1 Strom- und Spannungsmessung

1.1 Spannungsmesser

$R_V = \infty, G_V = 0$
R_V: mit Verstärker $10M\Omega$ und mehr ohne Verstärker $k\Omega/V$

1.2 Strommesser

ideal: $R_A = 0$ $G_A = \infty$
real: $R_A > 0$, z.B. $R_A = 150m\Omega$

1.3 Strommessung

Ziel: Messen von I_L
richtiger Wert: $I_r = \frac{U_q}{R_i+R_L}$ angezeiger Wert: $I_a = \frac{U_q}{R_i+R_L+R_A}$
Systematischer Fehler: Rel. Fehler: $F_R = \frac{I_a - I_r}{I_r} = \frac{\frac{U_q}{R_i+R_L+R_A} - \frac{U_q}{R_i+R_L}}{\frac{U_q}{R_i+R_L}} = \frac{-R_A}{R_i+R_L+R_A}$

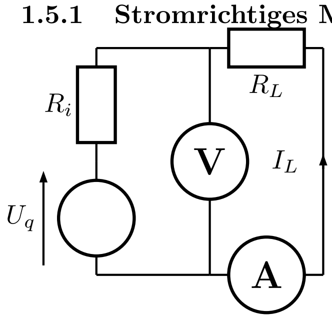
1. Der relative Fehler verändert sich mit R_A

1.4 Spannungsmessung

Richtiger Wert: $U_r = \frac{I_q}{G_i+G_L}$ Angezeigter Wert: $U_a = \frac{I_q}{G_i+G_L+G_V}$ rel. Fehler: $F_r = \frac{-G_V}{G_i+G_L+G_V}$

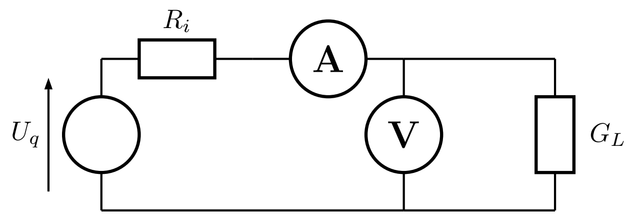
1.5 Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung

1.5.1 Stromrichtiges Messen



Angezeigter Wert: $U_a = U_{RL} + I_L R_A$
Anwendung: hochohmige Last R_L, kleiner Strom I_L

1.5.2 Spannungsrichtiges Messen



Angezeigter Wert: $I_a = I_L + U_L G_V$
Anwendung: niederohmige Last R_L, kleine Spannung U_L

2 Überlagerungsverfahren, Superpositionsverfahren

<u>Anwendungsbereich:</u> *Lineare Zeitinvariante* NW
<u>Methode:</u> Man lässt jede Quelle einzeln wirken und überlagert die Teilwirkungen zur Gesamtwirkung.

(1) Alle im NW befindlichen Quellen werden bis auf eine als in dem Sinne nicht vorhanden angesehen, dass die Quellspannung U_q und die Quellströme I_q zu Null gesetzt werden.

(2) Ausgehen von der einzigen noch vorhandenen Quelle werden die benötigten Teilströme oder Teilspannungen berechnet. Für n Quellen wird dieser Schritt n mal ausgeführt.

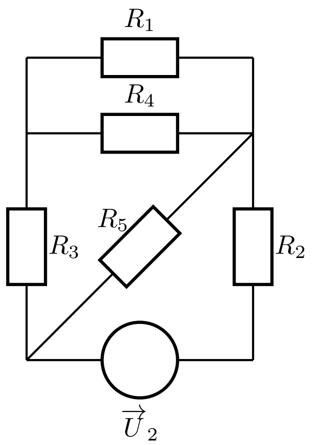
(3) Teilströme und Teilspannungen werden *vorzeichenrichtig* überlagert oder addiert.

$$U_1 = 9V, U_2 = 12V, R_1 = 2.4\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 2\Omega, R_4 = 3\Omega, R_5 = 5\Omega$$

(i) $U_2 = 0$

$$R_4* = R_4||(R_3+R_2||R_5) = 1,4571\Omega I_1' = \frac{U_1}{R_1 + R_4*} = 2,3333A U_4' = I_1' R_4* = 3,4V I_4' = \frac{U_4'}{R_4} = 1,13A I_3' = I$$

