

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação

117536 - Projeto e Análise de Algoritmos  
Turma: B

Análise Assintótica e Corretude do Algoritmo  
MergeSort Utilizando PVS

Gabriel Levi - 16/0006490  
Gabriel Nunes - 16/0006597

1 de dezembro de 2019

# 1 Introdução

A verificação formal de algoritmo, no que tange ao seu comportamento assintótico e a corretude do algoritmo é interesse central da Ciência da Computação. Por vezes, a prova via argumentação, isto é, lápis e papel pode ser suficiente para que o escritor convença o leitor de que o algoritmo está correto. Contudo, esse modelo de prova se sustenta muita vezes em passos de pura intuição, suposições que ambas as partes enxergam como um axioma, e saltos lógicos que por mais naturais que pareçam escondem um conjunto não-trivial de conceitos. A ocorrência desses aspectos em uma formalização pode ocultar falhas que, de fato, provem a incorretude do algoritmo e desmonstre um comportamento assintótico pior do que o esperado.

Como forma de minimizar o exposto anteriormente, introduz-se os sistemas de verificação de provas. Os verificadores garantem que os passos realizados dentro de uma prova respeitem o conjunto de regras de sua lógica intrínseca. Então, dadas premissas corretas e um ponto factível onde se deseja chegar, qualquer passo intermediário tem que, necessariamente, estar correto. Obviamente, construções ruins de objetivos e premissas podem levar a provas, ainda sim, incorretas ou impossíveis. Podemos concluir então que os sistemas de verificação pressupõe que uma prova, ou pelo menos a ideia da mesma, já exista e o usuário interessado o utilize para demonstrar que de fato aquela construção vale.

Um dos verificadores, PVS - Prototype Verification System - é a linguagem de especificação e provador automatizado de teoremas que aqui será utilizado. PVS trabalha com implementações em distribuições de diferentes versões de LISP. Em um arquivo, o usuário define premissas - um algoritmo - e teoremas. O arquivo é dado como entrada para o provador que requisita as regras a serem aplicadas até que o teorema desejado seja provado. As regras reconhecidas pelo PVS tratam-se simplesmente de regras da lógica de primeira-ordem. O PVS permite também que uma prova possa ser revisitada em uma representação gráfica que revela cada passo bem como suas dependências.

O objetivo deste trabalho é analisar assintoticamente o custo de tempo e a corretude do algoritmo de ordenação *Merge Sort* via PVS. O Merge Sort foi criado em meados de 1945 por John Von Neumann. A escolha deste algoritmo se deu por ser de implementação muito simples para múltiplas estruturas de dados tais como vetores e listas ligadas e por, ainda sim, ser um algoritmo com múltiplas aplicações dado o seu custo de execução. Este relatório apresentará

a ideia de prova formalizada via provador e fica a critério do leitor visitar o repositório para verificar a mesma. A formalização completa pode ser encontrada em [github.com/paa-2019-2/levi-nunes](https://github.com/paa-2019-2/levi-nunes).

Esse documento se organizará, daqui em diante, por um capítulo 2 de revisão teórica. Em seguida, no capítulo 3, a apresentação do algoritmo Merge Sort. O capítulo 4 apresentará a ideia abordada pelos autores para a análise de assintótica do algoritmo bem como argumentação sobre o pior e o melhor caso do mesmo. O capítulo 5 apresentará, como o capítulo anterior, a ideia abordada e sua argumentação. Por fim, o capítulo de conclusão, apresentará um resumo dos resultados aqui encontrados acompanhado de um meta-texto discorrendo sobre as principais dificuldades do trabalho com o verificador formal de provas.

## 2 Revisão teórica

Este capítulo apresentará conceitos importantes para o entedimento do que se segue nos capítulos posteriores. Caso sintam-se a vontade com o conceito, cujo o nome será enunciado no título de cada subseção, não há nenhum mal em pular. Cada um dos conceitos será apresentado de maneira simples mais preocupado com ser inteligível para o leitor do que com um profundo formalismo. Em compensação, uma boa bibliografia de apoio será indicada para aqueles interessados em se aprofundar ou que não acharam que o texto de uma ou mais subseções foi suficiente.

