



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024



Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

**Responsable de
tutorización**

Miguel Ortega Titos
Departamento de Geometría y Topología

Julián Luengo Martín
*Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial*

Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías
Informática y de
Telecomunicación

Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 2 de mayo de 2024

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Fundamento teórico	1
1. Fundamentos del álgebra homológica	3
1.1. Módulos	3
1.2. Sucesiones exactas	7
1.3. Categorías y funtores	8
1.4. Módulos diferenciales	9
1.5. Complejos de cadenas	11
1.6. Subcomplejos y complejos cociente	14
2. Símplices y complejos simpliciales	17
2.1. Símplices	17
2.2. Complejos simpliciales	19
2.3. Celdas y CW-complejos	22
2.4. Aplicaciones simpliciales	26
2.5. Complejos simpliciales abstractos	28
3. Homología simplicial	31
3.1. Homología simplicial orientada	31
3.2. Homología del complejo cono	35
3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris	37
Bibliografía	43

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Fundamento teórico

1. Fundamentos del álgebra homológica

La teoría de homología es una rama de la topología que trata de resolver problemas topológicos en el ámbito del álgebra. Por este motivo es importante conocer muy bien algunas herramientas algebraicas que iremos utilizando con frecuencia. En todo el capítulo usaremos como referencia principal [Mac12].

1.1. Módulos

La estructura de módulo surge con la idea de generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo a un anillo. Nuestro interés en ellos radica en que la teoría de homología se construye sobre módulos y por ello es necesario hacer una introducción al campo. Esta sección recoge algunas definiciones y resultados de interés vistos en la asignatura de Álgebra Moderna y complementada con los contenidos de [DFo4].

Definición 1.1. Sea R un anillo con elemento identidad $1 \neq 0$. Un R -módulo izquierdo M es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times M \rightarrow M$ con $(r, m) \rightarrow rm$ tal que dados $r, r' \in R, m, m' \in M$ se tiene

1. $(r + r')m = rm + r'm,$
2. $(rr')m = r(r'm),$
3. $r(m + m') = rm + rm',$
4. $1m = m.$

De la definición anterior se sigue que $0m = 0$ y $(-1)m = -m$.

De manera análoga, definimos R -módulo derecho donde el anillo actúa por la derecha en vez de por la izquierda de forma que $p : M \times R \rightarrow M$. Si R es un anillo conmutativo, los R -módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R -módulos. Como los resultados de R -módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos con los R -módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R -módulos o módulos a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. El interés de los R -módulos subyace en la cantidad de estructuras conocidas que engloba. Si por ejemplo consideramos el K -módulo donde K es un cuerpo, éste adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Ahora sea M un \mathbb{Z} -módulo. Definimos el producto p de forma que para $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in M$ con $n > 0$, $nm = m + m + \dots + m$ (n veces), $0m = 0$ y $(-n)m = -(nm)$. Entonces M ha de tener estructura de **grupo abeliano**. En particular, si R es un anillo entonces es también un R -módulo.

Definición 1.2. Sea M un R -módulo izquierdo y N un subconjunto de M . Diremos que N es un **submódulo** de M , esto es, $N \subset M$, si N es cerrado respecto a la suma y si $r \in R, n \in N$ entonces $rn \in N$.

De la definición anterior se deduce que N es un R -módulo.

Definición 1.3. Sea R un R -módulo. Si un submódulo de R es un subconjunto $I \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $\langle I \rangle = \{ri : i \in I\} \subset I$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal** de R . En particular, si I consta de un único elemento $i \in I$, diremos que es el **ideal generado por i** y lo denotaremos por $\langle i \rangle$.

Definición 1.4. Sea M un R -módulo y sea $m \in M$. El conjunto $\langle m \rangle = \{rm : r \in R\}$ es un submódulo de M que denominaremos **submódulo cíclico generado por m** .

Observación 1.1. Nótese que si R es un R -módulo, el submódulo cíclico generado por un elemento es el ideal generado por el mismo elemento.

Definición 1.5. Sea M un R -módulo y sean S un subconjunto de M . Sea $\langle S \rangle$ el submódulo formado por la intersección de todos los submódulos de M que contienen a S . Diremos entonces que $\langle S \rangle$ es el **submódulo generado por S** .

Definición 1.6. Sea M un R -módulo. Un submódulo N de M es **finitamente generado** si existe un subconjunto finito $A \subset M$ tal que $N = \langle A \rangle$.

Definición 1.7. Sean M, N R -módulos. Definimos el **homomorfismo de R -módulos** de M a N como la aplicación $\alpha : M \rightarrow N$ tal que

1. $\alpha(m + m') = \alpha(m) + \alpha(m')$,
2. $\alpha(rm) = r\alpha(m)$

para todo $m, m' \in M, r \in R$.

Cuando $\alpha : M \rightarrow N$ sea un homomorfismo de R -módulos, diremos que M es el **dominio** y N el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\text{Im}(\alpha) = \{\alpha(m) : m \in M\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{m \in M : \alpha(m) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando α sea sobreyectiva, un **monomorfismo** cuando α sea inyectiva y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre M y N diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\alpha : M \rightarrow M$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dado que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de R -módulos coincide con el de los grupos abelianos subyacentes, la siguiente caracterización es inmediata de la ya conocida para grupos:

Proposición 1.1. Sea $\alpha : M \rightarrow N$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces

1. α es un monomorfismo si, y sólo si, $\ker(\alpha) = 0$.
2. α es un epimorfismo si, y sólo si, $\text{Im}(\alpha) = N$.

Es frecuente escribir el homomorfismo de R -módulos $\alpha : M \rightarrow N$ como $M \xrightarrow{\alpha} N$. Respecto a la notación de la imagen de un elemento $m \in M$ por α , pondremos $\alpha(m)$ o simplemente αm . En cuanto a la imagen de A por α , lo representaremos de manera análoga por $\alpha(M)$ o αM .

Dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha_1, \alpha_2 : M \rightarrow N$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(m) = \alpha_1(m) + \alpha_2(m)$ para todo $m \in M$. Además, dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha : M \rightarrow N, \beta : N \rightarrow P$, su **composición** $\beta \circ \alpha : M \rightarrow P$ es también un homomorfismo de R -módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β . En ocasiones usaremos la notación por yuxtaposición

$\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : M \rightarrow N$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : N \rightarrow M$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_M$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_N$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : N \rightarrow M$ tal que $\gamma \circ \alpha = \text{id}_M$. De manera análoga, el homomorfismo $\theta : M \rightarrow N$ es **inversa derecha** de α si $\alpha \circ \theta = \text{id}_N$.

Si $T \subseteq N$, el conjunto $\alpha^{-1}T = \{m \in M : \alpha(m) \in T\}$ es un submódulo de M , llamado la **imagen inversa** (completa) de T . En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de N que consiste solo del elemento cero.

Sea $T \subseteq N$ donde N es un R -módulo, llamaremos **inclusión o inyección canónica** al homomorfismo $i : T \rightarrow N$ tal que $i(t) = t$ para todo $t \in T$. En particular, i es un monomorfismo. Las **clases laterales** de T en N son los conjuntos $n + T = \{n + t : t \in T\}$ donde $n \in N$. Dos clases laterales $n_1 + T, n_2 + T$ son iguales si $n_1 - n_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano N/T se convierte en un R -módulo cuando $r(n + T) = rn + T$ para todo $r \in R$. A este R -módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de N sobre T . El homomorfismo $\pi : N \rightarrow N/T$ tal que $\pi(n) = n + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de N .

Proposición 1.2 (Teorema de factorización). Sea $\beta : M \rightarrow M'$ un homomorfismo de módulos con $T \subset \ker \beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : M/T \rightarrow M'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\pi} & M/T \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & M' \end{array}$$

es conmutativo. Al homomorfismo β' lo llamaremos **homomorfismo inducido por β** .

Teorema 1.1 (Primer teorema de isomorfía). Sea $\beta : M \rightarrow M'$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces

$$\frac{M}{\ker \beta} \cong \text{Im } \beta.$$

Definición 1.8. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos el **producto directo** o **producto directo externo** de $\{M_i\}_{i \in I}$ como el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i\}$$

donde las operaciones se definen componente a componente:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} &= (x_i + y_i)_{i \in I} \\ r(x_i)_{i \in I} &= (rx_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

para todo $r \in R, x_i, y_i \in M_i, i \in I$.

Definición 1.9. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos la **suma directa** o **suma directa interna** de $\{M_i\}_{i \in I}$ como el submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$ tal que

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i = 0 \text{ p.c.t. } i \in I\}$$

1. Fundamentos del álgebra homológica

Nota. Recordemos que una condición se cumple "para casi todo" (p.c.t.) elemento de un conjunto si se cumple para todo elemento en él salvo en un subconjunto finito de elementos.

Definición 1.10. Sea B un conjunto y sea M el R -módulo tal que $M = \bigoplus_{b \in B} R_b$ donde $R_b = R$ para todo $b \in B$. Llamaremos a dicho R -módulo el **R -módulo libre de base B** y lo notaremos por $R\langle B \rangle$. De esta forma, cada $x \in R\langle B \rangle$ se representa por $x = \sum_{b \in B} \lambda_b \cdot b$ donde $\lambda_b \in R$ son coeficientes no nulos en un número finito de posiciones b .

Teorema 1.2 (Propiedad universal de los módulos libres). Sean B un conjunto, M un R -módulo y $\varphi : B \rightarrow M$ una aplicación entre conjuntos. Entonces existe un único homomorfismo de R -módulos $\phi : R\langle B \rangle \rightarrow M$ de forma que $\phi(b) = \varphi(b)$ para todo $b \in B$. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow i & \searrow \phi & \\ R\langle B \rangle & & \end{array}$$

conmuta.

Definición 1.11. Sea M un R -módulo libre. Si para toda base B de M , B tiene la misma cardinalidad, entonces decimos que M tiene **rango** $\text{rg } M = \#B$, donde $\#B$ es la cardinalidad alguna base de M .

Definición 1.12. Sea x un elemento de un R -módulo. Decimos que x es un **elemento de torsión** si existe un $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $rx = 0$. Por otro lado, x es un **elemento sin torsión** si el único elemento $r \in R$ que satisface $rx = 0$ es $r = 0$. Un R -módulo se clasifica como **módulo de torsión** si cada uno de sus elementos es un elemento de torsión. Análogamente, un **módulo sin torsión** es aquel cuyos elementos no nulos son elementos sin torsión.

Definición 1.13. Sea M un R -módulo. Definimos el **anulador de M** como el submódulo $\text{Ann}(M) = \{r \in R : rm = 0, \forall m \in M\}$. De manera análoga, llamaremos **anulador de $m \in M$** al submódulo $\text{Ann}(m) = \{r \in R : rm = 0, \forall m \in M\}$.

Definición 1.14. Definimos el **submódulo de torsión** de un R -módulo M como el conjunto $\text{Tor}(M) = \{x \in M : \text{Ann}(x) \neq \{0\}\}$. Es decir, el conjunto de todos los elementos de torsión de M .

Teorema 1.3 (Descomposición cíclica primaria). Sea R un DIP y sea M un R -módulo finitamente generado. Entonces M se descompone como la suma directa

$$M \cong R^f \oplus \bigoplus_{i=1}^k \frac{R}{\langle r_i \rangle}$$

donde R^f es un módulo libre de rango f y $R/\langle r_1 \rangle, \dots, R/\langle r_k \rangle$ son módulos cíclicos con anuladores $\langle r_1 \rangle, \dots, \langle r_k \rangle$. Además, f y los ideales $\langle r_1 \rangle, \dots, \langle r_k \rangle$ de R generados por $r_1, \dots, r_k \in R$ están determinados de manera única salvo el orden por M .

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.15. Sea $\{A_i, \alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una familia de R -módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** en A_i cuando $\text{Im } \alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$.

Definición 1.16. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la **sucesión exacta** es **corta** si

$$(\sigma, \gamma) : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0.$$

Es decir, una sucesión exacta de cinco R -módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

Proposición 1.3. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Entonces

1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B$ es exacta (en A) si, y sólo si, σ es inyectiva.
2. La sucesión $B \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} 0$ es exacta (en C) si, y sólo si, γ es sobreyectiva.

Demostración. El único homomorfismo que cumple $0 \rightarrow A$ tiene imagen 0 en A y por tanto, el núcleo de σ será este si, y sólo si, σ es inyectiva. De manera similar, el único homomorfismo $C \rightarrow 0$ es el homomorfismo nulo para todo elemento de C , que es la imagen de γ si, y sólo si, γ es sobreyectiva. \square

Corolario 1.1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, σ es inyectiva, γ es sobreyectiva y $\text{Im } \sigma = \ker \gamma$.