(ii) $U_1 = 0$



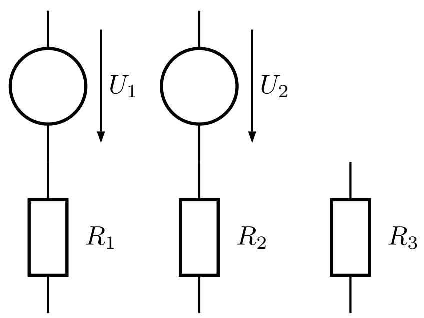
$$R_5* = R_5||(R_3{+}R_1||R_4) = 2\Omega I_2'' = \frac{U_2}{R_2 + R_5*} = 4AU_5'' = I_2''R_5 = 8VI_5'' = \frac{U_5''}{R_5} = 1,6A$$

Aus $I_3'' + I_5'' = I_2''$ erhalten wir $I_3'' = 2,4A$

$$I_1'' = -I_3''\frac{G_1}{G_1 + G_4} = -1,33AI_4'' = I_3''\frac{G_4}{G_1 + G_4} = 1,07A$$

(iii) Überlagern

$$I_1 = I_1'{+}I_1'' = 1,0AI_2 = I_2'{+}I_2'' = 3,0AI_3 = I_3'{+}I_3'' = 1,2AI_4 = I_4'{+}I_4'' = 2,2AI_5 = I_5'{+}I_5'' = 1,8A$$



$$U_1 = 40V, U_2 = 60V, I_6 = 1,2A, R_1 = R_3 = R_5 = 50\Omega, R_2 = R_4 = 40\Omega$$

Berechne I_3

(i) $U_2 = 0$

$$R_2* = R_2||(R_4+R_5) = 27,6923\Omega I_1' = \frac{-U_1}{R_1 + R_3||R_2*} = -0,5898A I_3' = -I_1' \frac{G_3}{G_3 + G_2*} = 0,2102A$$

(ii) $U_1 = I_6 = 0$

$$R_1* = R_1||(R_4+R_5) = 32,1492\Omega I_2'' = \frac{-U_2}{R_2 + R_1 * ||R_3} = -1,0073A I_3'' = -I_2'' \frac{G_3}{G_1 * + G_3} = 0,3942A$$

(iii) $U_1 = U_2 = 0$

$$I_4''' = -I_6 \frac{G_4*}{G_4 * + G_5} = -0,5693A I_3''' = -I_4 \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = 0,1752A$$

$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = 0,7795A$

3 Topologische Methoden der NW-Analyse

Ersetzt man in einem NW, das nur Zweipole enthält, jeden Zweipol symbolisch durch eine Linie, so erhält man einen Netzwerkgraphen:

- Die Linien heißen *Zweige*.
- Die Punkte, in denen Zweige enden, heißen *Knoten*.
- Werden die Zweige mit Bezugsrichtungen gekennzeichnet, spricht man vom *gerichteten Graphen*.
- Die Zweige werden von 1 bis n, die Knoten von 1 bis m nummeriert.
- *Maschen* sind Folgen von Zweigen mit der Eigenschaft, dass zwei aufeinander folgende Zweige in einem Knoten zusammentreffen und der erste und letzte Zweig einen Knoten gemeinsam haben. Bis auf den Start/End-Knoten darf beim Durchlaufen kein Knoten mehr als einmal angetroffen werden. Der Masche wird ein willkürlicher Umlaufsinn erteilt.
- Ein *vollständiger Baum* ist ein
  1. zusammenhängender
  2. maschenfreier Untergraph, der
  3. alle Knoten der Graphen enthält.
- Die Zweige eines Baumes heißen *Äste* oder *Zweige*. Die nicht zum Baum gehörenden Zweige heißen *Sehnen* oder *Verbindungszweige*.

Im linearen NW kann man jeden Zweig-Zweipol als lineare Ersatzspannungsquelle oder als lineare Ersatzstromquelle darstellen. Zweige haben den Index j mit $j = 1, ..., n$.

1.

$$U_j = U_{qj} + I_j R_j$$

↓ Dualität

$$I_j = I_{qj} + U_j G_j$$

U_j, I_j: Zweigspannung, Zweigstrom U_{qj}, I_{qj}: Zweigquellspannung, Zweigquellstrom R_j, G_j: Zweigwiderstand, Zweigleitwert

Ein Zweig mit Index j wird entweder mit Zweigwiderstand R_j und Zweigquellspannung U_{qj} oder mit Zweigleitwert G_j und Zweigquellstrom I_{qj} charakterisiert.

