Correction de l'examen n° 1 - Contrôle optimal

EXERCICE N° 1 (stabilisation par retour d'état) Soient $T > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, des paramètres réels. Soit $u \in L^\infty([0,T];\mathbb{R})$, une fonction de contrôle. On considère le système commandé

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + u \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

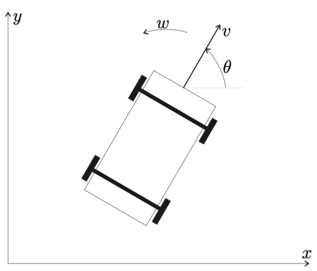
1. Pour quelle(s) valeur(s) de θ, ce système est-il contrôlable ?
   La matrice de Kalman associée à ce système, notée Kal *est donnée par :*
   $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Kal} = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   La matrice Kal *est de rang plain si, et seulement si* $\det \mathrm{Kal} \neq 0$, *soit* $\sin\theta \neq 0$ *ou encore* $\theta \not\equiv 0[\pi]$. *Le système est donc contrôlable si, et seulement si* $\theta \not\equiv 0[\pi]$.
2. On suppose dans cette question que $u(\cdot) = 0$.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction $F : t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$ et en déduire l'expression de $F(t)$ pour tout $t \geq 0$.
   On a : $F'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = \cos\theta\left(x(t)^2 + y(t)^2\right) = \cos\theta F(t)$. *Par conséquent,* $F(t) = e^{t\cos\theta}(x_0^2 + y_0^2)$.
   (b) Pour quelles valeurs de θ la propriété suivante est-elle satisfaite ?
   (A) : " quelles que soient les données initiales $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$."
   Cette propriété est satisfaite si, et seulement si $\cos\theta < 0$, *autrement dit* $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[+2\pi\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\theta = \pi/2$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, si l'on choisit la commande $u(\cdot) = \alpha x + \beta y$, la propriété (A) est satisfaite.
   Choisissons la commande comme dans l'énoncé. Le système devient $x' = -y$ *et* $y' = (1+\alpha)x + \beta y$, *soit encore* $X' = MX$ *en posant* $X = [x, y]^\top$ *et* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+\alpha & \beta \end{pmatrix}$. *La trace de* M *est* β *et son déterminant est* $1 + \alpha$. *Choisissons* $\beta < 0$ *et* $1 + \alpha > 0$, *par exemple* $\alpha = 0$ *et* $\beta = -1$. *Alors, les valeurs propres de* M *sont de partie réelle strictement négative et il s'ensuit que (A) est satisfaite.*

EXERCICE N° 2 (contrôles bang-bang)

Une voiture commandée en vitesse est modélisée de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

où les commandes v et w sont les vitesses linéaires et angulaires instantanées.
Quitte à effectuer un changement de repère, on suppose qu'à l'instant initial, on a $(x(0), y(0), \theta(0))^\top = 0_{\mathbb{R}^3}$.



1. Le système est-il contrôlable si l'une des deux commandes v ou w est choisie identiquement nulle ?
   Si $v(\cdot) = 0$, alors $(x(\cdot), y(\cdot)) = (x(0), y(0))$ et on ne peut donc pas atteindre une position (x, y) différente de la position initiale. Si $w(\cdot) = 0$, l'analyse est la même, cette fois sur l'angle θ.
2. Le linéarisé en une position (x_1, y_1, θ_1) quelconque et un choix de commande $(v, w) = (0, 0)$ est-il contrôlable ? Comment interpréter ce résultat ?
   Posons $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \ni (x, y, \theta, v, w) \mapsto (\cos\theta v, \sin\theta v, w)$. Le linéarisé du système s'écrit $\dot{Y} = AX + Bu$ avec

