Funkcije

Teorija

Peter Andolšek

November 2024

Funkcija $f(x)$ je predpis, ki vsakemu elementu x iz neke množice $\mathcal{A}$ priredi natanko en element y iz množice $\mathcal{B}$. Pravimo, da je y funkcija x in pišemo:

$$y = f(x)\,.$$

Množico $\mathcal{A}$ imenujemo domena funkcije $f(x)$, množico $\mathcal{B}$ pa imenujemo kodomena.

V splošnem lahko funkcija slika med poljubnimi množicami, v sledečem pa se predvsem omejimo na realne funkcije realne spremenljivke, kjer $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$.

1. Lastnosti funkcij

Ponovimo najprej lastnosti funkcij.[1] Vseskozi predpostavimo, da $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Kadar je izpolnjena neenakost $f(x_2) \geq f(x_1)$ za poljubna argumenta x_1 in x_2, za katera $x_1 < x_2$, potem taki funkciji pravimo **naraščajoča**. Kadar za taka poljubna argumenta vedno velja $f(x_2) \leq f(x_1)$ imenujemo tako funkcijo **padajoča**. Vse funkcije, ki so naraščajoče oziroma padajoče, imenujemo **monotone funkcije**. V primeru, ko sta zgornji neenakosti strogi, imenujemo funkcijo **strogo naraščajoča** (za $f(x_2) > f(x_1)$) in **strogo padajoča** (za $f(x_2) < f(x_1)$).

Kadar so vse vrednosti funkcije manjše od nekega števila, ji pravimo **zgoraj omejena** funkcija. Če so vse vrednosti večje od nekega števila, je funkcija **spodaj omejena**. Če je funkcija zgoraj in spodaj omejena, ji pravimo **omejena** funkcija.

Funkcijo, ki za vsak argument x zadošča enakosti $f(-x) = f(x)$, imenujemo **soda funkcija**. Če vedno velja $f(-x) = -f(x)$, jo imenujemo **liha funkcija**.

Funkcijo, ki zadošča enakosti $f(x+T) = f(x)$ za vsak x in nek konstanten T, imenujemo **periodična funkcija**. Najmanjše tako pozitivno število T imenujemo **perioda**.

Funkcija je **injektivna**, če velja

$$x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2); \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Funkcija je **surjektivna**, če se domena preslika v celotno kodomeno, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.[2] Drugače rečeno, funkcija f je surjektivna, če za vsak $y \in \mathcal{B}$ obstaja tak $x \in \mathcal{A}$, da velja $y = f(x)$.

Če je funkcija injektivna in surjektivna, ji rečemo, da je **bijektivna**. Če je funkcija f bijektivna, obstaja takšna funkcija $f^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, da velja

$$\forall x \in \mathcal{A} : \quad f^{-1}(f(x)) = x\,.$$

[1] Podrobnejši opis lastnosti s primeri se nahaja v zapiskih s krožka 2023/24: “*Funkcije. Limite. Odvodi. Integrali. Diferencialne enačbe. Vektorska analiza.*”

[2] Za neko $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ je $f(\mathcal{M}) = \{f(x);\ x \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{B}$.

2. Načini podajanja funkcije

Funkcijo lahko predstavimo z **razpredelnico vrednosti**, kjer navedemo vrednosti argumentov in ustreznih slik v kodomeni.

Realne funkcije realne spremenljivke pa lahko priročno prikažemo z **grafom**, ki je množica točk $(x, f(x))$ v ravnini. Z grafom lahko tudi dosti lažje opazimo lastnosti funkcij. Injektivnost pomeni, da bo vsaka vodoravnica sekala graf največ enkrat, surjektivnost pa pomeni, da bo vsaka vodoravnica sekala graf vsaj enkrat. Za bijektivno funkcijo torej velja, da vsaka vodoravnica seka graf natanko enkrat. Graf inverzne funkcije dobimo tako, da graf preslikamo preko premice $f(x) = x$.

