1 Strom- und Spannungsmessung

1.1 Spannungsmesser

$R_V = \infty, G_V = 0$
R_V: mit Verstärker $10M\Omega$ und mehr ohne Verstärker $k\Omega/V$

1.2 Strommesser

ideal: $R_A = 0$ $G_A = \infty$
real: $R_A > 0$, z.B. $R_A = 150m\Omega$

1.3 Strommessung

Ziel: Messen von I_L
richtiger Wert: $I_r = \frac{U_q}{R_i+R_L}$ angezeiger Wert: $I_a = \frac{U_q}{R_i+R_L+R_A}$
Systematischer Fehler: Rel. Fehler: $F_R = \frac{I_a-I_r}{I_r} = \frac{\frac{U_q}{R_i+R_L+R_A}-\frac{U_q}{R_i+R_L}}{\frac{U_q}{R_i+R_L}} = \frac{-R_A}{R_i+R_L+R_A}$

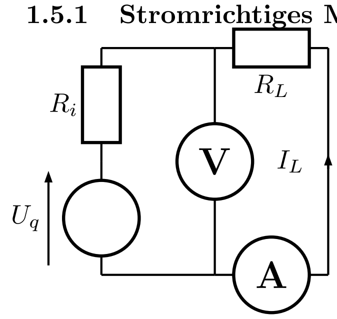
1. Der relative Fehler verändert sich mit R_A

1.4 Spannungsmessung

Richtiger Wert: $U_r = \frac{I_q}{G_i+G_L}$ Angezeigter Wert: $U_a = \frac{I_q}{G_i+G_L+G_V}$ rel. Fehler: $F_r = \frac{-G_V}{G_i+G_L+G_V}$

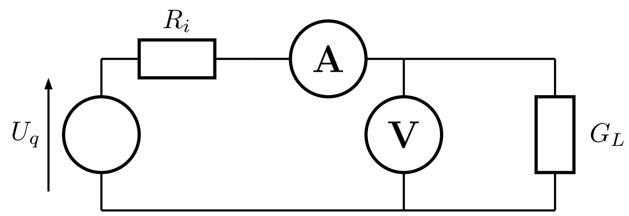
1.5 Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung

1.5.1 Stromrichtiges Messen



Angezeigter Wert: $U_a = U_{RL} + I_L R_A$
Anwendung: hochohmige Last R_L, kleiner Strom I_L

1.5.2 Spannungsrichtiges Messen



Angezeigter Wert: $I_a = I_L + U_L G_V$
Anwendung: niederohmige Last R_L, kleine Spannung U_L

2 Überlagerungsverfahren, Superpositionsverfahren

Anwendungsbereich: *Lineare Zeitinvariante* NW
Methode: Man lässt jede Quelle einzeln wirken und überlagert die Teilwirkungen zur Gesamtwirkung.

(1) Alle im NW befindlichen Quellen werden bis auf eine als in dem Sinne nicht vorhanden angesehen, dass die Quellspannung U_q und die Quellströme I_q zu Null gesetzt werden.

(2) Ausgehen von der einzigen noch vorhandenen Quelle werden die benötigten Teilströme oder Teilspannungen berechnet. Für n Quellen wird dieser Schritt n mal ausgeführt.

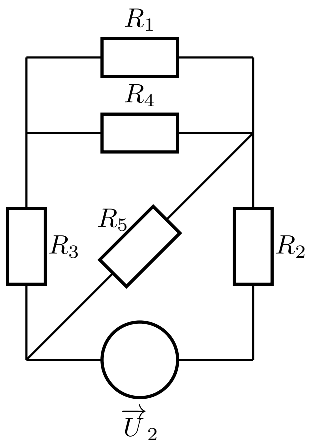
(3) Teilströme und Teilspannungen werden *vorzeichenrichtig* überlagert oder addiert.

$$U_1 = 9V, U_2 = 12V, R_1 = 2.4\Omega, R_2 = 1\Omega, R_3 = 2\Omega, R_4 = 3\Omega, R_5 = 5\Omega$$

(i) $U_2 = 0$

$$R_4* = R_4||(R_3+R_2||R_5) = 1,4571\Omega I_1' = \frac{U_1}{R_1 + R_4*} = 2,3333 A U_4' = I_1' R_4* = 3,4V I_4' = \frac{U_4'}{R_4} = 1,13 A I_3' = I$$

(ii) $U_1 = 0$



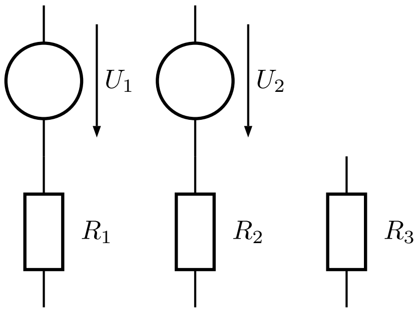
$R_5* = R_5||(R_3{+}R_1||R_4) = 2\Omega I_2'' = \dfrac{U_2}{R_2 + R_5*} = 4A U_5'' = I_2'' R_5 = 8V I_5'' = \dfrac{U_5''}{R_5} = 1,6A$

Aus $I_3'' + I_5'' = I_2''$ erhalten wir $I_3'' = 2,4A$

$$I_1'' = -I_3'' \frac{G_1}{G_1 + G_4} = -1,33A I_4'' = I_3'' \frac{G_4}{G_1 + G_4} = 1,07A$$

(iii) Überlagern

$I_1 = I_1'{+}I_1'' = 1,0A I_2 = I_2'{+}I_2'' = 3,0A I_3 = I_3'{+}I_3'' = 1,2A I_4 = I_4'{+}I_4'' = 2,2A I_5 = I_5'{+}I_5'' = 1,8A$



$U_1 = 40V, U_2 = 60V, I_6 = 1,2A, R_1 = R_3 = R_5 = 50\Omega, R_2 = R_4 = 40\Omega$

Berechne I_3

(i) $U_2 = 0$

$$R_2* = R_2||(R_4{+}R_5) = 27,6923\Omega I_1' = \frac{-U_1}{R_1 + R_3||R_2*} = -0,5898 A I_3' = -I_1' \frac{G_3}{G_3 + G_2*} = 0,2102 A$$

(ii) $U_1 = I_6 = 0$

$$R_1* = R_1||(R_4{+}R_5) = 32,1492\Omega I_2'' = \frac{-U_2}{R_2 + R_1*||R_3} = -1,0073 A I_3'' = -I_2'' \frac{G_3}{G_1 * + G_3} = 0,3942 A$$

(iii) $U_1 = U_2 = 0$

$$I_4''' = -I_6 \frac{G_4*}{G_4 * + G_5} = -0,5693 A I_3''' = -I_4 \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = 0,1752 A$$

$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = 0,7795 A$

3 Topologische Methoden der NW-Analyse

Ersetzt man in einem NW, das nur Zweipole enthält, jeden Zweipol symbolisch durch eine Linie, so erhält man einen Netzwerkgraphen:

- Die Linien heißen *Zweige*.
- Die Punkte, in denen Zweige enden, heißen *Knoten*.
- Werden die Zweige mit Bezugsrichtungen gekennzeichnet, spricht man vom *gerichteten Graphen*.
- Die Zweige werden von 1 bis n, die Knoten von 1 bis m nummeriert.
- *Maschen* sind Folgen von Zweigen mit der Eigenschaft, dass zwei aufeinander folgende Zweige in einem Knoten zusammentreffen und der erste und letzte Zweig einen Knoten gemeinsam haben. Bis auf den Start/End-Knoten darf beim Durchlaufen kein Knoten mehr als einmal angetroffen werden. Der Masche wird ein willkürlicher Umlaufsinn erteilt.
- Ein *vollständiger Baum* ist ein
  1. zusammenhängender
  2. maschenfreier Untergraph, der
  3. alle Knoten der Graphen enthält.
- Die Zweige eines Baumes heißen *Äste* oder *Zweige*. Die nicht zum Baum gehörenden Zweige heißen *Sehnen* oder *Verbindungszweige*.

Im linearen NW kann man jeden Zweig-Zweipol als lineare Ersatzspannungsquelle oder als lineare Ersatzstromquelle darstellen. Zweige haben den Index j mit $j = 1, ..., n$.

1.

$$U_j = U_{qj} + I_j R_j$$

$\downarrow$ Dualität

$$I_j = I_{qj} + U_j G_j$$

U_j, I_j: Zweigspannung, Zweigstrom U_{qj}, I_{qj}: Zweigquellspannung, Zweigquellstrom R_j, G_j: Zweigwiderstand, Zweigleitwert

Ein Zweig mit Index j wird entweder mit Zweigwiderstand R_j und Zweigquellspannung U_{qj} oder mit Zweigleitwert G_j und Zweigquellstrom I_{qj} charakterisiert.

Zweigindex j	U_{qj}	I_{qj}	R_j	G_j
1	U_{q1}	$\frac{U_{q1}}{R_1}$	R_1	$\frac{1}{R_1}$
2	0	0	R_1	$\frac{1}{R_1}$
3	U_{q3}	$\frac{U_{q3}}{R_3}$	R_3	$\frac{1}{R_3}$
4	0	0	R_4	$\frac{1}{R_4}$
5	0	0	R_5	$\frac{1}{R_5}$
6	0	0	R_6	$\frac{1}{R_6}$

4 Vollständiger Baum

Von den n Zweigen werden $m-1$ ausgewählt, um mit ihnen alle Knoten zu verbinden. Eine Bewegung von einem Knoten zu einem anderen hat genau einen Weg, entweder direkt oder über weitere Knoten. Die Teilmenge dieser Zweige bildet den vollständigen Baum.

