H9: wachtrijtheorie

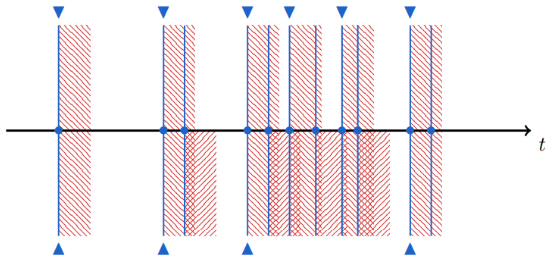
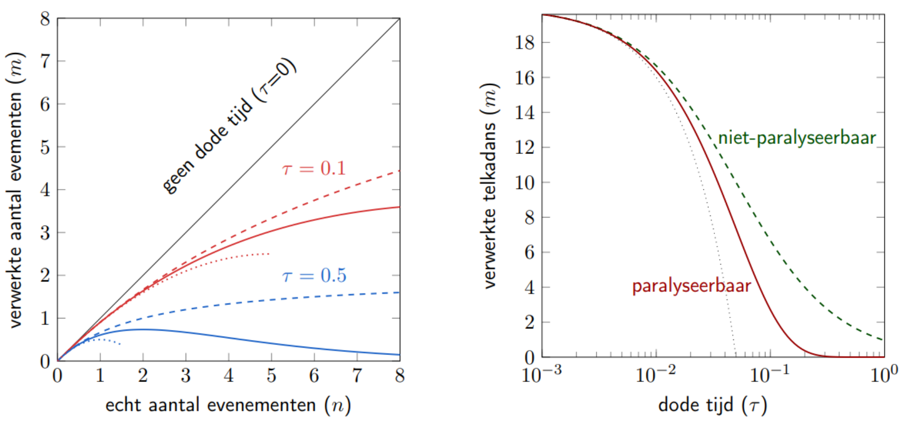
9.1 wachtrijtheorie in Fysica

9.1.1 tijdsintervallen tussen toevallige gebeurtenissen

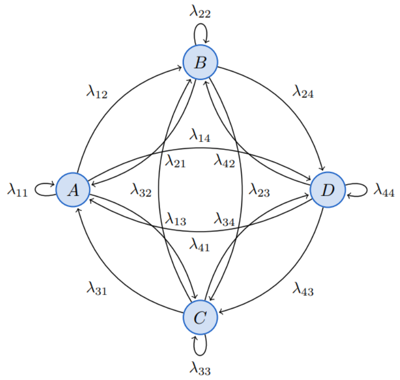
probleemstelling tijdinterval	Voor een experiment waarbij evenementen voorkomen met een gemiddelde snelheid > stel er gebeuren λ evenementen per tijdseenheid > wssheid dat er in infinitesimaal tijdsinterval dt een evenement gebeurt is λdt Nu: wat is de verdeling vd tijdsintervallen tss 2 opeenvolgende toevallige gebeurtenissen > veronderstel er was een evenement op t=0 > wat is de wssheid dat het eerstvolgende evenement binnen dt zal vallen, na tijd t > er moeten twee onafh. voorwaarden vervuld zijn: - er mogen geen evenementen vallen tss 0 en t > wordt gegeven door Poisson verdeling: > wssheid om 0 tellen te vinden met een gemiddelde λt: $$\mathcal{P}(0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!}$$ - er moet een evenement vallen in het volgende dt >> totale wssheid wordt: $$I_1(t)dt = \mathcal{P}(0) \times \lambda dt$$ of dus: $$I_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$ merk op: eest waarschijnlijk interval is 0, ie: de modus > verwachtingswaarde voor gemiddelde tijd tss twee evenementen is 1/λ
def: distributie voor N elementen	We kunnen het vorige nu uitbreiden naar N evenementen > distributie van intervallen tss een toevallig evenement en het Nde daaropvolgende is: $$I_N(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{N-1}e^{-\lambda t}}{(N-1)!}$$
st: verwachtingswaarde en modus op I_N	De verwachtingswaarde voor $I_N(t)$ is: $\langle I_N \rangle = N/\lambda$ en de modus is: $$\left.\frac{dI_N(t)}{dt}\right\|_{t=t_m} = 0 \quad \Rightarrow t_m = \frac{N-1}{\lambda}$$

