



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024



Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

**Responsable de
tutorización**

Miguel Ortega Titos
Departamento de Geometría y Topología

Julián Luengo Martín
*Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial*

Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías
Informática y de
Telecomunicación

Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 27 de abril de 2024

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Fundamento teórico	1
1. Fundamentos del álgebra homológica	3
1.1. Módulos	3
1.2. Sucesiones exactas	7
1.3. Categorías y funtores	8
1.4. Módulos diferenciales	9
1.5. Complejos de cadenas	11
1.6. Subcomplejos y complejos cociente	13
2. Simples y complejos simpliciales	17
2.1. Simples	17
2.2. Complejos simpliciales	19
2.3. Celdas y complejos celulares	21
2.4. Aplicaciones simpliciales	24
2.5. Complejos simpliciales abstractos	25
2.6. Variedades y triangulaciones	26
3. Homología simplicial	29
3.1. Homología simplicial orientada	29
3.2. Homología del complejo cono	33
3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris	35
4. Homología persistente	41
4.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips	41
4.2. Módulos de homología persistente	41
4.3. Representación de la homología persistente	43
Bibliografía	51

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Fundamento teórico

1. Fundamentos del álgebra homológica

La teoría de homología es una rama de la topología que trata de resolver problemas topológicos en el ámbito del álgebra. Por este motivo es importante conocer muy bien algunas herramientas algebraicas que iremos utilizando con frecuencia. En todo el capítulo usaremos como referencia principal [Mac12].

1.1. Módulos

La estructura de módulo surge con la idea de generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo a un anillo. Nuestro interés en ellos radica en que la teoría de homología se construye sobre módulos y por ello es necesario hacer una introducción al campo. Esta sección recoge algunas definiciones y resultados de interés vistos en la asignatura de Álgebra Moderna y complementada con los contenidos de [DFo4].

Definición 1.1. Sea R un anillo con elemento identidad $1 \neq 0$. Un R -módulo izquierdo A es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times A \rightarrow A$ con $(r, a) \rightarrow ra$ tal que dados $r, r' \in R, a, a' \in A$ se tiene

1. $(r + r')a = ra + r'a,$
2. $(rr')a = r(r'a),$
3. $r(a + a') = ra + ra',$
4. $1a = a.$

De la definición anterior se sigue que $0a = 0$ y $(-1)a = -a$.

De manera análoga, definimos R -módulo derecho donde el anillo actúa por la derecha en vez de por la izquierda de forma que $p : A \times R \rightarrow A$. Si R es un anillo conmutativo, los R -módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R -módulos. Como los resultados de R -módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos con los R -módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R -módulos o módulos a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. El interés de los R -módulos subyace en la cantidad de estructuras conocidas que engloba. Si por ejemplo consideramos el K -módulo donde K es un cuerpo, éste adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Ahora sea A un \mathbb{Z} -módulo. Definimos el producto p de forma que para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ con $n > 0$, $na = a + a + \dots + a$ (n veces), $0a = 0$ y $(-n)a = -(na)$. Entonces A ha de tener estructura de **grupo abeliano**. En particular, si R es un anillo entonces es también un R -módulo.

Definición 1.2. Sea A un R -módulo izquierdo y S un subconjunto de A . Diremos que S es un **submódulo** de A , esto es, $S \subset A$, si S es cerrado respecto a la suma y si $r \in R, s \in S$ entonces $rs \in S$.

De la definición anterior se deduce que S es un R -módulo.

1. Fundamentos del álgebra homológica

Definición 1.3. Sea R un R -módulo. Si un submódulo de R es un subconjunto $L \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $rL = \{rl : l \in L\} \subset L$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal** de R .

Tomando un ideal izquierdo L de R y un R -módulo izquierdo A , definimos el producto del ideal L por el módulo A

$$LA = \left\{ \sum_{i=0}^n l_i a_i : l_i \in L, a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde LA es un submódulo de A . En particular, el producto de dos ideales izquierdos LL' es también un ideal izquierdo y $(LL')A = L(L'A)$.

Definición 1.4. Sea A un R -módulo. Definimos el **anulador de** A como el submódulo $\text{Ann}(A) = \{r \in R : ra = 0 \forall a \in A\}$. De manera análoga, llamaremos **anulador de** $a \in A$ al submódulo $\text{Ann}(a) = \{r \in R : ra = 0\}$.

Definición 1.5. Sea A un R -módulo y sea $a \in A$. El conjunto $Ra = \{r \cdot a : r \in R\}$ es un submódulo de A que denominaremos **submódulo cíclico generado por** a .

Definición 1.6. Sea A un R -módulo y sean $a_1, \dots, a_n \in A$. Entonces $Ra_1 + \dots + Ra_n = \{r \cdot a_1 + \dots + r \cdot a_n : r \in R\}$ es un submódulo de A que llamaremos **submódulo generado por** a_1, \dots, a_n .

Definición 1.7. Sea M un R -módulo. Un submódulo N de M es **finitamente generado** si existe un subconjunto finito $A \subset M$ tal que $N = RA$.

Definición 1.8. Sean A, B R -módulos. Definimos el **homomorfismo de R -módulos** de A a B como la aplicación $\alpha : A \rightarrow B$ tal que

1. $\alpha(a + a') = \alpha(a) + \alpha(a')$,
2. $\alpha(ra) = r\alpha(a)$

para todo $a, a' \in A, r \in R$.

