Vektorji
Naloge

Peter Andolšek
Oktober 2024

1. Koordinatni sistemi

Naloga 1.1 Podana točka ima v kartezičnem sistemu koordinate

$$x = 3, \quad y = -5, \quad z = 2\,.$$

Kakšne so njene koordinate v sferičnem (r, θ, ϕ) in cilindričnem sistemu (s, z, ϕ)? [1]

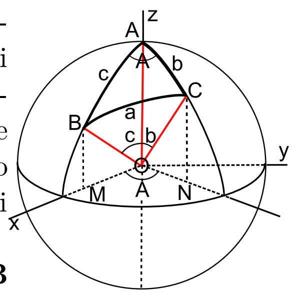
Naloga 1.2 Desnosučni kartezični koordinatni sistem xyz z izhodiščem v središču Zemlje naj ima pozitivno x os usmerjeno proti pomladišču in pozitivno z os usmerjeno proti severnemu polu. Satelit ima koordinate

$$x = 7844\,\mathrm{km}, \quad y = 1739\,\mathrm{km}, \quad z = 9576\,\mathrm{km}$$

(a) Koliko je oddaljenost satelita r od središča Zemlje ter koliko sta deklinacija δ in rektascenzija α za geocentričnega opazovalca?

(b) ** Satelit se nahaja na krožni orbiti in kroži v nasprotni smeri ure. Ko je bil satelit na podanih koordinatah, je imel maksimalno vrednost deklinacije. Kakšne bo imel kartezične koordinate čez 1 uro? Masa Zemlje je $M_\oplus = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, Newtonova gravitacijska konstanta pa $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$.

Naloga 1.3 **Kosinusni izrek za sferne trikotnike.**
V astronomiji se intenzivno uporablja orodja sferne trigonometrije, ki pa nenazadnje izhajajo iz vektorske algebre. Sferni trikotnik ABC je sestavljen iz treh krožnih lokov, ki s središčem oklepajo kote a, b in c. Kót pri nekem oglišču prevzame ime oglišča, torej je kót pri A označen z A. V sledečem želimo izpeljati kosinusni izrek za sferne trikotnike, ki povezuje vse tri stranice in enega izmed kotov.



Obravnavajmo enotsko krožnico in definirajmo vektorje $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$, kot je prikazano na skici. Torej, vektor $\mathbf{A}$ je usmerjen v pozitivno z os, vektor $\mathbf{B}$ leži na ravnini xz in z $\mathbf{A}$ oklepa kót c, vektor $\mathbf{C}$ pa naj ima v standardnem sfernem koordinatnem sistemu polarni kót b in azimutni kót A. Kót med vektorjema $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$ je enak a. Z uporabo skalarnega produkta med vektorjema $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$ izpelji kosinusni izrek za sferne trikotnike.

2. Osnove vektorske algebre

Naloga 2.1 Zapiši separacijski vektor $\mathbf{r}$ iz točke $(2, 8, 7)$ v točko $(4, 6, 8)$. Določi velikost vektorja (r) in konstruiraj enotski vektor $\hat{\mathbf{r}}$.

Naloga 2.2 Pokaži, da je pravokotna projekcija vektorja $\mathbf{B}$ na $\mathbf{A}$ podana z

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}}{A^2}$$

[1] Vsi sistemi so v klasični postavitvi.

Naloga 2.3 Naj bo $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Izračunaj skalarni produkt s samim sabo in tako izpelji kosinusni izrek:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta.$$

Naloga 2.4 Poišči kót med dvema ploskovnima diagonalama v kocki.

Naloga 2.5 Ali je vektorski produkt asociativen? Če da, dokaži, če ne, pa podaj protiprimer.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \stackrel{?}{=} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

Naloga 2.6 Razpiši komponente in pokaži, da velja sledeča vektorska identiteta:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Naloga 2.7 * 8. oktobra 2024 ob 0 UT sta Zemlja in Jupiter imela sledeče heliocentrične ekliptične koordinate:

Planet	Ekl. dolžina l	Ekl. širina b	Razdalja r [AU]
Zemlja	$15^\circ\,12'\,41{,}0''$	$0^\circ\,0'\,0{,}4''$	0,999 205 9
Jupiter	$70^\circ\,55'\,22{,}7''$	$-0^\circ\,38'\,51{,}3''$	5,055 659 1

Koliko je ekliptična širina Jupitra β za geocentričnega opazovalca?