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial(x,y,\theta)}\right|_{\substack{(x,y,\theta)=(x_1,y_1,\theta_1)\\(v,w)=(0,0)}} = \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta w \\ 0 & 0 & \cos\theta w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\substack{(x,y,\theta)=(x_1,y_1,\theta_1)\\(v,w)=(0,0)}} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial(x,y,\theta)}\right|_{\substack{(x,y,\theta)=(x_1,y_1,\theta_1)\\(v,w)=(0,0)}} = \left.\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\substack{(x,y,\theta)=(x_1,y_1,\theta_1)\\(v,w)=(0,0)}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, le rang de la matrice de Kalman associée est 2 (< 3) est le système linéarisé n'est pas commandable. On ne peut donc rien en déduire sur le système non-linéaire.
3. Montrer que le système est contrôlable (et préciser ce qu'on entend par ce mot) à l'aide de commandes constantes par morceaux $(v, w) = (0, \pm 1)$ ou $(\pm 1, 0)$.
   Indication : on suggère de construire pas à pas la trajectoire contrôlée.
   Il suffit de montrer que l'on peut amener la voiture de l'origine à une configuration (x_1, y_1, θ_1) quelconque. Or ceci peut être réalisé par la commande suivante :
   - *faire pivoter la voiture jusqu'à ce que son axe pointe vers (x_1, y_1), à l'aide d'une commande $(v, w) = (0, \pm 1)$;*
   - *amener la voiture en ligne droite jusqu'à la position (x_1, y_1), en utilisant la commande $(v, w) = (1, 0)$;*
   - *refaire pivoter la voiture jusqu'à ce qu'elle soit orientée selon l'angle θ_1, à l'aide d'une commande $(v, w) = (0, \pm 1)$.*

EXERCICE N° 3 (problème LQ) Une usine fabrique un certain produit dont le stock est $x(t)$ avec $x(0) = 1$ et le taux de production $x'(t)$ vérifie $x'(t) = x(t) + u(t)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on considère la fonctionnelle J_ε donnée par

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} x^2(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)^2\, dt.$$

1. On suppose d'abord que la production est donnée par $\bar{u}(\cdot) = 1$ (constante au cours du temps). Calculer le coût $J_\varepsilon(\bar{u})$ associé.
   Pour ce choix de fonction u, on calcule aisément : $x(t) = -1 + 2e^t$. Ainsi, $x(1) = 2e - 1$ et

$$J_\varepsilon(1) = \frac{(2e-1)^2}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}.$$

2. Démontrer l'existence d'un contrôle optimal $u_\varepsilon(\cdot)$ pour le problème de minimisation de J_ε sur $L^2(]0, 1[)$.
   Il s'agit d'un problème LQ et avec les notations du cours, on a : $A = (1)$, $B = (1)$, $x_0 = 1$, $Q = (0)$, $R = (1)$ et $D = (1/\varepsilon)$. Puisque Q et D sont semi-définies positives et R est définie positive, le problème LQ ci-dessus poss !de une unique solution u_ε.
3. Déterminer ce contrôle optimal.
   Les CNS d'optimalité permettent d'écrire $u_\varepsilon = -R^{-1}B^\top p_\varepsilon = -p_\varepsilon$, avec p_ε solution de

$$\begin{cases} p_\varepsilon' + p_\varepsilon = 0 & \text{sur } [0, 1] \\ p_\varepsilon(1) = \frac{x(1)}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Ainsi, $p_\varepsilon(t) = \frac{x(1)}{\varepsilon} e^{-(t-1)}$. Déterminons l'état x_ε, solution de

$$x'_\varepsilon = x_\varepsilon - p_\varepsilon \Leftrightarrow x'_\varepsilon = x_\varepsilon - \frac{x_\varepsilon(1)}{\varepsilon} e^{-(t-1)}.$$

On utilise la méthode de variation de la constante, ce qui conduit à écrire $x_\varepsilon = we^t$. En injectant cette expression dans l'équation, on trouve $e^t w'(t) = -\frac{x_\varepsilon(1)}{\varepsilon} e^{-(t-1)}$ et ainsi, $w(t) = \frac{x_\varepsilon(1)}{2\varepsilon} e^{-(2t-1)} + w_0$, avec $w_0 \in \mathbb{R}$. Finalement, $x_\varepsilon(t) = \frac{x_\varepsilon(1)}{2\varepsilon} e^{-(t-1)} + w_0 e^t$. Puisque $x_\varepsilon(0) = 1$, il vient $w_0 + ex_\varepsilon(1)/(2\varepsilon) = 1$. Ainsi,

$$x_\varepsilon(t) = \frac{x_\varepsilon(1)}{2\varepsilon} e^{-(t-1)} + \left(1 - \frac{ex_\varepsilon(1)}{2\varepsilon}\right) e^t.$$