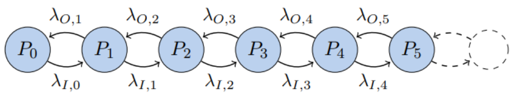
9.1.2 dode tijd

principe dode tijd	in elke detector is er een minimale tijd nodig tss twee evenementen opdat ze als afzonderlijk worden herkent > kan zijn door limiet of fysische principes of door elektronica van detector > deze tijd definiëren we als *dode tijd*
principe paralyseerbaarheid	We moeten corrigeren voor deze dode tijd > maak onderscheid tss paralyseerbare en niet-paralyseerbare detectoren > definieer de volgende: - n als het echte aantal evenementen per tijdseenheid - m het verwerkte aantal per tijdseenheid - τ de individuele dode tijd van het systeem
> def: niet-paralyseerbare detector	= detector waarbij er na elke meting een dode tijd met vaste lengte τ volgt > evenementen die tijdens dode tijd komen gaan verloren De fractie van de tijd dat systeem dood is wordt gegeven door: $$f_\tau = m\tau$$ het aantal verloren evenementen wordt gegeven door nf_τ > dit moet gelijk zijn aan (n-m), dus we hebben: $$m = \frac{n}{1+n\tau} \qquad (1)$$

> def: paralyseerbare detector	evenementen die binnenkomen tijdens dode periode worden niet meegeteld > zorgen er wel voor dat dode tijd verder uitloopt met een tijd τ > dode periodes hebben dus geen vaste lengte Nu: m moet gelijk zijn aan aantal intervallen tss evenementen dat langer is dan τ > we kennen deze distributie al > wssheid voor intervallen langer dan τ is: $P_{t>\tau} = \int_\tau^\infty P_1(t)dt = e^{-n\tau}$ totaal aantal dergelijke intervallen is gegeven door : $m = ne^{-n\tau}$ (2)  *Figuur 9.1: Illustratie van een niet-paralyseerbaar (boven) en paralyseerbaar (onder) meetsysteem. Op de middelste tijdsas wordt de aankomst van 11 toevallig verdeelde evenementen (•) aangeduid. In het niet-paralyseerbare systeem worden 6 (▼) van de 11 evenementen geteld, terwijl er in het paralyseerbare door ophoping van dode tijd slechts 4 (▲) gezien worden.*
analyse telkadans	We zien nu: - niet-par. systeem zal asymptotische waarde bereiken met telkadans 1/τ - in par. systeem gaat telkadans door een maximum > voor zeer hoge inkomende snelheden wordt dode periode voortduren verlengt >> als men dus heel lage telsnelheden opmeet, moet opgelet worden of dit niet komt door een zeer hoge inkomende telsnelheid in paralyseerbaar systeem  *Figuur 9.2: Variatie van de waargenomen telsnelheid m als een functie van de echte telkadans n, voor verschillende dode tijden τ (links) en als een functie van de dode tijd τ voor een signaal telkadans $n = 20$ Hz (rechts) ; streeplijn: niet-paralyseerbaar systeem; volle lijn: paralyseerbaar systeem; puntlijn: lage telsnelheid benadering*
benadering bij lage inkomsnelheid	Voor lage telsnelheden kan men beide modellen benaderen door: $m \approx n(1 - n\tau)$
meten van dode tijd	Gebruik de niet-lineariteit van uitdrukkingen (1) en (2) 1: triggers van twee verschillende bronnen > meet de telsnelheid voor elke afzonderlijk en de som van de twee 2: gebruik een trigger met gekende vaste telsnelheid > bvb: een 100Hz trigger stuurt elke 10ms een gekend signaal > verschil tss aantal 100Hz trigger en 100 geeft de dode tijd van het systeem

