1 Strom- und Spannungsmessung

1.1 Spannungsmesser

$R_V = \infty, G_V = 0$
R_V: mit Verstärker $10M\Omega$ und mehr ohne Verstärker $k\Omega/V$

1.2 Strommesser

ideal: $R_A = 0$ $G_A = \infty$
real: $R_A > 0$, z.B. $R_A = 150m\Omega$

1.3 Strommessung

Ziel: Messen von I_L
richtiger Wert: $I_r = \frac{U_q}{R_i+R_L}$ angezeiger Wert: $I_a = \frac{U_q}{R_i+R_L+R_A}$
Systematischer Fehler: Rel. Fehler: $F_R = \frac{I_a - I_r}{I_r} = \frac{\frac{U_q}{R_i+R_L+R_A} - \frac{U_q}{R_i+R_L}}{\frac{U_q}{R_i+R_L}} = \frac{-R_A}{R_i+R_L+R_A}$

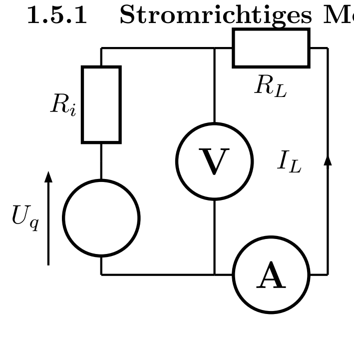
1. Der relative Fehler verändert sich mit R_A

1.4 Spannungsmessung

Richtiger Wert: $U_r = \frac{I_q}{G_i+G_L}$ Angezeigter Wert: $U_a = \frac{I_q}{G_i+G_L+G_V}$ rel. Fehler: $F_r = \frac{-G_V}{G_i+G_L+G_V}$

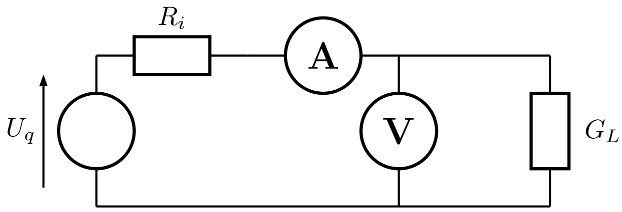
1.5 Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung

1.5.1 Stromrichtiges Messen



Angezeigter Wert: $U_a = U_{RL} + I_L R_A$
Anwendung: hochohmige Last R_L, kleiner Strom I_L

1.5.2 Spannungsrichtiges Messen



Angezeigter Wert: $I_a = I_L + U_L G_V$
Anwendung: niederohmige Last R_L, kleine Spannung U_L

2 Überlagerungsverfahren, Superpositionsverfahren

Anwendungsbereich: *Lineare Zeitinvariante* NW
Methode: Man lässt jede Quelle einzeln wirken und überlagert die Teilwirkungen zur Gesamtwirkung.

(1) Alle im NW befindlichen Quellen werden bis auf eine als in dem Sinne nicht vorhanden angesehen, dass die Quellspannung U_q und die Quellströme I_q zu Null gesetzt werden.

(2) Ausgehen von der einzigen noch vorhandenen Quelle werden die benötigten Teilströme oder Teilspannungen berechnet. Für n Quellen wird dieser Schritt n mal ausgeführt.

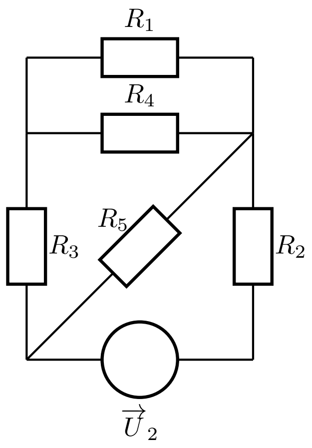
(3) Teilströme und Teilspannungen werden *vorzeichenrichtig* überlagert oder addiert.

$$U_1 = 9V, U_2 = 12V, R_1 = 2.4\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 2\Omega, R_4 = 3\Omega, R_5 = 5\Omega$$

(i) $U_2 = 0$

$$R_4{*} = R_4||(R_3{+}R_2||R_5) = 1,4571\Omega I_1' = \frac{U_1}{R_1 + R_4{*}} = 2,3333A U_4' = I_1' R_4{*} = 3,4V I_4' = \frac{U_4'}{R_4} = 1,13A I_3' = I$$

