UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

vendredi 13 janvier 2023

Examen n°2 - Contrôle optimal

Master 2 - CSMI - Durée : 2 heures

Consignes : les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Il est important d'apporter une grande attention au soin et à la présentation, justification et rédaction des réponses. Il faut donc utiliser des phrases de liaison, des affirmations et des conclusions.

EXERCICE Nº 1 (contrôle optimal d'une population de poissons)

On considère $x(t)$, la quantité d'une certaine espèce de poisson dans un lac à l'instant t. Si on ne fait pas de prélèvement, c'est-à-dire si on ne pêche pas du tout, la population à l'instant t de cette espèce de poisson augmente à taux constant $\alpha > 0$, en suivant la loi d'évolution $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$.

Pêcher consiste à prélever une proportion de population, $u(t)x(t)$, où $u(\cdot)$ désigne une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $0 \leq u(\cdot) \leq u_{\max}$, avec $u_{\max} \in]0,1[$, un taux maximal fixé par les régulations de pêche de l'espèce en question. À l'instant initial, la population de pêche est estimée à $x(0) = x_0 > 0$. L'équation différentielle modélisant l'évolution de $x(t)$, que nous noterons dorénavant $x_u(t)$ pour mettre en valeur la dépendance de cette quantité en la fonction u, s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = \alpha x_u(t) - u(t)x_u(t), \quad t > 0. \\ x_u(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

La période de pêche est fixée, $[0, T]$, avec $T > 0$ donné. L'objectif est de maximiser la pêche totalisée durant la période fixée, c'est-à-dire maximiser $\int_0^T u(t)x(t)\,dt$.

Le problème de contrôle optimal s'écrit alors :

$$\sup_{u \in \mathscr{U}_{ad}} J(u), \quad \text{avec} \quad J(u) = \int_0^T x_u(t)u(t)\,dt, \tag{$\mathscr{P}$}$$

où x_u désigne l'unique solution de (1) et

$$\mathscr{U}_{ad} = \{u \in L^\infty([0,T]) \mid 0 \leq u(t) \leq u_{\max} \text{ p.p. dans } [0,T]\}.$$

1. **Modélisation.** Proposer une variante du problème ($\mathscr{P}$) permettant de prendre en compte des considérations écologiques, en veillant à ce que la population de poissons dans le lac ne devienne pas trop faible.
2. **Analyse du système** (1)**.** Soit $u \in \mathscr{U}_{ad}$. Démontrer que $x_u(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
3. **Analyse du problème** ($\mathscr{P}$)**.** On admet l'existence d'un contrôle optimal u solution du problème ($\mathscr{P}$).
   (a) Définir le Hamiltonien du problème ($\mathscr{P}$), puis écrire les conditions d'optimalité données par le principe du maximum de Pontryagin. On notera notamment p, la variable adjointe et on montrera qu'il n'existe pas de trajectoire anormale (autrement dit que $p^0 < 0$).
   (b) Démontrer que dans un voisinage de T, on a nécessairement $u = u_{\max}$.

(c) Soit t_0, un temps tel que $p(t_0) = 1$. Démontrer qu'alors on a nécessairement $p'(t_0) = -\alpha$ et en déduire que l'ensemble $\{t \in [0,T] \mid p(t) = 1\}$ est de mesure nulle. Que peut-on en déduire sur le contrôle optimal u?

(d) Démontrer que sur tout intervalle de l'ensemble $\{u = 0\}$, la fonction p est décroissante.

(e) En utilisant les question précédentes, démontrer que u est *bang-bang* avec au plus une commutation.

4. **Algorithme numérique.** Proposer une approche numérique exploitant le résultat prouvé ci-dessus pour résoudre le problème $(\mathscr{P})$.

EXERCICE N° 2 (contrôle optimal d'une membrane)

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et Ω, un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est supposée de classe C^2. On considère le problème de contrôle d'une membrane élastique déformée par une force extérieure $f \in L^2(\Omega)$ et fixée sur son contour $\partial\Omega$. Le comportement de la membrane est modélisé par

$$\begin{cases} -\Delta y_v(x) = f(x) + v(x)\mathbb{1}_\omega(x) & x \in \Omega \\ y_v(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathscr{E}$}$$

où y_v est le déplacement vertical de la membrane et v est une force de contrôle agissant sur un ouvert $\omega \subset \Omega$. La notation $\mathbb{1}_\omega$ désigne la fonction caractéristique de l'ouvert ω (égale à 1 dans ω et 0 sinon).

On utilise la force de contrôle pour atténuer les vibrations de la membranes. On choisit pour cela de résoudre le problème

$$\inf_{v \in L^\infty(\Omega;[-M,M])} J(v) \qquad \text{où} \quad J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla y_v(x)|^2 + y_v(x)^2)\, dx \tag{$\mathscr{P}$}$$

avec $M > 0$ donné.

1. Démontrer que le problème $(\mathscr{E})$ possède une solution unique et préciser sa régularité.
2. *Existence (question facultative, qui apportera des points de bonus si elle est correctement traitée).*
   (a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite minimisante pour le problème $(\mathscr{P})$. Montrer qu'il existe $v^* \in L^\infty(\Omega;[-M,M])$, $y^* \in H_0^1(\Omega)$ et une sous-suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers v^* faiblement dans $L^2(\Omega)$ tels que $(y_{v_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers y^*, faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$.
   (b) En déduire que le problème $(\mathscr{P})$ possède une solution.
   Soit v^*, une solution du problème $(\mathscr{P})$.
3. Soit $v \in L^\infty(\Omega;[-M,M])$. En admettant que J est différentiable au sens de Gâteaux en v^* dans la direction $v - v^*$, montrer que sa différentielle s'écrit
$$DJ(v^*)\cdot(v - v^*) = \int_\Omega (\nabla y_{v^*}(x)\cdot\nabla z(x) + y_{v^*}(x)z(x))\, dx$$
   où z désigne la solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on précisera.
4. En introduisant un problème adjoint bien choisi, calculer le gradient de la fonctionnelle J en v^*.
   Indication : il sera utile d'effectuer de prime abord une intégration par parties dans l'expression de $DJ(v^*)\cdot(v - v^*)$ obtenue précédemment.
5. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$, Ω est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$ et ω est la boule ouverte centrée à l'origine de rayon $1/4$. Proposer un algorithme de résolution du problème $(\mathscr{P})$ et détailler sa mise en œuvre.