Najpogosteje pa predstavimo funkcijo z **analitičnim izrazom**, kar pomeni, da jo predstavimo z eno ali več formulami. Primer funkcije, ki jo predstavimo z več formulami, je Heavisideova stopnica:

$$y = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases} .$$

Funkcijo lahko podamo **eksplicitno**, na primer

$$y = \sqrt{1 - x^2}; \quad -1 \leq x \leq 1 \,,$$

ki predstavlja zgornjo polovico enotske krožnice. Inverzno funkcijo lahko iz eksplicitnega zapisa dobimo tako, da namesto y izrazimo x.

Funkcijo pa lahko predstavimo tudi **implicitno** v obliki $F(x, y) = 0$, kadar je ta enačba enolično rešljiva glede na y. Zgornjo funkcijo lahko implicitno zapišemo tako:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0 \,.$$

Funkcijo pa lahko zapišemo tudi **parametrično**, kjer uporabimo parameter t ter zapišemo $x = \phi(t)$ in $y = \psi(t)$. Funkciji ϕ in ψ morata imeti isto definicijsko območje. Primer:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi \,.$$

3. Elementarne funkcije

Funkcije, ki so definirane s formulami, v katerih nastopa največ končno mnogo operacij med neodvisnimi spremenljivkami in konstantami, imenujemo **elementarne funkcije**. Pri tem imamo v mislih operacije seštevanja, odštevanja, deljenja in množenja, poleg tega pa še potenciranje na poljubno potenco, korenjenje, logaritmiranje in antilogaritmiranje pri poljubni osnovi ter uporabo trigonometričnih in inverznih trigonometričnih funkcij. Takšno definicijo imamo zato, ker želimo v pojem elementarne funkcije zbrati dovolj funkcij z lepimi lastnostmi in dovolj širokim razponom uporabnosti. Elementarne funkcije delimo na **algebrske** in **transcendentne**.

4

4. Algebrske funkcije

Neodvisna spremenljivka x in odvisna spremenljivka y sta povezani z algebrsko enačbo oblike

$$p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \cdots + p_n(x)y^n = 0\,,$$

pri čemer so $p_0, p_1, \ldots, p_n$ polinomi spremenljivke x. Če algebrsko rešimo zgornjo enačbo glede na y, dobimo naslednje vrste algebrskih funkcij.

4.1 Polinomi

Polinomi so imenovani tudi *cele racionalne funkcije*. Za spremenljivko x uporabljamo samo operacije seštevanja, odštevanja in množenja:

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,.$$

Posebni primeri: $y = a$ je **konstantna funkcija**, $y = ax + b$ je **linearna funkcija** in $y = ax^2 + bx + c$ je **kvadratna funkcija**.

4.2 Racionalne funkcije

Za spremenljivko x uporabljamo samo operacije seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja. Racionalno funkcijo lahko vedno predstavimo kot kvocient dveh polinomov:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,.$$

Posebni primer: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ je **ulomljena linearna funkcija**.

Test je nek ulomek $\frac{F}{\mu}$ itd.

$$\frac{F}{\mu}$$

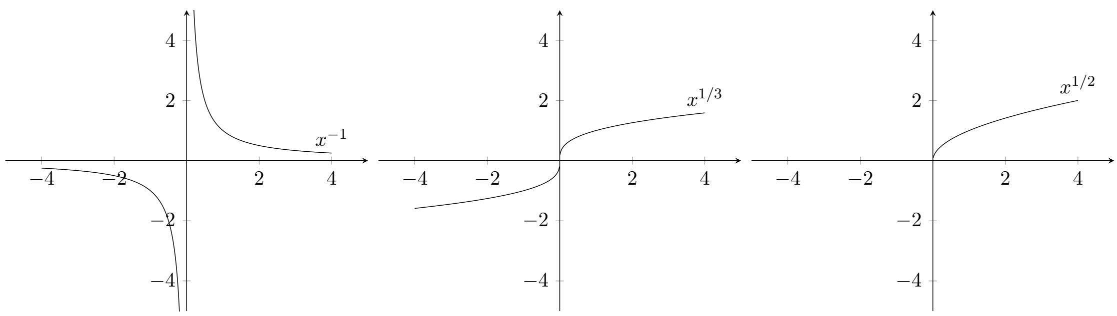
Toda: še en ulomek $\dfrac{F}{\mu}$, kjer je uporabljen dfrac.