3. Linearna neodvisnost

Naloga 3.1 * Oglišča trikotnika v 3-dimenzionalnem prostoru ležijo na $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_3$. Samo z uporabo linearne neodvisnosti pokaži, da je težišče trikotnika podano z

$$\mathbf{r}^* = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)$$

4. Vektorji v vsakdanjem življenju

Naloga 4.1 ***(Mat. v fiz. in tehn.).*** Natanko proti vzhodu obrnjeno letalo ima glede na zrak hitrost 600 km/h. V katero smer in kako hitro se giblje glede na tla, če piha veter proti severovzhodu s hitrostjo 80 km/h?

Naloga 4.2 Točkast naboj q miruje v točki $\mathbf{r}'$. Jakost električnega polja je v točki $\mathbf{r}$ enaka

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,,$$

kjer je $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A\,s/(V\,m)}$ influenčna konstanta. Za jakost električnega polja velja načelo superpozicije, torej skupno električno polje dobimo kot seštevek posameznih prispevkov:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_n\,.$$

(a) V izhodišču se nahaja točkast naboj z nabojem $q_1 = 0{,}2\,\mathrm{A\,s}$. Kolikšna je jakost električnega polja $\mathbf{E}$ v točki $\mathbf{r}$? Kolikšna je njegova velikost E? Pri tem je

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1{,}0\,\mathrm{m} \\ 2{,}0\,\mathrm{m} \\ -0{,}5\,\mathrm{m} \end{pmatrix}.$$

(b) Sedaj postavimo v točko

$$\mathbf{r}_2' = \begin{pmatrix} 0{,}0\,\mathrm{m} \\ 0{,}0\,\mathrm{m} \\ -1{,}0\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

še en točkast naboj z nabojem $q_2 = -0{,}3\,\mathrm{A\,s}$. Kolikšna je sedaj jakost električnega polja $\mathbf{E}$ v točki $\mathbf{r}$ in njegova velikost E?

(c) Uvedimo sferni koordinatni sistem v standardni postavitvi.[2] Kakšen polarni kót θ in kakšen azimutni kót ϕ ima vektor električnega polja $\mathbf{E}$ iz prejšnje točke?

5. Enačba premice

Naloga 5.1 (*IOAA 2024*). (*Skrajšano in prirejeno za namene krožka*).

Največji mrk. Največji mrk je definiran kot trenutek, ko med Sončevim mrkom pride os Luninega senčnega stožca najbliže središču Zemlje. Ta naloga razišče geometrijo tega fenomena na primeru Sončevega mrka 29. maja 1919, ki ima še posebej veliko zgodovinsko pomembnost, saj je bilo to prvič, ko so lahko astronomi opazovalno potrdili splošno teorijo relativnosti. Ena izmed dveh znanstvenih odprav, ki je opazovala ta mrk, se je nahajala v brazilskem mestu Sobral.

Sledeča tabela prikazuje sferične koordinate Sonca in Lune med največjim mrkom. Kartezični koordinatni sistem, ki ga uporabljamo pri nalogi, je desnosučen in ima izhodišče v središču Zemlje. Pozitivna x os kaže proti Greenwiškemu poldnevniku in pozitivna z os kaže proti severnemu polu.

	Središče Sonca	Središče Lune
Radialna oddaljenost r	$1{,}516 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$	$3{,}589 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Polarni kot θ	$68^\circ\,29'\,44{,}1''$	$68^\circ\,47'\,41{,}6''$
Azimutni kot ϕ	$-1^\mathrm{h}\,11^\mathrm{m}\,28{,}2^\mathrm{s}$	$-1^\mathrm{h}\,11^\mathrm{m}\,22{,}9^\mathrm{s}$

V tej nalogi predpostavi, da je Zemlja popolna krogla s polmerom $R = 6378\,\mathrm{km}$.

Opomba: Sferične koordinate neke točke P so definirane tako:

- Radialna oddaljenost r: razdalja med izhodiščem O in točko P ($r \geq 0$).
- Polarni kot θ: kót med pozitivno z osjo in daljico OP ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$).
- Azimutni kot ϕ: kót med pozitivno x osjo in projekcijo daljice OP na ravnino xy ($-12^\mathrm{h} \leq \phi < 12^\mathrm{h}$).

(a) Določi deklinacijo Sonca in Lune med največjim mrkom za geocentričnega opazovalca.

