Correction de l'examen n°2 - Contrôle optimal

EXERCICE N° 1 (contrôle optimal en dimension finie)

1. **Modélisation.** Il s'agit d'ajouter un terme pénalisant la quantité de poissons $\int_0^T x_u$ au cours de la période $[0,T]$. On propose donc de changer $J(u)$ en

$$J_\varepsilon(u) = J(u) + \varepsilon \int_0^T x_u(t)\, dt,$$

où $\varepsilon > 0$ est un coefficient pénalisant la quantité de poissons.

2. **Analyse du système (1).** Puisque $x(\cdot) = 0$ est une solution particulière de l'équation principale du système (1), on déduit du théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz que s'il existe un $t_0 \in [0,T]$ tel que $x_u(t_0) = 0$, alors, $x_u(\cdot) = 0$, en contradiction avec la condition initiale.

3. **Analyse du problème $(\mathscr{P})$.**

(a) Le Hamiltonien du problème $(\mathscr{P})$ est donné par :

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{H}: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0,-1\}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,p,p^0,u) & \mapsto & -p^0 xu + p(\alpha x - ux). \end{array}$$

Les conditions d'optimalité fournissent l'existence d'un couple non trivial (p^0, p) avec p absolument continu, tel que

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \partial_p H = \alpha x - ux \\ \dot{p} & = & -\partial_x H = p^0 u - \alpha p + up. \end{array}$$

On a de plus la condition de maximisation instantanée : $u(t)$ résout le problème

$$\max_{v\in[0,u_{\max}]} \mathscr{H}(x(t), p(t), p^0, v) \text{ équivalent au problème } \max_{v\in[0,u_{\max}]} v(-p^0 x(t) - p(t)x(t)).$$

Notons $M_1 = \mathbb{R}$, on a alors la condition de transversalité $p(T) \perp T_{x(T)}M_1 = \mathbb{R}$ d'où $p(T) = 0$. Montrons que $p^0 = -1$. Raisonnons par l'absurde : si $p^0 = 0$, alors $p(\cdot) = 0$ (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). On obtient une contradiction puisque (p^0, p) est non trivial. Ainsi, $p^0 = -1$.

(b) Résolvons le problème de maximisation instantanée. Notons que $x > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ll} \text{sur } \{x - px > 0\} = \{p < 1\}, & \text{on a } u = u_{\max} \\ \text{sur } \{x - px < 0\} = \{p > 1\}, & \text{on a } u = 0. \end{array}$$

Puisque p est continue et que $p(T) = 0$, il existe un voisinage de T inclus dans $\{p < 1\}$, et d'après les conditions d'optimalité, on a nécessairement $u = u_{\max}$ sur cet intervalle.

(c) D'après l'équation adjointe, on a $p'(t) = (p(t) - 1)u(t) - \alpha p(t)$. Ainsi, si $p(t_0) = 1$, alors $p'(t_0) = -\alpha$. On en déduit que $p < 1$ après t_0 et $p > 1$ avant t_0. Ainsi, t_0 est nécessairement isolé et $|\{p = 1\}| = 0$. On en déduit que le contrôle optimal u est bang-bang, égal à 0 ou $u_{\max}$ p.p.

(d) Sur un intervalle de l'ensemble $\{u = 0\}$, on a $p' = -\alpha p$ et $p > 1 > 0$ d'après la question (b), donc p est décroissante.

(e) On a déjà vu que u est *bang-bang*. Il reste à étudier le nombre de commutations. Supposons l'existence de t_0, un point de commutation de $\{u = u_{\max}\}$ à $\{u = 0\}$. Alors, on a vu $p'(t_0) = -\alpha < 0$ et ainsi, $p < 1$ après t_0 ce qui signifie que $u = u_{\max}$ après t_0. On obtient une contradiction. Par conséquent, on en déduit qu'il existe au plus un point de commutation.

4. **Algorithme numérique.** Le contrôle optimal s'écrit donc $u = u_{\max}\mathbb{1}_{[s,T]}$ avec $s \in [0,T]$. On peut ainsi chercher à résoudre le problème d'optimisation en dimension un :
$$\max_{s\in[0,T]} J(u_{\max}\mathbb{1}_{[s,T]}).$$
On peut utiliser n'importe quel algorithme d'optimisation en dimension un (gradient, Newton, etc.), à détailler sur la copie.