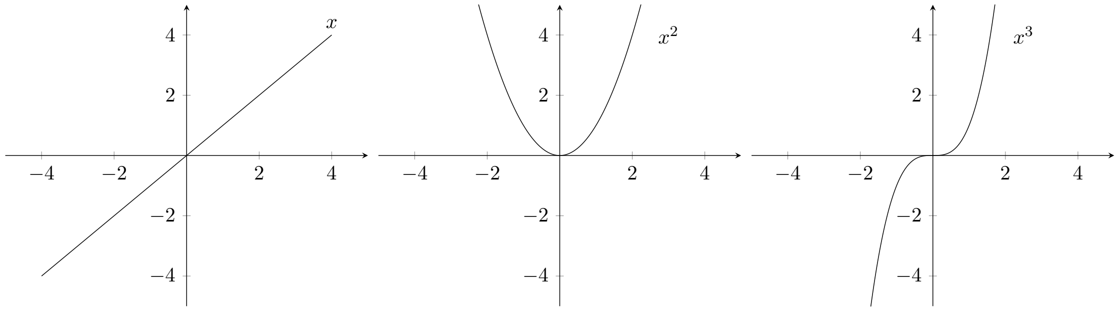
4.3 Iracionalne funkcije

Poleg osnovnih štirih operacij uporabljamo še korenjenje. Primer:

$$y = \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{x}}\,.$$

Funkcijo oblike $y = ax^k$ imenujemo **potenčna funkcija**.





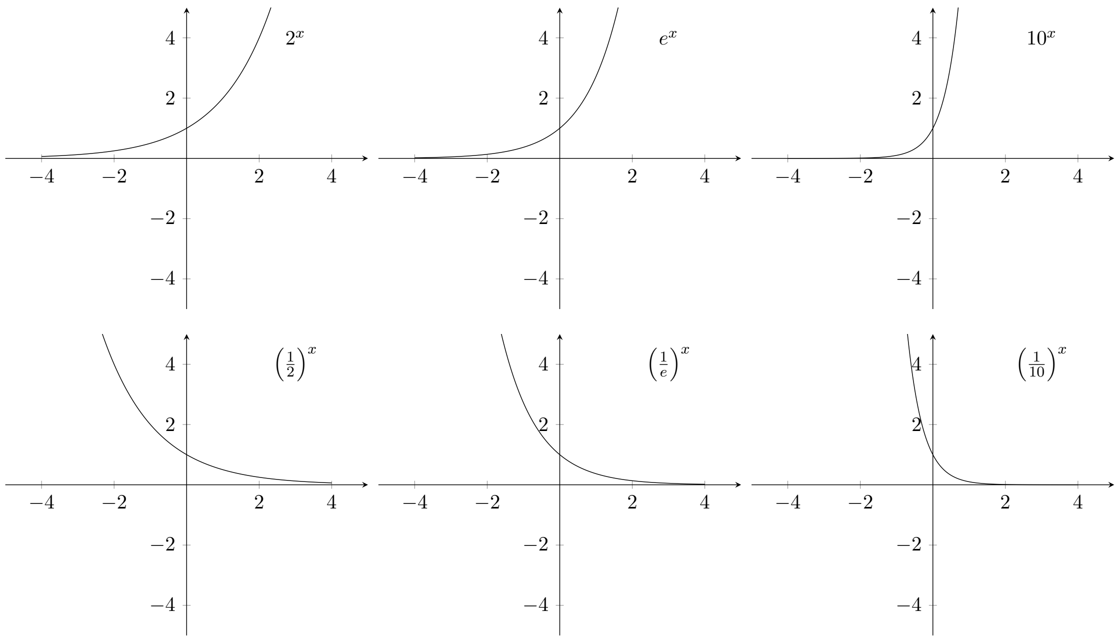
5. Transcendentne funkcije

Transcendentne funkcije ne moremo zapisati z algebrsko enačbo.

5.1 Eksponentne funkcije

Pri eksponentnih funkcijah nastopa argument x ali algebrska funkcija argumenta x v eksponentu. Primer:

$$y = 2^{3x^2-5x}\,.$$



Eksponentne funkcije imajo nekaj lepih lastnosti. Za vse vrednosti spremenljivke x je eksponentna funkcija pozitivna. Velja $a^{x+y} = a^x a^y$. Poleg tega velja tudi $(a^x)^y$.