Cuando $\alpha : A \rightarrow B$ sea un homomorfismo de R -módulos, diremos que A es el **dominio** y B el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\text{Im}(\alpha) = \{\alpha(a) : a \in A\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{a \in A : \alpha(a) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando α sea sobreyectiva, un **monomorfismo** cuando α sea inyectiva y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre A y B diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\alpha : A \rightarrow A$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dado que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de R -módulos coincide con el de los grupos abelianos subyacentes, la siguiente caracterización es inmediata de la ya conocida para grupos:

Proposición 1.1. Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces

1. α es un monomorfismo si, y sólo si, $\ker(\alpha) = 0$.
2. α es un epimorfismo si, y sólo si, $\text{Im}(\alpha) = B$.

Es frecuente escribir el homomorfismo de R -módulos $\alpha : A \rightarrow B$ como $A \xrightarrow{\alpha} B$. Respecto a la notación de la imagen de un elemento $a \in A$ por α , pondremos $\alpha(a)$ o simplemente αa . En cuanto a la imagen de A por α , lo representaremos de manera análoga por $\alpha(A)$ o αA .

Dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha_1, \alpha_2 : A \rightarrow B$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$ para todo $a \in A$. Además, dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha : A \rightarrow B$, $\beta : B \rightarrow C$, su **composición** $\beta \circ \alpha : A \rightarrow C$ es también un homomorfismo de R -módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β . En ocasiones usaremos la notación por yuxtaposición $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : A \rightarrow B$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_A$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_B$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : B \rightarrow A$ tal que $\gamma \circ \alpha = \text{id}_A$. De manera análoga, el homomorfismo $\theta : B \rightarrow A$ es **inversa derecha** de α si $\alpha \circ \theta = \text{id}_B$.

Si $T \subseteq B$, el conjunto $\alpha^{-1}T = \{s \in A : \alpha(s) \in T\}$ es un submódulo de A , llamado la **imagen inversa** (completa) de T . En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de B que consiste solo del elemento cero.

Sea $T \subseteq B$ donde B es un R -módulo, llamaremos **inclusión** o **inyección canónica** al homomorfismo $i : T \rightarrow B$ tal que $i(t) = t$ para todo $t \in T$. En particular, i es un monomorfismo. Las **clases laterales** de T en B son los conjuntos $b + T = \{b + t : t \in T\}$ donde $b \in B$. Dos clases laterales $b_1 + T$, $b_2 + T$ son iguales si $b_1 - b_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano B/T se convierte en un R -módulo cuando $r(b + T) = rb + T$ para todo $r \in R$. A este R -módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de B sobre T . El homomorfismo $\pi : B \rightarrow B/T$ tal que $\pi(b) = b + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de B .

Proposición 1.2 (Teorema de factorización). *Sea $\beta : B \rightarrow B'$ un homomorfismo de módulos con $T \subset \ker \beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : B/T \rightarrow B'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/T \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & B' \end{array}$$

es conmutativo. Al homomorfismo β' lo llamaremos **homomorfismo inducido** por β .

Teorema 1.1 (Primer teorema de isomorfía). *Sea $\beta : B \rightarrow B'$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces*

$$\frac{B}{\ker \beta} \cong \text{Im } \beta$$

Definición 1.9. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos el **producto directo** o **producto directo externo** de $\{A_i\}_{i \in I}$ como el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in A_i\}$$

donde las operaciones se definen componente a componente:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} &= (x_i + y_i)_{i \in I} \\ r(x_i)_{i \in I} &= (rx_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $x_i, y_i \in A_i$, $i \in I$.

1. Fundamentos del álgebra homológica

Definición 1.10. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos la **suma directa** o **suma directa interna** de $\{A_i\}_{i \in I}$ como el submódulo de $\prod_{i \in I} A_i$ tal que

$$\bigoplus_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i = 0 \text{ p.c.t. } i \in I\}$$

Nota. Recordemos que una condición se cumple "para casi todo" (p.c.t.) elemento de un conjunto si se cumple para todo elemento en él salvo en un subconjunto finito de elementos.

Definición 1.11. Sea B un conjunto y sea $R\langle B \rangle$ el R -módulo tal que $R\langle B \rangle = \bigoplus_{b \in B} R_b$ donde $R_b = R$ para todo $b \in B$. Llamaremos a dicho R -módulo el **R -módulo libre de base B** . De esta forma cada $x \in R\langle B \rangle$ se representa por $x = \sum_{b \in B} \lambda_b \cdot b$ donde $\lambda_b \in R$ son coeficientes no nulos en un número finito de posiciones b .

Definición 1.12. Sea M un R -módulo libre. Si para toda base B de M , B tiene la misma cardinalidad, entonces decimos que M tiene **rango** $\text{rg } M = |B|$, donde B es alguna base de M .

Definición 1.13. Sea x un elemento de un R -módulo. Decimos que x es un **elemento de torsión** si existe un $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $rx = 0$. Por otro lado, x es un **elemento sin torsión** si el único elemento $r \in R$ que satisface $rx = 0$ es $r = 0$. Un R -módulo se clasifica como **módulo de torsión** si cada uno de sus elementos es un elemento de torsión. Recíprocamente, un **módulo sin torsión** es aquel cuyos elementos no nulos son elementos sin torsión.

Definición 1.14. Definimos el **submódulo de torsión** de un R -módulo M como el conjunto $\text{Tor}(M) = \{x \in M : \text{Ann}(x) \neq \{0\}\}$. Es decir, el conjunto de todos los elementos de torsión de M .

Teorema 1.2 (Descomposición cíclica primaria). *Sea R un DIP y sea M un R -módulo finitamente generado. Entonces M se descompone como la suma directa*

$$M \cong R^f \oplus \bigoplus_{i=1}^k \frac{R}{\langle a_i \rangle}$$

donde R^f es un módulo libre de rango f y $R/\langle a_1 \rangle, \dots, R/\langle a_k \rangle$ son módulos cíclicos con anuladores $\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_k \rangle$. Además, f y los ideales $\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_k \rangle$ de R generados por $a_1, \dots, a_k \in R$ están determinados de manera única salvo el orden por M .