4.1 Methode des vollständigen Baums

Eine Masche darf beliebig viele Äste aber nur eine ~~Verbindungszweig~~ Sehne enthalten.

$$MGl_1 : U_1+U_2+U_3+U_4 = 0 MGl_2 : -U_4+U_5+U_6+U_7 = 0 MGl_3 : U_1+U_2+U_3+U_5+U_7+U_6+U_3 = 0$$

Wähle einen vollständigen Baum

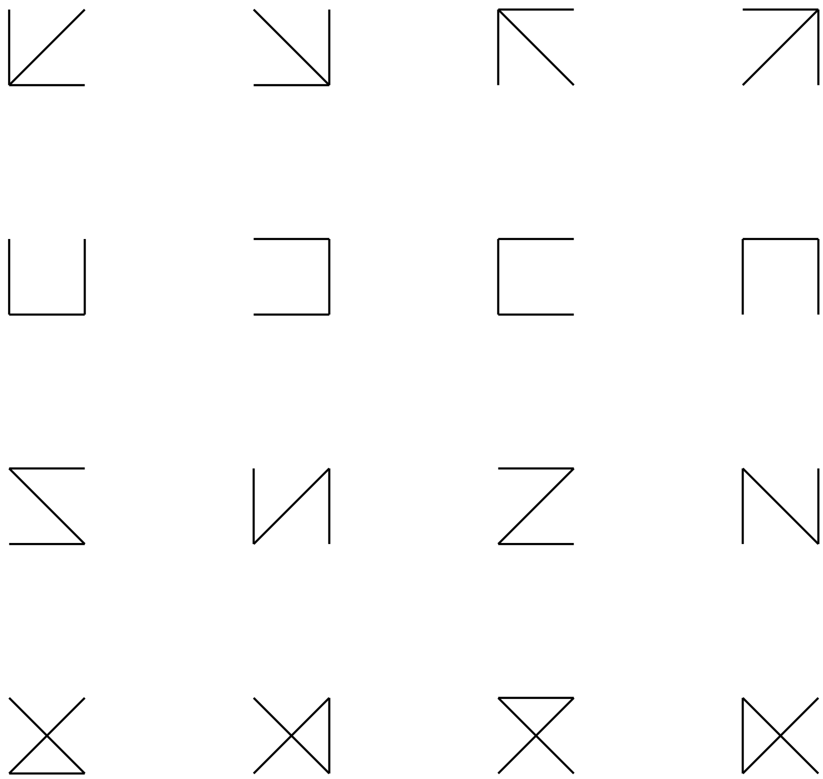
Ein vollständiger Graph hat für jedes Knotenpaar genau einen Zweig.

$$n = \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

$m = 4 \Rightarrow n = 6$

Die Anzahl der vollständigen Bäume im vollständigen Graphen beträgt: $B_{ANZ} = m^{m-2}$

$m = 4 \Rightarrow B_{ANZ} = 16$



5 NW-Analyse mit dem Verfahren des vollständigen Baums

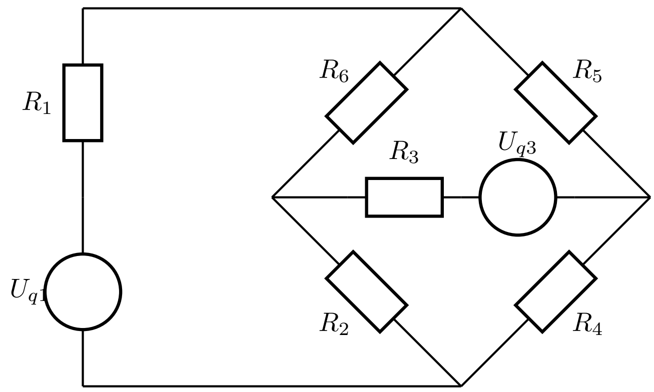
1. NW-Zahlwerte
   m: Anzahl der Knoten, $i = 1, ..., m$
   n: Anzahl der Zweige, $j = 1, ..., n$

2. Baumzahlwerte
   $k = m-1$: Anzahl der Äste im vollst. Baum, Anz. der Knotengleichungen
   $l = n - m + 1$: Anzahl der Sehnen, Anzahl der Maschengleichungen
   $l + k = n$

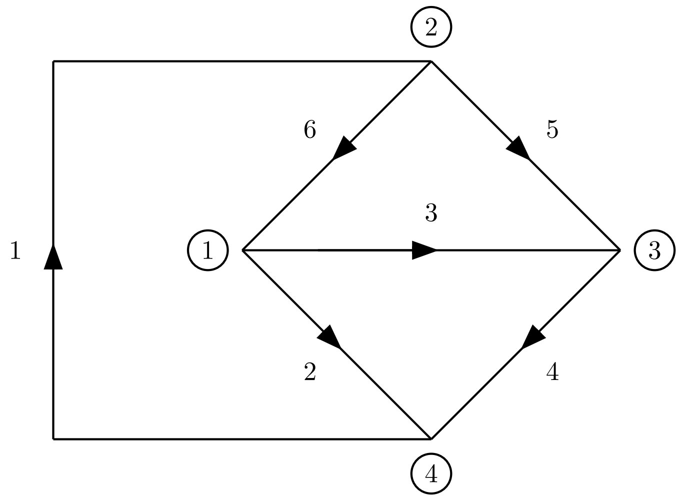
3. Zur Bestimmung von n Zweiggrößen, Zweigspannungen und Zweigströme, mit unterschiedlichen Indices, benötigt man n unabhängige Gleichungen:

(a) $k = m - 1$ Knotengleichungen, in dem man einen Knoten “wegläßt”, zum Bezugsknoten erklärt

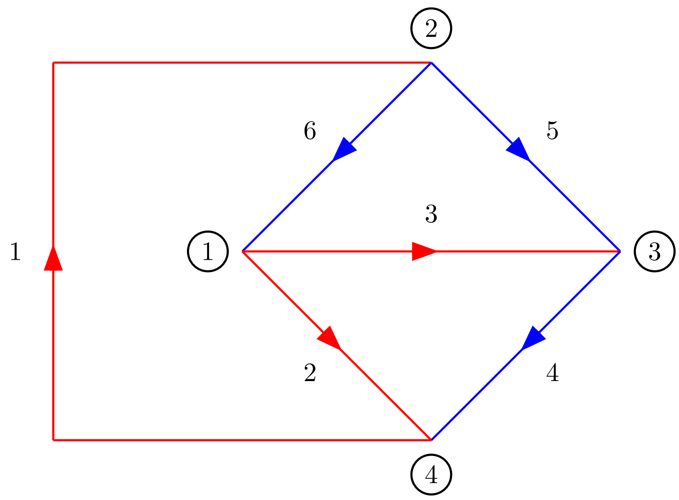
(b) Die fehlenden $l = n - m + 1$ Machengleichungen werden mit dem Verfahren des vollständigen Baums beschafft.



Schritt 1 Erstellung des gerichteten Graphen, Nummeriertung der Knoten und Zweige



Schritt 2 Festlegung des vollständigen Baums
Sehnen in blau
Äste in rot



Schritt 3 Aufstellung der Inzidenzmatrix, Knotenmatrix

Die vollständige (mxn)-Matrix H_v verschreibt die NW-Struktur. Sie hat die Elemente $h_{ij}, h_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ mit $h_{ij} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$, wenn der Zweigstrom mit Index j

$$\left\{ \begin{matrix} \text{vom Knoten } i \text{ wegführt} \\ \text{zum Knoten } i \text{ hinführt} \\ \text{mit dem Knoten } i \text{ nicht inzident ist} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Lezte Kontrollmöglichkeit: Die Spaltensummen müssen Null ergeben

In H_v sind nur $m-1$ Zeilen unabhängig von einander. Wir gewinnen die reduzierte Matrix H, indem wir einen Knoten zum Bezugsknoten wählen. Wahl: Knoten 4 ist Bezugsknoten.

H wird gewonnen, in dem in H_v die dem Bezugsknoten entsprechende Zeile gestrichen wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$HI = 0$$

Schritt 4 Beschaffung der $l-n-m+1$ noch benötigten Machengleichungen

Satz: Zu jeder Sehne werden Äste so hinzugenommen, daß sie zusammen eine Masche bilden. Die Umlaufrichrung der Masche wird durch die Richtung der erzeugenden Sehne bestimmt. Mit diesen Maschen wird die $((n-m+1)x(n))$-Machenmatrix M aufgestellt, mit den Elementen $m_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right\}$ wenn der Zweig j

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{zur Masche } i \text{ gehört und in seiner Richtung durchlaufen wird.} \\ \text{zur Masche } i \text{ gehört und entgegen seiner Richtung durchlaufen wird.} \\ \text{nicht zur Masche } i \text{ gehört.} \end{array} \right\}$$

Masche 1, bzgl. Sehne mit Index 4
Masche 2, bzgl. Sehne mit Index 5
Masche 3, bzgl. Sehne mit Index 6

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Maschengleichungen lauten dann: $MU = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für n Zweigströme.

$$\begin{pmatrix} H \\ ---- \\ M \cdot diag(R) \end{pmatrix} \cdot I = \begin{pmatrix} 0 \\ --- \\ -MU_q \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für n Zweigspannungen

$$\begin{pmatrix} H \cdot diag(G) \\ ---- \\ M \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} -HI_q \\ --- \\ 0 \end{pmatrix}$$

Brückenschaltungsbeispiel

Zahlenbeispiel

$$\begin{array}{ll} U_{q2} = 300V & R_2 = 0.25\Omega \\ U_{q3} = 270V & R_3 = 0.12\Omega \\ R_1: \text{ Verbraucher} & \end{array}$$

Wie verteilen sich die Ströme I_1, I_2 und I_3, wenn der Verbraucherwiderstand R_1 im Bereich $0 < R_1 < 10\Omega$ gewählt wird?