Como acabamos de probar, la exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker \gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la sucesión exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B . Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \rightarrow \sigma A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \rightarrow C$; juntos estos proveen un isomorfismo de sucesiones exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\gamma} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sigma' & & \parallel & & \downarrow (\gamma')^{-1} \\ 0 & \longrightarrow & \sigma A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & B/\sigma A \longrightarrow 0. \end{array}$$

En resumen, una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Ejemplo 1.2. Respecto al **Teorema de factorización**, la inclusión i y la proyección π producen una sucesión exacta corta.

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/T \rightarrow 0.$$

1.3. Categorías y funtores

La teoría de categorías fue introducida por primera vez por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en [EM45]. En particular, las categorías son estructuras algebraicas que capturan la noción de composición. Gracias a ellas podemos analizar y comparar estructuras algebraicas, permitiendo sacar conclusiones comunes y trasladar problemas complejos a otros espacios donde resolverlos es más sencillo. En esta sección haré una breve introducción de las categorías apoyándome en [ML13].

Definición 1.17. Una **categoría** \mathcal{C} es una tripleta $(\mathcal{O}, \text{hom}, \circ)$ formada por

1. Una clase \mathcal{O} , cuyos elementos denominamos **objetos** de \mathcal{C} y notamos por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de \mathcal{C} , un conjunto $\text{hom}(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B . Si $f \in \text{hom}(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ y a cada morfismo $g : B \rightarrow C$ un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$ que satisface
 - **Asociatividad.** Si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ son morfismos de \mathcal{C} , entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - **Identidad.** A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $\text{id}_B : B \rightarrow B$ tal que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ entonces $g \circ \text{id}_B = g$ y $\text{id}_A \circ f = f$.

Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g .

Ejemplo 1.3. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de conjuntos Set**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.
- **La categoría de grupos Grp**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de espacios topológicos Top**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$.
- **La categoría de R -módulos $R\text{-Mod}$** , donde los objetos son todos los R -módulos y los morfismos todos los homomorfismos de módulos.
- **La categoría de sucesiones exactas de R -módulos de longitud n** . Los objetos son dichas sucesiones $S : A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n$. Para dos sucesiones S y S' , los morfismos son de la forma $\Gamma : S \rightarrow S'$ tal que $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es una tupla donde los $\gamma_i : A_i \rightarrow A'_i$ son homomorfismos de R -módulos tal que

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A_n \\
 \gamma_1 \downarrow & & \gamma_2 \downarrow & & & & \gamma_{n-1} \downarrow & & \downarrow \gamma_n \\
 A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A'_n
 \end{array}$$

conmuta para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 1.18. Sea $f \in \text{hom}(A, B)$ un morfismo en la categoría \mathcal{C} . Diremos que f es una **equivalencia** en \mathcal{C} si existe en \mathcal{C} otro morfismo $g \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ g = \text{id}_B$.

Nótese que si $f \in \text{hom}(A, B)$ es una equivalencia en \mathcal{C} , $g \in \text{hom}(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g' \circ f = \text{id}_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ \text{id}_B = g'$.

Dentro de la teoría de categorías los funtores tienen un papel principal, pues nos va a permitir llevar objetos y morfismos de una categoría a otra preservando identidades y composiciones.

Definición 1.19. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías. Un **functor covariante** de \mathcal{C} a \mathcal{D} es una pareja de funciones denotadas por la misma letra T tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.
2. Una **función de morfismos** que asigna a cada morfismo $\gamma : C \rightarrow C'$ de \mathcal{C} un morfismo $T(\gamma) : T(C) \rightarrow T(C')$ de \mathcal{D} . Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = \text{id}_{T(C)}, \quad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \quad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

Es decir, un functor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de \mathcal{C} en \mathcal{D} .

1.4. Módulos diferenciales

Comenzaremos definiendo lo que es un módulo de homología y estableceremos la terminología que emplearemos cuando trabajemos con ellos.

Definición 1.20. Sea C un R -módulo junto a un endomorfismo $d : C \rightarrow C$ tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Diremos entonces que C es un **módulo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C .

Llamaremos a los elementos de C **cadena**s. El submódulo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el submódulo de **bordes** $B(C) = \text{Im } d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\text{Im } d \subset \ker d$.

Definición 1.21. Sea C un módulo diferencial. Definimos el **R -módulo de homología** de C como el módulo cociente $H(C; R)$ tal que

$$H(C; R) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

En particular, cuando C sea un \mathbb{Z} -módulo diferencial, lo llamaremos **grupo diferencial** y notaremos $H(C; \mathbb{Z})$ simplemente por $H(C)$.

Por tanto, el módulo de homología de un módulo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C . A los elementos de $H(C; R)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

1. Fundamentos del álgebra homológica

Definición 1.22. Sean C y C' dos módulos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \rightarrow C'$ es un **homomorfismo de módulos diferenciales** si f es un homomorfismo de módulos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del módulo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$, que sea un ciclo o un borde, y $f : C \rightarrow C'$ es un homomorfismo de módulos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente. En efecto, si $z \in Z(C)$, entonces

$$d'f(z) = f(dz) = f(0) = 0.$$

Esto es, $f(z) \in \ker d'$. Ahora, si $b \in B(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $dc = b$. En consecuencia,

$$d'f(c) = f(dc) = f(b),$$

y por tanto, $f(b) \in \text{im } d'$.

Los grupos diferenciales definen una categoría donde los objetos son los módulos diferenciales y los morfismos son los homomorfismos de módulos diferenciales. Tomemos como ley de composición interna la composición de dichos homomorfismos. Claramente es asociativa pues si $C, C', \bar{C}, \bar{C} \in \text{Obj}()$, y $f : C \rightarrow C', g : C' \rightarrow \bar{C}, h : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$, entonces $h \circ (g \circ f)$ se cumple si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h \circ (g \circ f)) &= (\tilde{d}h) \circ (g \circ f) = (h\tilde{d}) \circ (g \circ f) = h \circ (\tilde{d}g) \circ f \\ &= h \circ (gd') \circ f = h \circ g \circ (d'f) = h \circ g \circ (fd) = (h \circ g) \circ fd \\ &= ((h \circ g) \circ f)d \end{aligned}$$

y por tanto $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. La propiedad de identidad se sigue de existir el homomorfismo identidad de módulos.

Definición 1.23. Sean C, C' módulos diferenciales y $f : C \rightarrow C'$ un homomorfismo de módulos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C; R) \rightarrow H(C'; R)$ tal que

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f .

Proposición 1.4. En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de módulos diferenciales a la categoría de módulos.

Demostración. Por la definición dada del grupo de homología, es claro que la función objeto H asigna a cada grupo diferencial C un grupo de homología $H(C; R)$. En cuanto a la función de morfismos, la identidad de grupos diferenciales se preserva pues $H(\text{id})([c]) = \text{id}_*([c]) = [\text{id}(c)] = [c]$ para todo $c \in C$. Además, si $f, g \in \text{hom}(C)$, entonces

$$\begin{aligned} H(g \circ f)([c]) &= (g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = [g(f(c))] \\ &= g_*([f(c)]) = g_*(f_*([c])) = (H(g) \circ H(f))([c]) \end{aligned}$$

para todo $c \in C$, manteniendo la ley de composición. □

1.5. Complejos de cadenas

Definición 1.24. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** C_\bullet de R -módulos es una familia $\{C_n, \partial_n\}$ donde C_n son R -módulos y $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ homomorfismos de R -módulos tales que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nota. Usualmente notaremos directamente ∂ al homomorfismo ∂_n independientemente del valor de n siempre y cuando se sobreentienda por el contexto.

Observación 1.2. La última condición es equivalente a que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo C_\bullet es por tanto una sucesión doblemente infinita

$$C_\bullet : \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow C_{-1} \rightarrow \cdots$$

donde toda composición de homomorfismos de dicha familia es el homomorfismo nulo. La **homología** $H(C_\bullet)$ es la familia de R -módulos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

donde $H_n(C_\bullet)$ es el n -ésimo **módulo de homología** de C_\bullet .

Luego $H_n(C_\bullet) = 0$ implica que la sucesión C_\bullet es exacta en C_n . A los elementos de C_n los llamaremos **n -cadenas** o **cadenas de dimensión n** . Un **n -ciclo** o **ciclo de dimensión n** de C_\bullet es un elemento del submódulo $Z_n(C_\bullet) = \ker \partial_n$. Un **n -borde** o **borde de dimensión n** es un elemento de $B_n(C_\bullet) = \text{Im } \partial_{n+1}$. La clase lateral de un ciclo c la notaremos por $[c] = c + \partial_{n+1} C_{n+1}$. Dos n -ciclos $c, c' \in C_n$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Nota. Si la dimensión se sobreentiende en estos casos, no la indicaremos de manera explícita.

Definición 1.25. Sea $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Su **suma directa** la definimos como el complejo de cadenas $\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i$ cuyos operadores borde vienen dados por $\bigoplus_{i \in I} \partial_n^i : \bigoplus_{i \in I} C_n^i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_{n-1}^i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.5. Sea $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Entonces su homología conmuta con la suma directa, esto es, $H_n(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para demostrar que la homología conmuta con sumas directas, queremos mostrar que para una colección de complejos de cadenas $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$, los homomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i \right) &\rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) : [(c_i)] \mapsto ([c_i]), \\ \psi : \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) &\rightarrow H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i \right) : ([c_i]) \mapsto [(c_i)], \end{aligned}$$

están bien definidos y son inversos mutuos.

En primer lugar, para comprobar que dichas aplicaciones están bien definidas, observemos que $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $[0] = [(c_i - c'_i)]$. Esto ocurre si, y sólo si, existe un $b_i \in C_\bullet^i$ tal que $\partial_i(b_i) = (c_i - c'_i)$, lo cual es equivalente a $c_i + \partial_i(b_i) = c'_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\phi([(c_i)]) = \phi([(c'_i)]) = [(c'_i + \partial_i(b_i))] = [(c'_i)]$. De manera análoga,

1. Fundamentos del álgebra homológica

$[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\psi([(c_i)]) = \psi([(c'_i)])$. Esto implica que tanto ϕ como ψ están bien definidos.

En segundo lugar, es claro que ϕ y ψ son homomorfismos de R -módulos. Además, ϕ lleva la clase de equivalencia $[(c_i)]$ a $[(c_i)]$, mientras que ψ lleva $[(c_i)]$ a $[(c_i)]$, lo que demuestra que son inversos el uno del otro.

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo con ψ como su inverso, mostrando que $\bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) \cong H_n(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i)$. \square

Definición 1.26. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas** $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una familia de homomorfismos de R -módulos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & C_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & C_{n+1} & \longleftarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n-1} & \searrow & \downarrow f_n & \searrow & \downarrow f_{n+1} & \\ \cdots & \longleftarrow & C'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & C'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & C'_{n+1} & \longleftarrow \cdots \end{array}$$

Cuando se sobreentienda del contexto, notaremos simplemente por ∂ a los correspondientes ∂_n y ∂'_n .

Los complejos de cadenas, junto con sus morfismos, forman una categoría que denotaremos por $R\text{-Ch}_\bullet$. Esto se debe a que existe la identidad y se cumple la propiedad de asociatividad para la composición de morfismos. En efecto, para tres morfismos $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ y $h : C''_\bullet \rightarrow \bar{C}_\bullet$, se tiene que

$$h_n \circ (g_n \circ f_n) = (h_n \circ g_n) \circ f_n$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, ya que son homomorfismos de módulos diferenciales. En consecuencia, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Sea $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ un morfismo de complejos de cadenas. Definimos $H_n(f) = f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ tal que

$$f_*([c]) = f_*(c + \partial C_{n+1}) = fc + \partial C'_{n+1}.$$

Entonces f_* es un homomorfismo de R -módulos, como recoge el siguiente resultado.

Proposición 1.6. Cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas y morfismos de cadenas a la categoría de R -módulos.

Demostración. Como vimos anteriormente, H_n asigna a cada complejo de cadenas C_\bullet un R -módulo. Para demostrar que H_n también asigna a cada morfismo de cadenas un homomorfismo de R -módulos, consideremos $[c], [c'] \in H_n(C_\bullet)$ y $r, s \in R$. Entonces, podemos ver

que

$$\begin{aligned}
 f_*(r[c] + s[c']) &= f_*(r(c + \partial C_{n+1}) + s(c' + \partial C_{n+1})) \\
 &= f_*(rc + \partial C_{n+1} + sc' + \partial C_{n+1}) \\
 &= f_*(rc + sc' + \partial C_{n+1}) \\
 &= f(rc + sc') + \partial C'_{n+1} \\
 &= rf(c) + sf(c') + \partial C'_{n+1} \\
 &= r(f(c) + \partial C'_{n+1}) + s(f(c') + \partial C'_{n+1}) \\
 &= r(f_*(c + \partial C_{n+1})) + s(f_*(c' + \partial C_{n+1})) \\
 &= rf_*([c]) + sf_*([c']).
 \end{aligned}$$

Además, si consideramos $f = \text{id}$ la identidad, es claro que id_* es la identidad de R -módulos. \square

Definición 1.27. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas y $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ dos aplicaciones de cadenas entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 1.4. Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, entonces

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$$

Demostración. Si c es un ciclo de C_n , tenemos que $\partial_n c = 0$. Por la Def. 1.27 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(C'_\bullet)$, como queríamos demostrar. \square

Definición 1.28. Una aplicación de cadenas $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una **equivalencia de cadenas** si existe otra aplicación $h : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ y homotopías $s : h \circ f \rightarrow \text{id}_{C_\bullet}$, $t : f \circ h \rightarrow \text{id}_{C'_\bullet}$ tales que $h \circ f \simeq \text{id}_{C_\bullet}$, $f \circ h \simeq \text{id}_{C'_\bullet}$.

