

Examen n° 1 - Contrôle optimal

Master 2 - CSMI - Durée : 2 heures

Consignes : les documents sont autorisés. Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Il est important d'apporter une grande attention au soin et à la présentation, justification et rédaction des réponses. Il faut donc utiliser des phrases de liaison, des affirmations et des conclusions.

EXERCICE N° 1 (stabilisation par retour d'état) Soient $T > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, des paramètres réels. Soit $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$, une fonction de contrôle. On considère le système commandé

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + u \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de θ , ce système est-il contrôlable ?
2. On suppose dans cette question que $u(\cdot) = 0$.
 - (a) Calculer la dérivée de la fonction $F : t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$ et en déduire l'expression de $F(t)$ pour tout $t \geq 0$.
 - (b) Pour quelles valeurs de θ la propriété suivante est-elle satisfaite ?
(A) : quelles que soient les données initiales $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = 0$.
3. On suppose que $\theta = \pi/2$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, si l'on choisit la commande $u(\cdot) = \alpha x + \beta y$, la propriété (A) est satisfaite.

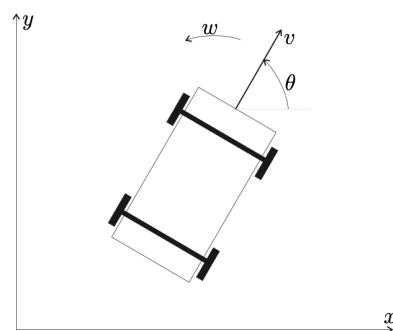
EXERCICE N° 2 (contrôles bang-bang)

Une voiture commandée en vitesse est modélisée de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

où les commandes v et w sont les vitesses linéaires et angulaires instantanées.

Quitte à effectuer un changement de repère, on suppose qu'à l'instant initial, on a $(x(0), y(0), \theta(0))^\top = 0_{\mathbb{R}^3}$.



1. Le système est-il contrôlable si l'une des deux commandes v ou w est choisie identiquement nulle ?
2. Le linéarisé en une position (x_1, y_1, θ_1) quelconque et un choix de commande $(v, w) = (0, 0)$ est-il contrôlable ? Comment interpréter ce résultat ?
3. Montrer que le système est contrôlable (et préciser ce qu'on entend par ce mot) à l'aide de commandes constantes par morceaux $(v, w) = (0, \pm 1)$ ou $(\pm 1, 0)$.
Indication : on suggère de construire pas à pas la trajectoire contrôlée.

EXERCICE N° 3 (problème LQ) Une usine fabrique un certain produit dont le stock est $x(t)$ avec $x(0) = 1$ et le taux de production $\dot{x}(t)$ vérifie $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$. pour $\varepsilon > 0$ donné, on considère la fonctionnelle J_ε donnée par

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon}x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)^2 dt.$$

1. On suppose d'abord que la production est donnée par $\bar{u}(\cdot) = 1$ (constante au cours du temps). Calculer le coût $J_\varepsilon(\bar{u})$ associé.
2. Démontrer l'existence d'un contrôle optimal $u_\varepsilon(\cdot)$ pour le problème de minimisation de J_ε sur $L^2([0, 1])$.
3. Déterminer ce contrôle optimal.
4. Quel est le gain comparé à une production constante ?
5. Déterminer les limites de toutes les quantités en jeu lorsque $\varepsilon \searrow 0$? Proposer une interprétation.

L'exercice qui suit est facultatif. Il est conseillé de ne l'aborder que si tous les autres exercices ont été traités.

EXERCICE N° 4 (équation de Riccati) Soient $A \in \mathbb{M}_n$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}$. Considérons un système dynamique linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

associé à la fonction coût quadratique J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T [(Qx(s), x(s)) + (Rv(s), v(s))] ds + \frac{1}{2}(Dx(T), x(T))$$

où R est une matrice de $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ définie positive, $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sont supposées semi-définies positives.

On considère le problème

$$\inf_{v \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)} J(v) \quad (\text{LQ})$$

et on désigne par p la variable adjointe associée à ce problème. Rappelons qu'il existe une unique matrice symétrique $E \in C^1([0, T])$ de taille n telle que la trajectoire $x(\cdot)$ et l'état adjoint $p(\cdot)$ sont liés par la relation $p(t) = E(t)x(t)$. La matrice E est solution de l'équation matricielle de Riccati

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = -Q - A^\top E(t) - E(t)A + E(t)BR^{-1}B^\top E(t) & t \in [0, T] \\ E(T) = D. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\frac{d}{dt}(E(t)x(t), x(t)) = -(Qx(t), x(t)) + (Bu(t), p(t)).$$

2. En déduire que $\frac{1}{2}(E(0)x_0, x_0)$ est la valeur optimale du problème LQ.