Teorema 1.3 (Propiedad universal de los módulos libres). *Sean B un conjunto, M un R -módulo y $\varphi : B \rightarrow M$ una aplicación entre conjuntos. Entonces existe un único homomorfismo de R -módulos $\phi : R\langle B \rangle \rightarrow M$ de forma que $\phi(b) = \varphi(b)$ para todo $b \in B$. Es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow i & \searrow \phi & \\ R\langle B \rangle & & \end{array}$$

conmuta.

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.15. Sea $\{A_i, \alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una familia de R -módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** cuando $\text{Im } \alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$.

Definición 1.16. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la **sucesión exacta** es **corta** si

$$(\sigma, \gamma) : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0.$$

Es decir, una sucesión exacta de cinco R -módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

Proposición 1.3. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Entonces

1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B$ es exacta (en A) si, y sólo si, σ es inyectiva.
2. La sucesión $B \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} 0$ es exacta (en C) si, y sólo si, γ es sobreyectiva.

Demostración. El único homomorfismo que cumple $0 \rightarrow A$ tiene imagen 0 en A y por tanto, el núcleo de σ será este si, y sólo si, σ es inyectiva. De manera similar, el único homomorfismo $C \rightarrow 0$ es el homomorfismo nulo para todo elemento de C , que es la imagen de γ si, y sólo si, γ es sobreyectiva. \square

Corolario 1.1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, σ es inyectiva, γ es sobreyectiva y $\text{Im } \sigma = \ker \gamma$.

Como acabamos de probar, la exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker \gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la sucesión exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B . Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \rightarrow \sigma A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \rightarrow C$; juntos estos proveen un isomorfismo de sucesiones exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\gamma} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sigma' & & \parallel & & \downarrow (\gamma')^{-1} \\ 0 & \longrightarrow & \sigma A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & B/\sigma A \longrightarrow 0. \end{array}$$

En resumen, una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Ejemplo 1.2. Respecto al **Teorema de factorización**, la inclusión i y la proyección π producen una sucesión exacta corta.

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/T \rightarrow 0.$$

1.3. Categorías y funtores

La teoría de categorías fue introducida por primera vez por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en [EM45]. En particular, las categorías son estructuras algebraicas que capturan la noción de composición. Gracias a ellas podemos analizar y comparar estructuras algebraicas, permitiendo sacar conclusiones comunes y trasladar problemas complejos a otros espacios donde resolverlos es más sencillo. En esta sección haré una breve introducción de las categorías apoyándome en [ML13].

Definición 1.17. Una **categoría** \mathcal{C} es una tripleta $(\mathcal{O}, \text{hom}, \circ)$ formada por

1. Una clase \mathcal{O} , cuyos elementos denominamos **objetos** de \mathcal{C} y notamos por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de \mathcal{C} , un conjunto $\text{hom}(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B . Si $f \in \text{hom}(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ y a cada morfismo $g : B \rightarrow C$ un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$ que satisface
 - **Asociatividad.** Si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ son morfismos de \mathcal{C} , entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - **Identidad.** A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $\text{id}_B : B \rightarrow B$ tal que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ entonces $g \circ \text{id}_B = g$ y $\text{id}_A \circ f = f$.

Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g .

Ejemplo 1.3. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de espacios topológicos Top**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$.
- **La categoría de grupos Grp**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de conjuntos Set**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.
- **La categoría de sucesiones exactas de R -módulos de longitud n .** Los objetos son dichas sucesiones $S : A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n$. Para dos sucesiones S y S' , los morfismos son de la forma $\Gamma : S \rightarrow S'$ tal que $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es una tupla donde los $\gamma_i : A_i \rightarrow A'_i$ son homomorfismos de R -módulos tal que

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A_n \\
 \gamma_1 \downarrow & & \gamma_2 \downarrow & & & & \gamma_{n-1} \downarrow & & \gamma_n \downarrow \\
 A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A'_n
 \end{array}$$

conmuta para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 1.18. Sea $f \in \text{hom}(A, B)$ un morfismo en la categoría \mathcal{C} . Diremos que f es una **equivalencia** en \mathcal{C} si existe en \mathcal{C} otro morfismo $g \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ g = \text{id}_B$.

Nótese que si $f \in \text{hom}(A, B)$ es una equivalencia en \mathcal{C} , $g \in \text{hom}(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g' \circ f = \text{id}_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ \text{id}_B = g'$.

Dentro de la teoría de categorías los funtores tienen un papel principal, pues nos va a permitir llevar objetos y morfismos de una categoría a otra preservando identidades y composiciones.

Definición 1.19. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías. Un **functor covariante** de \mathcal{C} a \mathcal{D} es una pareja de funciones denotadas por la misma letra T tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.
2. Una **función de morfismos** que asigna a cada morfismo $\gamma : C \rightarrow C'$ de \mathcal{C} un morfismo $T(\gamma) : T(C) \rightarrow T(C')$ de \mathcal{D} . Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = \text{id}_{T(C)}, \quad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \quad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

Es decir, un functor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de \mathcal{C} en \mathcal{D} .

Mediante el uso de estructuras algebraicas como módulos y complejos de cadenas, la homología asigna a cada espacio topológico una serie de grupos de homología, que reflejan características clave como agujeros y vacíos en diferentes dimensiones. Estos grupos permiten no sólo discernir la estructura interna de los espacios, sino también compararlos de manera abstracta. Usaremos de referencia [Mac12].

1.4. Módulos diferenciales

Comenzaremos definiendo lo que es un módulo de homología y estableceremos la terminología que emplearemos cuando trabajemos con ellos.