Izmed vseh eksponentnih funkcij oblike $y = a^x$ se najlepše obnaša funkcija z osnovo $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,0\ldots$, ki jo imenujemo **Eulerjevo število**. Razlogi za to se bodo pokazali, ko se bomo poglobili v analizo. Če želimo prevesti poljubno eksponentno funkcijo na osnovo e, uporabimo sledeči izraz:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}\,.$$

Eksponentno funkcijo z osnovo e označimo tudi z exp:

$$\exp(x) := e^x\,.$$

Zanimiva je še **Gaussova krivulja**, ki je podana z izrazom

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,.$$

Ploščina pod grafom je enaka 1, čemur pravimo, da je funkcija *normalizirana*. Vrednosti σ pravimo *standardni odklon*. Gaussova krivulja se pogosto pojavlja v verjetnostnem računu in tudi v naravnih sistemih.

5.1.1 Reševanje eksponentnih enačb

Eksponentna enačba je taka enačba, kjer se spremenljivke pojavijo tudi v eksponentih. Rešimo jih tako, da jo z ustreznimi substitucijami prevedemo na algebrsko enačbo. Primer:

$$e^{2x} - e^x - 1 = 0\,.$$

Uporabimo substitucijo $u := e^x$ in dobimo:

$$u^2 - u - 1 = 0\,.$$

$$u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad u_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Sedaj moramo rešiti še enačbo $u = e^x$, ki je preprosto $x = \ln u$. Za $u_2 \leq 0$ logaritem ni definiran, za u_1 pa dobimo eno in edino rešitev začetne enačbe:

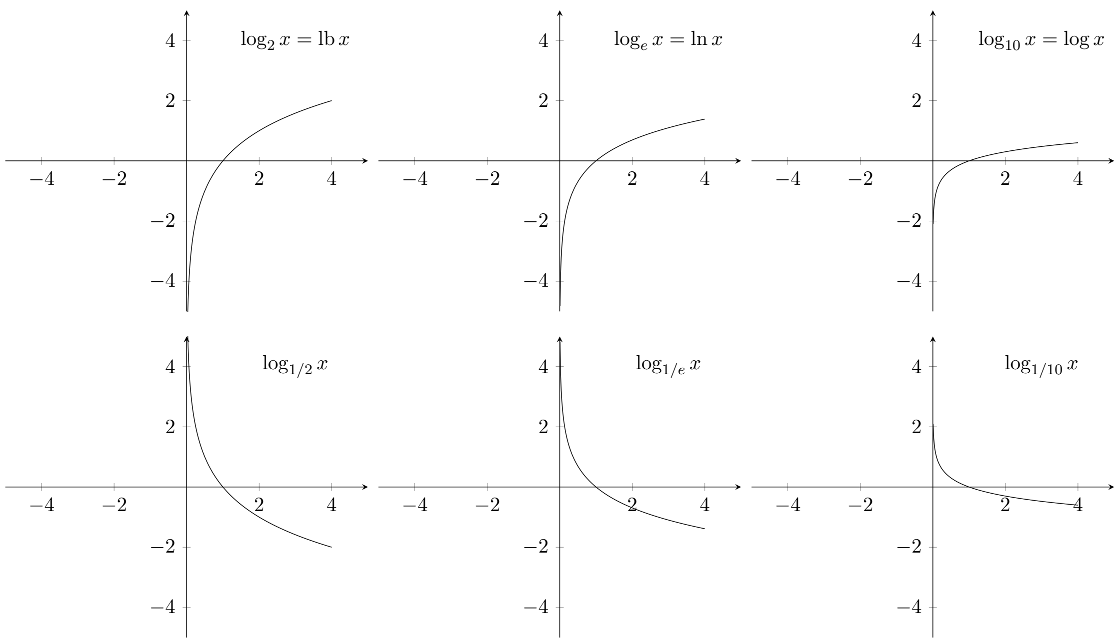
$$x = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Po potrebi opravimo preizkus.