9.1.3 wachtrijen	
voorbeeld principe wachtrij	Zei er een experiment waarbij evenementen op toevallig tijdstip binnenkomen > er is een gemiddelde kadans van λ_I per tijdseenheid Stel nu dat de tijd voor verwerken is toevallig verdeeld > op elk ogenblik is er een conditionele wssheid $\lambda_O dt$ dat een evenement afgewerkt wordt en doorgegeven aan de computer >ie: evenementen komen ad random binnen en verwerkingstijd is exponentieel > dus: meeste evenm. worden snel verwerkt, maar er zijn enkele die veel tijd nemen > er kunnen gegevens verkoren gaan om dit te vermijden: gebruik een input buffer > in deze buffer wachten inkomende evenementen tot de processor vrij is > als inkomend evenement niet meer in buffer past, zal ze worden verwijderd ie: *buffer overflow* >> hoeveel evenm. N moet buffer kunnen bevatten zodat slechts een fractie L van inkomende evenementen verloren gaat?
evenwichtssituatie evenementen	Wanneer apparaat aangezet wordt zullen er fluctuaties zijn > na een tijd bereikt er een evenwichtssituatie in evenwicht is wssheid P_k dat zich k evenementen in de buffer bevinden constant in tijd > dit geldt voor elke k > wssheid om bij de buffer toe te voegen is gelijk aan kans om eruit te verwijderen > als aantal evenm. in buffer k is met 0<k<N, dan: $$P_{k+1}\,\lambda_O dt + P_{k-1}\,\lambda_I dt = P_k(\lambda_I dt + \lambda_O dt)$$ Voor de speciale gevallen $k=0$ en $k=N$ geldt: $$\begin{cases} P_1\,\lambda_O dt = P_0\,\lambda_I dt \\ P_{N-1}\,\lambda_I dt = P_N\,\lambda_O dt \end{cases}$$ De oplossing voor deze speciale gevallen is telkens de maat voor de belasting $\mathcal{R}$ van het systeem[1]. $$\frac{P_1}{P_0} = \frac{P_N}{P_{N-1}} = \frac{\lambda_I}{\lambda_O} \equiv \mathcal{R}$$ echter voor andere gevallen is oplossing niet zo duidelijk > algemene oplossing $P_k = CR^k$ met C en R onbekende constanten: $$R^{k+1}\lambda_O + R^{k-1}\lambda_I = R^k(\lambda_I + \lambda_O)$$ hetgeen zich herleidt tot een eenvoudige vierkantsvergelijking $$R^2\lambda_O - R(\lambda_O + \lambda_I) + \lambda_I = 0$$ Deze vierkantsvergelijking heeft als oplossingen $$\begin{cases} R = 1 \\ R = \frac{\lambda_I}{\lambda_O} \end{cases}$$ Waarbij de tweede de niet-triviale oplossing is > we kunnen nu C bepalen via de normeringsvoorwaarde: $$P_{\leq N} = C\sum_{i=0}^{N}\mathcal{R}^i = 1 \qquad \longrightarrow \qquad C^{-1} = \sum_{i=0}^{N}\mathcal{R}^i$$ Het is eenvoudig na te gaan dat $$(1-\mathcal{R})\sum_{i=0}^{N}\mathcal{R}^i = 1 - \mathcal{R}^{N+1}$$