Zweigindex j	U_{qj}	I_{qj}	R_j	G_j
1	U_{q1}	$\frac{U_{q1}}{R_1}$	R_1	$\frac{1}{R_1}$
2	0	0	R_1	$\frac{1}{R_1}$
3	U_{q3}	$\frac{U_{q3}}{R_3}$	R_3	$\frac{1}{R_3}$
4	0	0	R_4	$\frac{1}{R_4}$
5	0	0	R_5	$\frac{1}{R_5}$
6	0	0	R_6	$\frac{1}{R_6}$

4 Vollständiger Baum

Von den n Zweigen werden $m-1$ ausgewählt, um mit ihnen alle Knoten zu verbinden. Eine Bewegung von einem Knoten zu einem anderen hat genau einen Weg, entweder direkt oder über weitere Knoten. Die Teilmenge dieser Zweige bildet den vollständigen Baum.

4.1 Methode des vollständigen Baums

Eine Masche darf beliebig viele Äste aber nur eine ~~Verbindungszweig~~ Sehne enthalten.

$$MGl_1 : U_1+U_2+U_3+U_4 = 0 MGl_2 : -U_4+U_5+U_6+U_7 = 0 MGl_3 : U_1+U_2+U_3+U_5+U_7+U_6+U_3 = 0$$

Wähle einen vollständigen Baum

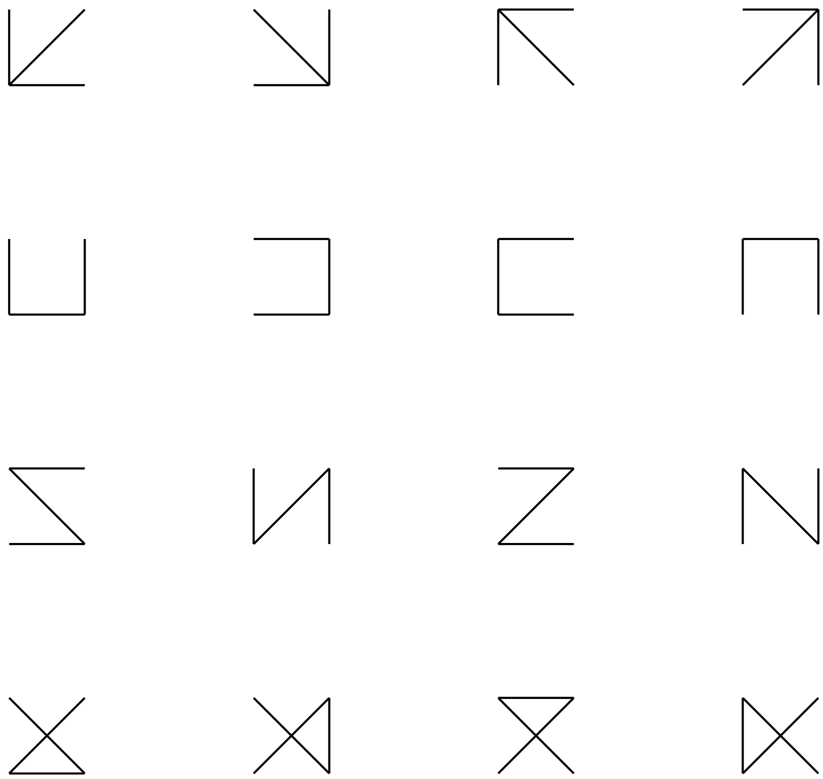
Ein vollständiger Graph hat für jedes Knotenpaar genau einen Zweig.

$$n = \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

$m = 4 \Rightarrow n = 6$

Die Anzahl der vollständigen Bäume im vollständigen Graphen beträgt: $B_{ANZ} = m^{m-2}$

$m = 4 \Rightarrow B_{ANZ} = 16$



5 NW-Analyse mit dem Verfahren des vollständigen Baums

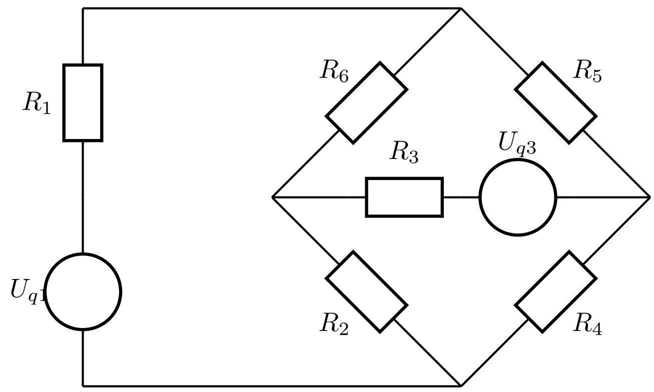
1. NW-Zahlwerte
   m: Anzahl der Knoten, $i = 1, ..., m$
   n: Anzahl der Zweige, $j = 1, ..., n$