$n = 3, m = 2 \Rightarrow 1$ KGl, 2 MGl

Gerichteter Graph

Vollständiger Baum

Inzidenzmatrix ($1x3$)-Vektor

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bezugsknoten 2

Maschenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} H \cdot I &= 0 \\ M \cdot U &= 0 \end{aligned}$$

Gleichuungssysteme für die Zweigströme in I

$$M^* = M \cdot diag(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot U_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -U_{q2} \\ -U_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{q2} \\ -U_{q3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{q2} \\ U_{q3} \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem für die Zweigspannungen in U

$$H^* = H \cdot diag(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 & -G_3 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot I_q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{q2} \\ I_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q2} - I_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_{q2}}{R_2} + \frac{U_{q3}}{R_3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Also: } \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 & -G_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{U_{q2}}{R_2} - \frac{U_{q3}}{R_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Komprimierte Verfahren

- Berechnung von Sehnenströmen *(Machenstromverfahren)*
- Berechnung der Knotenpotenziale *(Knotenpotenzialverfahren)*
- Berechnung der Astspannungen *(Astspannungsverfahren)*

Maschenstromverfahren

1. Das NW wird allein mit Widerständen und Spannungsquellen dargestellt.
2. Der gerichtete Graph wird erstellt. Ein vollst. Baum wird so gewählt, daß die interessierenden Zweigströme Sehnenströme sind.
3. Maschen aufstellen. Die MGl dürfen nur Shenenströme einhalten.
4. Falls Astströme benötigt werden, berechnen wir sie aus den Sehnenströmen.

Berechne die Zweigströme I_1, I_2 und I_3
Knotengleichungen
$I_4 = I_1 - I_3$ $I_5 = I_2 + I_3$
Masche 1
$U_1 + U_4 = 0$ $-U_{q1} + I_1R_1 + I_4R_4 = 0$ ... $I_1(R_1 + R_4) - I_3R_3 - U_{q1} = 0$
Masche 2
$U_3 - U_4 + U_5 = 0$ $I_3R_3 - I_4R_4 + I_5R_5 = 0$ $-I_1R_4 + I_2R_5 + I_3(R_3 + R_4 + R_5) = 0$
Masche 3
$U_2 + U_5 = 0$ $I_2R_2 + I_5R_5 = 0$ $I_2(R_2 + R_5) + I_3R_5 - U_{q2} = 0$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 & 0 & -R_4 \\ -R_4 & R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \\ 0 & R_2 + R_5 & R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ U_{q2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_4 & 0 & -R_4 \\ 0 & R_2 + R_5 & R_5 \\ -R_4 & R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R^* \cdot I_S = U_q^*$$

(I_S Vektor mit den Sehnenströmen)

Beobachtungen

1. Hauptdiagonale r_{ij}^*, $i = j$, $i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$ Summen der in den jeweiligen Maschen liegenden Widerstände
2. Nebendiagonalen r_{ij}^*, $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$, $j = 1, 2, \ldots, n - m + 1$, $r_{ij}^* = r_{ji}^*$ Widerstandssummen für die Widerstände, die die Maschen i und j gemeinsam haben. Positiv wird bei gleichsinnigem Durchlauf gerechnet.

3. Im Vektor U_q^* werden die Summen der Maschenquellspannungen eingetragen. Positiv wird bei gegensinnigem Durchlauf gerechnet.

$$R^* = \begin{pmatrix} r_{11}^* & r_{12}^* & \dots \\ r_{21}^* & r_{22}^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11}^* &= R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \\ r_{12}^* &= R_2 + R_3 + R_4 = R_{21}^* \\ r_{22}^* &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_7 \end{aligned}$$

Wir wollen im weiteren die NW-Berechnung verallgemeinern und Berechnungsverfahren mit Dualitätsbeziehungen gewinnen. So gewinnen wir die Astspannungsanalyse aus der Sehnenstromalanyse (Maschenstromanalyse). Für diese Betrachtungen benötigen wir eine dritte Matrix, die mit der Knotenmatrix verwandte Schnittmatrix S (das ist eine Superknotenmatrix). Wir sorgen dafür, dass alle NW-Vektoren und NW-Matrizen in der Reihenfolge Astgrößen - Sehnengrößen geordnet werden.

$$S = \begin{pmatrix} S_A & | & S_S \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_A \\ --- \\ I_S \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_A \\ --- \\ U_S \end{pmatrix}$$

$$I_q = \begin{pmatrix} I_{qA} \\ --- \\ I_{qS} \end{pmatrix}$$

$$U_q = \begin{pmatrix} U_{qA} \\ --- \\ U_{qS} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_A & | & M_S \end{pmatrix}$$

vollst. Baum mit den Zweigen 1, 3 und 5

Wir sortieren die Zweige in der Reihenfolge 1, 3, 5, 2, 4, 6 und erden den Knoten 4.

Schnittmatrix Ein Schnitt teilt ein NW in zwei Teil-NW. Wir suchen die Tundamentalschnitte, die einen Ast und im weiteren nur Sehnen schneiden. Das ist dual zur Masche, die eine Sehne und im weitern nur Äste enthält. Die Anzahl der (Fundamental-) Schnitte entspricht der Anzahl der Äste $m-1$. Die Orientierung des Schnitts entspricht der Orientierung des Bezugsasts.

Schnitt S_1 Kirchhoff: $I_1 = I_2 + I_4$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & | & S_S \end{pmatrix}$$

E: Einheistmatrix in der passenden Dimension

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maschenmatrix M

$$M = \begin{pmatrix} M_A & | & M_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A & | & E \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kirchhoffsche Gesetze

HI = 0 Die Summe der Ströme im Knoten ist Null SI = 0 Die Summe der Ströme im Superknoten ist Null MU = 0 Die Maschenumlaufspannung ist Null

Zusammenhang zwischen Schnitt- und Inzidenzmatrix

$$SI = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} S_A & | & S_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ --- \\ I_S \end{pmatrix} = S_A I_A + S_S I_S = E I_A + S_S I_S = I_A + S_S I_S = 0 \Rightarrow I_A = -S_S I_S HI =$$

Also $S = \begin{pmatrix} S_A & | & S_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & | & H_A^{-1} H_S \end{pmatrix}$

Zusammenhang zwischen Maschen- und Inzidenzmatrix

$$MU = 0 + \begin{pmatrix} M_A & | & \underbrace{M_S}_{=E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ --- \\ U_S \end{pmatrix} = M_A U_A + U_S = 0 \Rightarrow U_S = -M_A U_A$$

$$HM^T = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A^T \\ --- \\ M_S^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_A & | & H_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A^T \\ --- \\ E \end{pmatrix} = H_A M_A^T + H_S E = 0 \Rightarrow M_A^T = -H_A^{-1} H_S =$$

Zusammenfassung: Wir müssen nur die Inzidenzmatrix berechnen und gewinnen

$$M = \left((-H_A^{-1}H_S)^T \quad | \quad E\right) = \left(-S_S^T \quad | \quad E\right)$$
$$S = \left(E \quad | \quad -H_A^{-1}H_S\right) = \left(E \quad | \quad -M_A^T\right)$$

Mit diesen Erkenntnissen definieren wir das Maschenstromverfahren

Ausgangspunkt: $M \cdot diag(R) \cdot I = -M \cdot U_q$ Aus $I = M^T I_S$, folgt aus $SM^T = 0$

$$\underbrace{Mdiag(R)M^T}_{R^*} I_S = \underbrace{-MU_q}_{U_q^*}$$

$$I_A = M_A^T I_S = (-H_A^{-1}H_S)I_S = -S_S I_S$$

Astspannungsanalyse

$$Sdiag(G)S^T U_A = -SI_q$$

$$U_S = S_S^T U_A = (-H_A^{-1}H_S)U_A = -M_A U_A$$

Schnittmatrix für die Brückenschaltung Fundamentalschnitte

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

	Maschenstromverfahren	
Dualitätsbeziehungen	Anzahl der Sehnen (n-m+1) Masche Strom Sehne Alle Zweige enthalten nur Spannungsquellen und Widerstände $M \cdot diag(R)M^T I_S = -MU_q$ $I_A = M_A^T I_S$ Summe der Widerstände in einer Masche Widerstände zwischen den Maschen Summe der Quellspannungen in einer Masche	Anzahl der Gl

Knotenpotenziale - Astspannungen

U_1, U_2, ..., U_6: Astspannungen

U_1, U_2, U_3: Astspannungen

U_4, U_5, U_6: Sehnenspannungen

Bezugsknoten: 4

U_{K_1}, U_{K_2}, U_{K_3}: Knotenpotentiale

Knotenpotential

1. Erklärung eines Bezugsknotens

2. Die Knotenpotentiale sind die Knotenpotentiale bzgl. des Bezugsknotens

$$\begin{aligned} U_{K_1} &= -U_2 \\ U_{K_2} &= -U_1 \\ U_{K_3} &= U_4 \end{aligned}$$

Knotenpotenzialverfahren

Bezugsknoten 1 Stelle die Knotengleichungen bzgl. der Knotenpotenziale auf.