Evaluons cette expression en $t = 1$. On obtient :

$$x_\varepsilon(1) = \frac{x_\varepsilon(1)}{2\varepsilon} + \left(1 - \frac{ex_\varepsilon(1)}{2\varepsilon}\right) e \Leftrightarrow x_\varepsilon(1) = \frac{2\varepsilon e}{2\varepsilon + e^2 - 1}.$$

Finalement,

$$u_\varepsilon(t) = -\frac{2e^{2-t}}{2\varepsilon + e^2 - 1}, \quad x_\varepsilon(t) = \frac{e^{2-t}}{2\varepsilon + e^2 - 1} + \frac{(2\varepsilon - 1)}{2\varepsilon + e^2 - 1} e^t.$$

4. Quel est le gain comparé à une production constante ?
   On calcule :

$$J(u_\varepsilon) = \frac{2\varepsilon e^2}{(2\varepsilon + e^2 - 1)^2} + \frac{e^2(e^2 - 1)}{(2\varepsilon + e^2 - 1)^2}$$

5. Déterminer les limites de toutes les quantités en jeu lorsque $\varepsilon \searrow 0$? Proposer une interprétation.
   Lorsque $\varepsilon \searrow 0$, on a

$$x_\varepsilon(1) \to 0, \quad u_\varepsilon(t) \to -\frac{2e^{2-t}}{e^2 - 1}, \quad x_\varepsilon(t) \to \frac{e^{2-t} - e^t}{e^2 - 1}, \quad J(u_\varepsilon) \to \frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

Ce problème LQ peut se voir comme une pénalisation du problème

$$\inf\{J(u), \ u \in L^2(]0, 1[), \ x'_u = x_u + u, \ x_u(1) = 0\}.$$

On peut donc conjecturer que l'asymptotique obtenue fournit la solution du problème ci-dessus (ce qui pourrait se vérifier de façon analytique).

EXERCICE N° 4 (équation de Riccati) Soient $A \in \mathbb{M}_n$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}$. Considérons un système dynamique linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

associé à la fonction coût quadratique J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T [(Qx(s), x(s)) + (Rv(s), v(s)] \, ds + \frac{1}{2}(Dx(T), x(T))$$

où R est une matrice de $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ définie positive, $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sont supposées semi-définie positives.

On considère le problème

$$\inf_{v \in L^2(0,T,\mathbb{R}^m)} J(v) \tag{LQ}$$

et on désigne par p la variable adjointe associée à ce problème.

Rappelons qu'il existe une unique matrice symétrique $E \in C^1([0, T])$ de taille n telle que la trajectoire $x(\cdot)$ et l'état adjoint $p(\cdot)$ sont liés par la relation $p(t) = E(t)x(t)$. La matrice E est solution de l'équation matricielle de Riccati

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = -Q - A^\top E(t) - E(t)A + E(t)BR^{-1}B^\top E(t) & t \in [0, T] \\ E(T) = D. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\frac{d}{dt}(E(t)x(t), x(t)) = -(Qx(t), x(t)) + (Bu(t), p(t)).$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Ex, x) &= (\dot{E}x, x) + (E\dot{x}, x) + (Ex, \dot{x}) \\
&= (\dot{E}x, x) + 2(E\dot{x}, x) \\
&= -(Qx, x) - (A^\top Ex, x) - (EAx, x) + (EBR^{-1}B^\top Ex, x) + 2(EAx, x) + 2(EBu, x) \\
&= -(Qx, x) - (EBu, x) + 2(EBu, x) = -(Qx, x) + (Bu, p),
\end{aligned}$$

en utilisant que E est symétrique, que $(A^\top Ex, x) = (Ex, Ax)$ et que $u = -R^{-1}B^\top Ex$.

2. En déduire que $\frac{1}{2}(E(0)x_0, x_0)$ est la valeur optimale du problème LQ.
Intégrons la relation précédente entre 0 et T. On trouve :

$$(Ex(T), x(T)) - (Ex_0, x_0) = \int_0^T [-(Qx, x) + (Bu, p)].$$

Or, $(Ex(T), x(T)) = (Dx(T), x(T))$ et

$$\int_0^T (Bu, p) = -\int_0^T (u, B^\top p) = -\int_0^T (u, Ru)$$

d'après l'expression de u. Par conséquent,

$$(Ex_0, x_0) = \int_0^T [(Qx, x) + (Ru, u)] + (Dx(T), x(T)).$$

Le résultat escompté s'ensuit.