2. Baumzahlwerte
   $k = m - 1$: Anzahl der Äste im vollst. Baum, Anz. der Knotengleichungen
   $l = n - m + 1$: Anzahl der Sehnen, Anzahl der Maschengleichungen
   $l + k = n$

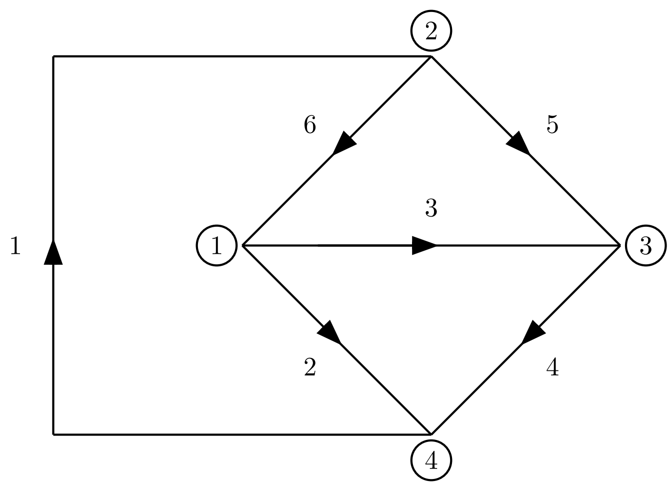
3. Zur Bestimmung von n Zweiggrößen, Zweigspannungen und Zweigströme, mit unterschiedlichen Indices, benötigt man n unabhängige Gleichungen:

(a) $k = m - 1$ Knotengleichungen, in dem man einen Knoten "wegläßt", zum Bezugsknoten erklärt

(b) Die fehlenden $l = n - m + 1$ Machengleichungen werden mit dem Verfahren des vollständigen Baums beschafft.



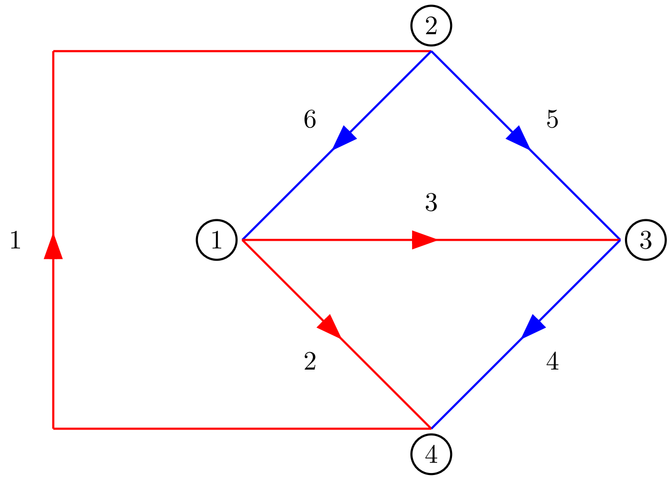
Schritt 1 Erstellung des gerichteten Graphen, Nummeriertung der Knoten und Zweige



Schritt 2 Festlegung des vollständigen Baums

Sehnen in blau

Äste in rot



Schritt 3 Aufstellung der Inzidenzmatrix, Knotenmatrix
Die vollständige (mxn)-Matrix H_v verschreibt die NW-Struktur. Sie hat die Elemente $h_{ij}, h_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ mit $h_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\}$, wenn der Zweigstrom mit Index j

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{vom Knoten } i \text{ wegführt} \\ \text{zum Knoten } i \text{ hinführt} \\ \text{mit dem Knoten } i \text{ nicht inzident ist} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Lezte Kontrollmöglichkeit: Die Spaltensummen müssen Null ergeben

In H_v sind nur $m-1$ Zeilen unabhängig von einander. Wir gewinnen die reduzierte Matrix H, indem wir einen Knoten zum Bezugsknoten wählen. Wahl: Knoten 4 ist Bezugsknoten.