Definición 1.20. Sea C un R -módulo junto a un endomorfismo $d : C \rightarrow C$ tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Diremos entonces que C es un **módulo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C .

Llamaremos a los elementos de C **cadenas**. El subgrupo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el subgrupo de **bordes** $B(C) = \text{Im } d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\text{Im } d \subset \ker d$.

Definición 1.21. Sea C un grupo diferencial. Definimos el **R -módulo de homología** de C como el módulo cociente $H(C; R)$ tal que

$$H(C; R) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

1. Fundamentos del álgebra homológica

En particular, cuando C sea un \mathbb{Z} -módulo diferencial, lo llamaremos **grupo diferencial** y notaremos $H(C; \mathbb{Z})$ simplemente por $H(C)$.

Por tanto, el módulo de homología de un módulo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C . A los elementos de $H(C; R)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Definición 1.22. Sean C y C' dos módulos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \rightarrow C'$ es un **homomorfismo de módulos diferenciales** si f es un homomorfismo de módulos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del módulo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$, que sea un ciclo o un borde, y $f : C \rightarrow C'$ es un homomorfismo de módulos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente. En efecto, si $z \in Z(C)$, entonces

$$d'f(z) = f(dz) = f(0) = 0.$$

Esto es, $f(z) \in \ker d'$. Ahora, si $b \in B(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $dc = b$. En consecuencia,

$$d'f(c) = f(dc) = f(b),$$

y por tanto, $f(b) \in \text{im } d'$.

Los grupos diferenciales definen una categoría **DiffGrp** donde los objetos son los grupos diferenciales y los morfismos son los homomorfismos de grupos diferenciales. Tomemos como ley de composición interna la composición de dichos homomorfismos. Claramente es asociativa pues si $C, C', \bar{C}, \tilde{C} \in \text{Obj}()$, y $f : C \rightarrow C', g : C' \rightarrow \bar{C}, h : \bar{C} \rightarrow \tilde{C}$, entonces $h \circ (g \circ f)$ se cumple si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h \circ (g \circ f)) &= (\tilde{d}h) \circ (g \circ f) = (h\tilde{d}) \circ (g \circ f) = h \circ (\tilde{d}g) \circ f \\ &= h \circ (gd') \circ f = h \circ g \circ (d'f) = h \circ g \circ (fd) = (h \circ g) \circ fd \\ &= ((h \circ g) \circ f)d \end{aligned}$$

y por tanto $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. La propiedad de identidad se sigue de existir el homomorfismo identidad de grupos.

Definición 1.23. Sean C, C' módulos diferenciales y $f : C \rightarrow C'$ un homomorfismo de módulos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C; R) \rightarrow H(C'; R)$ tal que

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f .

Proposición 1.4. En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de grupos diferenciales a la categoría de grupos.

Demostración. Por la definición dada del grupo de homología, es claro que la función objeto H asigna a cada grupo diferencial C un grupo de homología $H(C)$. En cuanto a la función de morfismos, la identidad de grupos diferenciales se preserva pues $H(\text{id})([c]) = \text{id}_*([c]) = [\text{id}(c)] = [c]$ para todo $c \in C$. Además, si $f, g \in \text{hom}(C)$, entonces $H(g \circ f)([c]) = (g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = [g(f(c))] = g_*([f(c)]) = g_*(f_*([c])) = (H(g) \circ H(f))([c])$ para todo $c \in C$, manteniendo la ley de composición. \square

1.5. Complejos de cadenas

Definición 1.24. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** C_\bullet de R -módulos es una familia $\{C_n, \partial_n\}$ donde C_n son R -módulos y $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ homomorfismos de R -módulos tales que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nota. Usualmente notaremos directamente ∂ al homomorfismo ∂_n independientemente del valor de n siempre y cuando se sobrentienda por el contexto.

Observación 1.1. La última condición es equivalente a que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo C_\bullet es por tanto una sucesión doblemente infinita

$$C_\bullet : \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow C_{-1} \rightarrow \cdots$$

donde toda composición de homomorfismos de dicha familia es el homomorfismo nulo. La **homología** $H(C_\bullet)$ es la familia de R -módulos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

donde $H_n(C_\bullet)$ es el n -ésimo **módulo de homología** de C_\bullet .

Luego $H_n(C_\bullet) = 0$ implica que la sucesión C_\bullet es exacta en C_n . A los elementos de C_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Un **n-ciclo** o **ciclo de dimensión n** de C_\bullet es un elemento del submódulo $Z_n(C_\bullet) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** o **borde de dimensión n** es un elemento de $B_n(C_\bullet) = \text{Im } \partial_{n+1}$. Si la dimensión se sobrentienda en estos casos, no es necesario indicarla de manera explícita. La clase lateral de un ciclo c la notaremos por $[c] = c + \partial C_{n+1}$. Dos n -ciclos $c, c' \in C_n$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Definición 1.25. Sea $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Su **suma directa** la definimos como el complejo de cadenas $\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i$ cuyos operadores borde vienen dados por $\bigoplus_{i \in I} \partial_n^i : \bigoplus_{i \in I} C_n^i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_{n-1}^i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.5. Sea $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Entonces su homología conmuta con la suma directa, esto es, $H_n(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para demostrar que la homología conmuta con sumas directas, queremos mostrar que para una colección de complejos de cadenas $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$, los homomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i \right) &\rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) : [(c_i)] \mapsto ([c_i]), \\ \psi : \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) &\rightarrow H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i \right) : ([c_i]) \mapsto [(c_i)], \end{aligned}$$

están bien definidos y son inversos mutuos.