st: wssheid van evenm. in buffer	De wssheid P_k dat er k evenementen in de buffer van maat N in evenwicht zitten is: $$P_k = \frac{(1-\mathcal{R})\,\mathcal{R}^k}{1-\mathcal{R}^{N+1}}$$ waarbij $R=\lambda_I/\lambda_O$ een maar voor de belasting van het systeem > de cumulatieve wssheid dat er zich ten hoogste k evenementen bevinden is: $$P_{\leq k} = \sum_{i=0}^{k} P_i = \frac{1-\mathcal{R}^{k+1}}{1-\mathcal{R}^{N+1}}$$
kans op verlies van evenm L	De kans op verlies van elementen is precies P_N ie: de fractie vd tijd dat de buffer volledig gevuld is: $$L = P_N = \frac{\mathcal{R}^N - \mathcal{R}^{N+1}}{1-\mathcal{R}^{N+1}}$$ > als evenm aankomt in deze tijd dan gaat deze verloren
oneindige buffer	veronderstel N→∞ voor R<1 hebben we dan: $$P_k = (1-\mathcal{R})\,\mathcal{R}^k \qquad P_{\leq k} = 1-\mathcal{R}^{k+1}$$
st: verwachtingswaarde bij oneindige buffer	De verwachtingswaarde en variantie vh aantal evenm voor oneindige buffer is: $$< k >= \frac{\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}} \qquad V(k) = \frac{\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2}$$
9.2 Markov ketens	
9.2.1 Markov vs Bernoulli	
Markov vs Bernoulli keten	- Bernoulli keten: elke gebeurtenis wordt onafhankelijk beschouwd > vb: muntstuk gooien en resultaat opschrijven - Markov keten: uitkomst van poging hangt af van waar je bent > vb: bufferprobleem van daarnet
Opmerking: Markov en conditionele kans	- Conditionele kans: P(a|b) is de wssheid om a te vinden als b waar is - Markov: is de wssheid om a te vinden (nieuwe toestand in systeem) als b al gebeurde >> verwissel deze twee niet
9.2.2 aanpassing van waarschijnlijkheid	
Markov in matrices	Markov keten is een reeks toevallige variabelen (π_n, $n \in \mathbb{N}$) > modelleren dynamische evolutie vh systeem > wordt best beschreven via matrices Wssheidsverdeling ve systeem met m toestand wordt beschreven door een rijvector: > $P_i(t)$ de wssheid dat het systeem zich in toestand i op bepaalde stap t bevind $$\pi_t = (P_1(t), P_2(t), \ldots, P_m(t))$$
st: som van wssheden	De elementen vd vector π_t liggen tss 0 en 1 en hun som is gelijk aan 1: $$\sum_{i=1}^{m} P_i(t) = 1 \qquad \text{voor alle t}$$
def: stochastische matrix Λ	= bevat als elementen λ_{ij} de wssheid voor een transitie van toestand i naar toestand j > beschrijft de evolutie van het systeem:  $$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{14} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{pmatrix}$$

st: normalisatie van Λ	Om de normalisatie van het systeem te bewaren moet: $\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} = 1 \qquad \forall i$
st: Markov-eigenschap	identificeer t met het 'heden' > dan is alle info van het systeem over het gedrag in de toekomst gegeven worden door: - de huidige toestand - de kennis dat het proces uit het verleden hier niets aan toevoegt >> impliceert dat de verblijftijd in een gegeven toestand een geheugenloze verdeling moet hebben
stappen in Markov proces	De verwachte toestand op de volgende stap is gegeven door: $\pi_{t+1} = \pi_t \Lambda$ > dus na k processen: $\pi_k = \pi_0 \Lambda^k.$
def: stationaire toestand	Een wssheidsverdeling π vh systeem is een stationaire wssheid indien: $\pi = \pi\Lambda$ > systeem staat in evenwicht indien: $P_j(t+1) = \sum_{i=1}^{m} P_i(t)\lambda_{ij} \qquad \forall j$ en blijft in zn evenwichtsdistributie voor elke toekomstige t*>t met wssheidsverdeling: $\pi = (P_1, P_2, ..., P_m)$ > zo een verdeling bestaat niet voor elk systeem
9.2.3 buffers en Markov ketens	
buffer en Markov	In bufferprobleem hangt verandering van P_k af van P_k, P_{k+1} en P_{k-1} > Λ heeft enkel niet-nul elementen op hoofddiagonaal en die er net boven en onder ie: is een tridiagonale matrix neem aan dat de drie diagonalen gevuld zijn:  > is gelijkaardig aan bufferprobleem, maar λ hangt nu ook af van k > we kunnen de wssheden $P_k(t)$ bekijken: $\begin{cases} \frac{dP_k}{dt} = -\lambda_{I,k}P_k - \lambda_{O,k}P_k + \lambda_{I,k-1}P_{k-1} + \lambda_{O,k+1}P_{k+1} & (k>0) \\ \frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{I,0}P_0 + \lambda_{O,1}P_1 & (k=0) \end{cases}$ De oplossingen van deze vgl worden gegeven door de eigenwaarde en eigenvectoren van Λ te berekenen: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda_{I,0} & \lambda_{I,0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_{O,1} & 1-\lambda_{I,1}-\lambda_{O,1} & \lambda_{I,1} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{O,2} & 1-\lambda_{I,2}-\lambda_{O,2} & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda_{I,N-1}-\lambda_{O,N-1} & \lambda_{I,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{O,N} & 1-\lambda_{O,N} \end{pmatrix}$
bekijk nu echter een systeem in evenwicht > wssheden P_k zijn niet meer afhankelijk van de tijd > is uitbreiding van bufferprobleem, nl: aankomst- en verwerkingstijd zijn afh van de lengte van de rij	
st: evenwichtswssheden voor dit systeem	De evenwichtswssheden, bij k≥1, voor deze situatie worden gegeven door: $P_k = \mathcal{R}_k \, P_0$ met $\mathcal{R}_k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_{I,i}}{\prod_{j=1}^{k} \lambda_{O,j}}$ P_0 volgt uit de normeringsvoorwaarde en is: $P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k\right]^{-1}$

