UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Master 2 - CSMI

Contrôle optimal - T.P. nº 3

Contrôle optimal de l'équation de la chaleur

On considère une barre unidimensionnelle de longueur $L > 0$. La température de l'extrémité gauche de la barre (en $x = 0$) est maintenue à 0 ^{o}K et on cherche à contrôler la température de la barre à l'extrémité droite (en $x = L$) à l'aide d'un flux de chaleur $t \mapsto u(t)$. On appelle $y_u(t, x)$ la température de cette barre au temps $t \in [0, T]$ et en $x \in [0, L]$.

On suppose donc que y_u résout l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t y_u(t,x) - \partial_{xx} y_u(t,x) = 0 & (t,x) \in]0,T[\times]0,L[\\ y_u(0,x) = 0 & x \in [0,L] \\ y_u(t,0) = 0 & t \in [0,T] \quad \text{(conditon de Dirichlet homogène)} \\ \partial_x y_u(t,L) = u(t) & t \in [0,T] \quad \text{(conditon de Neumann non-homogène)} \end{cases}$$

et on s'intéresse au problème de contrôle optimal

$$\inf_{u \in L^2(]0,T[)} J(u) \quad \text{où } J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (y_u(t,L) - z_d(t))^2\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T u(t)^2\,dt, \qquad (\mathcal{P})$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre fixé et $z_d \in L^2(]0, T[)$ est donnée.

1. Montrer que J est différentiable. En introduisant un problème adjoint bien choisi, calculer le gradient de J en u.
2. Décrire et mettre en œuvre une méthode numérique de résolution de l'équation de la chaleur par une méthode de type différences finies centrées en espace et décentrées en amont en temps. Vérifier sur des exemples simples que cette méthode fonctionne.
3. Appelons p, l'état adjoint introduit pour calculer le gradient de J. On appelle q la fonction définie sur $[0, T] \times [0, L]$ par $q(t, x) = p(T - t, x)$. Quelle est l'équation satisfaite par q ? En déduire une méthode numérique permettant de calculer le gradient de J en u.
4. Écrire un algorithme pour résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$.
5. Tester cet algorithme pour diverses valeurs de ε, T et z_d. Commenter et illustrer les résultats (on discutera en particulier l'influence des paramètres du problème sur sa résolution).

$\boxed{\textbf{Schémas numériques}}$

Pour résoudre numériquement les EDP, on propose d'utiliser des méthodes de type différences finies *centrées en espace* et *décentrées en amont en temps*. Pour cela on discrétise l'intervalle $[0, L]$ en $N_x + 1$ points, et $[0, T]$ en $N_t + 1$ points. Introduisons $\Delta x = \frac{L}{N_x}$ et $\Delta t = \frac{T}{N_t}$, les pas d'espace et de temps de sorte que

$$x_i = i\Delta x, \quad i \in [\![0, N_x]\!] \quad \text{et} \quad t^k = k\Delta t, \quad k \in [\![0, N_t]\!].$$

Soit $y_i^k \approx y(x_i, t^k)$ pour tout $(i, k) \in [\![1, N]\!] \times [\![0, N_t]\!]$. Des développements de Taylor fournissent

$$y_{xx}(x_i, t^k) \approx \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{\Delta x^2}, \qquad y_t(x_i, t^k) \approx \frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\Delta t}.$$

On rappelle que le schéma implicite est inconditionnellement stable pour toute valeur de Δt.

Schéma numérique pour le problème direct (équation de la chaleur). On obtient le schéma numérique

$$\frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{\Delta t} + \frac{-y_{i-1}^k + 2y_i^k - y_{i+1}^k}{\Delta x^2} = 0, \qquad i \in [\![1, N_x - 1]\!].$$

De plus, en utilisant la condition de Dirichlet $y_0 = 0$, on a

$$\frac{y_1^k - y_1^{k-1}}{\Delta t} + \frac{2y_1^k - y_2^k}{\Delta x^2} = 0.$$

Pour le bord Neumann, on utilise une approximation de la dérivée à l'ordre 1. Par développement de Taylor autour de y_{N+1}^k on obtient $y_{N+1}^k \approx y_N^k + \partial_x y(L, t^k)\Delta x = y_N^k + u(t^k)\Delta x$ et en ré-injectant ce résultat dans le schéma, on a alors pour $i = N$,

$$\frac{y_N^k - y_N^{k-1}}{\Delta t} + \frac{-y_{N-1}^k + y_N^k}{\Delta x^2} = \frac{u(t^k)}{\Delta x}.$$

Désignons par $\mathbb{I}$ la matrice identité, le schéma s'écrit donc sous forme matricielle

$$Y^k - Y^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A Y^k = \frac{\Delta t}{\Delta x} b^k, \quad \forall k \in [\![0, N_t]\!],$$

soit

$$\left(\mathbb{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) Y^k = \frac{\Delta t}{\Delta x} b^k + Y^{k-1}, \quad \forall k \in [\![0, N_t]\!],$$

et

$$Y^k = \begin{bmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_i^k \\ \vdots \\ y_N^k \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad b^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u(t^k) \end{bmatrix}.$$

Schéma numérique pour le problème adjoint. Pour résoudre le problème adjoint, on suggère d'utiliser le même schéma que pour le problème direct. Puisque $p(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur rétrograde, il convient d'inverser le temps et on pose $t^n = T - n\Delta t$. On désigne par p_i^n l'approximation de p telle que, $p_i^n \approx p(x_i, t^n)$ avec $(i,n) \in [\![1,N]\!] \times [\![0,N_t]\!]$.

On peut montrer (et il faut le faire) que l'adjoint p résout l'équation de la chaleur **rétrograde**

$$\begin{cases} \partial_t p(t,x) + \partial_{xx} p(t,x) = 0 & t \in [0,T],\ x \in [0,L] \\ p(T,x) = 0 & x \in [0,L] \\ p(t,0) = 0 & t \in [0,T] \\ \partial_x p(t,L) = y(u)(t,L) - z_d(t) & t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1}$$

et le schéma s'écrit

$$\left(\mathbb{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) P^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} c^n + P^{n+1}, \quad \forall n \in [\![0,N_t]\!],$$

avec

$$P^n = \begin{bmatrix} p_1^n \\ \vdots \\ p_i^n \\ \vdots \\ p_N^n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad c^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ y_{N+1}^n - z_d(t^n) \end{bmatrix}.$$