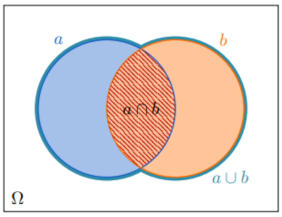
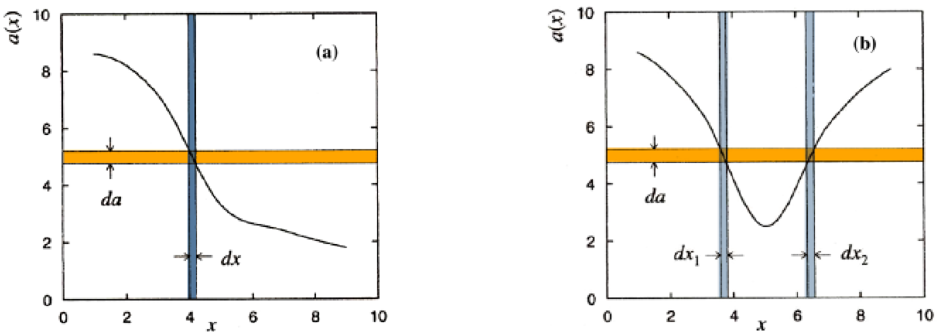
H2: Theoretische distributies

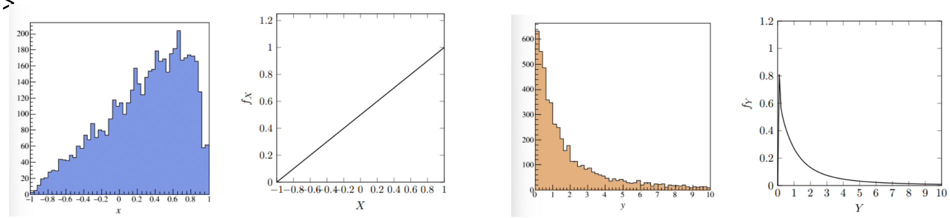
2.1 inleiding: wat is waarschijnlijkheid

2.1.1 wiskundige waarschijnlijkheid	
th: axioma's vd waarschijnlijkheid	zei Ω = w_1, w_2,... een verzameling mogelijke resultaten, evenementen ve experiment > voor elk evenement w is P(w) de waarschijnlijkheid > hiervoor geldt: 1. $P(\omega) \geq 0$ 2. $P(\omega_1 \text{ of } \omega_2) = P(\omega_1 \cup \omega_2) = P(\omega_1) + P(\omega_2)$ als ω_1 en ω_2 exclusief zijn. 3. $\sum P(\omega_i) = 1$, waarbij de som loopt over alle exclusieve evenementen
afleiding uit theorema	$P(\text{niet } E) = 1 - P(E)$, > dus P(E) ≤ 1
2.1.2 objectief- propensiteit	
propensiteit	= wanneer bepaalde evenementen een zelfde kans hebben om voor te komen, zullen de resultaten van een experiment reeksen produceren die hiermee overeenkomen
functies en waarschijnlijkheidssym-metrie	bekijk een hoek θ die 'toevallig' kan zijn > waarschijnlijkheid dat θ ∈ [80°,90°] is dezelfde als θ ∈ [10°, 20°] > waarschijnlijkheidssymmetrie Neem nu de cosinus van deze hoeken > cos(80°, 90°) is 4 keer groter dan cos(10°, 20°) > geen symmetrie in de cosinusfunctie
2.1.3 empirische definitie	
def: waarschijnlijkheid	Een experiment wordt N keer uitgevoerd en een bepaald resultaat A wordt in M gevallen waargenomen > als N→∞ zal de verhouding M/N een bepaalde limiet toegaan die we definiëren als waarschijnlijkheid P(A) van A dus: $\lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N} \equiv P(A)$ (n_a = M)
def: ensemble/collectief	= verzameling van alle N gevallen
eigenschappen van de definitie	- de waarschijnlijkheid van een evenement is geen eigenschap vh experiment > is gemeenschappelijk eigenschap van experiment en ensemble - experiment moet herhaalbaar kunnen zijn onder identieke omstandigheden en met verschillende mogelijke uitkomsten
2.1.4 subjectieve waarschijnlijkheid	
conditionele kans P(a|b)	= de waarschijnlijkheid van a op voorwaarde dat b waar is
th: theorema van Bayes	Er geldt: $p(a\|b)p(b) = p(a \underbrace{\cap}_{\text{en}} b) = p(b\|a)p(a)$ dus: $p(a\|b) = \frac{p(b\|a)p(a)}{p(b)}$
th: kan op b uit a	$p(b) = p(b\|a)p(a) + p(b\|\bar{a})[1 - p(a)]$ > $\bar{a}$ betekent[2] "niet a". 