vb: afschrikkende lengte	veronderstel dat een lange rij de klanten afschrikt > tegelijk heeft de lengte van de rij geen invloed op de verwerkingskadans > je kan dit modelleren via: $$\lambda_{O,k} = \lambda_O \qquad \forall k \qquad \lambda_{I,k} = \frac{\lambda_I}{k+1}$$ Dit leidt tot $$\mathcal{R}_k = \left(\frac{\lambda_I}{\lambda_O}\right)^k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{\mathcal{R}^k}{k!}$$ met $\mathcal{R} = \lambda_I/\lambda_O$, en $$P_0^{-1} = 1 + \sum_k \frac{\mathcal{R}^k}{k!} \approx e^{-\mathcal{R}} \qquad \longrightarrow \qquad P_0 = e^{-\mathcal{R}}$$ De oplossing wordt een Poisson verdeling: $$P_k = \frac{e^{-\mathcal{R}}\mathcal{R}^k}{k!}$$ Als we aannemen dat er altijd voldoende verwerkingseenheden (of kassa's) vrij zijn, dan hebben de tegengestelde situatie: $$\lambda_{I,k} = \lambda_I \qquad \forall k \qquad \lambda_{O,k} = k\lambda_I$$ De oplossing is opnieuw de Poisson verdeling, precies dezelfde als in het voorgaande probleem.
vb: Quickline	Veronderstel dat er m servers zijn > er is dus één wachtrij en verschillende servers > in dit geval: $\lambda_{I,k} = \lambda_I \qquad \forall k \qquad \begin{cases} \lambda_{O,j} = j\lambda_O & j \leq m \\ \lambda_{O,j} = m\lambda_O & j > m \end{cases}$ en neem nu: $\mathcal{R} = \lambda_I/(m\lambda_O)$. aangezien het systeem twee werkwijzen bevat, nl: vrije servers en verzadiging > geeft de oplossing deze twee modes weer: $$\begin{cases} P_k = m^k \frac{\mathcal{R}^k}{k!} P_0 & k \leq m \\ P_k = m^m \frac{\mathcal{R}^k}{m!} P_0 & k > m \end{cases} \quad \text{met} \quad P_0 = \left[1 + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(m\mathcal{R})^i}{i!}\right) + \frac{m^m}{m!}\frac{\mathcal{R}^m}{(1-\mathcal{R})}\right]^{-1}$$ > we kunnen dit vergelijken met situatie waarbij we me servers en m individuele wachtrijen hebben Bekijk nu het geval waarbij m=2: $$P_0 = \frac{(1-\mathcal{R})}{(1+\mathcal{R})} \qquad \text{en} \qquad < k >= \frac{2\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R}^2)}$$
9.2.4 random walks	
<u>a) 1D random walk</u>	
concept random walk	Stel je hebt een lijn waarlangs een punt kan bewegen met discrete stappen > deze kunnen ofwel naar links ofwel naar rechts gaan > zij p_r en p_l resp. de kans om naar rechts en links te gaan Vertrek vanuit de oorsprong en zet N stappen > wat is de kans om n_r stappen naar rechts en n_l stappen naar links gezet te hebben? > we vinden: $$p_l + p_r = 1 \qquad n_l + n_r = N$$ De kans om exact n_r stappen naar rechts te gaan is dan gegeven door de binomiale verdeling. $$P(n_r) = p_r^{n_r} p_l^{n_l} \frac{N}{n_r! n_l!}$$ met als gemiddelde waarde $< n_r >= p_r N$. Het gemiddelde aantal stappen naar links is ook $< n_l >= N - < n_r >= N(1-n_r) = Nn_l$ De afstand d_N die na een gegeven aantal stappen afgelegd is, te meten vanuit het beginpunt is dan: $$d_N = n_r - n_l = 2n_r - N$$