// Se não existir nada além de Notação Assintótica, converter pra uma seção de revisão sobre Notação assintótica.

### 2.1 Notação assintótica

### 2.2

## 3 O algoritmo Merge Sort

O algoritmo fundamenta-se na técnica Dividir-para-Conquistar. A técnica consiste em, dada uma instância do problema quebra-la em partes até que as mesmas sejam fáceis ou triviais de se resolver, por fim, cada pequena solução é combinada a fim de obter a solução para o problema maior. Apesar de parecer similar, esta técnica é bem diferente de programação dinâmica pois

cada subproblema é disjunto dos demais. Desta forma, o algoritmo recebe uma lista como entrada uma lista de elementos comparáveis e divide tal lista até que cada sublista possua tamanho unitário - trivialmente ordenável - e então combina as listas para obter a lista de entrada ordenada. O processo pode ser visualizado na figura 1 onde a parte superior diz respeito a dividir e a parte inferior diz respeito a conquista.

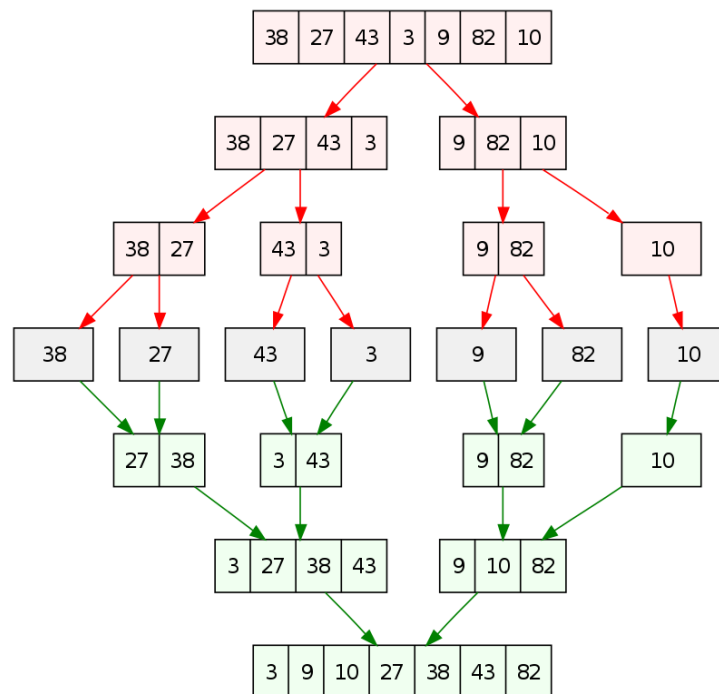


Figura 1: Ordenação da instância [38, 27, 43, 3, 9, 82, 10]

Por mais poderosa que seja a ideia, a implementação do Merge Sort é bem simples e pode ser deduzida a partir do pseudo-código abaixo, para fins de facilitar a leitura, denotamos a cabeça da lista  $\tau$  como  $car(\tau)$  e a sua calda como  $cdr(\tau)$ , o operador  $+$  significa inserção de um elemento no início

de uma lista ou a concanetação de duas listas.

---

**Algorithm 1:** MERGE

---

**Data:**  $\rho, \eta$  : *Sorted lists*  
**Result:** Sorted merge of  $\rho$  and  $\eta$   
**if**  $\rho = Nil$  or  $\eta = Nil$  **then**  
| **return**  $\rho + \eta$   
**else**  
| **if**  $car(\rho) \leq car(\eta)$  **then**  
| | **return**  $car(\rho) + MERGE(cdr(\rho), \eta)$   
| **else**  
| | **return**  $car(\eta) + MERGE(\rho, cdr(\eta))$   
|

---

---

**Algorithm 2:** MERGESORT

---

**Data:**  $\tau$  : *List of comparable elements*  
**Result:** *Sorted permutation of  $\tau$*   
**if**  $length(\tau) \leq 1$  **then**  
| **return**  $\tau$   
**else**  
|  $prefix \leftarrow MERGESORT(first\_half(\tau));$   
|  $suffix \leftarrow MERGESORT(second\_half(\tau));$   
| **return**  $MERGE(prefix, suffix);$   
|

---

## 4 Análise assintótica do Merge Sort

## 5 Corretude do algoritmo Merge Sort

A corretude de um algoritmo passa por demonstrar que o mesmo possui certas características independente da instância e que essas características se verifiquem antes, durante e depois da execução. Para um algoritmo de ordenação, é esperado que o mesmo responda para qualquer entrada uma permutação ordenada da mesma, isto é, a saída não só deve estar ordenada como também o número de ocorrências de cada elemento deve ser o mesmo da lista de entrada.

