Elektromagnetizem

Naloge

Peter Andolšek

Maj 2025

1. Vektorska analiza

1.1 Vektorski operatorji

Naloga 1.1 (*Griffiths 1.15 & 1.18*). [1] Izračunaj divergenco in rotor funkcije $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$.

Naloga 1.2 (*Griffiths 1.25*). Izračunaj Laplacian sledečih dveh funkcij:

(a) $T = \sin x \sin y \sin z$

(b) $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$

Naloga 1.3 (*Griffiths 1.27*). Na funkciji $T = e^x \sin y \ln z$ preveri, ali je res rotor gradienta enak 0.

1.2 Integrali na vektorskih poljih

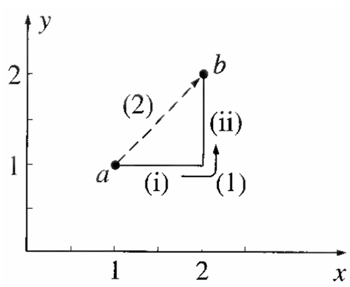
Naloga 1.4 (*Griffiths E1.6*). Izračunaj krivuljni integral $\int \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ funkcije $\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}}$ med točkama $\mathbf{a} = (1,1,0)$ in $\mathbf{b} = (2,2,0)$ po poteh (1) in (2), kot je prikazano na sliki 1. Koliko je $\oint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ za pot, ki gre iz $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$ po (1) in se vrne nato v $\mathbf{a}$ po (2)?

Naloga 1.5 (*Griffiths E1.7*). Izračunaj integral $\iint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}S$ funkcije

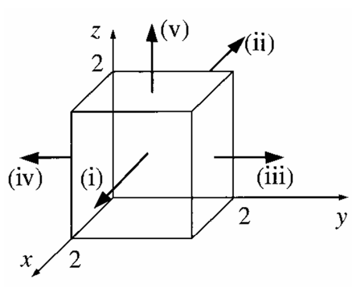
$$\mathbf{v} = 2xz\,\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\,\hat{\mathbf{y}} + y(z^2-3)\,\hat{\mathbf{z}}$$

po petih ploskvah kocke, kot je prikazano na sliki 2 (torej po vseh razen po dnu). Naj bodo ploskve usmerjene navzven.

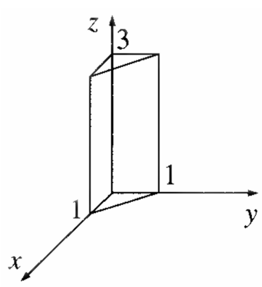
Naloga 1.6 (*Griffiths E1.8*). Izračunaj integral $\iiint T\,\mathrm{d}V$ funkcije $T = xyz^2$ po prostornini prizme, ki je prikazana na sliki 3.



Slika 1: k nalogi 1.4



Slika 2: k nalogi 1.5



Slika 3: k nalogi 1.6

---

[1] Večina nalog je vzetih iz knjige *Introduction to Electrodynamics* Davida Griffithsa. Številke se nanašajo na naloge iz 3. izdaje, črka E pa označuje sklic na primer (*example*) iz knjige.

1.3 Osnovni izreki

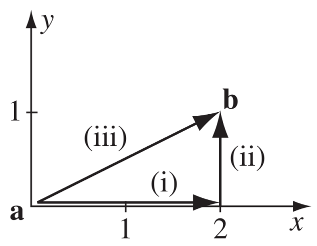
Naloga 1.7 (*Griffiths E1.9*). Naj bo $T = xy^2$, točka $\mathbf{a} = (0,0,0)$ in $\mathbf{b} = (2,1,0)$. Preveri osnovni izrek o gradientih za pot (0, 0, 0) – (2, 0, 0) – (2, 1, 0) ter za najkrajšo pot (0, 0, 0) – (2, 1, 0), kot je prikazano na sliki 4.

Naloga 1.8 (*Griffiths E1.10*). Preveri izrek o divergencah za funkcijo

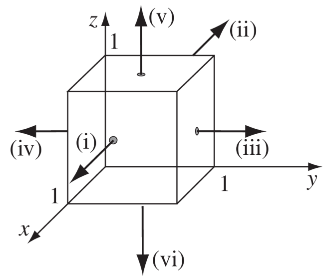
$$\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$$

in enotsko kocko, ki se nahaja z enim ogliščem v izhodišču, kot je prikazano na sliki 5.

