ . Dobimo torej:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c_0}{n}. \quad (6.4.5)$$

Hitrost svetlobe v mediju se zmanjša za **lomni količnik** $n = \sqrt{\mu \epsilon}$.

Iz štirih Maxwellovih enačb smo izpeljali dve valovni enačbi za obe polji, torej se mora skrivati v Maxwellovih enačbah še nekaj informacije. Vzemimo monokromatsko ravno valovanje električnega polja:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 f(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - ct). \quad (6.4.6)$$

Če ga vstavimo v Gaussov zakon v vakuumu, dobimo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 f'(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - ct) = 0. \quad (6.4.7)$$

Sledi

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (6.4.8)$$

Električno polje torej niha pravokotno na smer valovanja. Če uporabimo Faradayev zakon, dobimo

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 f'(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - ct) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.4.9)$$

Sledi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}. \quad (6.4.10)$$

To pomeni, da tudi magnetno valovanje niha pravokotno na smer potovanja, poleg tega pa tudi električno in magnetno polje nihata pravokotno drug na drugega. Iz enačbe sledi tudi $E = Bc$, kar pomeni, da električno in magnetno polje nihata sočasno (v

fazi). Zapišimo kvadrate velikosti električnega in magnetnega polja kot $E^2 = E_0^2 \sin^2 \phi$ in $B^2 = (E_0/c)^2 \sin^2 \phi$, kjer je $\phi = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - ct$ faza elektromagnetnega valovanja. Povprečna gostota energije elektromagnetnega valovanja je torej

$$\langle w \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right\rangle = \langle \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \phi \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (6.4.11)$$

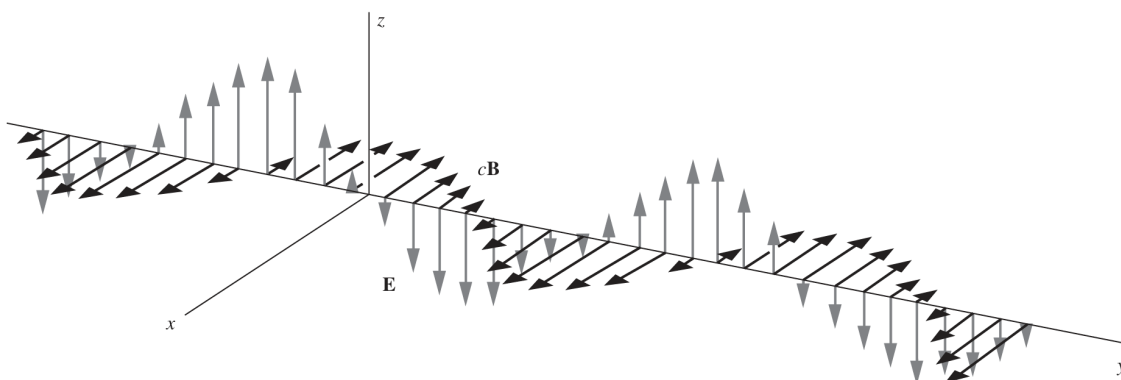
Skozi neko površino S , ki je usmerjena pravokotno na vpadno valovanje, v času t steče volumen $V = ctS$, torej za gostoto svetlobnega toka dobimo

$$j = \frac{P}{S} = \frac{wV}{St} = wc = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}. \quad (6.4.12)$$

Sedaj sklenimo spoznanja o elektromagnetnih valovih:

V vakuumu spreminjajoče se električno polje inducira magnetno polje, spreminjajoče se magnetno polje pa v zameno inducira električno polje. Tako se medsebojno uravnavata in vodita v propagacijo elektromagnetnega valovanja s hitrostjo c_0 . Hitrost elektromagnetnega valovanja se v mediju zmanjša za lomni količnik n . Električno in magnetno polje nihata medsebojno pravokotno in tudi pravokotno na smer potovanja. Njuni velikosti sta povezani z relacijo $E = Bc$, gostoto svetlobnega toka pa izračunamo z $j = \epsilon_0 c E_0^2 / 2$.

Neverjetno Maxwellovo napoved, da je svetloba v resnici propagacija nihanja električnega in magnetnega polja je eksperimentalno potrdil Heinrich Hertz. Odkritje predstavlja osnovo telekomunikacij, v astronomiji pa nevidne valovne dolžine elektromagnetnega valovanja omogočajo popolnoma nov pogled na vesoljska telesa. Ker je svetloba elektromagnetno valovanje, je tudi celotna optika posledično zvrst elektromagnetizma in jo je moč izpeljati iz Maxwellovih enačb. To pa je že začetek popolnoma nove zgodbe.



Slika 6.1: Elektromagnetno valovanje.

Dodatno branje

Zapiski predstavljajo le grob uvod v globine elegantne teorije elektromagnetnega polja. Bralcu se priporoča uporaba knjige *Introduction to Electrodynamics* (David J. Griffiths) oz. *Electricity and Magnetism* (Edward M. Purcell), ki imata veliko nalog, obravnavata pa še elektromagnetno polje v snovi, robne pogoje, ohranitvene zakone, elektromagnetno valovanje in povezavo s posebno teorijo relativnosti. Na nekoliko višjem nivoju (kar se okvirno pokriva s predmetom *elektromagnetno polje* v 3. letniku študija fizike) teorijo obdela še knjiga *Elektromagnetno polje* (Rudolf Podgornik, Andrej Vilfan), nekoliko bolj aplikativen in osnoven pristop (brez vektorske analize) pa ima Janez Strnad v knjigi *Fizika II*.