A análise de MERGESORT nos leva a uma série de resultados intermediários que fortalecem a argumentação da corretude do algoritmo. Tais resultados estão expostos abaixo nesta seção e a formalização em PVS dos

mesmos pode ser encontrado no repositório apresentado previamente na introdução deste texto.

**Lema 5.1.** *Para quaisquer  $\rho$  e  $\eta$ , listas, e  $n$  valor, o número de ocorrências de  $n$  em  $MERGE(\rho, \eta)$  é igual ao número de ocorrências de  $n$  em  $\rho$  mais o número de ocorrências de  $n$  em  $\eta$ .*

*Demonstração.* □

**Lema 5.2.** *Para quaisquer entradas  $\rho$  e  $\eta$ , listas, o tamanho da lista resultante de  $MERGE(\rho, \eta)$  é a soma dos tamanhos de  $\rho$  e  $\eta$ .*

*Demonstração.* □

**Lema 5.3.** *Para quaisquer entradas  $\rho$  e  $\eta$ ,  $MERGE(\rho, \eta)$  é uma permutação de concatenação de  $\eta$  e  $\rho$ .*

*Demonstração.* □

**Lema 5.4.** *Para quaisquer entradas  $\rho$  e  $\eta$ , se ambas as listas estão ordenadas então a resultante de  $MERGE(\rho, \eta)$  também será uma lista ordenada.*

*Demonstração.* Basta demonstrar que para qualquer iteração de  $MERGE$ , o menor elementos dentre ambas as listas é escolhido para inserção no final da lista parcialmente resultante. Uma vez que ambas as listas são ordenadas, necessariamente o menor elemento será a cabeça de  $\rho$  ou de  $\eta$ . Utilizando da definição de  $MERGE$  e induzindo sobre o tamanho de ambas as listas 3 situações emergem:

1. Alguma das listas  $\rho$  e  $\eta$  tem tamanho 0.
2. A cabeça de  $\rho$  é menor ou igual que a cabeça de  $\eta$ .
3. A cabeça de  $\rho$  é maior que a cabeça de  $\eta$ .

Na primeira situação, no máximo uma das listas possui elementos, então o elemento tomado para a composição da lista resultante será a cabeça (o menor elemento) daquela que ainda não é vazia, por conveniência, o algoritmo já retorna a lista inteira, mas se de fato tivesse que escolher apenas um, seria o menor disponível. O segundo e o terceiro caso são similares, a cabeça de  $\rho$  é igual ao menor elemento de  $\rho$  e o mesmo vale para a cabeça de  $\eta$ , logo, o menor entre os ambos será o menor dentre todos e este será escolhido para a inserção ao final da lista resultante, a chamada recursiva posterior cai novamente em algum dos 3 casos.

□

**Lema 5.5.** *Para qualquer entrada  $\tau$ , lista, o tamanho de  $\tau$  é igual ao tamanho de  $MERGESORT(\tau)$ .*

*Demonstração.* □

**Lema 5.6.** *Para qualquer lista  $\tau$ , a resultante de  $MERGESORT(\tau)$  é uma permutação de  $\tau$ .*

*Demonstração.* □

**Lema 5.7.** *Para qualquer lista  $\tau$ , a resultante de  $MERGESORT(\tau)$  é uma lista ordenada.*

*Demonstração.* □

**Teorema 5.8.** *Para qualquer lista  $\tau$ , a resultante de  $MERGESORT(\tau)$  é uma permutação ordenada de  $\tau$ .*

*Demonstração.* □

## 6 Conclusão

## Referências