K_2:

$$G_1U_{21} + G_4U_{21} + I_{q1} = G_3(U_{31} - U_{21})$$

$$U_{21}(G_1 + G_4 + G_3) - U_{31}G_3 = -I_{q1}$$

K_3:

$$G_2U_{31} + G_5U_{31} + I_{q2} + G_3(U_{31} - U_{21}) = 0$$

$$-U_{21}G_3 + U_{31}(G_2 + G_3 + G_5) = -I_{q2}$$

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{21} \\ U_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q1} \\ -I_{q2} \end{pmatrix}$$

$$G_K^* U_K = I_{qk}^*$$

	Matrix G_K^*:	Auf der Hauptdiagonalen werden die Summen der am Knoten angesc
Beobachtungen:		Auf der Nebendiagonalen werden die negativen Summen der Leitwert
	Vektor I_{qk}^*:	Summe der Quellströme am Knoten. Hinfließend positiv, wegfließend

Beispiel:
Bezugsknoten 2

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 + G_5 & -G_2 - G_5 \\ -G_2 - G_5 & G_2 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} + I_{q2} \\ -I_{q2} \end{pmatrix}$$

Alle Schaltungssimulatoren benutzen das *modifizierte* Knotenpotentialverfahren, das auch Spannungsquellen (zuwachs an der Anzahl der Gleichungen) verwenden kann.

Astspannungsanalyse

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \end{pmatrix}$$

Das Knotenpotentialverfahren in Matrixform lautet:

$$\begin{aligned} H \cdot diag(G) H_T U_K &= -H I_q \\ U &= H^T U_K \end{aligned}$$

Knoten 2 Bezugsknoten

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$diag(G) = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot diag(G) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 & -G_2 & 0 & G_4 & G_5 \\ 0 & G_2 & G_3 & 0 & -G_5 \end{pmatrix}$$

$$U_{q1} = 10V, U_{q2} = 50V, U_{q3} = U_{q4} = U_{q5} = 20V, R_i = 10\Omega, i = 1, ..., 6$$

Berechne die Zweigströme

1. Rekusives Berechnen, Ersatzquellenmethode: scheiden beide aus.
2. Überlagerungsverfahren: Aufwand ist die Berechnung von 5 mal 6 Strömen.
3. Gleichungssystem für die Zweigströme: Inversion einer (6x6)-Matrix.
4. Maschenstromverfahren: Vollst. Baum - Inversion einer (3x3)-Matrix - Multiplikation mit einer (3x3)-Matrix.
5. Knotenpotential- und Astspannungsverf.: Ersatzstromquellen mit Innenleitwerten - Inversion einer (3x3)-Matrix - Multiplikation mit einer Matrix - Zweigströme aus Zweigspannungen berechnen.

Maschenstromverfahren Vollst. Baum mit den Zweigen 4, 5 und 6
Sortierfolge

$$I_A = \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}, I_S = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$R^* \cdot I_S = U_q^*$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_5 + R_6 & -R_5 & -R_6 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R + 5 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_3 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} + U_{q5} \\ U_{q2} + U_{q4} - U_{q5} \\ U_{q3} + U_{q4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 30 & -10 \\ -10 & -10 & 30 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Tableaux

$$\begin{array}{ccc|c} 30 & -10 & -10 & 30 \\ -10 & 30 & -10 & 50 \\ 10 & -10 & 30 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 30 & -10 & -10 & 30 \\ 0 & \frac{80}{3} & \frac{-40}{3} & 60 \\ 0 & \frac{-40}{3} & \frac{80}{3} & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 30 & -10 & -10 & 30 \\ 0 & \frac{80}{3} & \frac{-40}{3} & 60 \\ 0 & 0 & 20 & 40 \end{array}$$

$$\rightarrow I_3 = 2A, I_2 = 3,25A, I_1 = 2,75A$$

Astströme - $I_A = M_A^T I_S$ oder Knotengleichungen
Knotengleichungen

$$\begin{aligned} K_1 : I_6 &= I_1 - I_3 \\ K_2 : I_5 &= I_2 - I_1 \\ K_4 : I_4 &= I_2 - I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25A \\ 0,5A \\ 0,75A \end{pmatrix}$$

Astpartition der Maschenmatrix
Sortierfolge: 4, 5, 6, 1, 2, 3

$$M = (M_A|M_S) = (M_A|E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M_A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zweig j	U_{qj}	R_j	I_{qj}	G_j
1	10 V	10 Ω	1 A	150 mS
2	50 V	10 Ω	5 A	150 mS
3	20 V	10 Ω	2 A	150 mS
4	20 V	10 Ω	2 A	150 mS
5	20 V	10 Ω	-2 A	150 mS
6	0	10 Ω	0	150 mS

Bezugsknoten: 3

$$U_K = \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_6 \\ -U_5 \\ U_4 \end{pmatrix}$$

Knotenpotentialverfahren: $G_K^* U_K = I_{Kq}^*$

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_6 & -G_1 & -G_3 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 & -G_2 \\ -G_3 & -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{q1} + I_{q3} \\ I_{q1} - I_{q2} + I_{q5} \\ I_{q2} - I_{q4} - I_{q3} \end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix} 0,3 & -0.1 & -0,1 \\ -0,1 & 0.3 & -0,1 \\ -0,1 & -0.1 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1A \\ -6A \\ 1A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,5V \\ -25V - 7,5V \end{pmatrix}$$

Fehlende Spannungen - Ablesen oder $U = H^T U_K$

$$\begin{aligned} U_1 && = U_{13} - U_{23} = && 17,5V \\ U_2 && = U_{23} - U_{43} = && -17,5V \\ U_3 && = -U_{13} + U_{43} - && 0 \\ U_4 && = U_{43} = && -7,5V \\ U_5 && = -U_{23} = && 25V \\ U_6 && = -U_{13} = && 7,5V \end{aligned}$$

$$I_j = U_j G_j + I_{qj} = \left(\begin{pmatrix} 17,5 \\ -17,5 \\ 0 \\ -7,5 \\ 25 \\ 7,5 \end{pmatrix} 0,1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) A$$

$$I = \begin{pmatrix} 2,75 \\ 3,25 \\ 2,0 \\ 1,25 \\ 0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

Methode 2: H-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{K1} \\ U_{K2} \\ U_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{43} \\ -U_{23} \\ -U_{13} \\ U_{13} - U_{23} \\ U_{23} - U_{43} \\ -U_{13} + U_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

Astspannungsverfahren

$$S = (S_A|S_S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^* U_A = I_q^*, G^* = S \cdot diag(G) S^T$$

$$G^* : \begin{matrix} Hauptdiagonalen : Summe der am Superknoten angeschlossenen Leitwerte \\ Nebendiagonalen : Summe der Leitwerte zwischen den Superknoten (liegen auf Sehnen), positivbe \end{matrix}$$

I_q^*: Summe der Quellströme an den Superknoten, negativ wenn Stromrichtung und Schnittorientierung gleich, positiv sonst

$$G^* = \begin{pmatrix} G_2 + G_3 + G_4 & G_2 & G_3 \\ G_2 & G_1 + G_2 + G_5 & -G_1 \\ G_3 & -G_1 & G_1 + G_3 + G_6 \end{pmatrix}$$

$$I_q^* = \begin{pmatrix} I_{q2} - I_{q3} - I_{q4} \\ -I_{q1} - I_{q5} + I_{q2} \\ I_{q1} - I_{q3} \end{pmatrix}$$

$$U_A = (G^*)^{-1} I_q^*, U_S = S_S^T U_A$$

$$S \cdot diag(G) \cdot S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Netzwerke mit nichtlinearen Bauelementen

Drei Berechnungsverfahren

1. Der Kennlinienverlauf wird durch eine geeignete mathematische Funktion genähert und das Netzwerk mit Hilfe von Knoten- und Maschengleichungen analysiert. Die auftretenden Gleichungen sind nichtlinear.

2. Die Kennlinie des nichtlinearen Bauelements wird in der Umgebung eines *vermuteten* Arbeitspunkts linearisiert. Hier ist es oft nötig, nach der Analyse die Abweichung vom Verhalten des Bauelements nachzuprüfen und die Vermutungen iterativ zu verbessern.

3. Im NW mit nur einem nichtlinearen Bauelement und beliebig vielen linearen Bauelementen ist eine graphische AP-Bestimmung mit einem Ersatzzweipolquellenverfahren möglich. Wir bringen beide Kennlinien zum Schnitt, d.h. wir lösen $U_L(I) = U_{NL}(I)$ AP: (I^*, U^*), für den gilt: $U_{NL}(I^*) = U_L(I^*) = U_0 - R_i I^*$

Bsp. Linearisierungsverfahren Lineare Ersatzschaltung

U_D	I_D
0.6	0
0.7	1
0.8	5
0.9	17
0.95	25

Für die Linearisierung wählen wir einen Punkt $P_L : (U_L, I_L) = (0,82V, 7A)$

Ablesen: $R_{iE} = 7,4m\Omega, U_{oE} = 0,78V$

Die Ersatzschaltung repräsentiert die Diode mit brauchbarer Übereinstimmung im Strombereich zwischen $7A$ und $30A$.