En primer lugar, para comprobar que dichas aplicaciones están bien definidas, observemos que $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $[0] = [(c_i - c'_i)]$. Esto ocurre si, y sólo si, existe un $b_i \in C_\bullet^i$ tal que $\partial_i(b_i) = (c_i - c'_i)$, lo cual es equivalente a $c_i + \partial_i(b_i) = c'_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\phi([(c_i)]) = \phi([(c'_i)]) = [(c'_i + \partial_i(b_i))] = [(c'_i)]$. De manera análoga,

1. Fundamentos del álgebra homológica

$[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\psi([(c_i)]) = \psi([(c'_i)])$. Esto implica que tanto ϕ como ψ están bien definidos.

En segundo lugar, es claro que ϕ y ψ son homomorfismos de R -módulos. Además, ϕ lleva la clase de equivalencia $[(c_i)]$ a $[(c_i)]$, mientras que ψ lleva $[(c_i)]$ a $[(c_i)]$, lo que demuestra que son inversos el uno del otro.

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo con ψ como su inverso, estableciendo que $\bigoplus_{i \in I} H_n(C'_i) \cong H_n(\bigoplus_{i \in I} C'_i)$. \square

Definición 1.26. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas** $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una familia de homomorfismos de R -módulos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & C_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & C_{n+1} & \longleftarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n-1} & \searrow & \downarrow f_n & \searrow & \downarrow f_{n+1} & \\ & & C'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & C'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & C'_{n+1} & \longleftarrow \cdots \end{array}$$

Cuando se sobrentienda del contexto, notaremos simplemente por ∂ a los correspondientes ∂_n y ∂'_n .

La función $H_n(f) = f_*$ definida por $f_*([c]) = f_*(c + \partial C_{n+1}) = fc + \partial C'_{n+1}$ es un homomorfismo $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$.

Definición 1.27. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas y $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ dos aplicaciones de cadenas entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 1.4. Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, entonces

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$$

Demostración. Si c es un ciclo de C_n , tenemos que $\partial_n c = 0$. Por la Def. 1.27 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(C'_\bullet)$, como queríamos demostrar. \square

Definición 1.28. Una aplicación de cadenas $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una **equivalencia de cadenas** si existe otra aplicación $h : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ y homotopías $s : h \circ f \rightarrow \text{id}_{C_\bullet}$, $t : f \circ h \rightarrow \text{id}_{C'_\bullet}$ tales que $h \circ f \simeq \text{id}_{C_\bullet}$, $f \circ h \simeq \text{id}_{C'_\bullet}$.

Como $H_n(\text{id}_{C_\bullet}) = \text{id}_{H_n(C_\bullet)}$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 1.2. Si $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.6. Sean $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ y $f', g' : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Sean $s : f \rightarrow g$, $s' : f' \rightarrow g'$ homotopías de cadenas entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces la composición

$$f' s + s' g : f' \circ f \rightarrow g' \circ g \quad g' \circ g : C_\bullet \rightarrow C''_\bullet$$

es una homotopía de cadenas.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadenas tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$\begin{cases} f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g, \\ \partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g. \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades

$$\begin{aligned} f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g, \\ f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - g' \circ g, \\ \partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'g\partial &= f' \circ f - g' \circ g, \end{aligned}$$

donde finalmente queda

$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g.$$

□

1.6. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 1.29. Un **subcomplejo** S_\bullet de C_\bullet es una familia de submódulos $S_n \subset C_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, S_\bullet es un complejo en sí con el operador borde ∂ inducido de C_\bullet y la inclusión $i : S_\bullet \rightarrow C_\bullet$ es una aplicación de cadenas.

Definición 1.30. Sea S_\bullet un subcomplejo de C_\bullet . El **complejo cociente** C_\bullet/S_\bullet es la familia $(C_\bullet/S_\bullet)_n = C_n/S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial'_n : C_n/S_n \rightarrow C_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por ∂_{C_\bullet} .

Definición 1.31. Sean $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. La sucesión de complejos

$$C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$$

es **exacta** en C'_\bullet si $\text{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada sucesión $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ de módulos es exacta en C'_n .

Definición 1.32. Un complejo C_\bullet es **positivo** si $C_n = 0$ para todo $n < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$. Su n -ésimo módulo de homología es entonces positivo ya que $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo $n < 0$. De manera análoga, un complejo C_\bullet es **negativo** si $C_n = 0$ para todo $n > 0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Los complejos negativos suelen notarse con índices superiores positivos donde C_{-n} se sustituye por C^n y $\partial_{-n} : C_{-n} \rightarrow C_{-n-1}$ por $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ quedando así

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \rightarrow \dots, \quad \delta \circ \delta = 0$$

donde el n -ésimo módulo de homología $H^n(C_\bullet) = \ker(\delta^n)/\text{Im}(\delta^{n-1})$ es positivo en los índices superiores. A dicho complejo lo llamaremos **complejo de cocadenas**.

Definición 1.33. Sea C_\bullet un complejo positivo de R -módulos. Denominaremos **aumento de C_\bullet** al homomorfismo sobreyectivo $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ de forma que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

Definición 1.34. Sea C_\bullet un complejo de cadenas positivo, $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ un aumento de C_\bullet y sea $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el complejo positivo \tilde{C}_\bullet tal que $\tilde{C}_n = C_n$ para todo $n \geq 0$, $\tilde{C}_n = 0$ para todo $n < -1$ y $\tilde{C}_{-1} = R$. Consideremos también $\tilde{\partial}_n = \partial_n$ para todo $n \geq 1$ y $\tilde{\partial}_0 = \varepsilon$. Llamaremos a este complejo **complejo aumentado** de C_\bullet .