Bayesiaanse statistiek > subjectieve waarsch.	De waarschijnlijkheid dat een theorie a juist is wordt bekeken als eeb subjectieve mate van geloof > kennen we a priori als p(a) Nieuwe experimentele info b gaat de mate van geloof beïnvloeden > dankzij deze kennis wordt a posteriori de waarschijnlijkheid p(a|b) aangepast >> voor verschillende info b kan de a posteriori waarsch. anders zijn
probleem Bayesiaanse statistiek	de initiële, a priori, mate van geloof p(a) is gebaseerd op gokwerk of intuïtie > onwetenschappelijk en onbetrouwbaar
2.1.5 conclusies over waarschijnlijkheid	
conc: waarschijnlijkheid	= de limiet ve frequentie, als objectief gegeven of subjectieve graad van vertrouwen > er is een verschil tss de 'frequentistische' en 'Bayesiaanse' statistiek > voornamelijk in de interpretatie
2.2 theoretische waarschijnlijkheid(sverdeling)	
2.2.1 de wet van de grote getallen	
def: toevallige variabele	= een functie X die met elke uitkomst w ve experiment een reëel getal x associeert
def: discrete variabele	= een toevallige variabele waarvoor het aantal mogelijke waarden aftelbaar is
def: parameter ve experiment	bekijk een experiment waarin we muntstukken opgooien > het aantal muntstukken is een *parameter* vh experiment
waarschijnlijkheidsverdeling	=verdeling van alle kansen op alle verschillende mogelijke uitkomsten ve experiment
def: kans van een gebeurtenis	de kans $p_n(X)$ dat een gebeurtenis X zich voordoet wordt behaald door hetzelfde exp. n keer te herhalen en het aantal waarnemingen $f_n(X)$ vd gebeurtenis te bepalen > dan: $p_n(X) = \frac{f_n(X)}{n}$
th: wet van de grote getallen	naarmate de grootte n vd steekproef toeneemt, neigen de waargenomen freq. naar de theoretische waarschijnlijkheid voor $n \to \infty$
def: empirische waarschijnlijkheid	= de limiet van kans naar de oneindigheid: $P(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(X)}{n}$
2.2.2 continue variabele	
def: continue toevallige variabele	= toevallige variabele die een continuüm van waarden kan aannemen
def: waarschijnlijkheidsdichtheid p.d.f	Voor een continue toevallige variabele X > de waarschijkheidsdichtheid = de niet-negatieve functie $f_X(x)$ waarvoor geldt in een willekeurig interval $[x_1,x_2]$: $P(X \in [x_1; x_2]) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$ of dus: $f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \delta x)}{\delta x}$
stelling: waarsch.dichth. over volledig interval 2.2.1	Definieer $f_X(x)$ zodat de toevallige variabele met zekerheid een waarde aanneemt tss $-\infty$ en $+\infty$: $P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

