Contrôle optimal - T.P. n° 1

Utilisation d'une "boîte noire" pour résoudre les problèmes de contrôle optimal

---

Cette séance de TP a pour but la prise en main d'un logiciel "boîte noire" IpOpt [1] (Interior Point OPTimizer) permettant la résolution de problèmes d'optimisation non-linéaires à l'aide d'une méthode dite de points intérieurs. IpOpt sert à trouver un minimum (local) de problèmes d'optimisation de la forme

$$\inf_{x\in K} f(x) \qquad \text{où} \qquad K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_L \leq g(x) \leq g_U\},$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sont des fonctions régulières. IpOpt se révèle souvent efficace, même pour traiter des problèmes de grande dimension. IpOpt est accessible gratuitement par l'intermédiaire du package Python appelé `Gekko`. Si vous utilisez votre machine personnelle, vous pouvez l'installer à l'aide de la ligne de commande `pip install gekko`.

Tout au long de ce TP, vous pourrez vous référer à la page web relative au package `Gekko` :

`https://gekko.readthedocs.io/en/latest/index.html`

Pour vous aider, le notebook `Start_Gekko.ipynb` contient quelques exemples de résolution de problèmes d'optimisation et de contrôle optimal [2], vous pouvez le télécharger sur la page web du cours.

Préliminaires

Résoudre théoriquement le problème d'optimisation non-linéaire

$$\inf_{(x_1,x_2)\in K} x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - 6x_2 - 7 \quad \text{avec} \quad K = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2 \text{ et } x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

Utiliser alors `Gekko` pour résoudre numériquement ce problème.

Problèmes de contrôle optimal à résoudre numériquement

Problème de temps minimal. (contrôle d'un tram, 1$^{\text{ère}}$ version) On veut déterminer le contrôle $u(\cdot)$ et temps minimal T nécessaire pour que la solution (x, y) du système contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) & t \in]0, T[\\ \dot{y}(t) = u(t) & t \in]0, T[\\ x(0) = y(0) = 0 & \end{cases}$$

satisfasse $x(T) = 0$, $y(T) = -1$, sous la contrainte $|u(t)| \leq 1$ p.p. $t \in]0, T[$. Résoudre numériquement ce problème.

---

1. Pour aller plus loin et comprendre quel algorithme est implémenté, on peut se référer à l'article :
A. Wächter and L. T. Biegler, On the Implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming, Mathematical Programming 106(1), pp. 25-57, 2006
que l'on peut télécharger sur la page web du cours.
2. Ces exemples sont extraits de la page `https://apmonitor.com/wiki/index.php/Main/GekkoPythonOptimization`.

Problème de temps minimal. (contrôle d'un tram, 2$^{\text{ème}}$ version). Modifier le problème précédent pour minimiser une combinaison convexe du temps final et de $\frac{1}{2}\int_0^T(\dot{x}(t)^2 + x(t)^2)\,dt$ et pour avoir $x(T) = 0$ et $y(T) \in [-1-\varepsilon, -1+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$ est un paramètre fixé par l'utilisateur.

Contrôle d'insectes. Pour traiter une population $x(0)$ d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population $y(0)$ d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles. On suppose que les prédateurs que l'on introduit se reproduisent, de manière proportionnelle au nombre de nuisibles. Le contrôle $u(\cdot)$ est le taux de disparition des prédateurs. Pour simplifier l'écriture on normalise les variables de façon à ce qu'aucune constante biologique n'intervienne dans l'écriture du système. Le modèle s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)) & t \in]0, T[\\ \dot{y}(t) = -y(t)(u(t) - x(t)) & t \in]0, T[\\ x(0) = 1,\ y(0) = 4 \end{cases}$$

où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte ponctuelle : $0 < 1 \leq u(t) \leq 3$ p.p. $t \in [0, T]$.

Analyse du système.

1. Démontrer que, pour tout contrôle u, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ sur $[0, T]$.
2. On rappelle que, de manière générale, un point d'équilibre d'un système de contrôle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ est un couple (x_e, u_e) (indépendant du temps) tel que $f(x_e, u_e) = 0$.

   Donner tous les points d'équilibre du système dans le cadran $x > 0, y > 0$ (et les représenter sur un graphique dans ce quadrant).
3. Tracer le portrait de phase de ce système (champ de vecteurs et trajectoires) en l'absence de contrôle ($u(\cdot) = 0$) et pour le choix de contrôle $u(\cdot) = 2$. Commenter.

Contrôle optimal de ce système. On demande de résoudre numériquement le problème de contrôle optimal

$$\inf_u \{T \mid x(T) = a,\ y(T) = 1\}$$

où $a \in [1, 3]$ est donné.

Tracer la fonction de contrôle obtenue et la trajectoire optimale associée. Commenter les résultats obtenus.

On souhaite modifier le problème et inclure dans le critère, en plus du temps T, le coût L^2 du contrôle, soit $\int_0^T u(t)^2\,dt$? Modéliser ce problème et le résoudre.