(ii) $U_1 = 0$



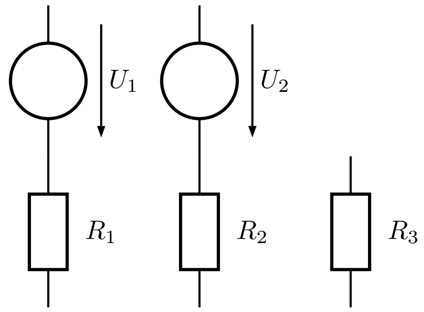
$$R_5* = R_5||(R_3+R_1||R_4) = 2\Omega I_2'' = \frac{U_2}{R_2 + R_5*} = 4A U_5'' = I_2'' R_5 = 8V I_5'' = \frac{U_5''}{R_5} = 1,6A$$

Aus $I_3'' + I_5'' = I_2''$ erhalten wir $I_3'' = 2,4A$

$$I_1'' = -I_3'' \frac{G_1}{G_1 + G_4} = -1,33A I_4'' = I_3'' \frac{G_4}{G_1 + G_4} = 1,07A$$

(iii) Überlagern

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1,0A I_2 = I_2' + I_2'' = 3,0A I_3 = I_3' + I_3'' = 1,2A I_4 = I_4' + I_4'' = 2,2A I_5 = I_5' + I_5'' = 1,8A$$



$$U_1 = 40V, U_2 = 60V, I_6 = 1,2A, R_1 = R_3 = R_5 = 50\Omega, R_2 = R_4 = 40\Omega$$

Berechne I_3

(i) $U_2 = 0$

$$R_2* = R_2||(R_4+R_5) = 27,6923\Omega I_1' = \frac{-U_1}{R_1 + R_3||R_2*} = -0,5898A I_3' = -I_1' \frac{G_3}{G_3 + G_2*} = 0,2102A$$

(ii) $U_1 = I_6 = 0$

$$R_1* = R_1||(R_4+R_5) = 32,1492\Omega I_2'' = \frac{-U_2}{R_2 + R_1*||R_3} = -1,0073A I_3'' = -I_2'' \frac{G_3}{G_1* + G_3} = 0,3942A$$

(iii) $U_1 = U_2 = 0$

$$I_4''' = -I_6 \frac{G_4*}{G_4* + G_5} = -0,5693A I_3''' = -I_4 \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = 0,1752A$$

$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = 0,7795A$

3 Topologische Methoden der NW-Analyse

Ersetzt man in einem NW, das nur Zweipole enthält, jeden Zweipol symbolisch durch eine Linie, so erhält man einen Netzwerkgraphen:

- Die Linien heißen *Zweige*.
- Die Punkte, in denen Zweige enden, heißen *Knoten*.
- Werden die Zweige mit Bezugsrichtungen gekennzeichnet, spricht man vom *gerichteten Graphen*.
- Die Zweige werden von 1 bis n, die Knoten von 1 bis m nummeriert.
- *Maschen* sind Folgen von Zweigen mit der Eigenschaft, dass zwei aufeinander folgende Zweige in einem Knoten zusammentreffen und der erste und letzte Zweig einen Knoten gemeinsam haben. Bis auf den Start/End-Knoten darf beim Durchlaufen kein Knoten mehr als einmal angetroffen werden. Der Masche wird ein willkürlicher Umlaufsinn erteilt.
- Ein *vollständiger Baum* ist ein
    1. zusammenhängender
    2. maschenfreier Untergraph, der
    3. alle Knoten der Graphen enthält.
- Die Zweige eines Baumes heißen *Äste* oder *Zweige*. Die nicht zum Baum gehörenden Zweige heißen *Sehnen* oder *Verbindungszweige*.

Im linearen NW kann man jeden Zweig-Zweipol als lineare Ersatzspannungsquelle oder als lineare Ersatzstromquelle darstellen. Zweige haben den Index j mit $j = 1, ..., n$.

1.

$$U_j = U_{qj} + I_j R_j$$

↓ Dualität

$$I_j = I_{qj} + U_j G_j$$

U_j, I_j: Zweigspannung, Zweigstrom U_{qj}, I_{qj}: Zweigquellspannung, Zweigquellstrom R_j, G_j: Zweigwiderstand, Zweigleitwert

Ein Zweig mit Index j wird entweder mit Zweigwiderstand R_j und Zweigquellspannung U_{qj} oder mit Zweigleitwert G_j und Zweigquellstrom I_{qj} charakterisiert.

Zweigindex j	U_{qj}	I_{qj}	R_j	G_j
1	U_{q1}	$\frac{U_{q1}}{R_1}$	R_1	$\frac{1}{R_1}$
2	0	0	R_1	$\frac{1}{R_1}$
3	U_{q3}	$\frac{U_{q3}}{R_3}$	R_3	$\frac{1}{R_3}$
4	0	0	R_4	$\frac{1}{R_4}$
5	0	0	R_5	$\frac{1}{R_5}$
6	0	0	R_6	$\frac{1}{R_6}$

4 Vollständiger Baum

Von den n Zweigen werden $m-1$ ausgewählt, um mit ihnen alle Knoten zu verbinden. Eine Bewegung von einem Knoten zu einem anderen hat genau einen Weg, entweder direkt oder über weitere Knoten. Die Teilmenge dieser Zweige bildet den vollständigen Baum.