Definición 1.35. Sea A un módulo. Definimos el siguiente complejo positivo donde $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$. Un **complejo sobre A** es un complejo positivo C_\bullet junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : C_0 \rightarrow A$ tal que $\varepsilon \partial = 0 : C_1 \rightarrow A$.

Definición 1.36. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ es una aplicación de cadenas $f : A \rightarrow C_\bullet$ tal que $\varepsilon f = \text{id}_A$ junto con una homotopía $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow f\varepsilon$ donde $\text{id}_{C_\bullet} \simeq f\varepsilon$. En otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \rightarrow C_0$ y $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$, tal que

$$\varepsilon f = \text{id}_A, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = \text{id}_{C_0}, \quad \partial_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = \text{id}_{C_n} \quad n > 0.$$

Podemos extender el complejo estableciendo $C_{-1} = A$, $\partial_0 = \varepsilon : C_0 \rightarrow C_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Aplicando la Def. 1.36, $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow 0$ es una homotopía de cadenas. Si $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son isomorfos por $\varepsilon_* : H_0(C_\bullet) \rightarrow A$ para $n = 0$ y $H_n(C_\bullet) = 0$ para $n > 0$.

Considérese un complejo de cadenas $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde cada C_n es un \mathbb{Z} -módulo libre y $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ es el operador diferencial de C_\bullet que cumple $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para todo n . Este tipo de complejos aparece frecuentemente en el estudio de espacios topológicos.

Supóngase además que cada C_n es finitamente generado. Entonces, el n -ésimo grupo de homología de C_\bullet , definido como

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})},$$

es un grupo abeliano finitamente generado. Este resultado se sigue del hecho de que el núcleo y la imagen de los morfismos entre \mathbb{Z} -módulos libres finitamente generados son también finitamente generados.

El teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados afirma que cualquier grupo abeliano finitamente generado G puede expresarse como una suma directa de grupos cíclicos de la forma

$$G \cong \mathbb{Z}^\beta \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde β es el rango de G y cada \mathbb{Z}_{m_i} es un grupo cíclico de orden m_i , con $m_1 | m_2 | \dots | m_k$. Aplicando este teorema al n -ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet)$, obtenemos que

$$H_n(C_\bullet) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde β_n es el rango de $H_n(C_\bullet)$, conocido como el **n -ésimo número de Betti** de C_\bullet , y los m_i son los **n -ésimos coeficientes de torsión**, satisfaciendo $m_1 | m_2 | \dots | m_k$.

Definición 1.37. Sea C_\bullet un complejo de cadenas y k un entero no negativo. El **k -ésimo número de Betti**, $\beta_k(C_\bullet)$, se define como el rango del k -ésimo grupo de homología de C_\bullet , $H_k(C_\bullet)$. Esto es, $\beta_k(C_\bullet) = \text{rg}(H_k(C_\bullet))$.

Los números de Betti β_n proporcionan una medida de la dimensionalidad de la n -ésima homología, mientras que los coeficientes de torsión $\{m_i\}$ capturan información adicional sobre la estructura algebraica de $H_n(C_\bullet)$. Ambos conjuntos de invariantes son cruciales para el estudio de la topología algebraica, ya que ofrecen una perspectiva profunda sobre la estructura de los espacios topológicos desde el punto de vista homológico.

2. Símplices y complejos simpliciales

Los espacios topológicos pueden llegar a ser complicados de estudiar. Los complejos simpliciales tienen la ventaja de ser estructuras fáciles de estudiar. Por este motivo, los dotaremos de cierta topología que nos permitirá construir homeomorfismos a un gran número de espacios topológicos. En este capítulo nos centraremos en la definición y el estudio de estos objetos en profundidad en la línea de [Mun18] y lo complementaremos con alguna aportación de [Lee10].

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplex. Su sencillez y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplex y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzamos recordando algunos conceptos de la geometría afín.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N -dimensional, lo notaremos simplemente por \mathbb{R}^N .

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N . Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^p t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_p$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \dots, a_p\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nótese que la transformación afín T de \mathbb{R}^N tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de \mathbb{R}^N con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual, obtenemos una transformación afín $S : P \rightarrow \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tal que $S(a_i) = (0, \overset{i-1}{\vdots}, 0, 1, 0, \overset{i+1}{\vdots}, 0)$ con $i \in \{1, \dots, p\}$.

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en \mathbb{R}^N . Definimos el **p-símplice** o **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ generado por a_0, \dots, a_p como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i = 1$$

con $t_i \geq 0$, $i \in \{0, 1, \dots, p\}$. Diremos que t_i es la *i-ésima coordenada baricéntrica* de x respecto a a_0, a_1, \dots, a_p .

Proposición 2.1. Sea σ un *k-símplice* definido como en 2.3. Entonces, para cualquier $p \in \sigma$, las coordenadas baricéntricas t_0, \dots, t_k de p están determinadas de manera única.

Demostración. Por definición, cualquier punto arbitrario $p \in \sigma$ puede escribirse como una combinación convexa de los puntos a_i . Esto garantiza la existencia de una solución (no negativa) al sistema lineal

$$At = \begin{pmatrix} a_{01} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N} & \cdots & a_{kN} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ 1 \end{pmatrix} = p^*,$$

donde A es la matriz que contiene a los a_i como columnas, extendidos con un 1 en la última fila para incorporar la condición de que la suma de t_i sea igual a 1, asegurando que estamos considerando combinaciones convexas.