5.2 Logaritemske funkcije

Pri logaritemskih funkcijah nastopa spremenljivka x ali algebrska funkcija spremenljivke x kot argument logaritemske funkcije. Primer:

$$y = \log(x+3)\,.$$



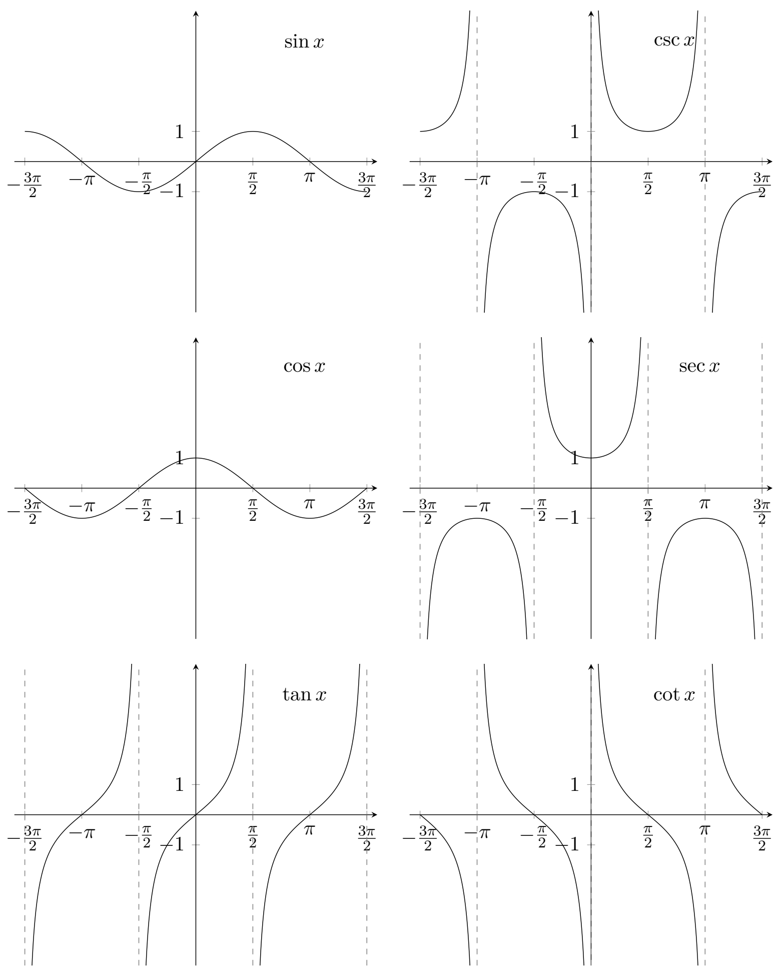
5.3 Trigonometrične funkcije

Pri trigonometričnih funkcijah spremenljivka x ali algebrska funkcija spremenljivke x nastopa kot argument funkcij sin, cos, tan, cot, sec, csc.[3] Primer:

$$y = \tan \sqrt{x}\,.$$

Argument trigonometrične funkcije ne rabi biti nujno nek kót ali krožni lok, temveč je lahko poljubno število. Trigonometrične funkcije lahko namreč definiramo čisto analitično brez uporabe geometrije.

Funkcija	Izraz	Perioda	Ničle	Asimptote
$\sin x$		2π	$k\pi$	–
$\cos x$		2π	$\pi/2 + k\pi$	–
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	π	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$
$\csc x$	$1/\sin x$	2π	–	$k\pi$
$\sec x$	$1/\cos x$	2π	–	$\pi/2 + k\pi$
$\cot x$	$1/\tan x$	π	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$



[3]V kontinentalnem evropskem prostoru se zapisujejo kot sin, cos, tg, ctg, sc, csc.

Vrednost trigonometrične funkcije kóta, ki se ne nahaja na intervalu $[0, 2\pi)$, lahko z uporabo periode ($f(x+T) = f(x)$) reduciramo na ta interval. S skice lahko nato razberemo vrednost trigonometrične funkcije in tako reduciramo kót še na interval $[0, \pi/2]$.