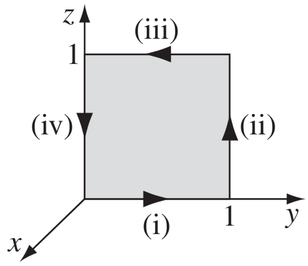
Naloga 1.9 (*Griffiths E1.11*). Naj bo $\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 4yz^2\,\hat{\mathbf{z}}$. Preveri izrek o rotorjih za kvadratno površino, ki je prikazana na sliki 6.



Slika 4: **k nalogi 1.7**



Slika 5: **k nalogi 1.8**



Slika 6: **k nalogi 1.9**

Naloga 1.10 (*Griffiths 1.16*). Podana je vektorska funkcija

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Najprej skiciraj funkcijo. Zatem izračunaj njeno divergenco na dva načina: najprej s pretvorbo v kartezične koordinate, nato pa direktno z uporabo formule za divergenco v sfernih koordinatah. Nato preveri izrek o divergencah za sfero s polmerom R. Primerjaj rezultate med sabo in komentiraj.

1.4 Potenciali

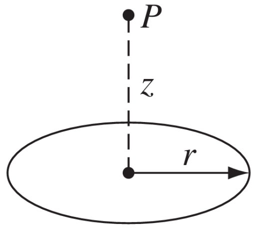
Naloga 1.11 (*Griffiths 1.49*). Naj bo $\mathbf{F}_1 = x^2\,\hat{\mathbf{z}}$ in $\mathbf{F}_2 = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$. Izračunaj divergenco in rotor obeh polj. Katero polje lahko zapišemo kot gradient skalarnega polja? Poišči takšen skalarni potencial. Katero polje lahko zapišemo kot rotor vektorskega polja? Poišči takšen vektorski potencial.

2. Elektrostatika

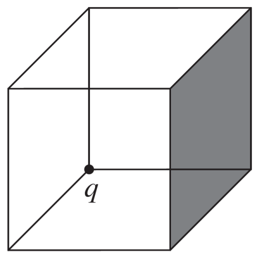
Naloga 2.1 (*Griffiths 2.5*). Naj se središče okrogle zanke s polmerom r in nabite z dolžinsko gostoto naboja λ nahaja v izhodišču. Izračunaj električno polje na razdalji z od središča na geometrijski osi, kot je prikazano na sliki 7.

Naloga 2.2 S pomočjo prejšnje naloge naloge najprej direktno izračunaj električno polje na razdalji z od neskončne nabite plošče (ploščinska gostota naboja σ). Nato uporabi Gaussov zakon in še enkrat izpelji izraz, toda zaradi simetrije tokrat dosti hitreje.

Naloga 2.3 (*Griffiths 2.10*). Naboj q je v vogalu kocke, kot je prikazano na sliki 8. Kakšen je pretok električnega polja skozi osenčeno površino na desni?



Slika 7: **k nalogama 2.1 in 4.4**



Slika 8: **k nalogi 2.3**

Naloga 2.4 (*Griffiths 2.14*). Poišči električno polje znotraj krogle, ki nosi gostoto naboja $\rho = kr$ za neko konstanto k.

Naloga 2.5 (*Griffiths 2.20*). Eno izmed sledečih vektorskih polj ne more biti elektrostatsko polje. Katero?

(a) $\mathbf{E} = k[xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3xz\,\hat{\mathbf{z}}]$

(b) $\mathbf{E} = k[y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}]$

k je konstanta z ustreznimi enotami. Za možno elektrostatsko polje najprej izračunaj gostoto nabojev ρ, nato pa še izračunaj potencial, kjer uporabiš izhodišče koordinatnega sistema kot izhodišče potenciala. Izračunaj svoj odgovor tako, da poračunaš $\boldsymbol{\nabla} U$. *Namig: za izračun potenciala moraš izbrati specifično pot za integracijo. Ni pomembno, katero pot izbereš, saj je odgovor neodvisen od poti, toda lepo je imeti v mislih specifično pot, da lahko sploh nastaviš ustrezni integral.*

Naloga 2.6 Izračunaj lastno elektrostatsko energijo elektrona. *Namig: integriraj gostoto električne energije $w = \epsilon_0 E^2/2$ po vsem prostoru.*

3. Električni tok

Naloga 3.1 Vemo že, da je v elektrostatiki znotraj prevodnika $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Ko pa skozi žico poženemo tok, zakaj lahko električno polje običajno zanemarimo in smatramo žico kot ekvipotencial?