(b) Določi rektascenzijo Sonca in Lune ob času največjega mrka za geocentričnega opazovalca. Lokalni zvezdni čas na Greenwichu takrat je bil $5^\mathrm{h}\,32^\mathrm{m}\,35{,}5^\mathrm{s}$.

(c) Določi kartezične koordinate Sonca in Lune ob največjem mrku.

(d) Določi enotski vektor, ki določa smer osi Luninega senčnega stožca. Ta vektor mora kazati od Lune proti bližini središča Zemlje.

(e) * Določi zemljepisno širino in dolžino točke, kjer os Luninega senčnega stožca med največjim mrkom prečka Zemljino površje.

---

[2] Torej imajo točke na pozitivni x osi koordinati $\theta = 90^\circ$ in $\phi = 0^\circ$.

Naloga 5.2 ⋆⋆ Nik in Petra želita določiti koordinate ISS (Mednarodna vesoljska postaja) z uporabo paralakse. Nik opazuje iz Ljubljane (zemljepisna dolžina λ_1 in širina ϕ_1, nadmorska višina h_1) in ob nekem trenutku vidi ISS na deklinaciji δ_1 in rektascenziji α_1. Petra opazuje iz Pariza in ob istem trenutku izmeri podobne količine, le da imajo indeks 2. Ob času opazovanja je bil Greenwiški zvezdni čas enak $\mathtt{GST} = 16^{\mathrm{h}}\,40^{\mathrm{m}}\,47^{\mathrm{s}}$. Predpostavi, da je Zemlja krogla z radijem $R = 6378\,\mathrm{km}$.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 14{,}508\,52^\circ & \lambda_2 &= 2{,}326\,23^\circ \\
\phi_1 &= 46{,}048\,79^\circ & \phi_2 &= 48{,}863\,73^\circ \\
h_1 &= 0{,}355\,\mathrm{km} & h_2 &= 0{,}033\,\mathrm{km} \\
\delta_1 &= 20^\circ\,48'\,30'' & \delta_2 &= 3^\circ\,40'\,20'' \\
\alpha_1 &= 13^{\mathrm{h}}\,9^{\mathrm{m}}\,54^{\mathrm{s}} & \alpha_2 &= 19^{\mathrm{h}}\,3^{\mathrm{m}}\,30^{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Nad krajem s katerimi koordinatami (ϕ, λ) se nahaja ISS ob trenutku opazovanja? Kako visoko nad površjem se nahaja? Oceni še napako določitve položaja.

Opombe: smeri obeh opazovanj določata dve mimobežni premici. Najprej poišči najkrajšo daljico, ki povezuje obe premici. Položaj ISS oceni tako, da vzameš razpolovišče te daljice, ocena napake pa naj bo polovica njene dolžine.

6. Integrali

Naloga 6.1 **Magnetno polje v sredini tokovne zanke.** Magnetostatsko polje neke poljubne tokovne distribucije podaja Biot-Savartov zakon:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,,$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor točke, v kateri računamo magnetno polje, $\mathbf{r}'$ je položaj nekega dela tokovnega elementa, I je tok skozi zanko in μ_0 je indukcijska konstanta.

(a) ⋆ Izračunaj magnetno polje v sredini tokovne zanke (tok I) s polmerom a. Zanka leži v xy ravnini s središčem v izhodišču. Tok teče v nasprotni smeri ure, če zanko pogledamo iz pozitivne z smeri.

(b) ⋆⋆ Kaj pa magnetno polje v osi tokovne zanke v točki, ki je za z izmaknjena iz središča?

Naloga 6.2 ⋆ **Električno polje neskončne tanke plošče.** Električno polje neke poljubne porazdelitve nabojev lahko izračunamo[3] z Gaussovim zakonom, ki nam pove, da je skupni naboj znotraj nekega volumna enak pretoku električnih silnic skozi objemajočo površino.

$$\epsilon_0 \oiint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}S = q_{\mathrm{znotraj}}$$

Neskončna tanka plošča ima površinski naboj[4] σ. Z Gaussovim zakonom določi velikost električnega polja v točki, ki je od plošče oddaljena z.

Namig: sicer Gaussov zakon velja za poljubno ploskev, toda uporabi tisto, ki je najbolj simetrična in primerna za naš primer: prizma.

[3] Tehnično gledano potrebujemo za enolično določitev polja še enačbo $\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}l = 0$ in ustrezne robne pogoje.

[4] Količina naboja na enoto površine, $\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$.