EXERCICE N° 2 (contrôle optimal en dimension infinie)

1. On applique le théorème de Lax-Milgram à la forme bilinéaire $a : (y,z) \mapsto \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla z$ définie sur $(H_0^1(\Omega))^2$ et à la forme linéaire $L : z \mapsto \int_\Omega (f + v\mathbb{1}_\omega)z$. On en déduit l'existence et l'unicité d'une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$. De plus, en appliquant le théorème de régularité elliptique, on montre que cette solution est en réalité dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et qu'elle est forte.
2. (a) et (b). Soit (v_n), une suite minimisante. Puisque chaque terme de (v_n) est uniformément borné dans L^2 (par $M^2|\Omega|$), qui est un espace de Hilbert. Par conséquent, à sous-suite près, (v_n), converge faiblement vers un élément v^* dans L^2. De plus, un passage à la limite dans l'inégalité $-M \leq v_n \leq M$, satisfaite p.p. dans Ω fournit $v^* \in L^\infty(\Omega; [-M,M])$.
Par minimalité, $(J(v_n))$ converge vers $\inf_{L^\infty(\Omega;[-M,M])} J$ et chaque terme est uniformément borné. Puisque $J(v_n)$ est une somme de deux termes positifs, chacun d'eux est borné, en particulier $(\|\nabla y_{v_n}\|_{L^2})$. Par conséquent (la norme L^2 du gradient est une norme équivalente à la norme H^1 dans H_0^1), la norme H^1 de y_{v_n} est uniformément bornée. D'après le théorème de Rellich-Kondrachov, il existe $y^* \in H_0^1$ et une sous-suite (v_{n_k}) tels que la suite $(y_{v_{n_k}})$ converge vers y^*, faiblement dans H^1 et fortement dans L^2.
3. On confond abusivement (v_n) et ses sous-suites. Soit $z \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant la formulation variationnelle de $(\mathcal{E})$, on a
$$\int_\Omega \nabla y_{v_n} \cdot \nabla z = \int_\Omega (f + v_n \mathbb{1}_\omega) z.$$
Les résultats de convergence de la question précédente permettent de passer à la limite et assurent que y^* est solution faible du problème $(\mathcal{E})$ associée à v^*. De plus, d'après les résultats de convergence établis dans la question précédente, on a
$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla y_{v_n}|^2 \geq \int_\Omega |\nabla y^*|^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega y_{v_n}^2 = \int_\Omega y^{*2},$$
en utilisant la semi-continuité inférieure de la norme H^1 pour la topologie faible. On en déduit que $J(v^*) \leq \inf_{L^\infty(\Omega;[-M,M])} J$, cette dernière inégalité est donc une égalité et l'existence s'ensuit.
4. En utilisant la composition des différentielles, on montre que
$$DJ(v^*) \cdot (v - v^*) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{J(v^* + \varepsilon(v - v^*)) - J(v^*)}{\varepsilon} = \int_\Omega (\nabla y_{v^*} \cdot \nabla z + y_{v^*} z)$$
où z désigne la solution de l'EDP
$$\begin{cases} -\Delta z = (v - v^*)\mathbb{1}_\omega & \text{dans } \Omega \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
5. Remarquons que, en effectuant une intégration par parties et en utilisant les conditions au bord sur z, on a
$$DJ(v^*) \cdot (v - v^*) = \int_\Omega z(-\Delta y_{v^*} + y_{v^*})$$
On multiplie l'équation précédente par p et on intègre deux fois par parties. Il vient :
$$-\int_\Omega z\Delta p + \int_{\partial\Omega} (z\partial_n p - p\partial_n z) = \int_\Omega (v - v^*)\mathbb{1}_\omega p.$$
Cela nous conduit à introduire l'état adjoint p solution du problème
$$\begin{cases} -\Delta p = -\Delta y_{v^*} + y_{v^*} & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
Alors, on a $DJ(v^*) \cdot (v - v^*) = \int_\Omega (v - v^*)\mathbb{1}_\omega p$ et on en déduit que $\nabla J(v^*) = \mathbb{1}_\omega p$.

6. Il est possible ici d'utiliser un algorithme de gradient projeté : soit $\rho > 0$, le pas de la méthode (qui peut éventuellement être choisi variable).
   - *Initialisation :* on se donne $u^0 \in L^\infty(\Omega; [-M, M])$.
   - *Iteration k :* $u^k \in L^\infty(\Omega; [-M, M])$ est connu. On détermine y^k et p^k, les solutions respectives des EDP

     $$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta y^k = f + u^k \mathbb{1}_\omega(x) & \text{dans } \Omega \\ y^k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta p^k = -\Delta y^k + y^k & \text{dans } \Omega \\ p^k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

     On pose

     $$u^{k+1} = \Pi_{[-M,M]}(u^k - \rho \mathbb{1}_\omega p^k),$$

     où $\Pi_{[-M,M]}$ désigne l'opérateur de projection défini par $\Pi_{[-M,M]} : u \mapsto \min\{\max\{-M, u\}, M\}$.
   - *Arrêt :* lorsque $\|u^{k+1} - u^k\|_{L^2}$ suffisamment petit (par exemple).