Naloga 3.2 (*Griffiths E7.2*). Dva dolga valja s polmeroma a in b sta ločena z materialom s prevodnostjo σ (glej sliko 9). Če med njima vzpostavimo potencialno razliko V, kakšen tok na dolžino L steče od enega valja proti drugemu?

Naloga 3.3 (*Griffiths 7.2*). Kondenzator C smo napolnili na napetost V_0. Ob času $t = 0$ ga priključimo na upornik R in ga tako izpraznemo (glej sliko 10a).

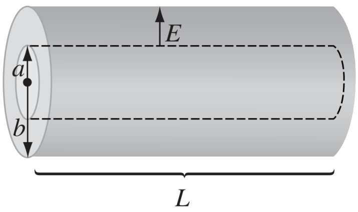
(a) Določi naboj na kondenzatorju kot funkcijo časa, $Q(t)$. Kakšen je tok skozi upornik $I(t)$?

(b) Kolikšna je bila začetna energija v kondenzatorju? Z integracijo enačbe $P = UI$ potrdi, da je dovedena toplota na upornik enaka energiji, izgubljeni na kondenzatorju.

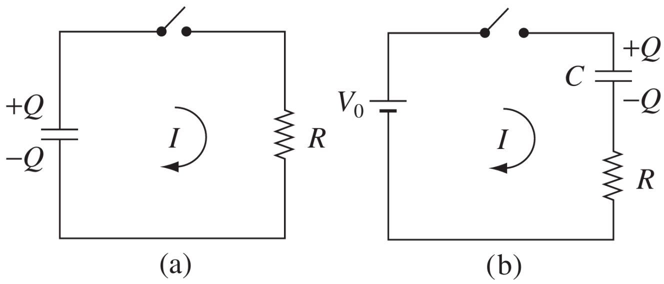
Sedaj prazen kondenzator napolnimo tako, da ga ob $t = 0$ vežemo z baterijo V_0 in upornikom (slika 10b).

(c) Ponovno določi $Q(t)$ in $I(t)$.

(d) Izračunaj skupno potrošeno energijo na bateriji ($\int V_0 I \,\mathrm{d}t$). Določi toploto, dovedeno na upornik. Kakšna je končna energija, ki je shranjena v kondenzatorju? Kakšen delež dela, ki ga je opravila baterija, se dejansko prenese v energijo kondenzatorja? *(Odgovor bo neodvisen od R!)*



Slika 9: **k nalogi 3.2**



Slika 10: **k nalogi 3.3**

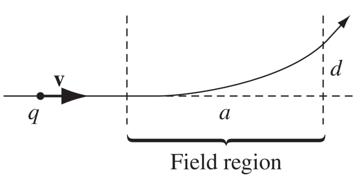
4. Magnetostatika

Naloga 4.1 (***Griffiths 5.1***)**.** Delec z nabojem q vstopi v območje homogenega magnetnega polja $\mathbf{B}$, ki kaže *v list*. Zaradi polja se delec odkloni za razdaljo d nad začetno smerjo gibanja, kot je prikazano na sliki 11. Je naboj pozitiven ali negativen? Z uporabo količin a, d, B in q izračunaj gibalno količino delca.

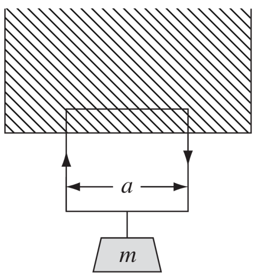
Naloga 4.2 (***Griffiths 5.3***)**.** Leta 1897 je J. J. Thomson odkril elektron tako, da je izmeril razmerje naboja proti masi katodnih žarkov (ki so v resnici curki elektronov z nabojem q in maso m). To je storil tako:

(a) Najprej je spustil curek elektronov skozi homogeno električno polje $\mathbf{E}$ in homogeno magnetno polje $\mathbf{B}$, ki sta medsebojno pravokotni. Tudi curek je vpadal pravokotno na obe polji. Spreminjal je električno polje tako, da je dobil na koncu ničelni odklon curka. Koliko je torej znašala hitrost delcev? Odgovor zapiši z uporabo količin E in B.