st: random walk met p_l=p_r = 1/2	Voor random walk met p_l=p_r = 1/2 zijn de wssheden $P_N(d)$ om een bepaalde afstand d afgelegd te hebben na N stappen gelijk aan: $$P_N(d) = \begin{cases} \frac{1}{2^N} C^N_{\frac{d+N}{2}} & d+N \quad \text{even} \\ 0 & d+N \quad \text{oneven} \end{cases}$$ > de verwachtingswaarde $\langle d_N \rangle$ hiervoor is 0
st: absolute verwachtingswaarde	De verwachtingswaarde voor de absolute afstand na N stappen is: $$< \lvert d_N \rvert >= 2^{-N} \sum_{d=-N,-(N-2),\dots}^{N} \frac{\lvert d \rvert N!}{(\frac{N+d}{2})!\,(\frac{N-d}{2})!}$$ Indien $N = 2J$ even is, krijgen we $$< \lvert d_N \rvert >= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}N)}{\Gamma(\frac{1}{2}N)} = \frac{(N-1)!!}{(N-2)!!} \qquad (d \text{even})$$ waarbij we de dubbele faculteit gebruiken: $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$. Indien $N = 2J-1$ oneven is, krijgen we $$< \lvert d_N \rvert >= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}N)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}N)} = \frac{N!!}{(N-1)!!} \qquad (d \text{ oneven})$$ > in de limiet voor grote N wordt dit: $$< \lvert d_N \rvert > \approx \sqrt{\frac{2N}{\pi}}$$
b) 2D random walk	
concept 2D random walk	Bekijk de 2D random walk als een som van N even lange vectoren in willekeurige richting > bekijk dit in het complex vlak, z=x+iy > elke stap wordt gegeven door $e^{i\theta}$ met θ uniform verdeeld tss 0 en 2π > positie z na N stappen is dan: $$z = \sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$$ en de absolute afstand: $$\begin{aligned} \lvert z \rvert^2 &= \sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \sum_{k=1}^{N} e^{-i\theta_k} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e^{i(\theta_j-\theta_k)} \\ &= N + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k\neq j}^{N} e^{i(\theta_j-\theta_k)} \end{aligned}$$ en dus wordt: $$< \lvert z \rvert^2 >= N + \left\langle \sum_{j=1}^{N} \sum_{k\neq j}^{N} e^{i(\theta_j-\theta_k)} \right\rangle$$ Elke stap is onafhankelijk van de vorige, zodat θ_j en θ_k ongecorreleerde variabelen zijn. Daardoor valt de tweede term in de som hierboven weg, en dus: $$< \lvert z \rvert^2 >= N \qquad (9.26)$$ waarin we opnieuw de $\sqrt{N}$ afhankelijkheid terugzien. >> in 2D rooster met N→∞ is wssheid om eender welk punt op het rooster te bereiken 1 > random walk heeft ook een wssheid 1 om in beginpunt aan te komen