Projet - Incertitudes

M2 Statistiques

- Le projet ci-dessous est à rédiger en markdown (fichier source + export en pdf).
- Il est à rendre pour le **mardi 7 janvier à minuit** au plus tard.
- Si la discussion entre étudiants est encouragée, la rédaction est personnelle. Des paragraphes ou segments de code visiblement écrits à plusieurs seront notés en conséquence. Une partie de la notation sera consacrée à la clarté et la lisibilité du fichier rendu. Les ajouts au plan indiqué (par exemple des figures) sont bienvenus s'ils apportent à la compréhension.

Problème

On cherche à modéliser le flux de voitures sur une portion de route en fonction du flux entrant de voiture (que l'on suppose constant), des voitures déjà présentes et de leur vitesse maximale autorisée.

Soit ρ une densité de voiture dépendant d'une variable position à une dimension (la portion de route est assimilée à un segment) et du temps. On modélise son évolution par l'équation de Burgers

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho v(\rho) \right) = 0$$

avec $v(\rho) = v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}})$ la vitesse qui dépend de la densité de voiture.

ρ_{max} correspond à la densité maximale sur la route et v_{max} la vitesse maximale sur la route. Quitte à renormaliser ρ, on suppose que $\rho_{max} = 1$.

On se donne une condition initiale constante en deux morceaux:

$$\rho(t = 0, x) = \begin{cases} r_{in}, & x < x_C \\ r_{out}, & x > x_C \end{cases}$$

Pour $r_{in} < r_{out}$, cela revient à considérer un ralentissement à partir de x_C et à étudier le développement du bouchon pour un flux entrant constant.

Pour $r_{in} > r_{out}$, la circulation est difficile jusqu'en x_C et on regarde l'évolution de la reprise de la circulation à flux entrant constant.

Les variables d'entrée du modèle sont alors r_{in}, r_{out}, v_{max} et x_C.

Code

Le fichier burgers.ipynb contient le code python pour la résolution de l'équation de Burgers sur un intervalle de temps $[0, T]$ à choisir et l'affichage simultanée de ρ aux instants finaux et initiaux, soit ρ_0 et ρ_T.

Il a été écrit pour $x_C = .5$ et $r_{out} = .5$, et la notation r_R est utilisée pour r_{in}.

Questions

1. Reprendre le code pour y inclure x_C et r_{out} comme variables d'entrée.
2. On s'intéresse à la sortie ρ_T correspondant à l'état de la circulation ρ_T pour $T = 2$ en supposant

$$v_{max} \sim \mathcal{N}(.8, .03), r_{in} \sim \mathcal{U}([.2, .35]), r_{out} = \mathcal{U}([.5, .65]), x_C = .5$$

   Déterminer des intervalles de confiance pour $\rho_T(x)$ à l'aide d'une procédure de Monte-Carlo. Modifier l'affichage de ρ_T pour y ajouter ces intervalles.

Reprendre la même question en échangeant les lois de r_{in} et r_{out}.

3. Décrire les lois limites quand T est suffisamment grand.

On considère les lois suivantes:

$$v_{max} \sim \mathcal{N}(.7, .05), r_{in} \sim \mathcal{U}([.1, .5]), r_{out} = \mathcal{U}([.5, .9]), x_C = \mathcal{U}([.2, .8])$$

Quelle est la loi limite de ρ_T (aucune démonstration n'est exigée)?

4. On garde les lois précédentes et on considère Y le temps nécessaire pour que le bouchon soit résorbé. Estimer l'espérance, la variance et un intervalle de confiance à 95% de l'espérance de Y à l'aide de la méthode de votre choix.
5. Estimer les indices de Sobol individuels et totaux de chacune des variables d'entrée par Monte-Carlo. Quelle est le paramètre qui a le plus d'influence sur la résorbtion du bouchon?
6. Reprendre la question précédenta à l'aide du méta-modèle de votre choix. Commentez les résultats en termes de modification des sorties et des temps de calcul.
7. Evaluer de même et commentez les indices de Shapley des différentes variables.