H wird gewonnen, in dem in H_v die dem Bezugsknoten entsprechende Zeile gestrichen wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$HI = 0$$

Schritt 4 Beschaffung der $l-n-m+1$ noch benötigten Machengleichungen

Satz: Zu jeder Sehne werden Äste so hinzugenommen, daß sie zusammen eine Masche bilden. Die Umlaufrichrung der Masche wird durch die Richtung der erzeugenden Sehne bestimmt. Mit diesen Maschen wird die $((n-m+1)x(n))$-Machenmatrix M aufgestellt, mit den Elementen $m_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\}$ wenn der Zweig j

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zur Masche } i \text{ gehört und in seiner Richtung durchlaufen wird.} \\ \text{zur Masche } i \text{ gehört und entgegen seiner Richtung durchlaufen wird.} \\ \text{nicht zur Masche } i \text{ gehört.} \end{array} \right\}$$

Masche 1, bzgl. Sehne mit Index 4
Masche 2, bzgl. Sehne mit Index 5
Masche 3, bzgl. Sehne mit Index 6

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Maschengleichungen lauten dann: $MU = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für n Zweigströme.

$$\begin{pmatrix} H \\ ---- \\ M \cdot diag(R) \end{pmatrix} \cdot I = \begin{pmatrix} 0 \\ --- \\ -MU_q \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für n Zweigspannungen

$$\begin{pmatrix} H \cdot diag(G) \\ ---- \\ M \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} -HI_q \\ --- \\ 0 \end{pmatrix}$$

Brückenschaltungsbeispiel

Zahlenbeispiel

$$\begin{array}{ll} U_{q2} = 300V & R_2 = 0.25\Omega \\ U_{q3} = 270V & R_3 = 0.12\Omega \end{array}$$

R_1 : Verbraucher

Wie verteilen sich die Ströme I_1, I_2 und I_3, wenn der Verbraucherwiderstand R_1 im Bereich $0 < R_1 < 10\Omega$ gewählt wird?

$n = 3, m = 2 \Rightarrow 1$ KGl, 2 MGl

Gerichteter Graph

Vollständiger Baum

Inzidenzmatrix $(1x3)$-Vektor

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bezugsknoten 2

Maschenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} H \cdot I &= 0 \\ M \cdot U &= 0 \end{aligned}$$

Gleichuungssysteme für die Zweigströme in I

$$M^* = M \cdot diag(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot U_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -U_{q2} \\ -U_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{q2} \\ -U_{q3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{q2} \\ U_{q3} \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für die Zweigspannungen in U

$$H^* = H \cdot diag(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 & -G_3 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot I_q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{q2} \\ I_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q2} - I_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_{q2}}{R_2} + \frac{U_{q3}}{R_3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 & -G_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{U_{q2}}{R_2} - \frac{U_{q3}}{R_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Komprimierte Verfahren

- Berechnung von Sehnenströmen *(Machenstromverfahren)*
- Berechnung der Knotenpotenziale *(Knotenpotenzialverfahren)*
- Berechnung der Astspannungen *(Astspannungsverfahren)*

Maschenstromverfahren

1. Das NW wird allein mit Widerständen und Spannungsquellen dargestellt.
2. Der gerichtete Graph wird erstellt. Ein vollst. Baum wird so gewählt, daß die interessierenden Zweigströme Sehnenströme sind.
3. Maschen aufstellen. Die MGl dürfen nur Shenenströme einhalten.
4. Falls Astströme benötigt werden, berechnen wir sie aus den Sehnenströmen.

Berechne die Zweigströme I_1, I_2 und I_3
Knotengleichungen
$I_4 = I_1 - I_3$ $I_5 = I_2 + I_3$
Masche 1
$U_1 + U_4 = 0$ $-U_{q1} + I_1R_1 + I_4R_4 = 0$ ... $I_1(R_1 + R_4) - I_3R_3 - U_{q1} = 0$
Masche 2
$U_3 - U_4 + U_5 = 0$ $I_3R_3 - I_4R_4 + I_5R_5 = 0$ $-I_1R_4 + I_2R_5 + I_3(R_3 + R_4 + R_5) = 0$
Masche 3
$U_2 + U_5 = 0$ $I_2R_2 + I_5R_5 = 0$ $I_2(R_2 + R_5) + I_3R_5 - U_{q2} = 0$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 & 0 & -R_4 \\ -R_4 & R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \\ 0 & R_2 + R_5 & R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ U_{q2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 & 0 & -R_4 \\ 0 & R_2 + R_5 & R_5 \\ -R_4 & R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R^* \cdot I_S = U_q^*$$

(I_S Vektor mit den Sehnenströmen)

Beobachtungen

1. Hauptdiagonale r^*_{ij}, $i = j$, $i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$ Summen der in den jeweiligen Maschen liegenden Widerstände
2. Nebendiagonalen r^*_{ij}, $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$, $j = 1, 2, \ldots, n - m + 1$, $r^*_{ij} = r^*_{ji}$ Widerstandssummen für die Widerstände, die die Maschen i und j gemeinsam haben. Positiv wird bei gleichsinnigem Durchlauf gerechnet.