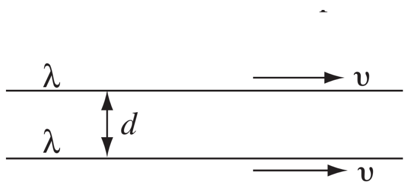
(b) Za tem je izključil električno polje in izmeril polmer kroženja curka R, ki ga je povzročilo le magnetno polje. Z uporabo količin E, B in R zapiši razmerje naboja proti masi (q/m) za delce.



Slika 11: **k nalogi 4.1**



Slika 12: **k nalogi 4.3**



Slika 13: **k nalogi 4.6**

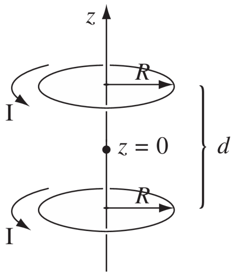
Naloga 4.3 **(*Griffiths E5.3*).** Pravokotna zanka superprevodne žice, ki nosi maso m, navpično visi z enim koncem v homogenem magnetnem polju $\mathbf{B}$, ki kaže v stran na osenčenem območju na sliki 12. Za kakšen tok I v zanki bi magnetna sila ravno uravnovesila silo teže?

Naloga 4.4 **(*Griffiths E5.6*).** Izračunaj magnetno polje na razdalji z od središča krožne zanke s polmerom R, po kateri teče stalen tok I (glej sliko 7).

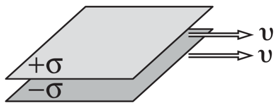
Naloga 4.5 **(*Griffiths 5.46*).** Magnetno polje krožne tokovne zanke (slika 7) je daleč od homogenega – z naraščajočo koordinato z strmo pade. Homogenejše polje lahko ustvarimo z dvema takšnima zankama na razdalji d (slika 14).

(a) Izračunaj polje B kot funkcijo z in pokaži, da je $\partial B/\partial z = 0$ na točki v sredini med zankama (v $z = 0$).

(b) Če izbereš ravno pravi d, lahko dosežeš, da je ničelen tudi drugi odvod $\partial^2 B/\partial z^2 = 0$ – takšno postavitev imenujemo *Helmholtzeva tuljava* in se jo uporablja za ustvarjanje precej homogenega polja. Izračunaj tudi magnetno polje v sredini med zankama za takšno postavitev.



Slika 14: **k nalogi 4.5**



Slika 15: **k nalogi 4.7**

Naloga 4.6 **(*Griffiths 5.12*).** Postavljeni sta dve vzporedni neskončni žici z dolžinskim nabojem λ in na medsebojni razdalji d. Gibljeta se s hitrostjo v, kot je prikazano na sliki 13. Kakšen mora biti v, da postane magnetna sila enako velika kot elektrostatski odboj?

Naloga 4.7 **(*Griffiths 5.16*).** Veliki ploščati kondenzator je na zgornji plošči nabit s površinsko gostoto naboja σ, na spodnji plošči pa z $-\sigma$. Celoten kondenzator se giblje s konstantno hitrostjo v, kot je prikazano na sliki 15.

(a) Izračunaj magnetno polje med ploščama. Izračunaj še magnetno polje pod in nad ploščama.

(b) Izračunaj magnetno silo na enoto površine na zgornjo ploščo.

(c) Pri kateri hitrosti v magnetna sila ravno uravnovesi električno silo?

Naloga 4.8 **(*Griffiths 5.19*).** (a) Izračunaj gostoto naboja ρ prevodniških elektronov v kosu bakra, če predpostaviš, da vsak atom prispeva k prevajanju po en elektron. Pomagaj si s periodnim sistemom. Gostota bakra je $\rho_{\mathrm{m}} = 9000\,\mathrm{kg/m^3}$.

(b) Izračunaj povprečno hitrost prevodniškega elektrona v bakreni žici premera 1 mm, skozi katero teče tok 1 A. *Opomba: to je dobesedno polžja hitrost. Kako se lahko potem luč prižge takoj ob vklopu stikala?*

(c) Kakšna je privlačna sila med dvema takima žicama, če ju postavimo na razdaljo 1 cm?