def: cumulatieve verdeling c.d.f	= de waarschijnlijkheid dat de continue variabele X een waarde aanneemt die kleiner of gelijk is aan een bepaald getal x $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\theta) d\theta$$ > voor discrete variabelen kunnen we die definiëren als: $$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(x_i)$$
def: kwantiel x_α	= de waarde van X waarvoor $F(X=x_\alpha) = \alpha$ met $0 \le \alpha \le 1$ > ie: inverse van de cumulatieve verdeling $$x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$
waarsch. via cdf	We kunnen de waarschijnlijkheid van een variabele berekenen via de cdf: $$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x \le x_2) - P(x \le x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$
2.2.3 momenten	
def: verwachtingswaarde	voor een discrete toevallige variabele X met waarsch.dichth. $P(X=x_i)$, i = 1,2,… > is: $$< X >= \sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)$$ voor een continue toev. var. X met waarsch.dichth. $f_X(x)$ is: $$< X >= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$
def: verwachtingswaarde ve functie	Voor een functie g(X) vd discrete var. X met waarsch.dichth. P(X) is dit: $$< g >= \sum_{i=1}^{k} g(x_i) P(x_i)$$ als deze var. continu is: $$< g >= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ f_X(x) dx$$
stelling: verw.waarde ve lin. functie 2.2.3	voor een lineaire functie g(X) = aX + b met a en b cte: $$< g >= a < X > +b$$
stelling: som en product verw.w.	De verw.waarde ve som is de som vd verw.waarden= $$< f + g >= \sum (f(x) + g(x)) P(x) = \sum f(x) P(x) + \sum g(x) P(x) =< f > + < g >$$ > dit geldt **niet** voor het product: $$< f\ g >= \sum (f(x) g(x)) P(x) \ne \sum f(x) P(x) \cdot \sum g(x) P(x) =< f >< g >$$
def: r-de moment	voor een toevallige variabele x is dit: $$\mu_r' =< X^r >= \int_{-\infty}^{+\infty} X^r f(X) dX$$
def: r-de centrale moment	voor een toevallige variabele x is dit: $$\mu_r =< (X - < X >)^r >= \int_{-\infty}^{+\infty} (X - < X >)^r f(X) dX$$
variantie	= 2de centrale moment: $$V(X) =< (X - < X >)^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} (X - < X >)^2 f(X) dX =< X^2 > - < X >^2$$

def: momentgegenereerde functie	voor een toevallige variabele X is dit: $M_X(t) =< e^{tX} >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(X)dX$ met t∈ℝ
stelling: afgeleide en mom.geg. ftie	Als deze bestaat is de n-de afleiding van $M_X(t)$ in t=0 het n-de moment: $\mu'_n =< X^n >= \left.\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\right\|_{t=0}$
def: karakteristieke functie	voor een toevallige variabele, is dit de Fourier-transformatie vd waarsch.dichtheid: $\phi_X(t) =< e^{itX} >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} f(X)dX$ met t∈ℝ > als F(X) overal continu is dan geldt: $f_X(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(t) e^{-iXt} dt$
stelling: som van functies	Zei X en Y twee onafh. toevallige variabelen Zei $\phi_X(t)$ en $\phi_Y(t)$ hun karakteristieke functie > de karakteristieke ftie van de som Z = X+Y: $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$
2.2.4 functie van toevallige variabele	
functie ve variabele a(X)	Zei X verdeeld is volgens waarsch.verdeling $f_X(X)$ > we kunnen nu de verdeling van een nieuwe toevallige variabele A=a(X) bekomen: De waarschijnlijkheid voor X∈[x,x+dx] is gelijk aan de waarschijnlijkheid voor de toevallige variabele A∈[a,a+da] > in de formule: $g_A(a')da' = \int_{dS} f_X(x)\, dx$ Waarbij de integraal uitgevoerd wordt over het infinitesimaal element dS > dS is het gebied in x tss a(x) = a' en a(x) = a'+da' indien de functie a(x) geïnverteerd kan worden tot x(a) dan: $g_A(a)da = \left\| \int_{x(a)}^{x(a+da)} f_X(x')dx' \right\| = \int_{x(a)}^{x(a)+\left\|\frac{dx}{da}\right\|da} f_X(x')dx'$ of nog $g_A(a) = f_X(x(a)) \left\|\frac{dx}{da}\right\|$ 
def: parametrische familie $f(X;\vec{\theta})$	van waarschijnlijkheidsverdelingen of -dichtheiden ve toevallige variabele X > is dit een verzameling van verdelingen of dichtheden beschreven door een of meerdere parameters $\vec{\theta}$.