Osnovne identitete:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha} \\ 1 + \cot^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

Adicijski izreki:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \end{aligned}$$

Z uporabo adicijskih izrekov lahko izpeljemo tudi **kotne funkcije večkratnih kotov**:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Dvojni kót kosinusa lahko zapišemo tudi kot

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\,.$$

Iz tega lahko dobimo **kotne funkcije polovičnih kotov**, kjer predznak izberemo na podlagi sklepanja iz kvadranta kóta:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \tan\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ \cot\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \end{aligned}$$

Iz adicijskih izrekov lahko izpeljemo izraze za **vsoto in razliko dveh kotnih funkcij**:

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

Z obratom zgornjih enačb dobimo izraze za **produkte kotnih funkcij**:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]
\end{aligned}
$$

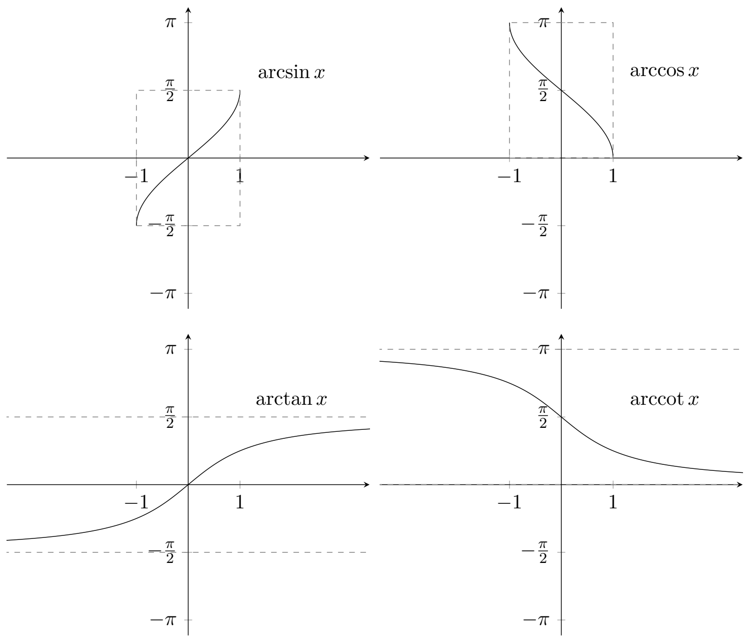
Potence kotnih funkcij lahko reduciramo na enostavne kotne funkcije na sledeči način:

$$
\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)
$$

5.4 Inverzne trigonometrične funkcije

Trigonometrične funkcije niso bijektivne, tako da njihovi neposredni inverzi ne obstajajo. Lahko pa zožimo domeno in kodomeno tako, da je zožitev funkcije bijektivna. Zožitev pa je na voljo več; izberemo takšno, ki nam najbolj ustreza.

Primer: funkcijo $f(x) = \sin x$ zožimo na $D_g = [0,\pi]$ in $Z_g = [-1,+1]$. Na tako določenih intervalih je funkcija bijektivna in njen inverz poimenujemo $\arcsin : Z_g \to D_g$. Ostale arbitrarne zožitve lahko razberemo s spodnjih skic inverznih funkcij:[4] [5]



5.4.1 Reševanje trigonometričnih enačb

Trigonometrične enačbe so take enačbe, kjer se neznanke pojavljajo znotraj trigonometričnih funkcij. Primer je:

$$
\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}\,.
$$

[4]V kontinentalnem evropskem prostoru jim pravimo arcsin, arccos, arctg in arcctg.

[5]Seveda poznamo tudi inverze, ki ustrezajo kosekansu in sekansu, ampak jih običajno ne potrebujemo.

Cilj je, da tako transcendentno enačbo pretvorimo v algebrsko. Opazimo, da lahko zgornjo enačbo zapišemo v obliki:

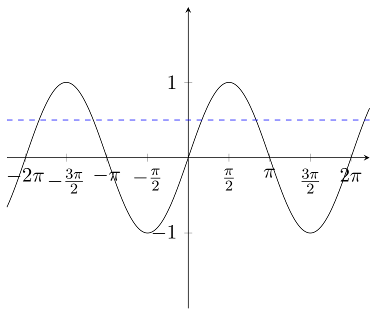
$$\sin x = (1 - \sin^2 x) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \sin^2 x\,.$$

Uvedemo novo spremenljivko $u := \sin x$ in tako dobimo:

$$u^2 + u - \frac{3}{4} = 0\,,$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{3}{2}\,.$$

Nato za vsako od dobljenih rešitev rešimo še enačbo $u = \sin x$ za x. V zgornjem primeru za u_2 ni rešitev (ker $u_2 \notin [-1, 1]$), pri u_1 pa so rešitve. Da najdemo vse rešitve, si pomagamo z grafom.



$$x_1 = \arcsin(u_1) + 2\pi n = \boxed{\frac{\pi}{6} + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin(u_1) + 2\pi n = \boxed{-\frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1)}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5.2}$$

Po potrebi naredimo preizkus.