3. Im Vektor U_q^* werden die Summen der Maschenquellspannungen eingetragen. Positiv wird bei gegensinnigem Durchlauf gerechnet.

$$R^* = \begin{pmatrix} r_{11}^* & r_{12}^* & ... \\ r_{21}^* & r_{22}^* & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11}^* &= R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \\ r_{12}^* &= R_2 + R_3 + R_4 = R_{21}^* \\ r_{22}^* &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_7 \end{aligned}$$

Wir wollen im weiteren die NW-Berechnung verallgemeinern und Berechnungsverfahren mit Dualitätsbeziehungen gewinnen. So gewinnen wir die Astspannungsanalyse aus der Sehnenstromalanyse (Maschenstromanalyse). Für diese Betrachtungen benötigen wir eine dritte Matrix, die mit der Knotenmatrix verwandte Schnittmatrix S (das ist eine Superknotenmatrix). Wir sorgen dafür, dass alle NW-Vektoren und NW-Matrizen in der Reihenfolge Astgrößen - Sehnengrößen geordnet werden.

$$S = \begin{pmatrix} S_A & | & S_S \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_A \\ --- \\ I_S \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_A \\ --- \\ U_S \end{pmatrix}$$

$$I_q = \begin{pmatrix} I_{qA} \\ --- \\ I_{qS} \end{pmatrix}$$

$$U_q = \begin{pmatrix} U_{qA} \\ --- \\ U_{qS} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_A & | & M_S \end{pmatrix}$$

vollst. Baum mit den Zweigen 1, 3 und 5

Wir sortieren die Zweige in der Reihenfolge 1, 3, 5, 2, 4, 6 und erden den Knoten 4.

Schnittmatrix Ein Schnitt teilt ein NW in zwei Teil-NW. Wir suchen die Tundamentalschnitte, die einen Ast und im weiteren nur Sehnen schneiden. Das ist dual zur Masche, die eine Sehne und im weitern nur Äste enthält. Die Anzahl der (Fundamental-) Schnitte entspricht der Anzahl der Äste $m-1$. Die Orientierung des Schnitts entspricht der Orientierung des Bezugsasts.

Schnitt S_1 Kirchhoff: $I_1 = I_2 + I_4$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & | & S_S \end{pmatrix}$$

E: Einheistmatrix in der passenden Dimension

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maschenmatrix M

$$M = \begin{pmatrix} M_A & | & M_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A & | & E \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kirchhoffsche Gesetze

HI = 0 Die Summe der Ströme im Knoten ist Null SI = 0 Die Summe der Ströme im Superknoten ist Null MU = 0 Die Maschenumlaufspannung ist Null

Zusammenhang zwischen Schnitt- und Inzidenzmatrix

$$SI = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} S_A & | & S_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ --- \\ I_S \end{pmatrix} = S_A I_A + S_S I_S = E I_A + S_S I_S = I_A + S_S I_S = 0 \Rightarrow I_A = -S_S I_S HI =$$

Also $S = \begin{pmatrix} S_A & | & S_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & | & H_A^{-1} H_S \end{pmatrix}$

Zusammenhang zwischen Maschen- und Inzidenzmatrix

$$MU = 0 + \begin{pmatrix} M_A & | & \underbrace{M_S}_{=E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ --- \\ U_S \end{pmatrix} = M_A U_A + U_S = 0 \Rightarrow U_S = -M_A U_A$$

$$HM^T = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A^T \\ --- \\ M_S^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A^T \\ --- \\ E \end{pmatrix} = H_A M_A^T + H_S E = 0 \Rightarrow M_A^T = -H_A^{-1} H_S =$$

Zusammenfassung: Wir müssen nur die Inzidenzmatrix berechnen und gewinnen

$$M = \big((-H_A^{-1}H_S)^T \quad | \quad E\big) = \big(-S_S^T \quad | \quad E\big)$$
$$S = \big(E \quad | \quad -H_A^{-1}H_S\big) = \big(E \quad | \quad -M_A^T\big)$$