(d) Če bi lahko nekako odstranili stacionarne pozitivne ione, kakšna bi bila potem elektrostatska odbojna sila? Kolikokrat večja je od magnetne sile?

Naloga 4.9 (*Griffiths 5.23*). Kakšna gostota električnega toka bi ustvarila vektorski potencial $\mathbf{A} = k\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (kjer je k neka konstanta)?

Naloga 4.10 (*Griffiths 5.56*). Tanek obroč z nabojem Q in maso M se vrti okrog svoje osi, kot je prikazano na sliki 4.10.

(a) Izračunaj razmerje med magnetnim dipolnim momentom in vrtilno količino. To razmerje se imenuje *giromagnetno razmerje*.

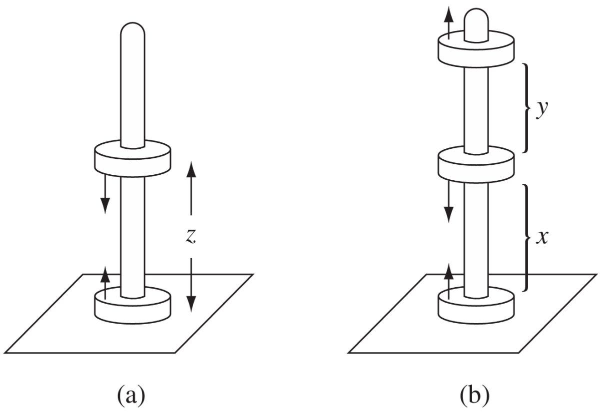
(b) Kakšno je giromagnetno razmerje za enakomerno vrtečo se kroglo? *Namig: kroglo preprosto razdeli na tanke obroče in uporabi rezultat iz prejšnje točke.*

(c) V kvantni mehaniki je vrtilna količina vrtečega se elektrona enaka $\frac{1}{2}\hbar$, kjer je $\hbar = h/2\pi$ reducirana Planckova konstanta. Koliko je torej magnetni dipolni moment elektrona v enoti $\mathrm{A\,m^2}$? *Ta polklasičen izračun se v resnici od dejanske vrednosti razlikuje za faktor skoraj enak 2. Diracova relativistična teorija za gibanje elektronov je napovedala faktor natanko 2, Feynman, Schwinger in Tomonaga pa so pozneje izračunali majhne popravke. Določitev magnetnega dipolnega momenta elektrona ostaja najfinejši dosežek kvantne elektrodinamike in izkazuje skoraj pravljično ujemanje med teorijo in eksperimentom. Mimogrede, količina $e\hbar/2m$ se imenuje Bohrov magneton.*

Naloga 4.11 (*Griffiths 6.25*). Znana igrača je sestavljena iz obročastih permanentnih magnetov (kjer je magnetizacija vzporena osi), ki prosto drsijo na navpični palici (slika 16). Obravnavaj magnete kot dipole z maso m in dipolnimi momenti $\mathbf{p}_\mathrm{m}$.

(a) Če nasprotno usmerjena postaviš dva magneta, bo zgornji lebdel – magnetna sila navzgor bo uravnovesila silo teže navzdol. Na kateri višini z bo lebdel? Pomagaj si z izrazom za energijo dipola W_d in enačbo $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} W_\mathrm{d}$.

(b) Če sedaj dodaš še tretji magnet, ki je vzporeden najnižjemu, kakšno je sedaj razmerje obeh višin? Numerično določi dejansko vrednost na tri zanesljiva mesta.



Slika 16: **k nalogi 4.11**

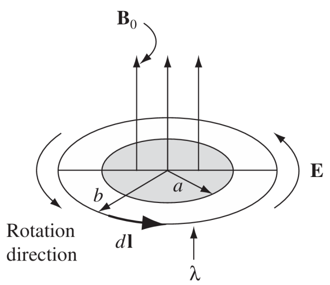
5. Magnetna indukcija

Naloga 5.1 (*Griffiths E7.6*). Če navijemo okrog železnega jedra tuljavo in na vrh položimo kovinski obroč, bo po vključeni napetosti na tuljavi obroč zelo visoko odskočil (slika 5.1). Zakaj se to zgodi?