5.5 Hiperbolične funkcije

Hiperbolični sinus, **hiperbolični kosinus** in **hiperbolični tangens** definiramo s pomočjo naslednjih enačb:[6]

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{5.3}$$

$$\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{5.4}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{5.5}$$

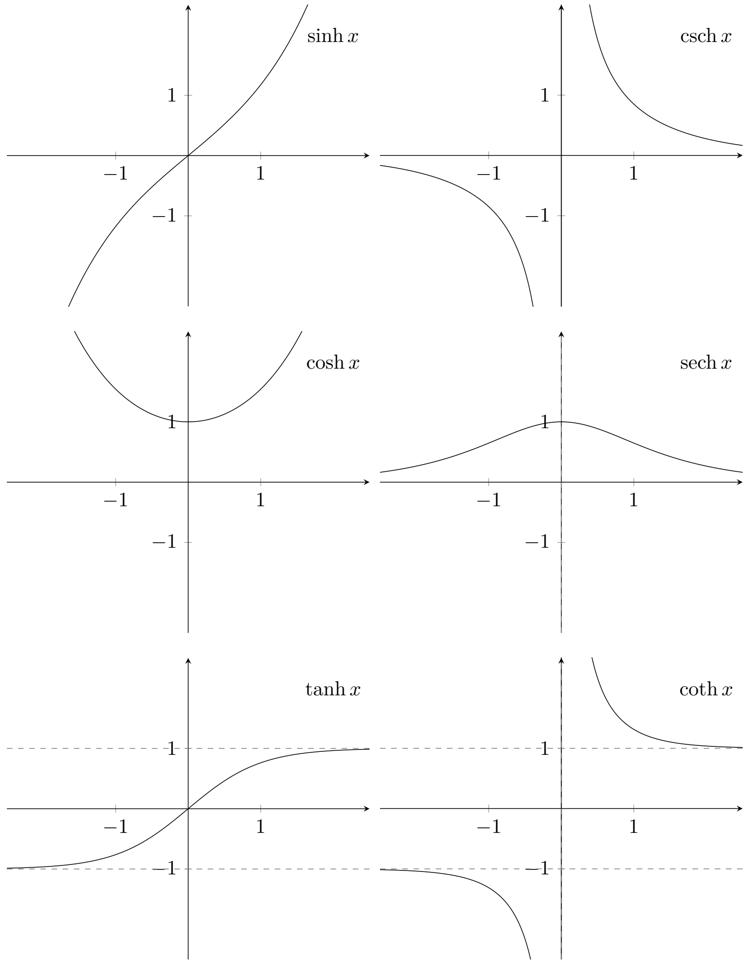
Podobno definiramo hiperbolični kosekans, hiperbolični sekans in hiperbolični kotangens kot obratne vrednosti ostalih treh hiperboličnih funkcij.[7]

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \tag{5.6}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \tag{5.7}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{5.8}$$

[6] V kontinentalnem evropskem prostoru so sh, ch in th.
[7] V kontinentalnem evropskem prostoru so csch, sch in cth.



Osnovne lastnosti hiperboličnih funkcij lahko že razberemo z grafa. Od svojih trigonometričnih sorodnikov se razlikujejo predvsem v tem, da niso periodične.