Como $H_n(\text{id}_{C_\bullet}) = \text{id}_{H_n(C_\bullet)}$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 1.2. Si $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.7. Sean $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ y $f', g' : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Sean $s : f \rightarrow g$, $s' : f' \rightarrow g'$ homotopías de cadenas entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces la composición

$$f's + s'g : f' \circ f \rightarrow g' \circ g \quad g' \circ g : C_\bullet \rightarrow C''_\bullet$$

es una homotopía de cadenas.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadenas tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$\begin{cases} f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g, \\ \partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g. \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades

$$\begin{aligned} f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g, \\ f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - g' \circ g, \\ \partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'g\partial &= f' \circ f - g' \circ g, \end{aligned}$$

donde finalmente queda

$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g.$$

□

1.6. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 1.29. Un **subcomplejo** S_\bullet de C_\bullet es una familia de submódulos $S_n \subset C_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, S_\bullet es un complejo en sí con el operador borde ∂ inducido de C_\bullet y la inclusión $i : S_\bullet \rightarrow C_\bullet$ es una aplicación de cadenas.

Definición 1.30. Sea S_\bullet un subcomplejo de C_\bullet . El **complejo cociente** C_\bullet/S_\bullet es la familia $(C_\bullet/S_\bullet)_n = C_n/S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial'_n : C_n/S_n \rightarrow C_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por ∂_{C_\bullet} .

Definición 1.31. Sean $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. La sucesión de complejos

$$C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$$

es **exacta** en C'_\bullet si $\text{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada sucesión $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ de módulos es exacta en C'_n .

Definición 1.32. Un complejo C_\bullet es **positivo** si $C_n = 0$ para todo $n < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$. Su n -ésimo módulo de homología es entonces positivo ya que $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo $n < 0$. De manera análoga, un complejo C_\bullet es **negativo** si $C_n = 0$ para todo $n > 0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.33. Sea C_\bullet un complejo positivo de R -módulos. Denominaremos **aumento de C_\bullet** al homomorfismo sobreyectivo $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ de forma que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

Definición 1.34. Sea C_\bullet un complejo de cadenas positivo, $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ un aumento de C_\bullet y sea $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el complejo positivo \tilde{C}_\bullet tal que $\tilde{C}_n = C_n$ para todo $n \geq 0$, $\tilde{C}_n = 0$ para todo $n < -1$ y $\tilde{C}_{-1} = R$. Consideremos también $\tilde{\partial}_n = \partial_n$ para todo $n \geq 1$ y $\tilde{\partial}_0 = \varepsilon$. Llamaremos a este complejo **complejo aumentado** de C_\bullet .

Definición 1.35. Sea A un módulo. Definimos el siguiente complejo positivo donde $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$. Un **complejo sobre A** es un complejo positivo C_\bullet junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : C_0 \rightarrow A$ tal que $\varepsilon\partial = 0 : C_1 \rightarrow A$.

Definición 1.36. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ es una aplicación de cadenas $f : A \rightarrow C_\bullet$ tal que $\varepsilon f = \text{id}_A$ junto con una homotopía $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow f\varepsilon$ donde $\text{id}_{C_\bullet} \simeq f\varepsilon$. En

otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \rightarrow C_0$ y $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}, n = 0, 1, \dots$, tal que

$$\varepsilon f = \text{id}_A, \quad \partial_1 s_0 + f \varepsilon = \text{id}_{C_0}, \quad \partial_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = \text{id}_{C_n} \quad n > 0.$$

Podemos extender el complejo estableciendo $C_{-1} = A, \partial_0 = \varepsilon : C_0 \rightarrow C_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Aplicando la Def. 1.36, $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow 0$ es una homotopía de cadenas. Si $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son isomorfos por $\varepsilon_* : H_0(C_\bullet) \rightarrow A$ para $n = 0$ y $H_n(C_\bullet) = 0$ para $n > 0$.

Consideremos un complejo de cadenas $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde cada C_n es un \mathbb{Z} -módulo libre y $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ es el operador diferencial de C_\bullet que cumple $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para todo n . Este tipo de complejos aparece frecuentemente en el estudio de espacios topológicos.

Supongamos además que cada C_n es finitamente generado. Entonces, el n -ésimo grupo de homología de C_\bullet , definido como

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})},$$

es un grupo abeliano finitamente generado. Este resultado se sigue del hecho de que el núcleo y la imagen de los morfismos entre \mathbb{Z} -módulos libres finitamente generados son también finitamente generados.

El teorema de **Descomposición cíclica primaria** y, en particular, el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados afirma que cualquier grupo abeliano finitamente generado G puede expresarse como una suma directa de grupos cíclicos de la forma

$$G \cong \mathbb{Z}^\beta \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde β es el rango de G y cada \mathbb{Z}_{m_i} es un grupo cíclico de orden m_i , donde m_i divide a m_{i+1} para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Aplicando este teorema al n -ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet)$, obtenemos que

$$H_n(C_\bullet) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde β_n es el rango de $H_n(C_\bullet)$, conocido como el **n -ésimo número de Betti** de C_\bullet , y los m_i son los **n -ésimos coeficientes de torsión**, donde m_i divide a m_{i+1} para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Definición 1.37. Sea C_\bullet un complejo de cadenas y k un entero no negativo. El **k -ésimo número de Betti**, $\beta_k(C_\bullet)$, se define como el rango del k -ésimo módulo de homología de C_\bullet sobre el dominio de ideales principales R , $H_k(C_\bullet; R)$. Esto es, $\beta_k(C_\bullet) = \text{rg}(H_k(C_\bullet; R))$. Si no hay lugar a confusión lo notaremos simplemente por β_k .

Definición 1.38. Dado un complejo de cadenas C_\bullet y considerando la descomposición en sumas directas del n -ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet; R)$ sobre un dominio de ideales principales R , definimos los **n -ésimos coeficientes de torsión** como los $m_i \in R$ donde $i \in \{1, \dots, k\}$ que aparecen en la descomposición

$$H_n(C_\bullet; R) \cong R^{\beta_n} \oplus \frac{R}{\langle m_1 \rangle} \oplus \dots \oplus \frac{R}{\langle m_k \rangle},$$

donde cada m_i divide a m_{i+1} .

Los números de Betti β_n proporcionan una medida de la dimensionalidad de la n -ésima homología, mientras que los coeficientes de torsión $\{m_i\}$ representan los órdenes de los

1. Fundamentos del álgebra homológica

sumandos cíclicos de torsión en la descomposición de homología y reflejan la estructura torsional de $H_n(C_\bullet; R)$.

Aunque el estudio de la homología con coeficientes en \mathbb{Z} es ampliamente extendido, en ciertas situaciones resulta de utilidad emplear coeficientes más simples. Estos coeficientes, a pesar de proporcionar menos información, facilitan los cálculos y suelen ser suficientes para alcanzar los objetivos específicos de nuestro análisis. Por este motivo, trabajaremos con la noción de homología sobre un R -módulo, utilizando en ocasiones espacios vectoriales como anillo de coeficientes.

2. Símplices y complejos simpliciales

Los espacios topológicos pueden llegar a ser complicados de estudiar. Los complejos simpliciales tienen la ventaja de ser estructuras fáciles de estudiar. Por este motivo, los dotaremos de cierta topología que nos permitirá construir homeomorfismos a un gran número de espacios topológicos. En este capítulo nos centraremos en la definición y el estudio de estos objetos en profundidad en la línea de [Mun18] y lo complementaremos con algunas aportaciones de [Lee10].

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplex. Su sencillez y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplex y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzamos recordando algunos conceptos de la geometría afín.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N -dimensional, lo notaremos simplemente por \mathbb{R}^N .

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N . Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^p t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_p$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \dots, a_p\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nótese que la transformación afín T de \mathbb{R}^N tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de \mathbb{R}^N con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual, obtenemos una transformación afín $S : P \rightarrow \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tal que $S(a_i) = (0, \overset{i-1}{\underset{\cdot}{\cdot}}, 0, 1, 0, \overset{i+1}{\underset{\cdot}{\cdot}}, 0)$ con $i \in \{1, \dots, p\}$.

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en \mathbb{R}^N . Definimos el **p-símplice** o **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ generado por a_0, \dots, a_p como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i = 1$$

con $t_i \geq 0$, $i \in \{0, 1, \dots, p\}$. Diremos que t_i es la **i -ésima coordenada baricéntrica** de x respecto a a_0, a_1, \dots, a_p .

Proposición 2.1. Sea σ un k -símplice definido como en 2.3. Entonces, para cualquier $p \in \sigma$, las coordenadas baricéntricas t_0, \dots, t_k de p están determinadas de manera única.

Demostración. Por definición, cualquier punto arbitrario $p \in \sigma$ puede escribirse como una combinación convexa de los puntos a_i . Esto garantiza la existencia de una solución (no negativa) al sistema lineal

$$At = \begin{pmatrix} a_{01} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N} & \cdots & a_{kN} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ 1 \end{pmatrix} = p^*,$$

donde A es la matriz que contiene a los a_i como columnas, extendidos con un 1 en la última fila para incorporar la condición de que la suma de t_i sea igual a 1, asegurando que estamos considerando combinaciones convexas.

Para demostrar la unicidad, supongamos la existencia de otro vector t' tal que $At' = p^*$. Esto lleva a $A(t - t') = 0$. Supongamos que $A(t - t') = Av = 0$, donde $v = t - t'$. Esto implica que para $v_i = t_i - t'_i$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$

$$\sum_{i=0}^k v_i \cdot \begin{pmatrix} a_{0i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que lleva a que $v_0 = v_1 = \dots = v_k = 0$, debido a la independencia lineal de las columnas de A . En consecuencia, $t = t'$, demostrando así que las coordenadas baricéntricas son únicas para cualquier punto p en σ . \square

Los puntos a_0, \dots, a_p que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número p lo llamaremos la **dimensión** de σ , que notaremos por $\dim \sigma$.

Definición 2.4. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ un símplice. Una **cara de dimensión** p de σ será cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \dots, a_p\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i , $i \in \{0, \dots, p\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos $\text{Bd } \sigma$. Finalmente, definimos el **interior** de σ , $\text{Int } \sigma$, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

En ocasiones, para dos símplices σ y τ , escribiremos $\tau \preceq \sigma$ si τ es cara de σ . En caso de ser cara propia, lo notaremos por $\tau \prec \sigma$.

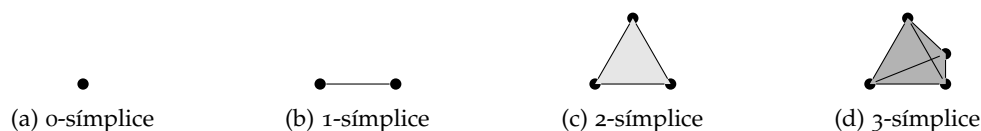


Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Proposición 2.2. Si σ es un símplice, entonces es unión disjunta del interior de todas sus caras.

Demostración. Sea x un elemento del símplice $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ y sean t_0, \dots, t_p sus coordenadas baricéntricas. Consideremos ahora σ_k el símplice resultante de eliminar los vértices cuya coordenada tenía valor nulo. Esto es, tomamos el símplice $\sigma_k = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ donde $t_{i_s} > 0$ para todo $s \in \{1, \dots, k\}$. Por la construcción de σ_k , tenemos que x pertenece a su interior.

Ahora sabemos que todo punto de un símplice pertenece al interior de una cara. Finalmente, la unicidad de las coordenadas baricéntricas nos garantiza que la unión del interior de dos caras es disjunta. \square

Dado un símplice σ podemos definir un orden sobre sus vértices. Dos órdenes de σ los consideraremos equivalentes si podemos pasar de uno a otro con un número par de permutaciones. Así, los ordenamientos posibles para los vértices de σ se pueden agrupar en dos clases de equivalencia distintas, que definimos como las **orientaciones del símplice** σ .

Definición 2.5. Decimos que un símplice $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_p]$ está **orientado** si se le ha asignado una de estas orientaciones. Utilizaremos $[a_0 a_1 \dots a_p]$ para denotar la clase de equivalencia dada por la orientación $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ del símplice generado por los vértices a_0, a_1, \dots, a_p .