Wir überprüfen die Linearisierung für das NW (i) $R_i = 10m\Omega$ (ii) $R_i = 100m\Omega$

Linearisierter Fall $I_{DE} = \frac{U_0 - U_{oE}}{R_i + R_{iE}}$ $U_{DE} = U_{oE} + I_{DE}R_{iE}$

	Reale Diode		Ersatzschaltung	
	I_D/A	U_D/V	I_{DE}/A	U_{DE}/V
$R_i = 10m\Omega$	≈ 12	$\approx 0,88$	$12,64$	$0,87$
$R_i = 100m\Omega$	≈ 3	$\approx 0,78$	$2,05$	$0,80$

Anwendung einer Zener-Diode zur Spannungsstabilisierung

Ersatzschaltung

$U_0 = 30V, R_L = 2200\Omega, U_{oE} = 5,6V, R_{iE} = 10\Omega$

1. Bestimmen sie einen Vorwiderstand R_v so, dass sich ein Z-Diodenstrom von 3,5mA einstellt. (Das ist der AP)

2. Wie ändert sich die Lastspannung U_L, wenn sich die Eingangsspannung U_0 um 10% ändert?

3. Wie ändert sich die Lastspannung U_L, wenn sich der Lastwiderstand R_L um 10% ändert?

Ersatzschaltung

$I = I_Z + I_L$ Da $I_Z R_{iE} << U_{oE}$ ist, setzen wir $U_L \approx U_{oE}$.

$I_L = \frac{U_{oE}}{R_L} = \frac{5,6V}{2,2k\Omega} = 2,55mA$ $I = I_L + I_Z = 2,55mA + 3,5mA = 6,05mA$

$R_v = \frac{U_0 - U_{oE}}{I} = 4,03k\Omega$

Überprüfung der Vernachlässigung $U_Z = U_{oE} + R_{iE}I_Z = U_{oE} + 35mV = 5,635V$

(2) Gesucht wird der funktionale Zusammenhang $U_Z = U_L = f(U_0)$

KGl: $I = I_Z + I_L$

MGl_1: $U_0 = IR_V + I_Z R_{iE} + U_{oE}$

MGl_2: $U_Z = I_Z R_{iE} + U_{oE} = I_L R_L = U_L$

$\Rightarrow U_0 = U_L\left(\frac{R_V}{R_L} + \frac{R_V + R_{iE}}{R_{iE}}\right) + U_{oE}\left(1 - \frac{R_V + R_{iE}}{R_{iE}}\right)$

$\delta U_L = \delta U_0 \frac{1}{\frac{R_V}{R_L} + \frac{R_V + R_{iE}}{R_{iE}}}$ $\delta U_0 = 0,1 \cdot U_0 = 3V$ $\frac{\delta U_0}{U_0} = 0,1$ $\frac{\delta U_L}{U_L} = \frac{\delta U_0}{U_L} \frac{1}{\frac{R_V}{R_L} + \frac{R_V + R_{iE}}{R_{iE}}} = 0,0013 = 0,13\%$

6.1 Leistung

1. I und U sind konstant oder Effektivwerte, wenn Strom und Spannung proportional zueinander sind, z.B. Strom und Spannung sind in Phase bei sinusförmigen Größen.
$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I$$

2. Augenblicksleistung
$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

3. Wirkleistung
$$P = \tilde{p} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot i(t)dt$$

4. Scheinleistung, Strom und Spannung sind nicht mehr proportional
$$S = U \cdot I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)dt}$$

5. Komplexe Leistung $\underline{P}$
$$P = Re\{\underline{P}\}\text{: Wirkleistung, } [P] = W$$
$$Q = Im\{\underline{P}\}\text{: Blindleistung, } [Q] = VA_r$$
$$|\underline{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S\text{: Scheinleistung, } [S] = VA$$

6.2 Sinusgrößen

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi_i) \\ u(t) &= u^{\cdot} \sin(\omega t + \phi_u) \end{aligned}$$
$$\phi = \phi_u - \phi_i\text{: Phasenwinkel}$$

ϕ_i, ϕ_u: Winkel zum nächstgelegenen Nulldurchgang mit anwachsender Funktion.
$\phi_i > 0, \phi_u < 0, \phi < 0$

6.3 Sprachgebrauch

$\phi < 0$: Der Strom eilt der Spannung voraus oder die Spannung eilt dem Strom nach
$\phi > 0$: Der Strom eilt der Spannung nach oder die Spannung eilt dem Strom vor

6.4 Mittelwerte von Sinusgrößen

Arith. Mittelwert:

$$\tilde{i} = \frac{1}{T}\int_0^1 \hat{i}\cdot\sin(\omega t)dt = \frac{\hat{i}}{T}\left(\left.\frac{-\cos(\omega t)}{\omega}\right|_0^1\right) = \frac{\hat{i}}{T}\left(\cos(0) - \underbrace{cos(\omega T)}_{cos(2\pi)}\right) = 0$$

Gleichrichtwert:

$$|\tilde{i}| = \frac{1}{T}\int_0^1 |i(t)|dt = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}} \hat{i}\sin(\omega t)dt = \ldots = \frac{2\hat{i}}{\pi} = 0,6366\hat{i}$$

Effektivwert:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\hat{i}\cdot\sin(\omega t)\right)^2 dt} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{i}^2}{2}dt}_{\frac{\hat{i}}{2}\cdot T} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\hat{i}^2\cdot\cos(2\omega t)dt}_{=0\text{arith. Mittelwert einer Wechselgröße}}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx 0,7071\hat{i}$$

Spitzenwertfaktor: $\xi = \frac{\hat{i}}{I} = \sqrt{2}$
Formfaktor: $F = \frac{I}{|\tilde{i}|} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,111$

Bsp. Stromwinkel $0 \leq \alpha \leq 150° \frac{\pi}{180°}$ Effektivwert der Spannung: $U = 220V$ Zwischen welchen Grenzen läßt sich der Effektivwert I einstellen, wenn α zwischen 0 und $\pi\frac{150}{180}$ gewählt wird?

$I(\alpha = 0) = 1,56A$, $I(\alpha = \pi\frac{150}{180}) = 0,26A$

Parameter sinusförmiger Größen, Zeigerdiagramme

$$i(t) = \hat{i}\cdot\sin(\omega t + \phi i)$$

Parameter: Kreisfrequenz ω, $\omega = 2\pi f$, f : Frequenz Spitzenwert $\hat{i} \rightarrow$ Effektivwert $I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \rightarrow$ Gleichrichtwert $|\tilde{i}| = 0,6366\hat{i} \rightarrow$ ...faktor $\xi = \sqrt{2} \rightarrow$ Formfaktor $F = 1,111$ Phasenwinkel ϕ_i

Die symbolische Darstellung erfolgt mit dem Zeigerdiagramm.

Wir analysieren in GLET1 *lineare* NW und gehen davon aus, dass *alle* Quellen *sinusförmige* Spannungen oder Ströme mit *derselben Frequenz* erzeugen. Dann sind alle Zweigspannungen und Zweigströme sinusförmig mit ebendieser Frequenz.

$$\sum_\nu \hat{u}_\nu \sin(\omega_0 t + \phi_\nu) = \hat{u}\cdot\sin(\omega_0 t + \phi)$$

komplex:

$$\sum_\nu a_\nu e^{j(\omega_0 t + \phi_\nu)} = \sum_\nu a_\nu e^{\cdots}$$

6.5 Addition und Subtraktion von Sinusgrößen

Gegeben sind zwei Spannungen mit gleicher Frequenz und wir berechnen die Summenspannung.

$$u_g(t) = u_1(t) + u_2(t) \tag{1}$$

$$\hat{u}_g \cdot \sin(\omega t + \phi_g) = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2) \tag{2}$$

nach ermüdender Rechnung erhält man

$$\hat{u}_g = \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}, \phi_g = \arctan\left(\frac{\hat{u}_1 \cdot \sin(\phi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\phi_2)}{\hat{u}_1 \cdot \cos(\phi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\phi_2)}\right)$$

Spitzenwertzeiger $\underline{\hat{u}}$
Effektivwertzeiger $\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$

Bsp. ... a) und b) schaltung mit 2 Spannungsquellen u_1 und u_2, bei a gleiche richtung, bei b entgegengesetzt

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir einen Winkel zu Null, z.B. $\phi_1 = 0$
a)

$$U_g = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} = \sqrt{50^2 + 30^2 + 2 \cdot 50 \cdot 30 \cdot \cos(60°)} = 70V$$

$$\phi_{1g} = \arctan\left(\frac{50 \cdot \sin(\phi_1) + 30 \cdot \sin(\phi_2)}{50 \cdot \cos(\phi_1) + 30 \cdot \cos(\phi_2)}\right) = \arctan\left(\frac{30 \cdot \sin(60°)}{50 + 30 \cdot \cos(60°)}\right) = 21,79°$$

b)

$$U_g = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} = \sqrt{50^2 + 30^2 + 2 \cdot 50 \cdot 30 \cdot \cos(-120°)} = 43,59V$$

$$\phi_{1g} = \arctan\left(\frac{50 \cdot \sin(\phi_1) + 30 \cdot \sin(\phi_2)}{50 \cdot \cos(\phi_1) + 30 \cdot \cos(\phi_2)}\right) = \arctan\left(\frac{30 \cdot \sin(-120°)}{50 + 30 \cdot \cos(-120°)}\right) = -36,59°$$

6.6 Differentiation und Integration von Sinusgrößen

Differentiation nach der Zeit

$$f(t) = \frac{d}{dt}(\hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi_i)) = \omega \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \phi_i) = \omega \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2})$$

- Wir erhalten eine Sinusschwingung mit derselben Frequenz, die der ursprünglich um $\frac{\pi}{2}$ oder 90° voreilt.
- Die Amplitude entspricht dem ω-fachen der Ursprungsamplitude.