4.1 Methode des vollständigen Baums

Eine Masche darf beliebig viele Äste aber nur eine ~~Verbindungszweig~~ Sehne enthalten.

$$MGl_1 : U_1+U_2+U_3+U_4 = 0 MGl_2 : -U_4+U_5+U_6+U_7 = 0 MGl_3 : U_1+U_2+U_3+U_5+U_7+U_6+U_3 = 0$$

Wähle einen vollständigen Baum

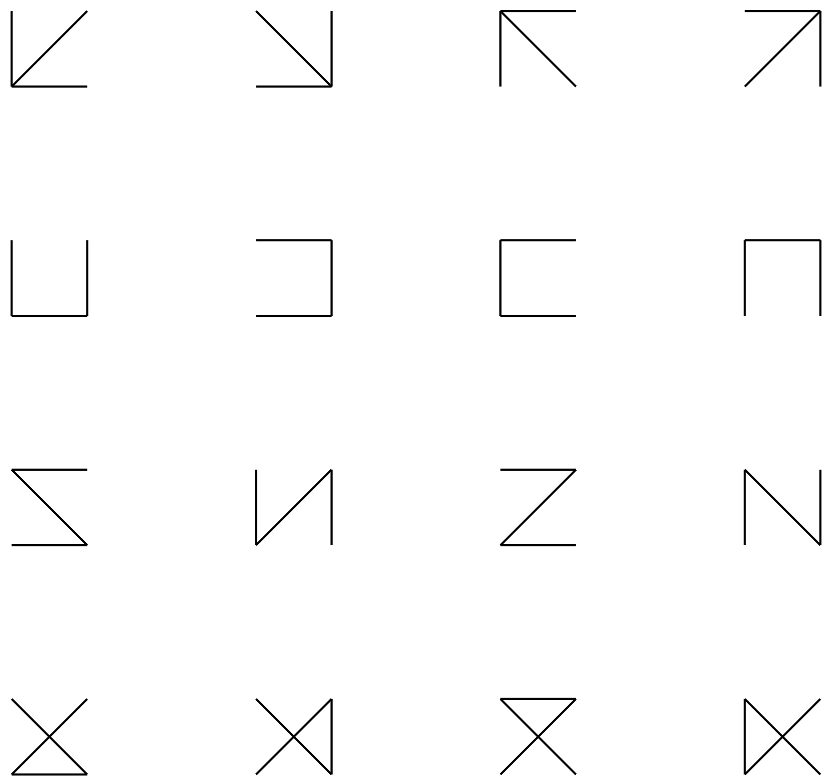
Ein vollständiger Graph hat für jedes Knotenpaar genau einen Zweig.

$$n = \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

$m = 4 \Rightarrow n = 6$

Die Anzahl der vollständigen Bäume im vollständigen Graphen beträgt: $B_{ANZ} = m^{m-2}$

$m = 4 \Rightarrow B_{ANZ} = 16$



5 NW-Analyse mit dem Verfahren des vollständigen Baums

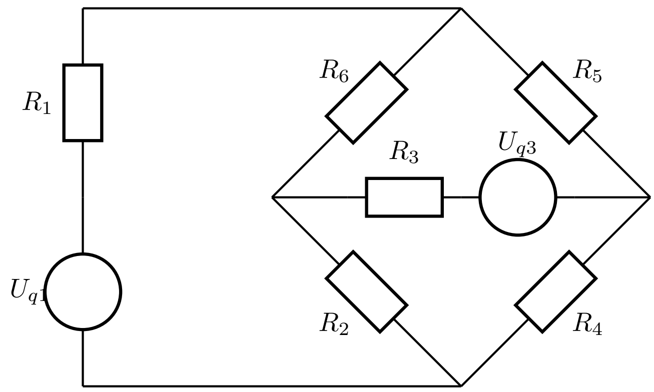
1. NW-Zahlwerte
   m: Anzahl der Knoten, $i = 1, ..., m$
   n: Anzahl der Zweige, $j = 1, ..., n$

2. Baumzahlwerte
   $k = m-1$: Anzahl der Äste im vollst. Baum, Anz. der Knotengleichungen
   $l = n - m + 1$: Anzahl der Sehnen, Anzahl der Maschengleichungen
   $l + k = n$

