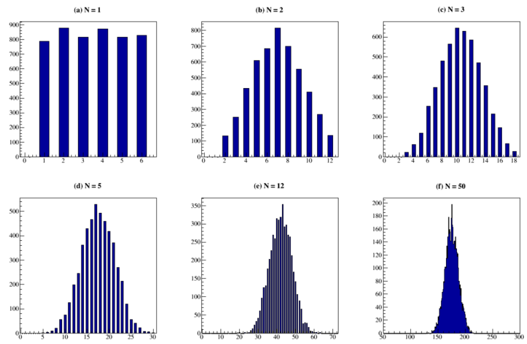
H4: Fouten

4.1 het centrale limiet theorema

4.1.1 som van onafhankelijke variabelen

Gauss in discrete exp.	Gooi een dobbelsteen > kans op elk nummer is: $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$ gooi nu twee dobbelstenen gelijk > hoe vaker je gooit hoe meer de distributie een Gauss benaderd 

4.1.2 het centrale limiet theorema

theorem: centrale limiet theorema 4.1.1	Als we de som X maken van N onafhankelijke variabelen x_i met i = 1,2,…,N > stel dat die elk afkomstig zijn van een verdeling met gemiddelde μ_i en standaardafwijking σ_i > dan geldt voor de verdeling van X: 1. ze een verwachtingswaarde heeft $< X >= \sum_{i=1}^{N} \mu_i$ 2. ze een variantie heeft $V(X) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$ 3. ze **Gaussisch** wordt als $N \longrightarrow \infty$
stelling: centrale limiet bij afh. vars.	Als de variabelen niet onafhankelijk verdeelt zijn > dan geldt in 4.1.1 stelling 1 wel, maar niet 2

4.2 werken met fouten

4.2.1 waarom één meting altijd fout is

fouten in exp.	metingen verkrijgen fouten van vele verschillende fouten > onvolkomenheden van metingen komen niet van één effect, maar meerdere > CLT is perfect van toepassing

4.2.2 fouten op herhaalde metingen

Som van herhaalde metingen	meet eenzelfde grootheid X meerdere malen > CLT toepassen in eenvoudigste vorm nl: alle μ_i zijn gelijk μ en alle σ_i zijn gelijk σ > verwachtingswaarde op de som S_N van N metingen: $< S_N >= \sum_{N} \mu = N\mu$
gemiddelde op herhaalde metingen	De verwachtingswaarde van het (ongekende) gemiddelde $\bar{x} = \frac{S_N}{N}$ is dan: $< \bar{x} >= \mu$

onderscheid X en ¯x¯	Theoretische verwachtingswaarde is <X> Experimentele verwachtingswaarde is <¯x¯> > afhankelijk van statistische fluctuaties
stelling: variantie van ¯x¯	Indien de metingen onafhankelijk zijn > variantie van ¯x¯ is dan: $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{N}$ geeft ger verschil tss je meting ¯x¯ en de 'ware' waarde µ
4.2.3 gewogen gemiddelde	
def: gewogen gemiddelde	Voor N metingen van dezelfde grootheid met elk een fout σ_i > het juiste gemiddelde is het gewogen gemiddelde: $\bar{x} = \frac{\sum_i^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$
stelling: resolutie gewogen gem.	= de noemer: $V(\bar{x}) = \frac{1}{\sum_i^N \sigma_i^{-2}}$
4.3 fouten combinatie	
4.3.1 één variabele	
stelling: variantie toevallige var.	De variantie ve toevallige variabele fx uit een lin. functie f = aX+b ve toev. var. X is: $V(f_X) = a^2\, V(X)$ Dit kan ook geschreven worden in termen van de standaardafwijking als: $\sigma_f = \lvert a \rvert \sigma_x$
stelling: variantie ve functie	voor een algemene functie f(X) ve toev. var X met een kleine variantie V(x) geldt: $V(f) \approx \left(\frac{df}{dx}\right)^2 V(x)$
stelling: afhankelijkheid van de correlatie coëfficiënt	De correlatie coëfficiënt tss de toev. var X en een lin. ftie fx = f(X) = aX+b ervan > is onafhankelijk van σ_x en is altijd +-1
4.3.2 twee variabelen	
stelling: variantie ftie twee variabelen	Zei f(X,Y) = aX + bY + c een lineaire functie van twee toev. vars. X en Y Zei V(X) en V(Y) de varianties van X en Y > dan heeft de functie een variantie: $V(f) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$
variantie som en verschil	Door kwadratische aard van de stelling geldt er: $V(X-Y) = V(X) + V(Y) = V(X+Y)$
stelling: variantie algemene ftie twee variabelen	Zei f(X,Y) een algemene functie van twee toevallige variabelen X en Y Zei σ_x^2 en σ_y^2 hun varianties > dan geldt: $\sigma_f^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)\rho\sigma_x\sigma_y$ waarbij de afgeleiden weer geëvalueerd worden bij de echte of gemeten waarden (x, y)