Integration über der Zeit

$$g(t) = \int \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi_i)dt = \frac{-1}{\omega}\hat{\imath}\cos(\omega t + \phi_i) = \frac{1}{\omega}\hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi_i - \frac{\pi}{2})$$

- Wir erhalten eine Sinusschwingung mit der selben Frequenz, die der ursprünglichen um $\frac{\pi}{2}$ oder 90° nacheilt.
- Die Amplitude entspricht dem $\left(\frac{1}{\omega}\right)$-fachen der Ursprungsamplitude.

Induktivität L: Induktivität $[L] = \frac{V_s}{A} = H$
Allg. $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L}\int udt$
Sinusförmige Größen Sei $i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi_i)$, dann ist $u(t) = L \cdot \frac{d}{dt}i(t) = L \cdot \omega \cdot \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi_i + \frac{\pi}{2}) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u)$, $\hat{u} = L\omega\hat{\imath}$, $\phi_u = \phi_i + \frac{\pi}{2}$
Kondensator, Kapazität
$i = c \cdot \frac{du}{dt}$ $u = \frac{1}{c} \cdot \int idt$
Sinusförmige Größen Sei $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u)$, dann ist $i(t) = \hat{u} \cdot c \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \phi_u + \frac{\pi}{2}) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi_i)$ mit $\hat{\imath} = \hat{u} \cdot c \cdot \omega$ und $\phi_i = \phi_u + \frac{\pi}{2}$
Rechenbeispiel
kGl: $i(t) = i_L(t) + i_R(t)$

1. Augenblicksleistung in der Parallelschaltung
2. Wrikleistung im Widerstand
3. Scheinleistung in der Induktivität

$u(t) = \hat{u} \cdot (\omega t)$, $t \geq 0$, $i_L(t = 0) = 0$

1.

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{u} \cdot \sin(\omega t)}{R}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt = \frac{\hat{u}}{L}\int \sin(\omega t)dt = \frac{-\hat{u}}{\omega L}\cos(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t) - \frac{\hat{u}}{\omega L}\cos(\omega t)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = \hat{u}\cdot\sin(\omega t)\left(\frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t) - \frac{\hat{u}}{\omega L}\cos(\omega t)\right) = \frac{\hat{u}^2}{R}\sin^2(\omega t) - \frac{\hat{u}^2}{2\omega L}\sin(2\omega t) = \frac{\hat{u}^2}{R}\cdot\frac{1}{2}(Gleichan$$

2.

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt = \frac{\hat{u}^2}{2R} = \frac{U^2}{R}$$

3. Scheinleistung in der Induktivität

$$S = U\cdot I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \hat{u}^2 \cdot \sin^2(\omega t)dt}\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\hat{u}^2}{(\omega L)^2}\cos^2(\omega t)dt}\cdot\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}\cdot\omega\cdot L} = \frac{U^2}{\omega L}$$

$\omega L = |Z_L|$ Betrag der Impedanz der Induktivität

Komplexe Zeiger Euler: $\underline{z} = e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$ $Re\{\underline{z}\} = \frac{1}{2}(\underline{z} + \underline{z}^*)$ $cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ $Im\{\underline{z}\} = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$ $sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$

De Moivre: $(cos(\phi) + j\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + j \cdot \sin(n\phi)$

komplexe Schwingung $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \phi_u)}$ Zeitfunktion $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u) = Im\{\underline{u}\}$

Differentiation nach der Zeit $\rightarrow$ Multiplikation mit $j\omega = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ Integration über der Zeit $\rightarrow$ Multiplikation mit $\frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Bsp.: Gesucht sind die komplexen Zahlen $\underline{z_1} = x_1 + jy_1$ und $\underline{z_2} = x_2 + jy_2$, die zueinander reziprok sind und die Realteile $x_1 = 0,3$ sowie $x_2 = 1,2$ haben. $\underline{z_1} = 0,3 + jy_1 = \frac{1}{\underline{z_2}} = \frac{1}{1,2+jy_2}$

konjugiertkomplex erweitern: $\frac{1}{\underline{z}} = \frac{\underline{z}^*}{\underline{z}\underline{z}^*} = \frac{\underline{z}^*}{|\underline{z}|^2}$

$\frac{1}{1,2+jy_2} = \frac{1,2-jy_2}{(1,2)^2+y_2^2}$

Realteile $0,3 = \frac{1,2}{(1,2)^2+y_2^2} \rightarrow y_2 = \pm 1,6$

Imaginärteile $y_2 = \frac{-y_2}{(1,2)^2+y_2^2} \rightarrow y_2 = \mp 0,4$

$\underline{z_1} = 0,3 - j0,4$
$\underline{z_2} = 1,2 + j1,6$
oder
$\underline{z_1} = 0,3 + j0,4$
$\underline{z_2} = 1,2 - j1,6$

Bsp.: Für $f = 50Hz$ und $\phi_u = 60°$ sollen bei $U = 230V$ der Spitzenwert $\hat{u}$ berechnet und die komplexe Darstellung angegeben werden. Zudem soll $u(t)$ an der Stelle $t = 12ms$ berechnet werden. reelle Darstellung: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \phi_u)$ komplexe Darstellung: $\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \phi_u)}$ Zusammenhang: $u(t) = Im\{\underline{u}\}$

$$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U = 325,3V$$

$$\underline{u} = 325,3V \cdot e^{j(2\pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{s} \cdot t - \frac{\pi}{3})} = 325,3V \cdot e^{j(314\frac{1}{s} - \frac{\pi}{3})}$$

$$t(t = 12ms) = Im\{325,3V \cdot e^{j(314\frac{0,012s}{s} \cdot \frac{\pi}{3})}\} = 325,3V \cdot \sin(314 \cdot 0,012 - \frac{\pi}{3}) = 132,3V$$

6.7 Komplexe Größen zur Analyse von Sinusstrom-NW

Komplexer Drehzeiger

$$\underline{u} = \hat{u}e^{j(\omega t + \phi_u)} = \hat{u}e^{j\phi_u}e^{j\omega t}$$

$\underline{u}$: ruhender Zeiger zum Zeitpunkt $t = 0$
Komplexe Amplitude: $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\phi_u}$, $\underline{u} = \underline{\hat{u}}e^{j\omega t}$
Die komplexe Amplitude entspricht dem rudenen Drehzeiger zum Zeitpunkt $t = 0$
Im zeitinvarianten NW ändern sich die Verhältniss der Zweiggrößen zueinander nicht mit der Zeit, somit können wir sie zu $t = 0$ setzen.

Effektivwertzeiger $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$, $\underline{u} = U \cdot e^{j\phi_u}$, $\underline{I} = I \cdot e^{j\phi_i}$

$\phi = \phi_u - \phi_i$: Phasendifferenz
ϕ_u, ϕ_i: Nullphasenwinkel

Komplexe Widerstände (Impedanzen) und komplexe Leitwerte (Admittanzen)

$$\underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\phi_u}}{Ie^{j\phi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\phi_u - \phi_i)} = \frac{U}{I}e^{j\phi} = ze^{j\phi} \quad z = \frac{U}{I}$$

$$\underline{z} = R + jX, |\underline{z}| = z = \sqrt{R^2 + X^2}, \phi = \arctan\left(\frac{X}{U}\right)$$

$|\underline{z}| = z = \sqrt{R^2 + X^2}$: Scheinwiderstand
$R = \underline{z}\cos(\phi) = Re\{\underline{z}\}$: Wirkwiderstand
$X = \underline{z}\sin(\phi) = Im\{\underline{z}\}$: Blindwiderstand, Reaktanz

Komplexer Leitwert: $\underline{y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I \cdot e^{j\phi_i}}{U \cdot e^{j\phi_u}} = \frac{I}{U}e^{j(\phi_i - \phi_u)} = \frac{I}{U}e^{-j\phi} = \frac{I}{U}e^{j\phi_y}$
Kartesische Koordinaten: $\underline{y} = G + jB$, $\phi_y = \arctan\left(\frac{R}{G}\right)$
$\underline{y}$: komplexer Leitwert, $Y = |\underline{y}| = \sqrt{G^2 + R^2}$: Scheinleitwert
$G = Re\{\underline{y}\} = \underline{y}\cos(\phi_y)$: Wirkleitwert, Konduktanz
$B = Im\{\underline{y}\} = \underline{y}\sin(\phi_y)$: Blindleitwert, Suszeptanz

Zusammenhang zwischen $\underline{z}$ und $\underline{y}$: $\underline{y} = \frac{1}{\underline{y}} = \frac{1}{z}e^{-j\phi}$, $\underline{y} = \frac{1}{z}e^{j\phi_y}$ mit $\phi_y = -\phi$

Rechnen mit kartesischer Darstellung

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 - X^2} = \frac{R}{z^2} - j\frac{X}{z^2}$$

$$\to G = \frac{R}{R^2 + X^2} \to B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

$G = \frac{1}{R}$, gültig für $X = 0$

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{y}} = R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j\frac{B}{G^2 - B^2} = \frac{G}{y^2} - j\frac{B}{y^2}$$

$$\to R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{y^2} \to X = \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{-B}{y^2}$$