Mit diesen Erkenntnissen definieren wir das Maschenstromverfahren

Ausgangspunkt: $M \cdot diag(R) \cdot I = -M \cdot U_q$ Aus $I = M^T I_S$, folgt aus $SM^T = 0$

$$\underbrace{M diag(R) M^T}_{R^*} I_S = \underbrace{-MU_q}_{U_q^*}$$

$$I_A = M_A^T I_S = (-H_A^{-1}H_S) I_S = -S_S I_S$$

Astspannungsanalyse

$$S diag(G) S^T U_A = -SI_q$$

$$U_S = S_S^T U_A = (-H_A^{-1}H_S) U_A = -M_A U_A$$

Schnittmatrix für die Brückenschaltung Fundamentalschnitte

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

	Maschenstromverfahren	
Dualitätsbeziehungen	Anzahl der Sehnen (n-m+1) Masche Strom Sehne Alle Zweige enthalten nur Spannungsquellen und Widerstände $M \cdot diag(R) M^T I_S = -MU_q$ $I_A = M_A^T I_S$ Summe der Widerstände in einer Masche Widerstände zwischen den Maschen Summe der Quellspannungen in einer Masche	Anzahl der Gl

Knotenpotenziale - Astspannungen

U_1, U_2, ..., U_6: Astspannungen

U_1, U_2, U_3: Astspannungen

U_4, U_5, U_6: Sehnenspannungen

Bezugsknoten: 4

U_{K_1}, U_{K_2}, U_{K_3}: Knotenpotentiale

Knotenpotential

1. Erklärung eines Bezugsknotens

2. Die Knotenpotentiale sind die Knotenpotentiale bzgl. des Bezugsknotens

$$
\begin{aligned}
U_{K_1} &= -U_2 \\
U_{K_2} &= -U_1 \\
U_{K_3} &= U_4
\end{aligned}
$$

Knotenpotenzialverfahren

Bezugsknoten 1 Stelle die Knotengleichungen bzgl. der Knotenpotenziale auf.

K_2:

$$G_1U_{21} + G_4U_{21} + I_{q1} = G_3(U_{31} - U_{21})$$

$$U_{21}(G_1 + G_4 + G_3) - U_{31}G_3 = -I_{q1}$$

K_3:

$$G_2U_{31} + G_5U_{31} + I_{q2} + G_3(U_{31} - U_{21}) = 0$$

$$-U_{21}G_3 + U_{31}(G_2 + G_3 + G_5) = -I_{q2}$$

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{21} \\ U_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q1} \\ -I_{q2} \end{pmatrix}$$

$$G_K^* U_K = I_{qk}^*$$

	Matrix G_K^*:	Auf der Hauptdiagonalen werden die Summen der am Knoten angesch
Beobachtungen:		Auf der Nebendiagonalen werden die negativen Summen der Leitwerte
	Vektor I_{qk}^*:	Summe der Quellströme am Knoten. Hinfließend positiv, wegfließend

Beispiel:
Bezugsknoten 2

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 + G_5 & -G_2 - G_5 \\ -G_2 - G_5 & G_2 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} + I_{q2} \\ -I_{q2} \end{pmatrix}$$

Alle Schaltungssimulatoren benutzen das *modifizierte* Knotenpotentialverfahren, das auch Spannungsquellen (zuwachs an der Anzahl der Gleichungen) verwenden kann.

Astspannungsanalyse

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{pmatrix}$$

Das Knotenpotentialverfahren in Matrixform lautet:

$$
\begin{aligned}
H \cdot diag(G) H_T U_K &= -H I_q \\
U &= H^T U_K
\end{aligned}
$$

Knoten 2 Bezugsknoten

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$diag(G) = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot diag(G) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 & -G_2 & 0 & G_4 & G_5 \\ 0 & G_2 & G_3 & 0 & -G_5 \end{pmatrix}$$

$$U_{q1} = 10V, U_{q2} = 50V, U_{q3} = U_{q4} = U_{q5} = 20V, R_i = 10\Omega, i = 1, ..., 6$$

Berechne die Zweigströme

1. Rekusives Berechnen, Ersatzquellenmethode: scheiden beide aus.
2. Überlagerungsverfahren: Aufwand ist die Berechnung von 5 mal 6 Strömen.
3. Gleichungssystem für die Zweigströme: Inversion einer (6x6)-Matrix.
4. Maschenstromverfahren: Vollst. Baum - Inversion einer (3x3)-Matrix - Multiplikation mit einer (3x3)-Matrix.
5. Knotenpotential- und Astspannungsverf.: Ersatzstromquellen mit Innenleitwerten - Inversion einer (3x3)-Matrix - Multiplikation mit einer Matrix - Zweigströme aus Zweigspannungen berechnen.