2.3 multi-dimensionale uitbreiding	
2.3.1 gezamenlijke waarschijnlijkheidsverdeling	
def: gezamenlijke waarsch.verd. f_{XY}	voor een toevallige variabele $\vec{X} = \{X, Y\}$, waarbij X en Y waarden aannemen in het gebied S is dit: $f_{XY}(x,y)dxdy = \text{waarschijnlijkheid}((X \in [x, x+dx]) \cap (Y \in [y, y+dy]))$
stelling: normalisatie f_{XY}	Vermits X en Y zeker een waarde moeten aannemen hebben we de normalisatie voorw.: $\int\int_S f_{XY}(x,y)dxdy$ met S een gebied waarin f_{XY} bestaat
def: covariantie	Voor twee toevallige variabelen X en Y met gezamenlijke waarsch.dichth $f_{XY}(x,y)$ in het domein S is dit: $\sigma_{XY} = \text{cov}(X,Y) = \iint_{(x,y)\in S} (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) f_{XY}(x,y)dxdy$ Dat kan vereenvoudigd worden tot : $\sigma_{XY} = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle$
def: correlatie	tss twee toevallige variabelen X en Y is dit: $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ met $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
def: covariantie- en correlatiematrix	voor m toevallige variabelen $\vec{X} = X_{(1)}, \ldots, X_{(m)}$ is $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ > zijn mcm symmetrisch met diagonale elementen: $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ en alle $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$
stelling: diagonale matrix	Indien X-> een vector is van onafhankelijke toevallige variabelen > dan zijn de covariantie- en correlatiematrix diagonaal
2.3.2 marginale waarschijnlijkheidsverdeling	
def: marginale waarsch.verdeling	voor een continue waarschijnlijkheidsverdeling f_{XY} zijn dit f_X en f_Y waarvoor: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$ > 
stelling: onafhankelijke variabelen	Continue toevallige variabelen zijn onafhankelijk indien hun gezamenlijke verdeling het product is van de marginale verdelingen van X en Y $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\ f_Y(y) \qquad \forall (x,y) \in S$ > indien dit niet zo is zijn de variabelen afhankelijk

2.3.3 conditionele waarschijnlijkheidsverdeling	
def: conditionele waarschijnlijkheidsverdeling	voor een (continue) toevallige variabele X gegeven dat de variabele Y de waarde y aanneemt is dit: $$g_X(x\|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int f(x',y)dx'}$$ > hetzelfde kan voor Y tov X gevonden worden: $$h_Y(y\|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int f(x,y')dy'}$$
2.3.4 terugkeer van het Theorema van Bayes	
theorema van Bayes	combineer de definities voor marginale en conditionele: $$g_X(x\|y)f_Y(y) = f_{XY}(x,y) = h_Y(y\|x)f_X(x)$$ > dus we kunnen vinden: $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_X(x\|y)f_Y(y)dy$$ $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_Y(y\|x)f_X(x)dx$$
stelling: gezamenlijke waarsch.verd	We kunnen nu schrijven: $$f_{XY}(x,y) = g_X(x\|y)f_Y(y) = h_Y(y\|x)f_X(x)$$
2.3.5 functie van meerdere toevallige variabelen	
def: waarschijnlijkheidsverdeling $f_A(a)$	voor een functie $a(\vec{X})$ is deze gedefinieerd als: $$f_A(a')d(a') = \int \cdots \int_{dS} f_{\vec{X}}(\vec{x})d\vec{x} \quad (2.30)$$ waarbij de integraal uitgevoerd wordt over het infinitesimale **volume**-element dS, gedefiniëerd als het gebied in $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(m)}$-ruimte tussen de twee **hyper-oppervlakken** $a(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(m)}) = a'$ en $a(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(m)}) = a' + da'$.