Para demostrar la unicidad, supongamos la existencia de otro vector t' tal que $At' = p^*$. Esto lleva a $A(t - t') = 0$. Supongamos que $A(t - t') = Av = 0$, donde $v = t - t'$. Esto implica que para $v_i = t_i - t'_i$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$

$$\sum_{i=0}^k v_i \cdot \begin{pmatrix} a_{0i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que lleva a que $v_0 = v_1 = \dots = v_k = 0$, debido a la independencia lineal de las columnas de A . En consecuencia, $t = t'$, demostrando así que las coordenadas baricéntricas son únicas para cualquier punto p en σ . \square

Los puntos a_0, \dots, a_p que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número p lo llamaremos la **dimensión** de σ , que notaremos por $\dim \sigma$.

Definición 2.4. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ un símplex. Una **cara de dimensión** p de σ será cualquier símplex generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \dots, a_p\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i , $i \in \{0, \dots, p\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos $\text{Bd } \sigma$. Finalmente, definimos el **interior** de σ , $\text{Int } \sigma$, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

En ocasiones, para dos símplexes σ y τ , escribiremos $\tau \preceq \sigma$ si τ es cara de σ . En caso de ser cara propia, lo notaremos por $\tau \prec \sigma$.

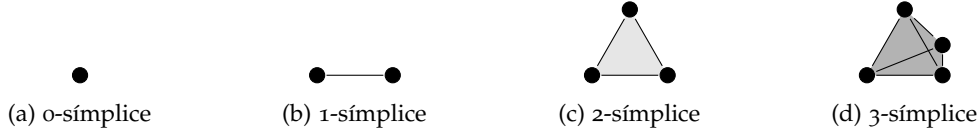


Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Proposición 2.2. Si σ es un símplice, entonces es unión disjunta del interior de todas sus caras.

Demostración. Sea x un elemento del símplice $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ y sean t_0, \dots, t_p sus coordenadas baricéntricas. Consideremos ahora σ_k el símplice resultante de eliminar los vértices cuya coordenada tenía valor nulo. Esto es, tomamos el símplice $\sigma_k = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ donde $t_{i_s} > 0$ para todo $s \in \{1, \dots, k\}$. Por la construcción de σ_k , tenemos que x pertenece a su interior.

Ahora sabemos que todo punto de un símplice pertenece al interior de una cara. Finalmente, la unicidad de las coordenadas baricéntricas nos garantiza que la unión del interior de dos caras es disjunta. \square

Dado un símplice σ podemos definir un orden sobre sus vértices. Dos órdenes de σ los consideraremos equivalentes si podemos pasar de uno a otro con un número par de permutaciones. Así, los ordenamientos posibles para los vértices de σ se pueden agrupar en dos clases de equivalencia distintas, que definimos como las **orientaciones del símplice** σ .

Definición 2.5. Decimos que un símplice $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_p]$ está **orientado** si se le ha asignado una de estas orientaciones. Utilizaremos $[a_0 a_1 \dots a_p]$ para denotar la clase de equivalencia dada por la orientación $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ del símplice generado por los vértices a_0, a_1, \dots, a_p .

2.2. Complejos simpliciales

La importancia de los complejos simpliciales reside en su capacidad para descomponer espacios topológicos en componentes manejables, permitiendo un análisis detallado de su estructura. Al considerar la forma en que estos símplices se conectan y orientan entre sí, los complejos simpliciales facilitarán la definición de cadenas y ciclos simpliciales que serán indispensables en el estudio de la homología simplicial.

Definición 2.6. Un **complejo simplicial** (finito) K en \mathbb{R}^N es una colección finita de símplices en \mathbb{R}^N tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K o es el vacío o es una cara de ambos símplices.

Nota. Si bien los complejos simpliciales se pueden formular sin la restricción de finitud, nosotros trabajaremos solamente en el caso finito por conveniencia en algunos resultados.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

2. Símplices y complejos simpliciales

Lema 2.1. Una colección K de símplexes es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Toda cara de un símplex de K está en K .
2. La intersección dos a dos del interior de los símplexes de K es vacía.

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplexes $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$ y considero $x \in s$. Si s fuera una cara propia de σ , entonces x pertenecería a la frontera de σ , lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ . Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen (1) y (2). Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices b_0, \dots, b_m de σ que están en τ . Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a b_0, \dots, b_m . Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \text{Int } s \cap \text{Int } t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ . Se sigue de (2) que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \dots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ' , lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. \square

Definición 2.7. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K .

Definición 2.8. Sea K un complejo simplicial. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p . Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ lo llamaremos el **conjunto de vértices** de K .

Definición 2.9. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^N tal que $|K|$ es la unión de todos los símplexes de K . Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de \mathcal{T} son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de \mathbb{R}^N para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ , pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma, O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $(\cup_{i \in I} O_i) \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ . En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

En general, la topología de $|K|$ es más fina que la inducida de la topología usual de \mathbb{R}^N . Si A es cerrado en $|K|$ con la topología inducida de la usual, $A = B \cap |K|$ para algún cerrado B de \mathbb{R}^N y por tanto $B \cap \sigma$ sería cerrado en σ para cada símplex σ de K . Como consecuencia, $B \cap |K| = A$ es cerrado en $|K|$ con la topología \mathcal{T} definida anteriormente.

No obstante, la otra inclusión no tiene por qué cumplirse. Como contraejemplo, consideremos el complejo K en \mathbb{R} cuyos símplexes son todos los intervalos $[m, m+1]$ con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, todos los intervalos de la forma $[1/(n+1), 1/n]$ donde $n \in \mathbb{N}$ y todas sus respectivas caras. Como resultado tenemos que $|K| = \mathbb{R}$, donde $F = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en nuestra topología \mathcal{T} pero no en la inducida por la usual. Dicho de otra forma, $\mathbb{R} \setminus F$ es abierto en \mathcal{T} pero no en la usual.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

A continuación, mencionemos algunas propiedades relevantes de este espacio topológico. Para ello fijemos un complejo simplicial finito K en \mathbb{R}^N .