2.2. Complejos simpliciales

La importancia de los complejos simpliciales reside en su capacidad para descomponer espacios topológicos en componentes manejables, permitiendo un análisis detallado de su estructura. Al considerar la forma en que estos símplices se conectan y orientan entre sí, los complejos simpliciales facilitarán la definición de cadenas y ciclos simpliciales que serán indispensables en el estudio de la homología simplicial.

Definición 2.6. Un **complejo simplicial** (finito) K en \mathbb{R}^N es una colección (finita) de símplices en \mathbb{R}^N tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K o es el vacío o es una cara de ambos símplices.

Nota. Si bien los complejos simpliciales se pueden formular sin la restricción de finitud, nosotros trabajaremos principalmente en el caso finito por simplicidad en algunos resultados.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 2.1. Una colección K de símplices es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

2. Símplices y complejos simpliciales

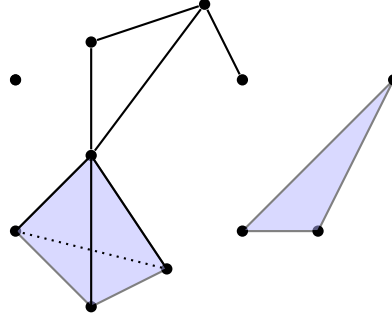


Figura 2.2.: Visualización de un complejo simplicial.

1. Toda cara de un símplex de K está en K .
2. La intersección dos a dos del interior de los símplexes de K es vacía.

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplexes $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$ y considero $x \in s$. Si s fuera una cara propia de σ , entonces x pertenecería a la frontera de σ , lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ . Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen (1) y (2). Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices b_0, \dots, b_m de σ que están en τ . Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a b_0, \dots, b_m . Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \text{Int } s \cap \text{Int } t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ . Se sigue de (2) que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \dots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ' , lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. \square

Definición 2.7. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K .

Definición 2.8. Sea K un complejo simplicial. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p . Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ lo llamaremos el **conjunto de vértices** de K .

Definición 2.9. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^N tal que $|K|$ es la unión de todos los símplexes de K . Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de \mathcal{T} son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de \mathbb{R}^N para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ , pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma, O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $(\cup_{i \in I} O_i) \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ . En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

En general, la topología de $|K|$ es más fina que la inducida de la topología usual de \mathbb{R}^N . Si A es cerrado en $|K|$ con la topología inducida de la usual, $A = B \cap |K|$ para algún cerrado B

de \mathbb{R}^N y por tanto $B \cap \sigma$ sería cerrado en σ para cada símplice σ de K . Como consecuencia, $B \cap |K| = A$ es cerrado en $|K|$ con la topología \mathcal{T} definida anteriormente. No obstante, la otra inclusión no tiene por qué cumplirse:

Ejemplo 2.1. Consideremos el complejo no finito K en \mathbb{R} cuyos símplices son todos los intervalos $[m, m+1]$ con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, todos los intervalos de la forma $[1/(n+1), 1/n]$ donde $n \in \mathbb{N}$ y todas sus respectivas caras. Como resultado tenemos que $|K| = \mathbb{R}$, donde $F = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en nuestra topología \mathcal{T} pero no en la inducida por la usual. Dicho de otra forma, $\mathbb{R} \setminus F$ es abierto en \mathcal{T} pero no en la usual.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

A continuación, mencionemos algunas propiedades relevantes de este espacio topológico. Para ello fijemos un complejo simplicial finito K en \mathbb{R}^N .

Proposición 2.3. Sea K un complejo simplicial finito. Entonces el poliedro $|K|$ es compacto.

Demostración. Si K es un complejo simplicial, sus símplices son conjuntos cerrados y acotados. En consecuencia, $|K|$ es unión finita de conjuntos cerrados y acotados, luego es cerrado y acotado en \mathbb{R}^N . Por lo tanto, es compacto. \square

Proposición 2.4. Sea K un complejo simplicial. Si $x \in |K|$, entonces existe un único símplice en K tal que x pertenece a su interior.

Demostración. Si $x \in |K|$, entonces existe algún símplice σ de K tal que $x \in \sigma$. Por la **Proposición 2.2**, x pertenece al interior de alguna cara τ de σ . Supongamos ahora que existe otro símplice ρ de K tal que $x \in \text{Int } \rho$. Por consiguiente, si $x \in \text{Int } \rho \cap \text{Int } \tau$, entonces x pertenecería a una cara común μ de ρ y τ . Esto es, $\mu = \rho \cap \tau$. Ahora si $\rho \neq \mu$, el elemento x debería tener alguna coordenada baricéntrica nula respecto a los vértices de ρ , en contradicción con que x pertenece al interior de ρ . En consecuencia, $\rho = \mu$. De manera análoga obtenemos $\tau = \mu$ y por tanto, $\rho = \tau$. \square

Definición 2.10. Sea K un complejo simplicial y sea $x \in |K|$. Llamaremos **símplice soporte** de x al único símplice que contiene a x en su interior y lo notaremos por $\text{sop}(x)$.

Corolario 2.1. Sean σ, τ símplices de K tal que $\text{Int } \sigma \cap \tau$ es no vacía. Entonces σ es una cara de τ .

Demostración. Consideremos $x \in \text{Int } \sigma \cap \tau$. Por la **Proposición 2.2** sabemos que τ es la unión de todas sus caras lo que implica que existe una cara μ de τ cuyo interior contiene a x . Por lo tanto, $x \in \text{Int } \mu \cap \text{Int } \sigma$ y como consecuencia de la **Proposición 2.4**, $\mu = \sigma$. \square

Lema 2.2. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua s , y sólo sí, $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$.

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_\sigma$ por ser σ un subespacio de K . Supongamos ahora que $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X , $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_\sigma^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_\sigma$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. \square

Definición 2.11. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X . Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$ es una **triangulación**.

2.3. Celdas y CW-complejos

A continuación presentamos una generalización del concepto de complejo simplicial, propuesta por J.H.C. Whitehead en [Whi49]. Los CW-complejos reemplazan la estructura simplicial tradicional por estructuras homeomorfas a bolas abiertas, facilitando el estudio de una gama más amplia de espacios topológicos.

Iniciaremos esta sección estableciendo la notación que utilizaremos. Denotaremos la **bola abierta** centrada en x_0 y de radio r en el espacio \mathbb{R}^N con la topología usual por el conjunto $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}$. Además, para cualquier subconjunto U de \mathbb{R}^N , definiremos su **clausura** como \bar{U} y su **frontera** como $\text{Bd } U$. Por último, la **esfera unidad** de dimensión n será representada simplemente como S^{n-1} .

Definición 2.12. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es una **celda** abierta (cerrada) de dimensión p o p -celda si X es homeomorfo a la bola unidad abierta (cerrada) de dimensión p .

Sería interesante disponer de resultados que nos digan cuándo un subconjunto dado puede ser una celda. Para ello, recordemos el siguiente resultado de topología básica:

Lema 2.3. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre ellos. Si X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada.

La siguiente proposición será de gran utilidad para ver que los complejos simpliciales no son más que un caso particular de los CW-complejos.

Proposición 2.5. Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo compacto con interior no vacío, entonces D es una n -celda cerrada y su interior es una n -celda abierta. De hecho, dado cualquier punto $p \in \text{Int } D$, existe un homeomorfismo $F : \bar{B}_1(0) \rightarrow D$ que envía 0 a p , $B_1(0)$ a $\text{Int } D$, y S^{n-1} a $\text{Bd } D$.

Demostración. Sea p un punto interior de D . Reemplazando D por su imagen bajo la traslación $x \mapsto x - p$, podemos suponer que $p = 0 \in \text{Int } D$. Entonces existe algún $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(0)$ está contenida en D . Utilizando la dilatación $x \mapsto x/\varepsilon$, podemos asumir $B_1(0) \subseteq D$. A continuación demostraremos que cada semirrecta cerrada que comienza en el origen interseca $\text{Bd } D$ en exactamente un punto. Sea R tal semirrecta cerrada. Dado que D es compacto, su intersección con R es compacta; por lo tanto, hay un punto x_0 en esta intersección donde la distancia al origen alcanza su máximo. Este punto se identifica fácilmente como parte del borde de D . Para demostrar que solo puede haber un punto así, mostramos que el segmento de línea desde 0 hasta x_0 consta enteramente de puntos interiores de D , excepto x_0 mismo. Cualquier punto en este segmento que no sea x_0 se puede escribir en la forma λx_0 para $0 \leq \lambda < 1$. Supongamos que $z \in B_{1-\lambda}(x_0)$, y sea $y = (z - \lambda x_0)/(1 - \lambda)$. En consecuencia $|y| < 1$, por lo que $y \in B_1(0) \subseteq D$. Como y y x_0 están ambos en D y $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y$, se sigue de la convexidad que $z \in D$. Así, la bola abierta $B_{1-\lambda}(x_0)$ está contenida en D , lo que implica que λx_0 es un punto interior.

Ahora definamos una aplicación $f : \text{Bd } D \rightarrow S^{n-1}$ por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

En palabras, $f(x)$ es el punto donde el segmento de línea que parte del origen hasta x interseca la esfera unidad. Puesto que f es la restricción de una aplicación continua, es continua, por lo que la discusión del párrafo anterior muestra que es biyectiva. Dado que ∂D es compacto, f es un homeomorfismo por el **Lema 2.3**.

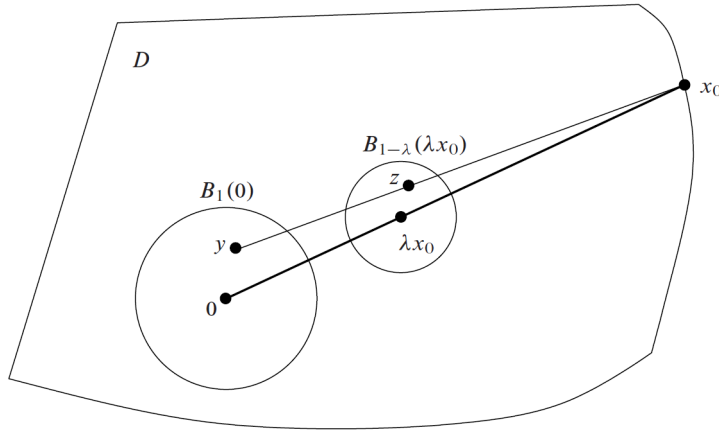


Figura 2.3.: Esquema que muestra la idea de que cada rayo tan sólo tiene un punto en la frontera en la demostración de la **Proposición 2.5**. Recurso obtenido de [Lee10].

Finalmente, definamos $F : \bar{B}_1(0) \rightarrow D$ de forma que

$$F(x) = \begin{cases} |x|f^{-1}\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Entonces F es continua lejos del origen porque f^{-1} lo es, y también lo es en el origen pues la acotación de f^{-1} implica que $F(x) \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow 0$. Geométricamente, F lleva cada segmento de línea radial que conecta 0 con un punto $\omega \in S^{n-1}$ linealmente sobre el segmento radial de 0 al punto $f^{-1}(\omega) \in \text{Bd } D$. Por convexidad, F toma sus valores en D . La aplicación F es inyectiva, ya que puntos en rayos distintos van a rayos distintos, y cada segmento radial se lleva linealmente a su imagen. Es sobreyectiva porque cada punto $y \in D$ está en algún rayo desde 0. Por el **Lema 2.3**, F es un homeomorfismo. \square

Definición 2.13. Sea (X, \mathcal{E}) , donde X es un espacio topológico Hausdorff y \mathcal{E} una colección de celdas abiertas. Diremos entonces que (X, \mathcal{E}) es un **CW-complejo** si se cumple que:

- (C) Para cada p -celda $e \in \mathcal{E}$, existe una aplicación continua $f_e : B^p \rightarrow X$ de forma que el interior de B^p es homeomorfo a la celda e y lleva la frontera de B^p en una unión finita de celdas de dimensión menor a p . A dicha función la llamaremos **función característica**.
- (W) Un subconjunto F de X es cerrado si $F \cap \bar{e}$, donde \bar{e} denota la clausura de e , es cerrado para todo $e \in \mathcal{E}$.

Normalmente denotaremos al CW-complejo (X, \mathcal{E}) simplemente por X .

Observación 2.1. En la formulación original de Whitehead, la primera condición denotaba la propiedad de clausura finita. Por otro lado, la segunda condición denotaba que la topología empleada era la topología débil (del inglés, *weak*).

Definición 2.14. Sea X un espacio topológico. Diremos que una celda $e \subset X$ es **regular** si admite una función característica que sea un homeomorfismo sobre \bar{e} . Además, diremos que un CW-complejo es **regular** si todas sus celdas son regulares.

2. Símplices y complejos simpliciales

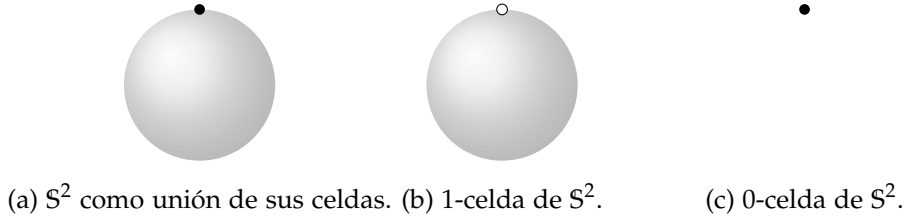


Figura 2.4.: Visualización de un CW-complejo para S^2 .

Una propiedad importante de los CW-complejos es que mantienen su estructura en subconjuntos bajo ciertas condiciones razonables.

Definición 2.15. Sea X un CW-complejo. Diremos que $Y \subseteq X$ es un **subcomplejo** de X si es unión de celdas de X de forma que si Y contiene una celda, entonces también contiene su clausura.

Teorema 2.1. Sea X un CW-complejo y sea Y un subcomplejo de X . Entonces Y es cerrado en X y, además, es un CW-complejo con la topología y la colección de celdas inducidas.

Demostración. Es claro que Y es Hausdorff. Además, por definición tenemos que Y es la unión disjunta de sus celdas. Sea $e \subseteq Y$ una celda abierta de Y . Como su clausura también está contenida en Y , entonces existe un número finito de celdas de X con intersección no vacía con \bar{e} que, a su vez, son celdas de Y . En consecuencia, la condición (C) se cumple. Es más, cualquier aplicación característica $f_e : \rightarrow X$ de X lo es también de Y para cualquier celda $e \subseteq Y$.

En cuanto a la condición (W), supongamos que S es un subconjunto de Y tal que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} para toda celda en Y . Sea ahora e una celda de X que no esté contenida en Y . Sabemos que $\bar{e} \setminus e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de X , de las cuales un subconjunto de ellas están contenidas en Y . Llamemos a dichas celdas e_1, \dots, e_n . Por consiguiente, $\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n \subseteq Y$ y además,

$$S \cap \bar{e} = S \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} = ((S \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (S \cap \bar{e}_n)) \cap \bar{e},$$

luego $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} . Es decir, S es cerrado en X y por tanto en Y . Finalmente, concluimos que Y es cerrado en X tomando $S = Y$. \square

Definición 2.16. Sea X un CW-complejo. Diremos que el subespacio $X^{(p)}$ de X es el **p -esqueleto** de X si es igual a la unión de todas las celdas de dimensión menor o igual que p . En particular, es un subcomplejo de dimensión p de X .

Teorema 2.2. Sea X un CW-complejo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X es conexo por caminos.
2. X es conexo.
3. El 1-esqueleto de X es conexo.
4. Algún n -esqueleto de X es conexo para algún n .

Demostración. Obviamente, (1) \Rightarrow (2) y (3) \Rightarrow (4), por lo que basta con demostrar que (2) \Rightarrow (3) y (4) \Rightarrow (1).

Para probar (2) \Rightarrow (3) razonaremos por contrarrecíproco. Supongamos que $X^{(1)} = X'^{(1)} \cup X''^{(1)}$ es una unión no conexa del 1-esqueleto de X . Veamos por inducción en n que para cada $n > 1$, el n -esqueleto $X^{(n)}$ puede expresarse como unión no conexa $X^{(n)} = X'^{(n)} \cup X''^{(n)}$ tal que $X'^{(n)} \subseteq X'^{(n-1)}$ y $X''^{(n)} \subseteq X''^{(n-1)}$ para cada n . Supongamos $X^{(n-1)} = X'^{(n-1)} \cup X''^{(n-1)}$ es una unión no conexa de $X^{(n-1)}$ para algún $n > 1$. Para cada celda n -dimensional e , la restricción de su aplicación función característica $f_e: D^n \rightarrow X^{(n)}$ a ∂D^n es continua en $X^{(n-1)}$. Dado que $\partial D^n \cong S^{n-1}$ es conexo, su imagen debe estar contenida en uno de los conjuntos $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$. Por lo tanto, $\overline{f_e(D)}$ tiene una intersección no trivial con $X'^{(n)}$ o $X''^{(n)}$, pero no con ambos. Dividimos las n -celdas en dos colecciones disjuntas \mathcal{E}' y \mathcal{E}'' , según si sus clausuras intersecan $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$, respectivamente, y definimos

$$X'^{(n)} = X'^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}'} \overline{f_e(D)} \right), \quad X''^{(n)} = X''^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}''} \overline{f_e(D)} \right).$$

Claramente, $X^{(n)}$ es la unión disjunta de $X'^{(n)}$ y $X''^{(n)}$, y ambos conjuntos son no vacíos debido a la hipótesis de inducción.

Ahora, definamos $X' = \bigcup_n X'^{(n)}$ y $X'' = \bigcup_n X''^{(n)}$. Como antes, $X = X' \cup X''$, y ambos conjuntos son no vacíos. Por el mismo argumento que arriba, si e es cualquier celda de X de cualquier dimensión, su clausura debe estar contenida en uno de estos conjuntos. Así, X' y X'' son ambos abiertos y cerrados en X , lo que implica que X no es conexo.

Para demostrar (4) \Rightarrow (1), supongamos que X es un CW-complejo cuyo n -esqueleto es conexo para algún $n \geq 0$. Mostremos por inducción en k que $X^{(k)}$ es conexo por caminos para cada $k \geq n$. Primero, necesitamos mostrar que $X^{(n)}$ en sí mismo es conexo por caminos. Si $n = 0$, entonces $X^{(n)}$ es discreto y conexo, así que es un conjunto unitario y por lo tanto conexo por caminos. En caso contrario, elijamos cualquier punto $x_0 \in X^{(n)}$ y consideremos S_n la componente de camino de $X^{(n)}$ que contiene a x_0 . Para cada celda e de $X^{(n)}$, notemos que $\overline{f_e(D)}$ es la imagen continua de un espacio conexo por caminos, así que es conexo por caminos. Por lo tanto, si $\overline{f_e(D)}$ tiene una intersección no trivial con la componente de camino S_n , debe estar contenida en S_n . En consecuencia, S_n es cerrado y abierto en $X^{(n)}$. Como estamos asumiendo que $X^{(n)}$ es conexo, entonces $S_n = X^{(n)}$.

Ahora, supongamos que hemos demostrado que $X^{(k-1)}$ es conexo por caminos para algún $k > n$ y sea S_k la componente de camino de $X^{(k)}$ que contiene a $X^{(k-1)}$. Para cada k -celda e , su clausura $\overline{f_e(D)}$ es un subconjunto de $X^{(k)}$ conexo por caminos que tiene intersección no trivial con $X^{(k-1)}$ y, por lo tanto, está contenido en S_k . Se sigue que $X^{(k)} = S_k$, completando la inducción. \square

Lema 2.4. *Sea X un CW-complejo. Entonces la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito.*

Demostración. Consideremos cualquier n -celda $e \in X$ y probemos el lema por inducción. Para el caso $n = 0$, $\bar{e} = e$ es trivialmente un subcomplejo finito. Supongamos ahora el lema cierto para las celdas de dimensión menor o igual que n y veámoslo para $n + 1$. Por la condición (C), $\bar{e} \setminus e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de dimensión menor que $n + 1$. Dichas celdas están contenidas en subcomplejos finitos por hipótesis de inducción. Sin embargo, la unión de dichos subcomplejos finitos con e es de hecho un subcomplejo finito que contiene a \bar{e} . \square

2. Símplices y complejos simpliciales

Lema 2.5. Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es discreto si, y sólo si, su intersección con cada celda es finita.

Demostración. Sea S un subconjunto discreto de X . Entonces, la intersección de la clausura de cada celda e de X con S es un subconjunto discreto de un conjunto compacto, luego es finito. En consecuencia, $S \cap e$ también lo es.

Para la otra implicación supongamos que S es un subconjunto cuya intersección con cualquier celda es finita. Como la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito, entonces por hipótesis tenemos que $S \cap \bar{e}$ es finito para cada celda e de X . Esto significa que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} y por la condición (W), S es cerrado en X . Sin embargo, este argumento podemos aplicarlo a cualquier subconjunto de S , luego todo subconjunto de S es cerrado en X . Por lo tanto, la topología inducida en S es discreta. \square

Teorema 2.3. Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es compacto si, y sólo si, es cerrado en X y está contenido en un subcomplejo finito.

Demostración. Todo subcomplejo finito de X es compacto pues es unión finita de clausuras de celdas, las cuales son compactas. En consecuencia, si K es un subconjunto cerrado de X contenido en un subcomplejo finito, entonces es compacto.

Supongamos ahora que $K \subseteq X$ es compacto. Si K intersecara una cantidad infinita de celdas, podríamos tomar un punto de cada intersección de forma que tuviéramos un subconjunto infinito discreto de K , lo cual es imposible. Es decir, K está contenido en la unión de un número finito de celdas y por el **Lema 2.4**, está contenido en un subcomplejo finito. \square

Corolario 2.2. Un CW-complejo es compacto si, y sólo si, es un complejo finito.

Proposición 2.6. Todo p -símplice es una celda cerrada de dimensión p .

Demostración. Inmediato por la **Proposición 2.5**. \square

Una vez discutidas algunas propiedades básicas de los CW-complejos, ya estamos en condiciones de verificar que efectivamente los complejos simpliciales son CW-complejos.

Proposición 2.7. Si K es un complejo simplicial finito, entonces el poliedro $|K|$ junto con la colección \mathcal{E} de interiores de los símplices de K forman un CW-complejo.

Demostración. Supongamos que K es un complejo simplicial finito en \mathbb{R}^N . La condición (C) se obtiene de manera directa a partir de la **Proposición 2.5**.

En cuanto a la propiedad (W), consideremos F como un subconjunto de $|K|$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x en $|K|$ y sea U un entorno de x . Por la compacidad de $|K|$ y el hecho de que \mathcal{E} es un recubrimiento por abiertos de $|K|$, podemos escoger un subrecubrimiento finito e_1, \dots, e_k tal que $x \in U \subseteq \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$.

Fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_i} \in U$ para todo $n_i \geq n_0$. Como hay un número finito de e_j e infinitos x_{n_i} , existe una parcial convergente $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a x contenido en algún \bar{e}_j para cierto $j \in \{1, \dots, k\}$. Esto muestra que $x \in \bar{e}_j$ y, puesto que $x_{n_i} \in F \cap \bar{e}_j$ para todo $n_i \geq n_0$, y $F \cap \bar{e}_j$ es cerrado en \bar{e}_j , concluimos que $x \in F \cap \bar{e}_k$. \square

2.4. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.6. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación entre los conjuntos de vértices de K y L . Supongamos que siempre que los vértices v_0, \dots, v_n de K generen un símple en K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símple en L . Entonces podemos extender f a una aplicación continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies |f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$$

Llamaremos a g la **aplicación simplicial (lineal) inducida por f** .

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple τ en L . Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $|f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$ es un punto de τ . Es decir, $|f|$ es una aplicación lineal del símple σ generado por v_0, \dots, v_n al símple τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$. Por ser $|f| : \sigma \rightarrow \tau$ lineal en un espacio de dimensión finita, entonces es continua.

Ahora tan solo nos queda ver que $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Bien, pues por ser $|f| : \sigma \rightarrow \tau$ continua, también lo es $|f| : \sigma \rightarrow |L|$. Finalmente por el **Lema 2.2**, $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua. \square

Consideremos las funciones de la forma de f descrita en 2.6. Para cualquier complejo K , existe una aplicación identidad $\text{id}_K : K \rightarrow K$ que corresponde a la aplicación identidad en los vértices. Dadas tres aplicaciones $f : K \rightarrow L$, $g : L \rightarrow M$ y $h : M \rightarrow N$, la aplicación compuesta $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, pues es una composición de aplicaciones de conjuntos que preserva símlices. Por lo tanto, existe una categoría de complejos simpliciales y estas funciones que denotaremos por **CSim**.

Por otro lado, veamos que el **Lema 2.6** nos garantiza la existencia de un funtor covariante entre esta categoría y los espacios topológicos.

Proposición 2.8. Existe un funtor covariante $|\cdot| : \mathbf{CSim} \rightarrow \mathbf{Top}$ de la categoría de aplicaciones simpliciales a la categoría de espacios topológicos.

Demostración. Para cada complejo simplicial K , la identidad en **CSim** es la función identidad $\text{id}_K : K \rightarrow K$. La aplicación simplicial inducida $|\text{id}_K| : |K| \rightarrow |K|$ es tal que

$$|\text{id}_K| \left(\sum_{i=0}^n t_i v_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i \text{id}_K(v_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

lo cual es precisamente la identidad en el espacio topológico $|K|$. Esto muestra que $|\cdot|$ preserva las identidades.

Sean ahora $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ dos morfismos en **CSim**. La composición en **CSim** es $g \circ f : K \rightarrow M$, y necesitamos demostrar que $|(g \circ f)| = |g| \circ |f|$. Para cualquier punto $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ en $|K|$,

$$|(g \circ f)|(x) = \sum_{i=0}^n t_i (g \circ f)(v_i) = \sum_{i=0}^n t_i g(f(v_i)).$$

Por otro lado,

$$(|g| \circ |f|)(x) = |g| \left(|f| \left(\sum_{i=0}^n t_i v_i \right) \right) = |g| \left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i) \right) = \sum_{i=0}^n t_i g(f(v_i)).$$

2. Símplices y complejos simpliciales

Ambas expresiones son iguales y por tanto, $|\cdot|$ preserva la composición de morfismos. \square

Lema 2.7. Supongamos que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símplex de K si, y sólo si, $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símplex de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo. Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L .

Demostración. Por hipótesis, cada símplex $\sigma \in K$ se identifica con otro símplex $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i)\right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(f(v_i)) = \sum_{i=0}^n t_i v_i = x$$

\square

2.5. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simple, nos serán de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.17. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$. Además, diremos que el complejo abstracto es **finito** si dicha colección es finita.

Al elemento A de \mathcal{S} lo llamaremos **símplice** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A . En cuanto a la **dimensión** de \mathcal{S} , diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de \mathcal{S} es infinita. El **conjunto de vértices** V de \mathcal{S} diremos que es la unión de elementos de \mathcal{S} que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de \mathcal{S} a cualquier subcolección de \mathcal{S} que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos \mathcal{S}, \mathcal{T} respectivamente. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \rightarrow V_T$ tal que $\{a_0, \dots, a_p\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \dots, f(a_p)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.18. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \dots, a_p\} \subset V$ tales que los vértices a_0, \dots, a_p generan un símplex de K . Entonces llamaremos a la colección \mathcal{K} el **esquema de vértices** de K .

Definición 2.19. Si el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K , diremos que K es una **realización geométrica** de \mathcal{S} .

Proposición 2.9. Sea \mathcal{S} un complejo simplicial abstracto finito de dimensión N . Entonces existe una realización geométrica de \mathcal{S} en \mathbb{R}^{2N+1} .

Demostración. Consideremos un conjunto de puntos $p_i \in \mathbb{R}^{2N+1}$ de forma sus componentes son potencias de su índice i . Veamos que cualquier conjunto de $2N + 2$ de estos puntos es afínmente independiente. Es decir, que los vectores formados por las diferencias entre estos puntos son linealmente independientes.

Para demostrarlo, consideremos un subconjunto de puntos $\{p_{j_k} : 1 \leq k \leq 2N + 2\}$ de esta forma y analicemos el determinante de la matriz formada por los vectores correspondientes,

$$\begin{vmatrix} j_2 - j_1 & j_3 - j_1 & \cdots & j_{2n+2} - j_1 \\ j_2^2 - j_1^2 & j_3^2 - j_1^2 & \cdots & j_{2n+2}^2 - j_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_2^{2n+1} - j_1^{2n+1} & j_3^{2n+1} - j_1^{2n+1} & \cdots & j_{2n+2}^{2n+1} - j_1^{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Simplificando mediante operaciones elementales de fila, este determinante se transforma en el determinante de Vandermonde, cuyo valor es conocido y se calcula como el producto de las diferencias entre los términos seleccionados,

$$\prod_{1 \leq k < l \leq 2N+2} (j_k - j_l).$$

Este resultado no es cero siempre que todos los j_k sean distintos, asegurando así la independencia lineal.

Respecto a la construcción del complejo simplicial, tomemos un símplice abstracto A en \mathcal{S} con vértices $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ y consideremos el símplice geométrico $\sigma_A = [p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_m}]$ en \mathbb{R}^{2N+1} . Dado que $m + 1 \leq 2N + 2$, el símplice σ_A tiene dimensión m . Definimos K como el conjunto que contiene todos los símplices σ_A para cada $A \in \mathcal{S}$. Veamos que la intersección de dos símplices σ_A y σ_B en K es igual a $\sigma_{A \cap B}$ con $A, B \in \mathcal{S}$. Consideremos τ como el símplice en \mathbb{R}^{2N+1} cuyos vértices son la unión de los vértices pertenecientes a σ_A y a σ_B , lo cual es posible ya que la suma de sus dimensiones no supera $2N$. De esta manera, la intersección $\sigma_A \cap \sigma_B$ resulta ser la cara de τ determinada por los vértices que σ_A y σ_B comparten, es decir, aquellos asociados a $A \cap B$. Concluimos entonces que $\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A \cap B}$. \square

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior y del **Lema 2.7**, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (a) *Todo complejo abstracto finito \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .*
- (b) *Dos complejos simpliciales son afínmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.*

3. Homología simplicial

Este capítulo se centra en la homología simplicial, una rama de estudio crucial de la topología algebraica que utiliza complejos simpliciales para analizar y comprender la estructura de espacios topológicos triangulables. Tras explorar los fundamentos del álgebra homológica y la teoría de complejos simpliciales, ahora profundizamos en las propiedades teóricas y aplicaciones prácticas de la homología simplicial siguiendo los contenidos de [RA03].

3.1. Homología simplicial orientada

Consideremos Σ_p el conjunto de todos los símlices de dimensión p de un complejo simplicial K . Para cada $\sigma \in \Sigma_p$, definimos Σ_p^+ y Σ_p^- como los conjuntos que contienen, respectivamente, un símplex orientado σ^+ y el símplex con orientación opuesta σ^- .

Definición 3.1. Sea K un complejo simplicial y sea R un anillo. Consideremos el conjunto. Definimos $C_p(K; R)$, el **R -módulo de las p -cadenas simpliciales orientadas** de K , como el cociente del R -módulo libre generado por $\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-$ sobre el submódulo generado por el conjunto $\{\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\}$. Esto es,

$$C_p(K; R) = \frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle}.$$

Para $p < 0$ o $p > \dim(K)$, definimos $C_p(K; R)$ como el R -módulo trivial.

El interés de definir el R -módulo de p -cadenas simpliciales orientadas radica tanto en la identificación de los elementos que contiene como en las operaciones algebraicas aplicables sobre ellos. Esta construcción nos permite manejar un símplex orientado y su opuesto como opuestos algebraicos en un marco formal. Veámoslo.

Nuestro objetivo es demostrar que efectivamente

$$\frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle} \cong R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle,$$

donde $\tilde{\Sigma}_p$ representa el conjunto de p -símlices en Σ_p con una orientación arbitrariamente fija para cada uno.

Para ello, definamos la aplicación $f : \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rightarrow R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Esta aplicación asigna a cada símplex orientado σ^+ en Σ_p^+ , un representante σ en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ con una orientación fija elegida arbitrariamente, y a cada σ^- en Σ_p^- , le asigna $-\sigma$ en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$, donde $-\sigma$ refleja el elemento opuesto de σ .

La aplicación f respeta las relaciones de orientación al asignar a símlices con orientaciones opuestas a elementos que son opuestos algebraicos en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Por la **Propiedad universal de los módulos libres**, esta aplicación induce un homomorfismo $\tilde{f} : R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle \rightarrow R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ que resulta ser sobreyectivo, ya que cada elemento en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ tiene al menos una preimagen en $R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle$.

3. Homología simplicial

Por definición de f , para cada elemento de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ en $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$, tenemos que $\tilde{f}(\sigma^+ + \sigma^-) = f(\sigma^+) + f(\sigma^-) = \sigma - \sigma = 0$, demostrando que todo el submódulo $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$ tiene imagen cero por \tilde{f} y, por ende, está contenido en el núcleo de \tilde{f} .

Además, si consideramos un elemento x en $R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle$ tal que $\tilde{f}(x) = 0$, este elemento puede expresarse como una combinación lineal de elementos en Σ_p^+ y Σ_p^- . La condición $\tilde{f}(x) = 0$ implica que la suma de las imágenes bajo f de los términos en esta combinación lineal debe ser cero en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Esto solo ocurre si para cada σ , la suma total de los coeficientes correspondientes a σ^+ y σ^- es cero, lo que significa que cada término en x que contribuye a esta suma cero debe ser de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ o un múltiplo de este, luego $\tilde{f}(x) = 0$ implica que $x \in \langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$.

Por tanto, el núcleo de \tilde{f} coincide precisamente con $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$, y aplicando el **Primer teorema de isomorfía**, concluimos que

$$\frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle} \cong R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle,$$

estableciendo la estructura algebraica deseada y completando la prueba.

Observación 3.1. En particular, la anterior construcción asigna a cada símplice orientado una cadena cuyo coeficiente del anillo es 1, 0 o -1 . A estas cadenas las llamaremos **p -cadenas elementales**. En ocasiones abusaremos de la notación para designar por σ a la cadena elemental respectiva del símplice orientado σ .

Definición 3.2. Sea K un complejo simplicial y sean $C_p(K; R), C_{p-1}(K; R)$ R -módulos de p -cadenas. Definimos el **operador borde de p -cadenas** como el homomorfismo $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ tal que

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p([v_0, v_1, \dots, v_p]) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p].$$

donde \hat{v}_i denota el vértice a eliminar.

Lema 3.1. El operador borde $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ está bien definido. En particular, si σ^+ y σ^- son las dos orientaciones del p -símplice σ , tenemos que

$$\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$$

Demostración. Probaremos que la suma de la imagen por el operador borde de $\sigma^+ = [v_0 v_1 \dots v_p]$ y $\sigma^- = [v_1 v_0 \dots v_p]$ es igual a 0. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned} \partial_p \sigma^+ &= [v_1 v_2 \dots] - [v_0 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0, 1} (-1)^i [v_0 v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_p], \\ \partial_p \sigma^- &= [v_0 v_2 \dots] - [v_1 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0, 1} (-1)^i [v_1 v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]. \end{aligned}$$

Al sumar ambas expresiones, los dos primeros términos de $\partial_p \sigma^+$ y $\partial_p \sigma^-$ se cancelan entre sí. Como consecuencia de la definición de $C_{p-1}(K; R)$, los términos restantes definen orientaciones opuestas del mismo símplice por lo que se cancelan y $\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$. \square

Lema 3.2. Sean $\partial_p : C_{p+1}(K; R) \rightarrow C_p(K; R)$, $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ operadores borde. Entonces $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \partial_p \partial_{p+1} [v_0, \dots, v_{p+1}] &= \partial_p \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left[\sum_{j>i}^{p+1} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_{p+1}] + \sum_{j=0}^{j<i} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right]. \end{aligned}$$

Es decir, el símple $[v_0 \dots \hat{v}_k \dots \hat{v}_t \dots v_{p+1}]$ aparece dos veces en la anterior expresión con signos opuestos, donde $k, t \in \{0, \dots, p+1\}$. Esto nos lleva a discutir los siguientes casos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < t$. En el primer caso, $i = k < j = t$ donde el coeficiente es $(-1)^k (-1)^{t-1}$. En el segundo caso, $i = t > j = k$ con coeficiente $(-1)^t (-1)^k$. Concluimos por tanto que todo símple de la expresión se anula y al anularse sobre los generadores, $\partial_{p-1} \partial_p$ es el homomorfismo nulo. \square

Definición 3.3. El complejo de cadenas positivo $C_\bullet(K; R) = \{C_p(K; R), \partial_p\}$ lo llamaremos **complejo de cadenas simpliciales** de K . La homología de dicho complejo la notaremos por $H_p(K; R)$ y lo llamaremos **p -ésimo R -módulo de homología** de K .

Si $R = \mathbb{Z}$, el módulo $H_p(K; \mathbb{Z})$ lo notaremos simplemente por $H_p(K)$ y diremos que es el **p -ésimo grupo de homología** de K .

Proposición 3.1. Sea K un complejo simplicial no vacío. Entonces el complejo de cadenas positivo $\{C_p(K; R), \partial_p\}$ admite un aumento.

Demostración. Sea $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$ el homomorfismo que extiende linealmente $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice $v \in K$. Veamos que $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow R$ es nulo. Tomando $[v_0, v_1] \in C_1(K; R)$ obtenemos que $\varepsilon(\partial_1[v_0, v_1]) = \varepsilon(v_1 - v_0) = 1 - 1 = 0$, como queríamos ver. \square

Definición 3.4. Sea $\tilde{C}_\bullet(K; R)$ el complejo aumentado del complejo de cadenas simpliciales $C_\bullet(K; R)$. Denominaremos **p -ésimo módulo de homología reducida** de K al módulo de homología $H_p(\tilde{C}_\bullet; R)$ y lo denotaremos por $\tilde{H}(K; R)$.

Proposición 3.2. Sean K y L dos complejos simpliciales junto con una aplicación simplicial $f : |K| \rightarrow |L|$. Esta aplicación induce un homomorfismo entre los complejos de cadenas, $C(f)$, el cual se define extendiendo linealmente la función

$$C(f)([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [f(v_0) \dots f(v_p)] & \text{si los vértices son distintos entre sí,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, si f es la identidad, entonces $C(f)$ es simplemente la identidad también. Además, si $g : |L| \rightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, se cumple que $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$.

Demostración. Para demostrar esto, primero observamos que la definición de $C(f)$ es independiente de la orientación de los símple. Luego, verificamos la igualdad $\partial_p \circ C(f) = C(f) \circ \partial_p$. Si no hay vértices repetidos, se tiene que:

$$\begin{aligned} C(f) \partial_p([v_0 \dots v_p]) &= C(f) \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i [f(v_0) \dots \widehat{f(v_i)} \dots f(v_p)] = \partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]). \end{aligned}$$

3. Homología simplicial

Si hay vértices repetidos, digamos $f(v_i) = f(v_j)$, entonces $\partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]) = 0$. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i C(f)([v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]) = 0$$

debido a que $C(f)([v_0 \dots \hat{v}_k \dots v_p]) = 0$ para $k \neq i, j$ y cuando $i < j$,

$$(-1)^i [f(v_0) \dots \widehat{f(v_i)} \dots f(v_j) \dots f(v_p)] + (-1)^j [f(v_0) \dots f(v_i) \dots \widehat{f(v_j)} \dots f(v_p)] = 0$$

también se anula. Esto se debe a que si no hay más vértices repetidos, como $f(v_i) = f(v_j)$, el número de trasposiciones necesarias para cambiar de un símplex orientado al otro es $j - i - 1$, dado que $f(v_j)$ ocupa el lugar $j - 1$ en el primer símplex. La fórmula $C(g \circ f) = C(g)C(f)$ se sigue directamente de la definición de $C(f)$. \square

Observación 3.2. El resultado anterior nos garantiza que $C : \mathbf{Csim} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Ch}_\bullet$ es un funtor covariante entre la categoría de complejos simpliciales y la categoría de complejos de cadenas.

Definición 3.5. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial y sea $C(f) : C_\bullet(K; R) \rightarrow C_\bullet(L; R)$ una aplicación de cadenas definida como en la **Proposición 3.2**. Llamaremos a $C(f)$ la **aplicación de cadenas inducida por f** y la notaremos por $f_\#$.

Corolario 3.1. Toda aplicación simplicial inducida $f : |K| \rightarrow |L|$ induce un homomorfismo de R -módulos

$$H_p(f) : H_p(K; R) \rightarrow H_p(L; R)$$

que notaremos por f_* y que cumple que si $g : |L| \rightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\text{id}_* = \text{id}$.

Observación 3.3. La última implicación del corolario se traduce en que tenemos un funtor covariante que va de la categoría de complejos simpliciales con los homeomorfismos simpliciales a la categoría de R -módulos con sus homomorfismos.

Lema 3.3. La aplicación de cadenas $f_\# : C_\bullet(K; R) \rightarrow C_\bullet(L; R)$ preserva el homomorfismo de aumento y como resultado, induce un homomorfismo f_* de módulos de homología reducida.

Demostración. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial, $f_\#$ su aplicación de cadenas inducida y sean $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$, $\varepsilon : C_0(L; R) \rightarrow R$ aumentos de $C_\bullet(K; R)$, $C_\bullet(L; R)$ respectivamente. Llamemos indistintamente ε a ambos aumentos en función del dominio en el que nos encontremos. Ahora definamos $\varepsilon(f_\#(v)) = 1$ y $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice de K y extendamos por linealidad. Por consiguiente $\varepsilon \circ f_\# = \varepsilon$. Esta ecuación implica que $f_\#$ lleva el núcleo de $\varepsilon_K : C_0(K; R) \rightarrow R$ al núcleo de $\varepsilon_L : C_0(L; R) \rightarrow R$, lo que induce un homomorfismo $f_* : \tilde{H}_0(K; R) \rightarrow \tilde{H}_0(L; R)$. \square

Teorema 3.1. Sean f, g aplicaciones simpliciales de K a L ; $f_\#, g_\#$ sus aplicaciones de cadenas inducidas y sea $s : f_\# \rightarrow g_\#$ una homotopía de cadenas entre ellas. Entonces los homomorfismos inducidos f_*, g_* para sus módulos de homología son iguales.

Demostración. Sea z un p -ciclo de K . Entonces

$$g_*(z) - f_*(z) = \partial s z + s \partial z = \partial s z + 0$$

por lo que $f(z)$ y $g(z)$ tienen la misma clase de homología. Por tanto, $f_*([z]) = g_*([z])$ como se quería. \square

3.2. Homología del complejo cono

A continuación, exploraremos un nuevo complejo simplicial que construiremos a partir de otro dado. El complejo cono nos facilitará la obtención de algunos resultados relevantes en homología.

Definición 3.6. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $w \in \mathbb{R}^N$ tal que cada semirrecta con origen w corta a $|K|$ a lo sumo en un punto. Definimos el **cono sobre K con vértice w** como el conjunto cuyos elementos son los símlices de K o símlices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$, donde $[v_0, \dots, v_p] \in K$. Lo denotaremos por $w * K$.

Lema 3.4. El cono $w * K$ es un complejo simplicial.

Demostración. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un símplex de K . Primero veamos que el conjunto $\{w, v_0, \dots, v_p\}$ es afínmente independiente. Si w perteneciera al plano P generado por los puntos v_0, \dots, v_p , podríamos considerar el segmento que une w con un punto de $x \in \text{Int } \sigma$. Dicho conjunto, por ser abierto en P , contendría un intervalo de puntos en el segmento, contradiciendo la hipótesis de que las semirrectas que parten de w cortan a $|K|$ a lo sumo en un punto.

Veamos ahora que $w * K$ es un complejo simplicial. Los símlices de $w * K$ pueden ser de tres tipos:

1. Símlices $[v_0, \dots, v_p]$ pertenecientes a K .
2. Símlices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$.
3. El 0-símplex $[w]$.

Si σ, τ son símlices del primer tipo, entonces $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ puesto que K es un complejo simplicial. El símplex $\text{Int}[w, v_0, \dots, v_p]$ es la unión de todos los segmentos abiertos que unen w con v_0, \dots, v_p , luego dos símlices de esta forma tienen intersección vacía pues las semirrectas que parten de w cortan a K a lo sumo en un punto. Finalmente, si σ es del primer tipo y τ del segundo, $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ por el mismo argumento recién dado. \square

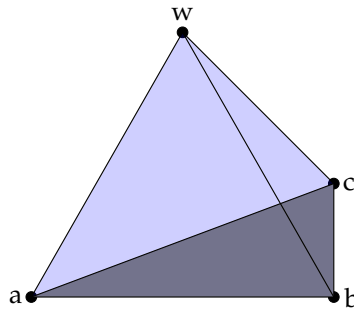


Figura 3.1.: Cono sobre el complejo formado por el 2-símplex $[a, b, c]$ y todas sus caras con vértice w .

Proposición 3.3. Sea K un complejo simplicial y sea $w * K$ el cono sobre K de vértice w . Entonces la homología orientada de $w * K$ es $H_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \neq 0$ y $H_0(w * K; R) \cong R$. En el caso de la homología reducida, $\tilde{H}_0(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

3. Homología simplicial

Demostración. Sea $D_\bullet = \{D_p, \partial_p\}$ un complejo de cadenas tal que $D_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $D_0 = R$. Definimos la aplicación de cadenas $f : D_\bullet \rightarrow C_\bullet(w * K; R)$ de forma que $f_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $f_0(r) = rw$. Por otro lado, por la **Proposición 3.1** podemos definir el aumento $\varepsilon : C_\bullet(w * K; R) \rightarrow D_\bullet$ dado por $\varepsilon_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $\varepsilon_0(v) = 1$ para todo vértice v del cono. Nuestro objetivo es ver que efectivamente f es una equivalencia de cadenas junto a ε . De manera directa tenemos que $\varepsilon \circ f = \text{id}_D$, luego $\varepsilon \circ f \simeq \text{id}_D$. Veamos ahora que $f \circ \varepsilon$ es homotópica a la identidad. Para ello vamos a definir s como la familia $\{s_p\}$ de homomorfismos $s_p : C_p(w * K; R) \rightarrow C_{p+1}(w * K; R)$ tal que

$$s_p([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [wv_0 \dots v_p] & \text{si } v_i \neq w \quad 0 \leq i \leq p, \quad p \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

induce una extensión lineal. Dicha familia está bien definida para $C_p(w * K; R)$. Veamos que $\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p = \text{id}_{C_p(w * K; R)} - f_p\varepsilon_p$ se cumple, por lo que s es una homotopía de cadenas. Para el caso en que $p \in \mathbb{Z}$ es menor que 0 se cumple de manera trivial. Si $p = 0$ distinguimos dos casos. Cuando $v \neq w$ tenemos que $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = \partial_1[w, v] = v - w = (\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v)$. Por el contrario si $v = w$, $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = 0$ y también $(\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v) = \text{id}_0(w) - (f_0 \varepsilon_0)(w) = w - w = 0$. Por último, veamos que sucede cuando $p > 0$. Supongamos primero que $w \neq v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= \partial_{p+1}[wv_0 \dots v_p] + s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= [v_0 \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^i [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \\ &= [v_0 \dots v_p] = (\text{id}_{C_p} - f_p \varepsilon_p)[v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Finalmente si $w = v_{i_0}$ para algún i_0 entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= s_{p-1}\partial_p[v_0 \dots v_p] = s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= (-1)^{i_0} s_{p-1}[v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = (-1)^{i_0} [wv_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] \\ &= (-1)^{i_0} [v_{i_0} v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = [v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Es decir, $f \circ \varepsilon \simeq \text{id}_{C(w * K; R)}$ y por el **Corolario 1.2** induce un isomorfismo $\varepsilon_* : H_p(w * K; R) \rightarrow H_p(D; R)$.

Para el caso reducido consideremos el complejo aumentado D_\bullet dado por el aumento $\text{id}_R : D_0 \rightarrow R$. Como consecuencia, la homología de \tilde{D} es trivial. Además, podemos extender los homomorfismos ε y f a homomorfismos $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} para los complejos aumentados de forma que $\tilde{\varepsilon}_{-1} = \tilde{f}_{-1} = \text{id}_R$. Por la misma homotopía s obtenemos que $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} son equivalencias homotópicas entre los complejos aumentados y por tanto, $\tilde{H}_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. \square

Corolario 3.2. *La homología simplicial reducida de cualquier símplice es nula.*

Corolario 3.3. *Sea σ un n -símplice y sea $\text{Bd } \sigma$ su borde. Entonces $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ es trivial si $p = n - 1$ y $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) \cong R$. Además, para el caso no trivial, un generador es la clase de la*

cadena $\partial(\sigma)$.

Demostración. Dado el símple anterior, los complejos de cadenas aumentados de σ y su borde coinciden hasta dimensión $p \leq n-1$. Por el **Corolario 3.2** deducimos que $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \leq n-2$. Además, $C_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \geq n$. Por lo tanto, $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) = \ker \partial_{n-1}$. Aquí, ∂_{n-1} representa el operador borde en ambos complejos aumentados (es decir, $\partial_0 = \varepsilon$ indica el aumento). Dado que el complejo aumentado de σ tiene homología trivial, entonces $\ker \partial_{n-1} = \text{Im } \partial_n$, y además ∂_n es inyectivo donde el operador borde $\partial_n : C_n(\sigma; R) \rightarrow C_{n-1}(\sigma; R) = C_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$ aparece en el complejo de σ . Puesto que $C_n(\sigma; R)$ es isomorfo a R generado por σ , se sigue que $\text{Im } \partial_n$, y por tanto $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$, es isomorfo a R generado por $\partial(\sigma)$. \square

3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

Nombrada en honor a los matemáticos austriacos Walther Mayer y Leopold Vietoris, la sucesión de Mayer-Vietoris es una herramienta esencial en la topología algebraica y la teoría de homología. Esta sucesión permite analizar la homología de un complejo simplicial a partir de la homología de sus subcomplejos, de manera análoga a como el teorema de Seifert-van Kampen describe el grupo fundamental de un espacio topológico a partir de subespacios abiertos y conexos por caminos.

Lema 3.5 (Lema de la serpiente). Sean $A_\bullet = \{A_n, \partial_A\}$, $B_\bullet = \{B_n, \partial_B\}$ y $C_\bullet = \{C_n, \partial_C\}$ complejos de cadenas y sean f, g aplicaciones de cadenas tales que la sucesión

$$0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$$

es exacta. Existe entonces una sucesión exacta de homología

$$\cdots \rightarrow H_p(A_\bullet; R) \xrightarrow{f_*} H_p(B_\bullet; R) \xrightarrow{g_*} H_p(C_\bullet; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A_\bullet; R) \xrightarrow{f_*} H_{p-1}(B_\bullet; R) \rightarrow \cdots$$

donde ∂_* es el operador borde inducido en B_\bullet que llamaremos **operador conector**.