5.5.1 Zveze med hiperboličnimi in trigonometričnimi funkcijami

Kot smo že videli v sklopu kompleksnih števil, lahko sinus in kosinus kompleksnega števila definiramo tako:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{5.9}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{5.10}$$

Povezava s hiperboličnimi funkcijami je trivialna. Če namesto z vstavimo v trigonometrično oz. hiperbolično funkcijo iz, lahko dobimo sledeče povezave:

$$\sin z = -i \sinh iz, \qquad \sinh z = -i \sin iz, \tag{5.11}$$

$$\cos z = \cosh iz, \qquad \cosh z = \cos iz. \tag{5.12}$$

Podobno lahko dobimo tudi povezave med ostalimi hiperboličnimi in trigonometričnimi funkcijami. Z zgornjimi relacijami pa lahko iz trigonometričnih identitet izpeljemo tudi vse hiperbolične. Na primer:

$$1 = \sin^2 z + \cos^2 z = (-i \sinh iz)^2 + (\cosh iz)^2 = -\sinh^2 iz + \cosh^2 iz\,.$$

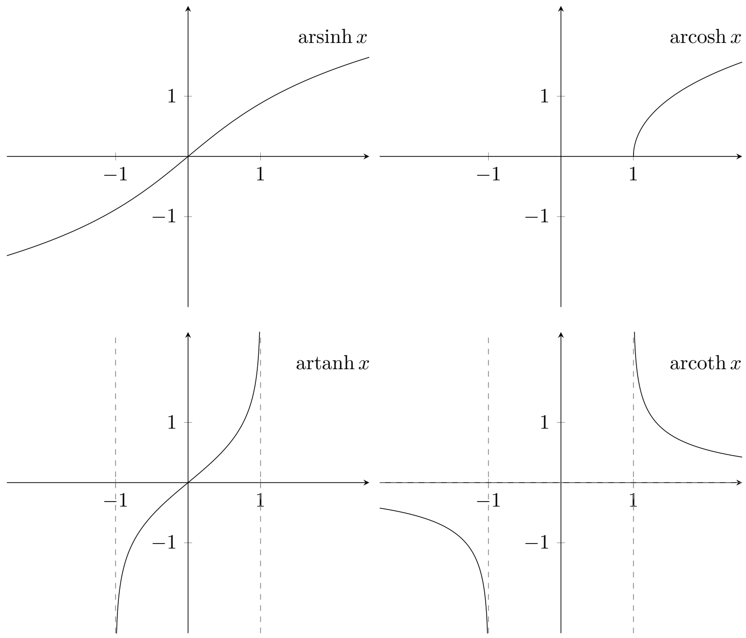
Trditev velja za poljubno kompleksno število z, lahko pa definiramo $x := iz$ in tako dobimo:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,,$$

ki je ena izmed osnovnih identitet med hiperboličnimi funkcijami.

5.6 Inverzne hiperbolične funkcije

Seveda obstajajo tudi **inverzne hiperbolične funkcije**.**V kontinentalnem evropskem prostoru se zapišejo z arsh, arch, arth in arcth.** Hiperbolični sinus, tangens in kotangens so na nekih domenah in kodomenah bijektivne, tako da jih ni potrebno zoževati. Edina izjema je hiperbolični kosinus, kjer si izberemo za zoženo domeno $[0, \infty)$.



6. Transformacije funkcij

V fiziki skoraj nikoli nimamo opravka le s suhimi primitivnimi elementarnimi funkcijami, kot je e^x. Namesto tega pa v fiziki pogosto uporabljamo recimo funkcijo oblike $ae^{-x/b}$. Zapišimo sestavljeno funkcijo takole:

$$g(x) = af[b(x - e)] + d\,.$$

Pri tem:

- a je raztezek v y smeri.
- b je skrček v x smeri.
- c je zamik funkcije desno.
- d je zamik funkcije navzgor.

Če neko funkcijo zapišemo v taki obliki, potem lahko prepoznamo vse raztezke in zamike ter tako lažje skiciramo ali predstavimo določeno funkcijo.

Zgled: skicirajmo funkcijo $\sin(3x+6)+1$. Najprej jo preoblikujmo v standardno obliko, s katere lahko odčitamo linearne transformacije:

$$\sin(3x+6)+1 = \sin[3(x-(-2))]+1\,.$$

Razberemo, da je naša funkcija le $\sin x$, ki smo ga skrčili v vodoravni smeri za faktor 3 (perioda je torej $2\pi/3$), zamaknili za 2 v levo in zamaknili za 1 navzgor. Z zbranimi ugotovitvami skiciramo funkcijo: