



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024



Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsable de tutorización	Miguel Ortega Titos <i>Departamento de Geometría y Topología</i>	Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
	Julián Luengo Martín <i>Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial</i>	Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 8 de noviembre de 2023

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Fundamento teórico	1
1. Preliminares algebraicos	3
1.1. Módulos	3
1.2. Categorías	4
1.3. Functores	5
2. Símplices y complejos simpliciales	7
2.1. Símplices	7
2.2. Complejos simpliciales	8
2.3. Aplicaciones simpliciales	10
2.4. Complejos simpliciales abstractos	11
3. Homología	13
3.1. Grupos de homología	13
3.2. Complejos de cadena	14
A. Ejemplo de apéndice	17
Glosario	19
Bibliografía	21

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Fundamento teórico

1. Preliminares algebraicos

1.1. Módulos

Definición 1.1. Sea R un anillo cuyo elemento identidad $1 \neq 0$. Un R -**módulo izquierdo** A es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times A \rightarrow A$ con $(r, a) \rightarrow ra$ tal que dados $r, r' \in R, a, a' \in A$ se tiene

1. $(r + r')a = ra + r'a$
2. $(rr')a = r(r'a)$
3. $r(a + a') = ra + ra'$
4. $1a = a$

De la definición anterior se sigue que $0a = 0$ y $(-1)a = -a$.

De manera análoga, definimos R -**módulo derecho** donde el anillo actúa por la izquierda en vez de por la derecha de forma que $p : A \times R \rightarrow A$. Si R es un anillo conmutativo, los R -módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R -módulos. Como los resultados de R -módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos simplemente con los R -módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R -módulos a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. ej

Definición 1.2. Sea A un R -módulo izquierdo y S un subconjunto de A . Diremos que S es un submódulo izquierdo de A , esto es, $S \subset A$, si S es cerrado respecto a la suma y si $r, s \in S$ entonces $rs \in S$. Por tanto, S es un R -módulo.

Si un submódulo de R es un subconjunto $L \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $rL \subset L$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal izquierdo** de R . Tomando un ideal izquierdo L de R y A un R -módulo izquierdo, definimos el producto del ideal L por el módulo A

$$LA = \{\text{todas las sumas finitas } \sum l_i a_i, \text{ para } l_i \in L, a_i \in A\}$$

donde LA es un submódulo de A . En particular, el producto de dos ideales izquierdos LL' es también un ideal izquierdo y $(LL')A = L(L'A)$.

Definición 1.3. Sean A, B R -módulos. Definimos el **homomorfismo de R -módulos** de A a B como la aplicación $\alpha : A \rightarrow B$ tal que

1. $\alpha(a + a') = \alpha a + \alpha a'$
2. $\alpha(ra) = r(\alpha a)$

para todo $a, a' \in A, r \in R$.

1. Preliminares algebraicos

También es frecuente escribir el homomorfismo de R -módulos $\alpha : A \rightarrow B$ como $A \xrightarrow{\alpha} B$.

Cuando $\alpha : A \rightarrow B$ sea un homomorfismo de R -módulos, diremos que A es el **dominio** y B el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\text{Im}(\alpha) = \{\alpha(a) : a \in A\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{a \in A : \alpha(a) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando $\alpha(A) = B$, un **monomorfismo** cuando $\ker(\alpha) = \{0\}$ y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre A y B diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\omega : A \rightarrow A$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha_1, \alpha_2 : A \rightarrow B$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$ para todo $a \in A$. Además, dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha : A \rightarrow B$, $\beta : B \rightarrow C$, su **composición** $\beta \circ \alpha : A \rightarrow C$ es también un homomorfismo de R -módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β . En ocasiones usaremos la notación $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : A \rightarrow B$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_A$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1_B$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : A \rightarrow A$ tal que $\gamma \circ \alpha = 1_A$. No tiene por qué existir ni ser única.

Definición 1.4. Sea $\{A_i, \alpha_i\}$ una familia de R -módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$. Diremos que la secuencia

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** cuando $\text{Im } \alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$.

Para cada submódulo $T \subset B$, la inclusión de T en B es un monomorfismo $i : T \rightarrow B$. Las **clases laterales** de T en B son los conjuntos $b + T = \{b + t : t \in T\}$ donde $b \in B$. Dos clases laterales $b_1 + T$, $b_2 + T$ son iguales si $b_1 - b_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano B/T se convierte en un R -módulo cuando $r(b + T) = rb + T$ para todo $r \in R$. A este R -módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de B sobre T . El homomorfismo $\pi : B \rightarrow B/T$ tal que $\pi(b) = b + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de B .

1.2. Categorías

Definición 1.5. Una **categoría** \mathcal{C} es una tripleta $(\mathcal{O}, \text{hom}, \circ)$ formada por

1. Una clase \mathcal{O} , cuyos elementos denominamos **objetos** de \mathcal{C} y notamos por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de \mathcal{C} , un conjunto $\text{hom}(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B . Si $f \in \text{hom}(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ y a cada morfismo $g : B \rightarrow C$ un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$ satisfaciendo
 - **Asociatividad.** Si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ son morfismos de \mathcal{C} , entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - **Identidad.** A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $1_B : B \rightarrow B$ tal que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ entonces $g \circ 1_B = g$ y $1_B \circ f = f$.

Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g .

Ejemplo 1.2. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de espacios topológicos**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$.
- **La categoría de grupos**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de conjuntos**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.

Definición 1.6. Sea $f \in \text{hom}(A, B)$ un morfismo en la categoría \mathcal{C} . Diremos que f es una **equivalencia** en \mathcal{C} si existe en \mathcal{C} otro morfismo $g \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Nótese que si $f \in \text{hom}(A, B)$ es una equivalencia en \mathcal{C} , $g \in \text{hom}(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g' \circ f = 1_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ 1_B = g'$.

1.3. Functores

Definición 1.7. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías. Un **functor covariante** de \mathcal{C} a \mathcal{D}

2. Símplices y complejos simpliciales

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplex. Su simplicidad y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplex y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzaremos recordando algunos conceptos de la geometría afín y seguiremos en la línea de MUNKRES.

Definición 2.1. Un **espacio afín** es una tripleta $(\mathcal{A}, V, \vec{\cdot})$ donde:

- \mathcal{A} es un conjunto no vacío, llamado **conjunto de puntos**.
- V es un espacio vectorial sobre un cuerpo.
- $\vec{\cdot}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V, (p, q) \mapsto \vec{pq}$, es una aplicación que satisface:

$$\mathbf{A1.} \quad \vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$$

$$\mathbf{A2.} \quad \forall p \in \mathcal{A}, \forall v \in V, \text{ existe un único } q \in \mathcal{A} \text{ tal que } \vec{pq} = v.$$

Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^N$, notaremos como $p - q$ al vector \vec{pq} , dotando de apariencia de cancelación algebraica al axioma **A1**.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **n-plano** P generado por $\{a_0, \dots, a_n\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^n t_i(a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0, i \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 2.3. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ espacios afines y V, V' sus espacios vectoriales asociados respectivamente. Sea $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ una aplicación entre espacios afines. Diremos que T es una **aplicación afín** si existe un punto $o \in \mathcal{A}$ de forma que la aplicación $\vec{T}: V \rightarrow V'$ dada por

$$\vec{T}(\vec{op}) = \overrightarrow{T(o)T(p)} \quad \forall p \in \mathcal{A}$$

es una aplicación lineal.

Definición 2.4. Sea \mathcal{A} un espacio afín y sea U un subespacio vectorial de $\vec{\mathcal{A}}$. Diremos que un subconjunto S no vacío de \mathcal{A} es un **subespacio afín paralelo a U** si existe un punto $p \in S$

2. Símplices y complejos simpliciales

tal que

$$S = p + U = \{p + u : u \in U\}$$

Definición 2.5. Sea \mathcal{A} un espacio afín y sea V su espacio vectorial asociado. Si $p \in \mathcal{A}$ y $v \in V$, el único punto $q \in \mathcal{A}$ dado por el axioma **A2** tal que $\overrightarrow{pq} = v$ será denotado por $p + v$. Como consecuencia las siguientes identidades son inmediatas:

$$q = p + \overrightarrow{pq}, \quad \overrightarrow{p(p+v)} = v$$

Si escribimos

$$G_p : V \rightarrow \mathcal{A}, \quad G_p(v) = p + v = q$$

es claro que $G_p = F_p^{-1}$ y por tanto G_p es biyectiva.

Definición 2.6. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N . Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_n$.

Definición 2.7. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en \mathbb{R}^N . Definimos el **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ generado por a_0, \dots, a_n como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1$$

con $t_i \geq 0, i \in \{1, \dots, n\}$.

Los coeficientes t_i están determinados de manera única por el punto x . A los términos t_0, \dots, t_n los llamamos las **coordenadas baricéntricas** de σ con respecto a a_0, \dots, a_n .

Los puntos a_0, \dots, a_n que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número n lo llamaremos la **dimensión** de σ .

Definición 2.8. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ un símplice. Una **cara** de σ será cualquier símplice generado por un subconjunto de $\{a_0, \dots, a_n\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ la llamamos la **cara opuesta** de $a_i, i \in \{0, \dots, n\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos $\text{Bd } \sigma$. Finalmente, definimos el **interior** de σ , $\text{Int } \sigma$, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

2.2. Complejos simpliciales

BIB - MUNKRES, JOHN LEE

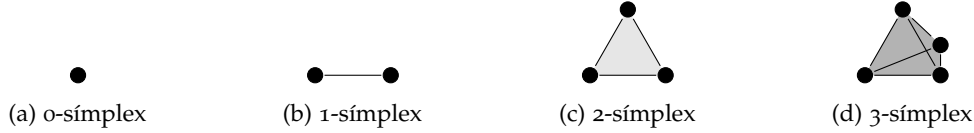


Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Definición 2.9. Un **complejo simplicial** K en \mathbb{R}^N es una colección de símplices en \mathbb{R}^N tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K es una cara de ambos símplices.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 2.1. Una colección K de símplices es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. Los símplices de K tienen interior disjunto dos a dos. REVISRA

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplices $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$. Si s fuera una cara propia de σ , entonces x pertenecería a la frontera de σ , lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ . Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen (1) y (2). Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices b_0, \dots, b_m de σ que están en τ . Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a b_0, \dots, b_m . Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \text{Int } s \cap \text{Int } t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ . Se sigue de (2) que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \dots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ' , lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. \square

Definición 2.10. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K .

Entre los subcomplejos de un complejo simplicial, cabe destacar el siguiente. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p . Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ es el conjunto de vértices de K .

Definición 2.11. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^N tal que $|K|$ es la unión de todos los símplices de K . Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de \mathcal{T} son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de \mathbb{R}^N para todo $\sigma \in K$.

2. Simplicies y complejos simpliciales

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ , pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma, O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $\cup_{i \in I} O_i \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ . En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

Lema 2.2. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua si, y sólo si, $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$.

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_\sigma$ por ser σ un subespacio de K . Supongamos ahora que $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X , $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_\sigma^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_\sigma$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. \square

Definición 2.12. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X . Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$ es una **triangulación**.

2.3. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.3. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación. Supongamos que siempre que los vértices v_0, \dots, v_n de K generen un símple en K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símple de L . Entonces podemos extender f a una aplicación continua $g : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$$

Llamaremos a g la **aplicación simplicial** (lineal) inducida por f .

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple τ en L . Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$ es un punto de τ . Podemos ver que g es una aplicación continua del símple σ generado por v_0, \dots, v_n al símple τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$.

Ahora tan solo nos queda ver que $g : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Bien, pues por ser $g : \sigma \rightarrow \tau$ continua, también lo es $g : \sigma \rightarrow |L|$. Finalmente por el **Lema 2.2**, $g : |K| \rightarrow |L|$ es continua. \square

Lema 2.4. Supongamos que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símple de K si, y sólo si, $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo.

Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L .

Demostración. Por hipótesis, cada símplice $\sigma \in K$ se identifica con otro símplice $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i)\right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(v_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i = x$$

□

2.4. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simples, son de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.13. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$.

Al elemento A de \mathcal{S} lo llamaremos **símplice** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A . En cuanto a la **dimensión** de \mathcal{S} , diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de \mathcal{S} es infinita. El **conjunto de vértices** V de \mathcal{S} diremos que es la unión de elementos de \mathcal{S} que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de \mathcal{S} a cualquier subcolección de \mathcal{S} que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos \mathcal{S}, \mathcal{T} respectivamente. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \rightarrow V_T$ tal que $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.14. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \dots, a_n\} \subset V$ tales que los vértices a_0, \dots, a_n generan un símplice de K . Entonces llamaremos a la colección \mathcal{K} el **esquema de vértices** de K .

Después de realizar todas las definiciones pertinentes, ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (a) Todo complejo abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .
- (b) Dos complejos simpliciales son linealmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.

2. Símplices y complejos simpliciales

Demostración. Para demostrar (a), empezaremos tomando un conjunto de índices J . Llamemos E^J al subconjunto de funciones $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^J tales que $x(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in J$ excepto para un número finito de valores. Sea Δ^J la colección de todos los símlices en E^J generados por subconjuntos finitos de la base usual de E^J . Δ^J es un complejo simplicial. Sean entonces σ, τ símlices de Δ^J , la unión de sus conjuntos de vértices es afínmente independiente y genera un símlice en Δ^J . Diremos que Δ^J es un *símlice de dimensión infinita*.

Sea ahora \mathcal{S} un complejo abstracto con conjunto de vértices V . Tomamos un conjunto de índices J lo bastante grande para que podamos tomar una aplicación inyectiva $f : V \rightarrow J$. A continuación, vamos a tomar un subcomplejo de Δ^J tal que para cada símlice abstracto $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$, el símlice (geométrico) generado por $f(a_0), \dots, f(a_n)$ está en K . Por tanto K es un complejo simplicial y f es un isomorfismo entre \mathcal{S} y el esquema de vértices de K .

En cuanto a (b), es una consecuencia inmediata del **Lema 2.4**. □

Definición 2.15. Si el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K , diremos que K es una **realización geométrica** de \mathcal{S} .

3. Homología

El término de homología se puede definir de manera puramente algebraica, lo cual marcó un avance significativo en el desarrollo de la topología algebraica. En este capítulo, presentaremos una síntesis concisa de los fundamentos que subyacen a las diversas aproximaciones para construir la teoría de la homología. Estos principios servirán como base para abordar casos específicos en capítulos posteriores y comprender mejor las propiedades topológicas de los espacios.

3.1. Grupos de homología

Definición 3.1. Sea C un grupo abeliano junto a un endomorfismo $d : C \rightarrow C$ tal que $d^2 = 0$. Diremos entonces que C es un **grupo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C .

Llamaremos a los elementos de C **cadena**s. El subgrupo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el subgrupo de **bordes** $B(C) = \operatorname{Im} d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

Definición 3.2. Sea C un grupo diferencial. Definimos el **grupo de homología** de C como el grupo cociente $H(C)$ tal que

$$H(C) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

Por tanto, el grupo de homología de un grupo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C . A los elementos de $H(C)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Ejemplo 3.1. contenidos...

Definición 3.3. Sean C y C' dos grupos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \rightarrow C'$ es un **homomorfismo de grupos diferenciales** si f es un homomorfismo de grupos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del grupo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$ que sea un ciclo o un borde y $f : C \rightarrow C'$ es un homomorfismo de grupos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente.

Definición 3.4. Sean C, C' grupos diferenciales y $f : C \rightarrow C'$ un homomorfismo de grupos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C) \rightarrow H(C')$ satisfaciendo

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

3. Homología

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f .

En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de grupos diferenciales a la categoría de grupos.

Ejemplo 3.2. contenidos...

3.2. Complejos de cadena

Definición 3.5. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** K de R -módulos es una familia $\{K_n, \partial_n\}$ donde K_n son R -módulos y $\partial_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ homomorfismos de R -módulos tales que $\partial_n \partial_{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La última condición es equivalente a que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo K es por tanto una secuencia doblemente infinita

$$K : \cdots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow K_{-1} \rightarrow \cdots$$

donde toda composición es el homomorfismo con imagen el cero. La **homología** $H(K)$ es la familia de módulos

$$H_n(K) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

Luego $H_n(K) = 0$ implica que la secuencia K es exacta en K_n . A los elementos de K_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Si la dimensión se sobrentiende, la llamaremos simplemente **cadena**. Un **n-ciclo** de K es un elemento del submódulo $C_n(K) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** es un elemento de $\partial_{n+1}K_{n+1}$. La clase lateral de un ciclo c se escribe $[c] = c + \partial K_{n+1}$. Dos n -ciclos $c, c' \in C_n(K)$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Definición 3.6. Sean K, K' complejos de cadena. Una **aplicación de cadena** o **morfismo de cadena** $f : K \rightarrow K'$ es una familia de homomorfismos de R -módulos $f_n : K_n \rightarrow K'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La función $H_n(f) = f_*$ definida por $f_*([c]) = f_*(c + \partial K_{n+1}) = f c + \partial K'_{n+1}$ es un homomorfismo $H_n(f) : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$. Así mismo, cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadena y morfismos de cadenas a la categoría de módulos.

Definición 3.7. Sean K, K' cadenas de complejos y $f, g : K \rightarrow K'$ dos aplicaciones de cadena entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : K_n \rightarrow K'_{n+1}$ para cada dimensión $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 3.1. Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : K \rightarrow K'$, entonces

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$$

Demostración. Si c es un ciclo de K_n , tenemos que $\partial_n c = 0$. Por 3.7 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(K')$, como queríamos demostrar. \square

Definición 3.8. Una aplicación de cadena $f : K \rightarrow K'$ es una **equivalencia de cadena** si existe otra aplicación $h : K' \rightarrow K$ y homotopías $s : h \circ f \rightarrow 1_K$, $t : f \circ h \rightarrow 1_{K'}$ tales que $h \circ f \simeq 1_K$, $f \circ h \simeq 1_{K'}$.

Como $H_n(1_K) = 1$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 3.1. Si $f : K \rightarrow K'$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ es un isomorfismo para cada dimensión $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.1. Sean $f, g : K \rightarrow K'$ y $f', g' : K' \rightarrow K''$ aplicaciones de cadena. Sean $s : f \rightarrow g$, $s' : f' \rightarrow g'$ homotopías de cadena entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces su composición

$$f's + s'g : f' \circ f \rightarrow g' \circ g \quad g' \circ g : K \rightarrow K''$$

es una homotopía de cadena.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadena tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g$$

$$\partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g$$

Sumando ambas igualdades

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g$$

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - g' \circ g$$

$$\partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'g\partial = f' \circ f - g' \circ g$$

$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g$$

\square

A. Ejemplo de apéndice

Los apéndices son opcionales.

Este fichero `apendice-ejemplo.tex` es una plantilla para añadir apéndices al TFG. Para ello, es necesario:

- Crear una copia de este fichero `apendice-ejemplo.tex` en la carpeta `apendices` con un nombre apropiado (p.e. `apendice01.tex`).
- Añadir el comando `\input{apendices/apendice01}` en el fichero principal `tfg.tex` donde queremos que aparezca dicho apéndice (debe de ser después del comando `\appendix`).

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: glosario.tex

\mathbb{R} Conjunto de números reales.

\mathbb{C} Conjunto de números complejos.

\mathbb{Z} Conjunto de números enteros.

Bibliografía

- [AZ14] Martin Aigner y Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edición, 2014. Including illustrations by Karl H. Hofmann.
- [CMT22] Jesús Castro-Infantes, José M. Manzano, y Francisco Torralbo. Conjugate plateau constructions in product spaces, 2022. Preprint. arXiv: 2203.13162 [math.DG].
- [Doe03] John Doe. Are we living in a simulation?, July 2003. Bachelor's Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [Eul85] Leonhard Euler. An essay on continued fractions. *Math. Systems Theory*, 18(4):295–328, 1985. Translated from the Latin by B. F. Wyman and M. F. Wyman.
- [Rem56] Robert Charles Rempel. *Relaxation Effects for Coupled Nuclear Spins*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, June 1956.
- [Tan96] Jian Tang. Spin structure of the nucleon in the asymptotic limit. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, September 1996.
- [Wik23] Wikipedia. Leonhard Euler — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler, 2023. [Recurso online, accedido el 27 de julio de 2023].