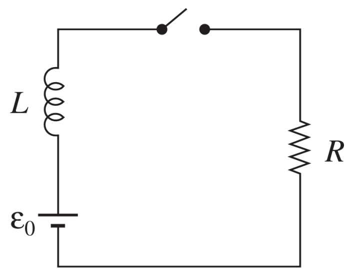
Naloga 5.2 (*Griffiths 7.12*). V dolgi tuljavi polmera a poganjamo izmenični tok tako, da je polje znotraj tuljave sinusno, $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\, \vec{\mathbf{z}}$. Krožno zanko žice s polmerom $a/2$ in uporom R postavimo znotraj tuljave tako, da sta geometrijski osi poravnani. Izračunaj tok, induciran v zanki, kot funkcijo časa.

Naloga 5.3 (*Griffiths 7.14*). Kratki valjasti magnet spustimo skozi navpično aluminijasto cev, dolgo okrog 2 metra in nekoliko večjega premera. Da magnet prepotuje cev, porabi kar nekaj časa, medtem ko bi sicer identičen nemagneten kos železa opravil pot v delčku sekunde. Pojasni, zakaj magnet pade počasneje.

Naloga 5.4 (*Griffiths E7.8*). Dolžinski naboj λ razmažemo na obroč kolesa s polmerom b, ki ga nato postavimo vodoravno tako, da se lahko vrti (špice so narejene iz kakšnega neprevodnega materiala), kot kaže slika 17. V osrednjem območju s polmerom a se nahaja uniformno magnetno polje $\mathbf{B}_0$ in kaže navzgor. Sedaj magnetno polje ugasnemo. Kaj se zgodi? Svoj odgovor podkrepi s kvantitativnimi izračuni.



Slika 17: k nalogi 5.4



Slika 18: k nalogi 5.5

Naloga 5.5 (*Griffiths E7.12*). Če tok I teče okrog po zanki in nekdo nenadoma prereže žico, se tok skoraj nenadoma spusti na 0. To ustvari ogromno inducirano napetost, saj (čeprav je lahko I majhen) je $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ ogromen. Ko izključimo opekač ali likalnik, se pogosto pojavi iskra – elektromagnetna indukcija si neznansko želi obdržati trenuten tok, četudi mora preskočiti vrzel v tokokrogu.

Nič kaj takega dramatičnega pa se ne zgodi, ko *vključimo* opekač ali likalnik. V tem primeru indukcija nasprotuje nenadnemu povečanju toka in namesto tega povzroči zvezno naraščanje toka. Naj bo baterija (ki dovaja konstantno gonilno napetost $\mathcal{E}_0$) priključena prek upornika R na tuljavo L (slika 18). Izračunaj tok kot funkcijo časa, $I(t)$.

6. Maxwellove enačbe

Naloga 6.1 Denimo, da obstajajo magnetni monopoli, torej poleg električnih količin ρ_e in $\mathbf{j}_\mathrm{e}$ obstaja še gostota magnetnih nabojev ρ_m in gostota magnetnega toka $\mathbf{j}_\mathrm{m}$. Kako bi spremenil Maxwellove enačbe, da bi tudi magnetne naboje zaobjel v teorijo? Kako bi spremenil Lorentzovo silo?

Naloga 6.2 Gostota svetlobnega toka, ki vpada s Sonca na Zemljo, je okrog $j_0 = 1370\,\mathrm{W/m^2}$. Kakšna je efektivna jakost električnega polja in efektivna gostota magnetnega polja?

Naloga 6.3 (*Purcell 9.20*). Prosti proton je v izhodišču, nakar ga je zadel elektromagnetni val, katerega električni del je podan z

$$\mathbf{E} = \frac{E_0\hat{\mathbf{y}}}{1 + \dfrac{(x+ct)^2}{l^2}}, \tag{6.1}$$

kjer je $l = 1\,\mathrm{m}$ in $E_0 = 100\,\mathrm{kV/m}$. Kje pričakuješ proton ob času $t = 1\,\mathrm{\mu s}$? Masa protona je $1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. *Namig: ker je dolžina pulza le nekaj nanosekund, lahko zanemariš premik protona med prečkanjem pulza. Če hitrost protona ni prevelika, lahko zanemariš učinek magnetnega polja na gibanje. Izračunati je torej potrebno sunek sil električnega polja.*