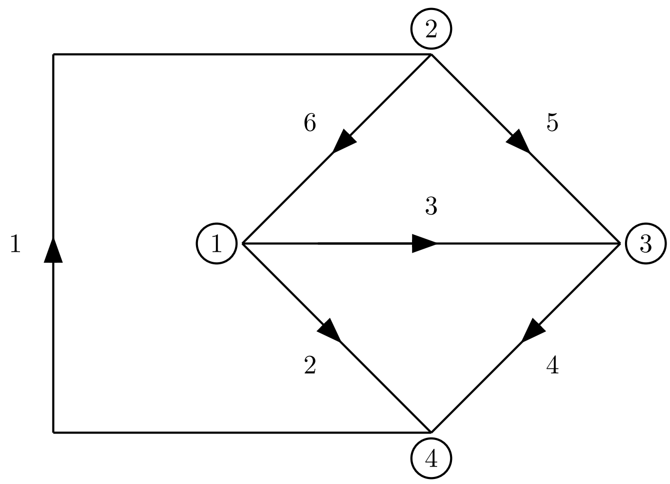
3. Zur Bestimmung von n Zweiggrößen, Zweigspannungen und Zweigströme, mit unterschiedlichen Indices, benötigt man n unabhängige Gleichungen:

(a) $k = m - 1$ Knotengleichungen, in dem man einen Knoten "wegläßt", zum Bezugsknoten erklärt

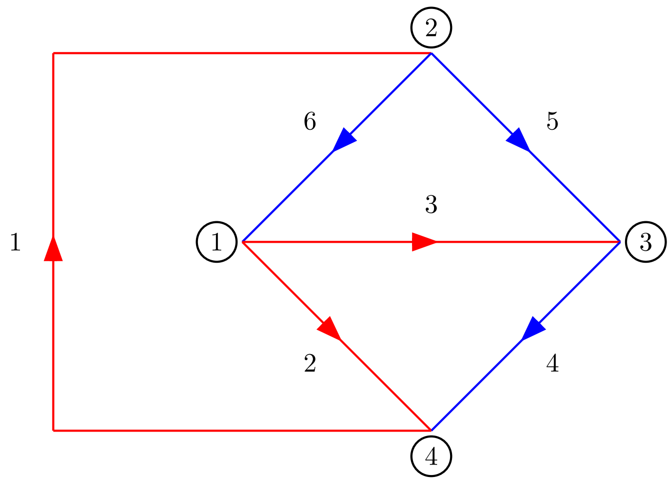
(b) Die fehlenden $l = n - m + 1$ Machengleichungen werden mit dem Verfahren des vollständigen Baums beschafft.



Schritt 1 Erstellung des gerichteten Graphen, Nummeriertung der Knoten und Zweige



Schritt 2 Festlegung des vollständigen Baums
Sehnen in blau
Äste in rot



Schritt 3 Aufstellung der Inzidenzmatrix, Knotenmatrix
Die vollständige (mxn)-Matrix H_v verschreibt die NW-Struktur. Sie hat die Elemente $h_{ij}, h_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ mit $h_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\}$, wenn der Zweigstrom mit Index j

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{vom Knoten } i \text{ wegführt} \\ \text{zum Knoten } i \text{ hinführt} \\ \text{mit dem Knoten } i \text{ nicht inzident ist} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Lezte Kontrollmöglichkeit: Die Spaltensummen müssen Null ergeben

In H_v sind nur $m - 1$ Zeilen unabhängig von einander. Wir gewinnen die reduzierte Matrix H, indem wir einen Knoten zum Bezugsknoten wählen. Wahl: Knoten 4 ist Bezugsknoten.

H wird gewonnen, in dem in H_v die dem Bezugsknoten entsprechende Zeile gestrichen wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$HI = 0$$

Schritt 4 Beschaffung der $l-n-m+1$ noch benötigten Machengleichungen

Satz: Zu jeder Sehne werden Äste so hinzugenommen, daß sie zusammen eine Masche bilden. Die Umlaufrichrung der Masche wird durch die Richtung der erzeugenden Sehne bestimmt. Mit diesen Maschen wird die $((n-m+1)x(n))$-Machenmatrix M aufgestellt, mit den Elementen $m_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\}$ wenn der Zweig j

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zur Masche } i \text{ gehört und in seiner Richtung durchlaufen wird.} \\ \text{zur Masche } i \text{ gehört und entgegen seiner Richtung durchlaufen wird.} \\ \text{nicht zur Masche } i \text{ gehört.} \end{array} \right\}$$

Masche 1, bzgl. Sehne mit Index 4
Masche 2, bzgl. Sehne mit Index 5
Masche 3, bzgl. Sehne mit Index 6

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Maschengleichungen lauten dann: $MU = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$