Komplexe Leistung Der ohmsche Verbraucher R nimmt die Wirkleistung $P = RI^2 = GU^2$ auf. Eine komplexe Leistung $\underline{S} = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2 = P + jQ$

$\underline{s} = \underline{y} \cdot U^2 = GU^2 - jBU^2 \quad \angle\underline{s} = \angle\underline{z} = -\angle\underline{y}$

$\underline{S}$: komplexe Leistung, $|\underline{S}| = S = UI$: Scheinleistung, $Q = XI^2 = -BU^2$: Blindleistung

$\underline{S} = \underline{UI}^*$, beim ohmschen Verbraucher sind Strom und Spannung in Phase.
$\phi_u = \phi_i = \tilde{\phi}$, $\underline{S} = \underline{UI}^* e^{j\tilde{\phi}}e^{-j\tilde{\phi}} = UI$
Leistungsfaktor: $cos(\phi) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

	Zeitfunktionen	Eff.Zeiger	komplexe Größen	Impedanzen	komplexe L
R(wiederstand)	$u = Ri$ $i = \frac{1}{R}u$	$\underline{U} = R\underline{I}$ $\underline{I} = \frac{1}{R}\underline{U}$	(in phase)		

Bsp. An einer Spule mit vernachlässigbarem Wirkwiederstand (Kupfer-, Eigenverlust) liegt eine Wechselspannung mit $f = 40Hz$ und $U = 125V$ an. Der Effektivstrom beträgt $I = 10A$. Wie groß ist die Spuleninduktivität L?

$\underline{z} = j\omega L = j\frac{U}{I}(\underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\phi_u - \phi_i)} = \frac{U}{I}j)$
$L = \frac{U}{\omega I} = \frac{125V}{2\pi \cdot 40 \cdot \frac{1}{s} \cdot 10A} = 49,74mH$

6.8 Kirchhoffsche Gesetze bei Sinusstrom-NW

Knoten und Maschensatz können nicht selbstverständlich auf Wechselgrößen übertragen werden. Unter der Voraussetzung konzentrierter Bauelemente (z.B. Fremderregung einer Spule) können wir Maschen- und Knotensatz wie im Gleichstromfall anwenden.

Maschensatz: $\sum_{\nu=1}^{N} \underline{U}_\nu = 0$ Die Umlaufspannung verschwindet.
Knotensatz: $\sum_{\nu=1}^{N} \underline{I}_\nu = 0$ Die Summe der Ströme im Knoten verschwindet.

Impedanz von Reihenschaltungen $\underline{Z} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{Z}_\nu$
Spannungsteilerregel $\frac{\underline{U}_\mu}{\underline{U}_\nu} = \frac{\underline{Z}_\mu}{\underline{Z}_\mu}$ oder $\frac{\underline{U}_\nu}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_\nu}{\underline{Z}}$

Parallelschaltung von Admittanzen $\underline{Y} = \sum_{\nu=1}^{N} = \underline{Y}_\nu$
Stromteilerregel $\frac{\underline{I}_\mu}{\underline{I}_\nu} = \frac{\underline{Y}_\mu}{\underline{Y}_\mu}$ oder $\frac{\underline{I}_\nu}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_\nu}{\underline{Y}}$

Reihenschaltungen

1. RL-Reihenschaltung MGl: $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} = \underline{I}(R + j\omega L)$
   Impedanz: $\underline{Z} = R + j\omega L = Ze^{j\phi}$
   Scheinwiderstand: $Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$
   Admittanz: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{R}{R^2+(\omega L)^2} + j\frac{-\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$
   Komplexleistung: $\underline{S} = P + jQ = RI^2 + j\omega LI^2 = \frac{R}{Z^2} - j\frac{\omega L}{Z^2}$
   Leistungsfaktor: $\frac{P}{S} = \cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$

2. RC-Reihenschaltung MGl: $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$
   Impedanz: $\underline{Z} = R + j\frac{-1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\phi}$
   Scheinwiderstand: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, $\phi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$
   Admittanz: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R-j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$
   Komplexleistung: $\underline{S} = RI^2 = \frac{j}{\omega C}I^2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} I^2 e^{j\phi}$

3. RLC-Reihenschaltung MGl: $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$
   $|\omega L| > |\frac{1}{\omega C}|$
   Impedanz: $\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$
   Scheinwiderstand: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, $\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$
   Admittanz: $\underline{Y} = \frac{R}{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + j\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
   Komplexleistung: $\underline{S} = P + j(Q_L + Q_C) = RI^2 + jI^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$
   Leistungsfaktor: $cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Bemerkungen: Näherungs-Ersatzschaltungen
$\omega L > \frac{1}{\omega C}$, ohmsch-induktiv, große Frequenz, $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, ohmsch-kapazitiv, niedrige Frequenz, $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, ohmsch,

Parallelschaltungen

1. GC-Parallelschaltung KGl: $\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C = \underline{U}G + \underline{U}j\omega G$
   Komplexer Leitwert: $\underline{Y} = G + j\omega C$
   Impedanz: $\underline{Z} = \frac{G}{G^2+(\omega C)^2} + j\frac{-\omega C}{G^2+(\omega C)^2} = \frac{G}{Y^2=\underline{YY^*}} + j\frac{-\omega C}{Y^2}$
   Scheinleitwert: $Y = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$, $\phi_Y = -\phi = \arctan\left(\frac{\omega C}{G}\right)$
   komplexe Leistung: $\underline{S} = GU^2 - j\omega CU^2 = Y^*U^2 = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}U^2 \cdot e^{j\phi_y}$
   Leistungsfaktor: $cos(\phi) = \frac{G}{\sqrt{G^2+(\omega C)^2}}$

2. GL-Parallelschaltung KGl: $\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_L = \underline{U}G + \frac{1}{j\omega L}\underline{U}$
   Admittanz: $\underline{Y} = G - j\frac{1}{\omega L}$
   Scheinleitwert: $Y = \sqrt{G^2 + \frac{1}{(\omega L)^2}}$, $\phi_Y = \arctan\left(\frac{-1}{G\omega L}\right)$
   Impedanz: $\underline{Z} = \frac{G}{Y^2} + j\frac{\frac{1}{\omega L}}{Y^2}$
   komplexe Leistung: $\underline{S} = \underline{Y}^*U^2 = \sqrt{G^2 + \frac{1}{(\omega L)^2}}U^2 e^{-j\phi_Y}$
   Leistungsfaktor: $cos(\phi) = \frac{G}{\sqrt{G^2+\frac{1}{(\omega L)^2}}}$

3. GLC-Parallelschaltung KGl: $\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C = \underline{I}_L = G\underline{U} + j\omega C\underline{U} + \frac{1}{j\omega L}\underline{U} = G\underline{U} + j\left(\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)\underline{U}$
   Admittanz: $\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$
   Scheinleitwert: $Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega l}\right)^2}$, $\phi_Y = \arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)$
   Impedanz: $\underline{Z} = \frac{G}{Y^2} + j\frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{Y^2}$
   komplexe Leistung: $\underline{S} = GU^2 + jU^2\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$
   Leistungsfaktor: $cos(\phi) = \frac{G}{\sqrt{G^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}}$

Bsp: Der Widerstand $R = 150\Omega$, die Induktivität $L = 250mH$ und die Kapazität $C = 15\mu F$ sind in Reihe geschaltet. Bei welcher Kreisfrequenz ω fließt für $U = 36V$ der Strom $I = 0,2A$. $Z = \frac{U}{I} = \frac{36V}{0,2A} = 150\Omega$

Ansatz: $Z = 150\Omega = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm\sqrt{Z^2 - R^2} = \pm 149,7\Omega \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 297,5\frac{1}{s} \\ \omega_2 = 896,2\frac{1}{s} \end{cases}$

Verzweigter Sinusstromkreis

1.

2.

6.9 Zeigerdiagramm T(B)

Summation von mit Zeigern repräsentierten Sinusgrößen bei einer Frequenz in der komplexen Zahlenebene

6.10 Ortskurve

Bild einer komplexen Funktion mit einem reellen Parameter in der komplexen Zahlenebene. Parameter sind z.B. die Frequenz ω oder ein (normierter) Einstellwinkel eines Potentiometers.

Bsp. $\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L$ $\underline{Z}i = \underline{Z}(\omega_i) = R + j\omega_i L$
Inversion komplexer Größen $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\phi}, \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z}e^{-j\phi} = Y \cdot e^{j\phi Y}$

- Die Inversion einer Geraden durch den Nullpunkt ergibt wieder eine Gerade durch den Nullpunkt.
- Die Inversion einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt geht, ergibt einen Kreis, der durch den Nullpunkt geht.
- Die Inversion eines Kreises durch den Nullpunkt ergibt eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht.
- Die Inversion eines Kreises, der nicht durch den Nullpunkt ghet, ergibt einen Kreis, der nicht durch den Nullpunkt geht.

Man benötigt i.A. nur wenige Punkte, um eine Ortskurve zeichnerisch darstellen zu können.