Demostración. Para realizar esta prueba usaremos una persecución de diagramas. Usaremos el siguiente diagrama como guía:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{f} & B_{p+1} & \xrightarrow{g} & C_{p+1} \longrightarrow 0 \\ & & \partial_A \downarrow & & \partial_B \downarrow & & \partial_C \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{f} & B_p & \xrightarrow{g} & C_p \longrightarrow 0 \\ & & \partial_A \downarrow & & \partial_B \downarrow & & \partial_C \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{f} & B_{p-1} & \xrightarrow{g} & C_{p-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Paso 1. Para definir el operador conector ∂_* , primero tenemos que comprobar que si tenemos un ciclo de C_p , entonces podemos asignarle un único ciclo en A_{p-1} . Por tanto, sea c_p un ciclo de C_p (esto es, $c_p \in \ker \partial_C$) y escojamos $b_p \in B_p$ tal que $g(b_p) = c_p$ (recordemos que g es sobreyectiva por ser la sucesión exacta corta). El elemento $\partial_B b_p$ de B_{p-1} pertenece al

3. Homología simplicial

núcleo de g pues $g(\partial_B b_p) = \partial_C g(b_p) = \partial_C c_p = 0$. Por tanto, existe un elemento $a_{p-1} \in A_{p-1}$ tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$, pues $\ker g = \text{Im } f$. Tenemos que dicho elemento es único por ser f inyectiva. Además, a_{p-1} es un ciclo. Como $f(\partial_A a_{p-1}) = \partial_B f(a_{p-1}) = \partial_B \partial_B b_p = 0$, entonces $\partial_A a_{p-1} = 0$ por ser f inyectiva. Definimos $\partial_*[c_p] = [a_{p-1}]$ donde los corchetes denotan la clase de homología.

Paso 2. Queremos probar ahora que ∂_* es un homomorfismo de módulos bien definido. Sean c_p, c'_p dos elementos del núcleo de $\partial_C : C_p \rightarrow C_{p-1}$. Sean b_p, b'_p elementos de B_p tal que $g(b_p) = c_p$ y $g(b'_p) = c'_p$. Escojamos ahora a_{p-1} y a'_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ y $f(a'_{p-1}) = \partial_B b'_p$.

Para probar que ∂_* está bien definido, veamos que no depende del b_p y c_p escogido. Supongamos que $c_p \sim c'_p$ y veamos entonces que a_{p-1} y a'_{p-1} también lo son. Por tanto, supongamos que $c_p - c'_p = \partial_C c_{p+1}$. Escojamos b_{p+1} tal que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Esto implica que

$$f(b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C g(b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C c_{p+1} = 0$$

En consecuencia, podemos tomar a_p tal que $f(a_p) = b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}$ luego

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B(b_p - b'_p) - 0 = f(a_{p-1} - a'_{p-1})$$

Por ser f inyectiva, $\partial_A a_p = a_{p-1} - a'_{p-1}$, como buscábamos.

Ya sabemos que ∂_* está bien definido, veamos que es un homomorfismo de módulos. Para ello basta fijarnos en que $g(b_p + b'_p) = c_p + c'_p$ y que $f(a_{p-1} + a'_{p-1}) = \partial_B(b_p + b'_p)$. Por tanto $\partial_*[c_p + c'_p] = [a_{p-1} + a'_{p-1}]$ por definición y en consecuencia, $\partial_*[c_p + c'_p] = \partial_*[c_p] + \partial_*[c'_p]$. Ahora si $\lambda \in R$, de manera análoga obtenemos que $\lambda \partial_*[b_p] = \lambda[c_p] = [\lambda c_p] = \partial_*[\lambda b_p]$.

Paso 3. Probaremos la exactitud de $H_p(B_\bullet; R)$ por doble inclusión. Como $g \circ f = 0$ tenemos que $g_* \circ f_* = 0$. Esto implica que si $\gamma \in \text{Im } f_*$, entonces $g_*(\gamma) = 0$.

Para probar la otra inclusión, consideremos $\gamma = [b_p]$ y supongamos que $g_*(\gamma) = 0$. Entonces $g(b_p) = \partial_C c_{p+1}$ para algún $c_{p+1} \in C_p$. Escojamos b_{p+1} de manera que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Entonces

$$g(b_p - \partial_B b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C g(b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C c_{p+1} = 0$$

luego $b_p - \partial_B b_{p+1} = f(a_p)$ para algún a_p . Ahora, a_p es un ciclo pues

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B(b_p - \partial_B b_{p+1}) = 0$$

y f es inyectiva. Es más, $f_*[a_p] = [f(a_p)] = [b_p - \partial_B b_{p+1}] = [b_p]$ y por tanto $[b_p] \in \text{Im } f_*$ como queríamos.

Paso 4. Probemos la exactitud en $H_p(C_\bullet; R)$. Sea $\alpha = [c_p]$ un elemento de $H_p(C_\bullet; R)$. Escojamos b_p tal que $g(b_p) = c_p$ y ahora tomemos a_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial_*\alpha = [a_{p-1}]$ por definición.

Procederemos de nuevo por doble inclusión. Consideremos primero que $\alpha \in \text{Im } g_*$. Entonces $\alpha = [g(b_p)]$ donde b_p es un ciclo en B . Esto implica que $f(a_{p-1}) = 0$ de donde $a_{p-1} = 0$ y por tanto $\partial_*\alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\partial_*\alpha = 0$. Entonces $a_{p-1} = \partial_A a_p$ para algún a_p . Deducimos entonces que $b_p - f(a_p)$ es un ciclo y que $\alpha = g_*[b_p - f(a_p)]$ luego $\alpha \in \text{Im } g_*$. Realizando los cálculos obtenemos que

$$\partial_B(b_p - f(a_p)) = \partial_B(b_p) - \partial_B(f(a_p)) = \partial_B(b_p) - f(a_{p-1}) = 0$$

$$g_*[b_p - f(a_p)] = [g(b_p) - 0] = [c_p] = \alpha$$

Paso 5. Finalmente obtengamos la exactitud para $H_{p-1}(A_\bullet; R)$. Si $\beta \in \text{Im } \partial_*$, entonces $\beta = [a_{p-1}]$ donde $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p por definición. En consecuencia,

$$f_*(\beta) = [f(a_{p-1})] = [\partial_B b_p] = 0$$

Consideremos ahora el caso donde $f_*(\beta) = 0$. Sea $\beta = [a_{p-1}]$. Entonces $[f(a_{p-1})] = 0$ por lo que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p . Definimos $c_p = g(b_p)$. En consecuencia, c_p es un ciclo ya que $\partial_C c_p = g(\partial_B b_p) = g(f(a_{p-1})) = 0$ y $\beta = \partial_*[c_p]$ por definición. Esto es, $\beta \in \text{Im } \partial_*$. \square

Definición 3.7. En las condiciones del anterior lema, llamaremos a la sucesión obtenida **sucesión exacta larga de homología**.

Una consecuencia importante del resultado anterior es su naturalidad, un concepto de gran interés en teoría de categorías.

Teorema 3.2. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{f} & B_\bullet & \xrightarrow{g} & C_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \xrightarrow{f'} & B'_\bullet & \xrightarrow{g'} & C'_\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las sucesiones horizontales son sucesiones exactas de complejos de cadenas. Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A_\bullet; R) & \longrightarrow & \\ & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \longrightarrow & H_p(A'_\bullet; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(B'_\bullet; R) & \xrightarrow{g'_*} & H_p(C'_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(A'_\bullet; R) & \longrightarrow & . \end{array}$$

es conmutativo, siendo α, β, γ aplicaciones de cadenas.

Demostración. Es claro que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) \\ \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ H_p(A'_\bullet; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(B'_\bullet; R) & \xrightarrow{g'_*} & H_p(C'_\bullet; R) \end{array}$$

es conmutativo, pues los homomorfismos inducidos de las aplicaciones de cadenas conservan la conmutatividad. Por tanto, basta estudiar la conmutatividad en

$$\begin{array}{ccc} H_p(C_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A_\bullet; R) \\ \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* \\ H_p(C'_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(A'_\bullet; R) . \end{array}$$

3. Homología simplicial

Sea $[a] \in H_p(A_\bullet; R)$ y tomemos b_p de manera que $g(b_p) = c_p$. Además tomemos $a_{p-1} \in A_p$ de forma que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial'_*[c_p] = [a_{p-1}]$ por definición. Consideremos ahora $c'_p = \gamma(c_p)$. Nuestro objetivo es ver que $\partial'_*[c'_p] = \alpha_*[a_{p-1}]$. Está claro que $\beta(b_p)$ es preimagen de c_p por g' , pues $g'\beta(b_p) = \gamma g(b_p) = \gamma(c_p) = c'_p$. Así mismo, $\alpha(c_{p-1})$ lo es de $\partial'_D \beta(b_p)$, pues $f'\alpha(a_{p-1}) = \beta f(a_{p-1}) = \beta(\partial_B b_p) = \partial'_D \beta(b_p)$. Esto es, $\partial'_*[c_p] = [\alpha(a_{p-1})]$ por definición. \square

Proposición 3.4 (Sucesión de Mayer-Vietoris). *Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 sub-complejos de K tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_p(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R) \xrightarrow{g} H_p(K; R) \rightarrow H_{p-1}(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow \cdots$$

tal que $f(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c))$, $g(d, e) = j_{1\#}(d) + j_{2\#}(e)$ donde $i_t : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_t$ y $j_t : K_t \rightarrow K_1 \cup K_2$ para $t \in \{1, 2\}$ son las respectivas inclusiones.

Demostración. La demostración consiste en construir la sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \rightarrow C_\bullet(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R) \xrightarrow{g} C_\bullet(K; R) \rightarrow 0$$

y aplicar el **Lema de la serpiente**.

Para ello comencemos describiendo el complejo de cadenas $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$. Recordemos que la suma directa de un complejo de cadenas se definía como la suma directa de los R -módulos de dimensión p $C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R)$, cuyo operador borde $\partial'(d, e) = (\partial_1 d, \partial_2 e)$ donde ∂_1, ∂_2 corresponden a los operadores borde de K_1 y K_2 respectivamente.

Para comprobar la exactitud de la sucesión, comencemos estudiando la exactitud en los extremos de ésta. Es claro que f es inyectiva por ser una inclusión. En cuanto a la sobreyectividad de g , tomemos $d \in C_p(K; R)$ donde d sea la suma de símlices orientados. Notemos por d_1 a los elementos de dicha suma provenientes de K_1 . Entonces $d - d_1 \in K_2$ y $g(d_1, d - d_1) = d$.

Para estudiar la exactitud en $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$, consideremos la inclusión $k : K_1 \cap K_2 \rightarrow K$ y la respectiva inclusión de cadenas inducida $k_\# : C_\bullet(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow C_\bullet(K; R)$. Nótese que $g(f(c)) = k_\#(c) - k_\#(c) = 0$. Sea ahora $g(d, e) = 0$, entonces $d = -e$ si las consideramos como cadenas de K . Como d proviene de K_1 y e de K_2 , ambas deben de provenir de $K_1 \cap K_2$ y en consecuencia, $(d, e) = (d, -d) = f(d)$, como queríamos.

La homología de $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$ de dimensión p , que notaremos por $H_p(K_1 \oplus K_2; R)$, es entonces

$$H_p(K_1 \oplus K_2; R) \cong H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R)$$

por la **Proposición 1.5**. Finalmente aplicamos el **Lema de la serpiente** y en consecuencia tenemos la sucesión deseada.

Para obtener la sucesión de Mayer-Vietoris de homología reducida, reemplazaremos los complejos de cadenas anteriores por sus correspondientes complejos de cadenas aumentados. Consideremos para ello el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(K_1 \cap K_2; R) & \longrightarrow & C_0(K_1; R) \oplus C_0(K_2; R) & \longrightarrow & C_0(K; R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{K_1 \cap K_2} & & \downarrow \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \oplus R & \xrightarrow{\tilde{g}} & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

La conmutatividad y la exactitud se mantienen en la parte inferior del diagrama si definimos $\tilde{f}(r) = (r, r)$ y $\tilde{g}(r', r) = r' + r$. Las aplicaciones $\varepsilon_{K_1 \cap K_2}, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ y ε son sobreyectivas pues la intersección de K_1 y K_2 es no vacía. De este modo, la homología de sus respectivos complejos de cadenas es nula en dimensión -1 y en dimensión 0 es igual a la de sus respectivos módulos de homología reducida $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2; R)$, $\tilde{H}_0(K_1; R) \oplus \tilde{H}_0(K_2; R)$ y $\tilde{H}_0(K; R)$. Para finalizar, aplicamos de nuevo el **Lema de la serpiente**. \square

Bibliografía

- [DF04] David Steven Dummit y Richard M Foote. *Abstract algebra*, volumen 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [EM45] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.
- [Lee10] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volumen 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Mun18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.
- [RA03] A.Q.T.A.Q.E.D. Rafael Ayala. *Elementos de la teoría de homología clásica*. Serie Ciencias / Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla, 2003.
- [Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:213–245, 1949.