Maschenstromverfahren Vollst. Baum mit den Zweigen 4, 5 und 6
Sortierfolge

$$I_A = \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}, I_S = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$R^* \cdot I_S = U_q^*$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_5 + R_6 & -R_5 & -R_6 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R + 5 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} + U_{q5} \\ U_{q2} + U_{q4} - U_{q5} \\ U_{q3} + U_{q4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 30 & -10 \\ -10 & -10 & 30 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Tableaux

$$\begin{array}{ccc|c} 30 & -10 & -10 & 30 \\ -10 & 30 & -10 & 50 \\ 10 & -10 & 30 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 30 & -10 & -10 & 30 \\ 0 & \frac{80}{3} & \frac{-40}{3} & 60 \\ 0 & \frac{-40}{3} & \frac{80}{3} & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 30 & -10 & -10 & 30 \\ 0 & \frac{80}{3} & \frac{-40}{3} & 60 \\ 0 & 0 & 20 & 40 \end{array}$$

$$\rightarrow I_3 = 2A, I_2 = 3,25A, I_1 = 2,75A$$

Astströme - $I_A = M_A^T I_S$ oder Knotengleichungen
Knotengleichungen

$$\begin{aligned} K_1 : I_6 &= I_1 - I_3 \\ K_2 : I_5 &= I_2 - I_1 \\ K_4 : I_4 &= I_2 - I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25A \\ 0,5A \\ 0,75A \end{pmatrix}$$

Astpartition der Maschenmatrix
Sortierfolge: 4, 5, 6, 1, 2, 3

$$M = (M_A|M_S) = (M_A|E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M_A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zweig j	U_{qj}	R_j	I_{qj}	G_j
1	10 V	10 Ω	1 A	150 mS
2	50 V	10 Ω	5 A	150 mS
3	20 V	10 Ω	2 A	150 mS
4	20 V	10 Ω	2 A	150 mS
5	20 V	10 Ω	-2 A	150 mS
6	0	10 Ω	0	150 mS

Bezugsknoten: 3

$$U_K = \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_6 \\ -U_5 \\ U_4 \end{pmatrix}$$

Knotenpotentialverfahren: $G_K^* U_K = I_{Kq}^*$

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_6 & -G_1 & -G_3 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 & -G_2 \\ -G_3 & -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q1} + I_{q3} \\ I_{q1} - I_{q2} + I_{q5} \\ I_{q2} - I_{q4} - I_{q3} \end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix} 0,3 & -0.1 & -0,1 \\ -0,1 & 0.3 & -0,1 \\ -0,1 & -0.1 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1A \\ -6A \\ 1A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,5V \\ -25V - 7,5V \end{pmatrix}$$

Fehlende Spannungen - Ablesen oder $U = H^T U_K$

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{13} - U_{23} = & 17,5V \\ U_2 &= U_{23} - U_{43} = & -17,5V \\ U_3 &= -U_{13} + U_{43} - & 0 \\ U_4 &= U_{43} = & -7,5V \\ U_5 &= -U_{23} = & 25V \\ U_6 &= -U_{13} = & 7,5V \end{aligned}$$

$$I_j = U_j G_j + I_{qj} = \left(\begin{pmatrix} 17,5 \\ -17,5 \\ 0 \\ -7,5 \\ 25 \\ 7,5 \end{pmatrix} 0,1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) A$$

$$I = \begin{pmatrix} 2,75 \\ 3,25 \\ 2,0 \\ 1,25 \\ 0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

Methode 2: H-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{43} \\ -U_{23} \\ -U_{13} \\ U_{13} - U_{23} \\ U_{23} - U_{43} \\ -U_{13} + U_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

Astspannungsverfahren

$$S = (S_A|S_S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^* U_A = I_q^*, G^* = S \cdot diag(G) S^T$$

$$G^* : \begin{array}{l} Hauptdiagonalen : SummederamSuperknotenangeschlossenenLeitwerte \\ Nebendiagonalen : SummederLeitwertezwischendenSuperknoten(liegenaufSehnen), positivbe \end{array}$$

I_q^*: Summe der Quellströme an den Superknoten, negativ wenn Stromrichtung und Schnittorientierung gleich, positiv sonst

$$G^* = \begin{pmatrix} G_2 + G_3 + G_4 & G_2 & G_3 \\ G_2 & G_1 + G_2 + G_5 & -G_1 \\ G_3 & -G_1 & G_1 + G_3 + G_6 \end{pmatrix}$$

$$I_q^* = \begin{pmatrix} I_{q2} - I_{q3} - I_{q4} \\ -I_{q1} - I_{q5} + I_{q2} \\ I_{q1} - I_{q3} \end{pmatrix}$$

$$U_A = (G^*)^{-1} I_q^*, U_S = S_S^T U_A$$

$$S \cdot diag(G) \cdot S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$