4.3.3 de wet van foutenpropagatie	
stelling: variantie algemene functie in m toevallige variabelen	Zei f(**X**) een functie van m toev. variabelen **X** = {$X_{(1)}$,…,$X_{(m)}$} > dan geldt: $$V(f)=\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial X_{(p)}}\right)^2 V(X_{(p)})+\sum_{p}\sum_{q\neq p}\left(\frac{\partial f}{\partial X_{(p)}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial X_{(q)}}\right)\mathrm{cov}(X_{(p)},X_{(q)})$$ of in matrixvorm: $$V_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial X_{(1)}} & \frac{\partial f}{\partial X_{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_{(m)}}\end{pmatrix}\mathbf{V}_X\begin{pmatrix}\partial_{X_{(1)}}f\\ \partial_{X_{(2)}}f\\ \vdots\\ \partial_{X_{(m)}}f\end{pmatrix}$$ met $\mathbf{V_X}$ de covariantiematrix
th: wet van de foutenpropagatie	Zei f(**X**) een algemene functie van m onafhankelijke toev. variabelen Zei σ_i de respectievelijke fout van elke variabele > f heeft een variantie: $$\sigma_f^2=\left(\frac{df}{dx_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{df}{dx_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{df}{dx_m}\right)^2\sigma_m^2$$
4.3.4 correlatie tss functies van multidimensionale variabelen	
herhaling covariantie	als er m variabelen zijn: **x** = {$x_{(1)}$,…,$x_{(m)}$} (waarbij de haakjes aanduiden dat het gaat om m elementen in één enkele meting) > covariantie tss twee variabelen in een steekproef is dan: $$\mathrm{cov}(x_{(i)},x_{(j)})=\overline{x_{(i)}x_{(j)}}-\overline{x_{(i)}}\;\overline{x_{(j)}}$$ dit is precies hetzelfde voor twee ars met een gemeenschappelijke verdeling $P(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(m)})$ $$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_{(i)},X_{(j)})&=<X_{(i)}X_{(j)}>-<X_{(i)}><X_{(j)}>\\&=<X_{(i)}X_{(j)}>-\mu_i\mu_j\end{aligned}$$ waarbij μ_i identiek is aan de verwachtingswaarde $<X_{(i)}>$. Dit zijn de elementen van de *covariantie matrix*, ook bekend als de foutenmatrix $\mathbf{V}$ waarbij $V_{ij}=\mathrm{cov}(X_{(i)},X_{(j)})$. De diagonaalelementen zijn precies de varianties: $$V_{ii}=\mathrm{cov}(X_{(i)},X_{(i)})=\sigma_i^2.$$ de *correlatiematrix* is het dimensieloze equivalent: $$\rho_{ij}=\frac{\mathrm{cov}(X_{(i)},X_{(j)})}{\sigma_i\sigma_j}$$ > geeft aan hoe sterk twee vars gecorreleerd zijn
stelling: covariantie tss functies	Zei $f_1(X_{(1)},\ldots,X_{(m)})$ en $f_2(X_{(1)},\ldots,X_{(m)})$ twee functies met m variabelen > de covariantie is dan: $$\mathrm{cov}(f_1,f_2)=\sum_{p}^{m}\sum_{q}^{m}\left(\frac{\partial f_1}{\partial X_{(p)}}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial X_{(q)}}\right)\mathrm{cov}(X_{(p)},X_{(q)})$$
def: covariantiematrix tss k functies	De covariantiematrix tss k functies **f** = {f_1,…,f_k} van m vars **X** = {$X_{(1)}$,…,$X_{(m)}$) } is: $$\mathbf{V_f}=\mathbf{G}\,\mathbf{V_x}\,\tilde{\mathbf{G}}$$ waar $\mathbf{V_X}$ en $\mathbf{V_f}$ *foutenmatrices* zijn van X en f en $\mathbf{G}$ is de *Jacobi-matrix*: $$\mathbf{V_f}:V_{pl}=\mathrm{cov}(f_p,f_l)\qquad \mathbf{V_X}:V_{ij}=\mathrm{cov}(X_{(i)},X_{(j)})\qquad \mathbf{G}:G_{pi}=\left(\frac{\partial f_p}{\partial X_{(i)}}\right)$$

4.3.5 fractionele fouten en beperkingen van de wet	
stelling: fractionele fout	Voor producten en quotienten worden de fractionele fouten kwadratisch opgeteld $$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$
4.4 systematische fouten	
verschil systematisch - toevallige fout	bij systematische fouten geldt er: 1: experiment herhalen doet het netto effect van de fouten niet verminderen 2: metingen op verschillende plaatsen zijn niet onafhankelijk van elkaar
4.4.1 systematische fouten ontdekken en elimineren	
types systematische fouten minst erg | | | \/ ergst	1: factoren met gekende fouten > expliciet te evalueren in de gegevens 2: fout op getallen waarvan je niet precies de onnauwkeurigheid kan weten > intelligent raden wat de syst. fout kan zijn 3: syst. fout doordat je impliciet constanten gebruikt zonder ervan bewust te zijn > altijd opletten en niet te snel assumpties maken 4: syst. fout doordat bvb een elektronische component plots uitvalt > vaak genoeg opstelling checken
4.4.2 systematische fouten evalueren	
combinatie van stat. en syst. fouten	- statistische fouten trede op door toevallige statistische fluctuaties - systematische fouten zijn alle andere fouten > het kan handig zijn om deze fouten apart voor te stellen: $A = -10.2 \pm 1.2 \pm 2.3$
4.4.3 leven met systematische fouten	
stelling: variantie van syst. fouten	Zei er twee metingen x_1 en x_2 met een gemeensch. syst. fout S Zei er voor elk een statistische fout σ_1 en σ_2 > deel de meeting op in een systematisch en statistisch deel > x_1^R met een statistische fout σ_1 en x_1^S met een syst. fout S, analoog x_2 > x_1^R en x_2^R zijn onafhankelijk x_1^S en x_2^S zijn volledig gecorreleerd (a) De variantie van x_i is dan gegeven door : $$V(x_i) = \sigma_i^2 + S^2$$ (b) De covariantie tussen x_1 en x_2 is alleen afhankelijk van de systematische fout: $$\text{cov}(x_1, x_2) = S^2$$