Bsp. Für eine Reihenschaltung aus konstantem Blindwiderstand $X = 2\Omega$ und einstellbarem Widerstand R sind die Ortskurve $\underline{Z} = R + jX$ und $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ zu zeichnen. Im weiteren sind die Impedanz- und Admittanzzeiger für $R_0 = 0\Omega$, $R_1 = 2\Omega$ und $R_2 = 6\Omega$ zu zeichen.

$$\begin{array}{rrr} \underline{Z}_0 = j2\Omega & \underline{Z}_1 = 2\Omega + j2\Omega & \underline{Z}_2 = 6\Omega + j2\Omega \\ \underline{Y}_0 = -j0.5S & \underline{Y}_1 = (0.25 - j0.25)S & \underline{Y}_2 = (0.15 - j0.05)S \end{array}$$

7 Vierpole, Übertragunsfunktionen, Bode-Diagramme

Besonders häufig sit die (Kreis-)Frequenz der wichtige Parameter. Übertragungsfunktion

$$\frac{\underline{U}_a(\omega)}{\underline{U}_e(\omega)} = \underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Für ein ω_0 berechnen wir den Übertragungsfaktor $\underline{H}(\omega_0)$.
Darstellung als Ortskurve in der komplexen Ebene. Wir bevorzugen eine normierte Darstellung mit $\underline{H}(\frac{\omega}{\omega_g})$. ω_g ist eine Kennfreqenz. Hier ist die *naheliegende* Kennfrequenz $\omega_g = \frac{1}{RC}$.

Aussagekräftiger sind die Bilder von Betrags- und Phasenfreqenzgang $\underline{H}(\omega) = |\underline{H}(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$.

8 Bode-Diagramm, Asymptoten, Doppelt-Logarithmische Darstellung

Übertragungsmaß $G\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left|\underline{H}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)\right|$.

Im Beispiel: $G\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_g}\right|}\right) = 20 \cdot \log_{10}(1) - 20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}\right) = -10 \cdot \log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)$

Für große Frequenzen $\omega > \omega_g$

$G\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = -20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) dB$

$\omega = 0 \; G(0) = 0dB$

$\omega = \omega_g \; G(1) = -3dB$

$\frac{\omega}{\omega_g}$	$G\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$	$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$
0	0	0
0.1	-0.01	-0.0997
1	$-3dB$	$-\frac{\pi}{4}$
10	$-20dB$	-1.47
$\omega >> \omega_g$	$\rightarrow -\infty$	$-\frac{\pi}{2}$

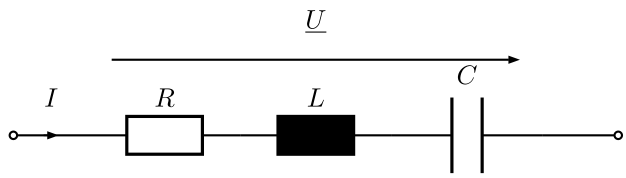
9 Schwingkreise

Schwingkreise enthalten gegensätzlich wirkende Energiespeicher. z.B.

- Induktivitäten - Speichern im magnetischen Feld
- Kapazitäten - Speicher im elektrischen Feld

Eine Schaltung, in der beide Energiespeicher ihre Energie wechselseitig austauschen, bezeichnet man als Schwingkreis. Wir unterscheiden freie Schwingungen, d.h. Schwingungen ohne äußeren Einfluß, und erzwungene Schwingungen, die von aussen gesteuert werden.

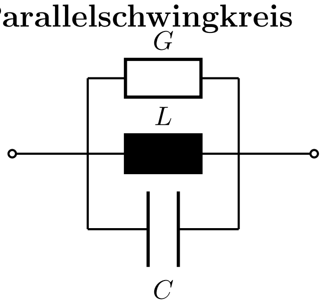
9.1 Reihenschwingkreis



MGl: $\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$

9.2 Parallelschwingkreis

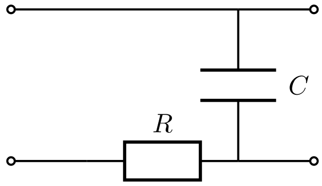
Dualität



KGl: $\underline{I} = G \cdot \underline{U} + j\omega C \cdot \underline{U} + \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U}$

Viele technische Ströme und Spannungen sind zwar periodisch, nicht aber sinusförmig:

- Phasenanschnittssteuerungen
- Rechteck- und Dreieckschwingungen
- Übersteuerter Verstärker
- nichtlinear verarbeitete sinusförmige Signale
- ...



$U_e = \hat{U}_e \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_{U_e})$ $U_a = \hat{U}_a \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_{U_a})$

$$U_e = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_{e_n} \cdot \sin(\omega_0 n t + \phi_{U_{e_n}})$$

$$U_a = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{U}_{a_n} \cdot \sin(\omega_0 n t + \phi_{U_{a_n}})$$

U = 1: Grundschwingung $\omega_0 = 2\pi f_0, T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_o}$ U ¿ 0: Oberschwingungen

Betragfrequenzgang: $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$

Phasenfrequenzgang: $\phi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$

Sinusreihe u_e ist Eingangssignal, dann erhalten wir

$$u_a = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + n\omega_0^2 R^2 C^2}}}_{\hat{u}_{a_n}} \cdot \sin(n\omega_0 t + \underbrace{\phi_{u_{e_n}} - \arctan(n\omega_0 RC))}_{\phi_{u_{a_n}}}$$

Das NW kann im Zeit- und im Frequenzbereich analysiert werden.
Zeitbereich $RC\frac{d_{U_a}}{dt} + U_a = U_e$ beliebige Signale
Frequenzbereich periodische Signale

1. Fourierreihenentwicklung des Eingangssignals
2. Anwendung der Übertragungsfaktoren $\underline{H}(n\omega_0)$
3. Fourierreihenentwicklung des Ausgangssignals

10 Fourierreihen

Wir betrachten stückweise stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Periode 2π, also $f(x + 2\pi) = f(x)$.
Die Funktion darf endlich viele Sprungstellen im 2π-Intervall aufweisen, wobei die Grenzwerte existieren und endlich sein müssen. Die Funktion soll durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad N

$$g_N(g) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)$$

im quadratischen sinne genähert werden, d.h.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (f(x) - g_N(x))^2 dx \neq Min.$$

Lösung, Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx(\text{Arithmetischer Mittelwert}) \\ a_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\nu x)dx, \nu = 1, \dots, N \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(\nu x)dx, \nu = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$f(x) \ = g_N(x)$: Approximation mit der N-ten Partialsumme der Fourierreihe $f(x) = g_N(x)$

Bsp. Entwickle die Funktion $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 2\pi$ in einer Fourierreihe mit der Periode 2π. Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2 \\ a_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\cos(\nu x)dx = \frac{4}{\nu^2} \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin(\nu x)dx = \frac{-4\pi}{\nu} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet

$$f(x) = \frac{8}{6}\pi^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\nu^2}\cos(\nu x) - \frac{4\pi}{\nu}\sin(\nu x)\right)$$

Was passiert bei der Unstetigkeitsstelle?
Wir betrachten die Stelle $x = 0$

$$f(0) = \frac{8}{6}\pi^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4}{\nu^2} = \frac{8}{6}\pi^2 + 4\frac{\pi^2}{6} = 2\pi^2$$

Eine Funktion f ist gerade, wenn gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Bsp.: $x^{2n}, \cos$
Eine Funktion f ist ungerade, wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$

Bsp.: $x^{2n+1}, \sin$
Eien Funktion f kann in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + u(x) \\ g(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ u(x) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{aligned}$$

Bsp.:

$$f(x) = \begin{cases} 2, 0 < x < 3 \\ -2, -3 < x < 0 \end{cases}$$

- alternierend
- ungerade

$a_\nu = 0, b_{2\nu} = 0$

$$b_\nu = \frac{2}{6}\int_{-3}^{0}(-2)\sin(\frac{2\pi}{6}\nu x)dx + \frac{2}{6}\int_{0}^{3}2\cdot\sin(\frac{2\pi}{6}\nu x)dx = \frac{2}{\pi\nu}(1-\cos(-\pi\nu) - \frac{2}{\pi\nu}(cos(\pi\nu)-1) = \frac{8}{\pi\nu}, \nu ungerade$$

$$\cos(-\pi\nu) = \cos(\pi\nu) = \begin{cases} 1, & \nu = 0, 2, 4, \ldots \\ -1, & \nu = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2\nu+1}\sin(\frac{\pi}{3}(2\nu+1)x)$$

10.1 Differeniation und Integration von Fourierreihen

Differentiation

$$d(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} -a_\nu \nu \sin(\nu x) + b_\nu \nu \cos(\nu x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu * \cos(\nu x$$

mit $a_\nu* = \nu b_\nu$ und $b_\nu* = -\nu a_\nu$

Bsp. $i_C(t)$ = Kondensatorstrom

$i_C(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu\omega t) =_{Bronstein} \begin{cases} \frac{4\hat{i}}{\nu\pi}, & \nu = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{-4\hat{i}}{\nu\pi}, & 'nu = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$

Die Kondensatorspannung wird mit

$$U_c(t) = \frac{1}{c}\int i_c(t)dt = \frac{1}{c}\int \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos(\nu\omega t)dt = \frac{1}{c}\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\nu\omega t)dt = \frac{1}{c}\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu\omega}\cdot\sin(\nu\omega t)$$

$$= \frac{1}{c}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\hat{i}}{\nu\omega}\underbrace{\qquad\underbrace{sin(\frac{\nu\pi}{2})}_{=1 \text{ für } \nu=1,5,7,-1 \text{ für } \nu=3,7,11}\qquad}_{b_\nu}\frac{1}{\nu\omega}\sin(\nu\omega t)$$

berechnet.