Proposición 2.3. *El poliedro $|K|$ es compacto.*

Demostración. Si K es un complejo simplicial, sus símlices son conjuntos cerrados y acotados. En consecuencia, $|K|$ es unión finita de conjuntos cerrados y acotados, luego es cerrado y acotado en \mathbb{R}^N . Por lo tanto, es compacto. \square

Proposición 2.4. *Si $x \in |K|$, entonces existe un único símplex en K tal que x pertenece a su interior.*

Demostración. Si $x \in |K|$, entonces existe algún símplex σ de K tal que $x \in \sigma$. Por la **Proposición 2.2**, x pertenece al interior de alguna cara τ de σ . Supongamos ahora que existe otro símplex ρ de K tal que $x \in \text{Int } \rho$. Por consiguiente, si $x \in \text{Int } \rho \cap \text{Int } \tau$, entonces x pertenecería a una cara común μ de ρ y τ . Esto es, $\mu = \rho \cap \tau$. Ahora si $\rho \neq \mu$, el elemento x debería tener alguna coordenada baricéntrica nula respecto a los vértices de ρ , en contradicción con que x pertenece al interior de ρ . En consecuencia, $\rho = \mu$. De manera análoga obtenemos $\tau = \mu$ y por tanto, $\rho = \tau$. \square

Definición 2.10. Sea K un complejo simplicial y sea $x \in |K|$. Llamaremos **símplex soporte** de x al único símplex que contiene a x en su interior y lo notaremos por $\text{sop}(x)$.

Corolario 2.1. *Sean σ, τ símlices de K tal que $\text{Int } \sigma \cap \tau$ es no vacía. Entonces σ es una cara de τ .*

Demostración. Consideremos $x \in \text{Int } \sigma \cap \tau$. Por la **Proposición 2.2** sabemos que τ es la unión de todas sus caras lo que implica que existe una cara μ de τ cuyo interior contiene a x . Por lo tanto, $x \in \text{Int } \mu \cap \text{Int } \sigma$ y como consecuencia de la **Proposición 2.4**, $\mu = \sigma$. \square

Lema 2.2. *Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua si, y sólo si, $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_{\sigma}$ por ser σ un subespacio de K . Supongamos ahora que $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X , $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_{\sigma}^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_{\sigma}$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. \square

Definición 2.11. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X . Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$ es una **triangulación**.

2.3. Celdas y complejos celulares

Definición 2.12. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es una **celda** abierta (cerrada) de dimensión p o p -celda si X es homeomorfo a la bola unidad abierta (cerrada) de dimensión p .

Proposición 2.5. *Sea D un subconjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^n con interior no vacío. Entonces D es una n -celda cerrada y su interior es una n -celda abierta.*

Demostración. . \square

Definición 2.13. Sea (X, \mathcal{E}) , donde X es un espacio topológico Hausdorff y \mathcal{E} una colección de celdas abiertas. Diremos entonces que (X, \mathcal{E}) es un **CW-complejo** si se cumple que:

2. Símplices y complejos simpliciales

- (C) Para cada p -celda $e \in \mathcal{E}$, existe una aplicación continua $f_e : B^p \rightarrow X$ de forma que el interior de B^p es homeomorfo a la celda e y lleva la frontera de B^p en una unión finita de celdas de dimensión menor a p .
- (W) Un subconjunto F de X es cerrado si $F \cap \bar{e}$, donde \bar{e} denota la clausura de e , es cerrado para todo $e \in \mathcal{E}$.

Normalmente denotaremos al CW-complejo (X, \mathcal{E}) simplemente por X .

Observación 2.1. Fue J.H.C. Whitehead quién formuló por primera vez los CW-Complejos en [Whi49]. En su formulación, la primera condición denotaba la propiedad de clausura finita. Por otro lado, la segunda condición denotaba que la topología empleada era la topología débil (del inglés, *weak*) respecto a la familia de las clausuras de las celdas de \mathcal{E} . Si bien esta formulación nos aleja un poco de la intuición original, es una formulación equivalente.

Definición 2.14. Sea X un espacio topológico. Diremos que una celda $e \subset X$ es **regular** si admite una aplicación característica que sea un homeomorfismo sobre \bar{e} . Además, diremos que un CW-complejo es **regular** si todas sus celdas son regulares.

Definición 2.15. Sea X un CW-complejo. Diremos que $Y \subseteq X$ es un **subcomplejo** de X si es unión de celdas de X de forma que si Y contiene una celda, entonces también contiene su clausura.

Teorema 2.1. Sea X un CW-complejo y sea Y un subcomplejo de X . Entonces Y es cerrado en X y, además, es un CW-complejo con la topología y la colección de celdas inducidas.

Demostración. Es claro que Y es Hausdorff. Además, por definición tenemos que Y es la unión disjunta de sus celdas. Sea $e \subseteq Y$ una celda abierta de Y . Como su clausura también está contenida en Y , entonces existe un número finito de celdas de X con intersección no vacía con \bar{e} que, a su vez, son celdas de Y . En consecuencia, la condición (C) se cumple. Es más, cualquier aplicación característica $f_e : \rightarrow X$ de X lo es también de Y para cualquier celda $e \subseteq Y$.

En cuanto a la condición (W), supongamos que S es un subconjunto de Y tal que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} para toda celda en Y . Sea ahora e una celda de X que no esté contenida en Y . Sabemos que $\bar{e} \setminus e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de X , de las cuales un subconjunto de ellas están contenidas en Y . Llamemos a dichas celdas e_1, \dots, e_n . Por consiguiente, $\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n \subseteq Y$ y además,

$$S \cap \bar{e} = S \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} = ((S \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (S \cap \bar{e}_n)) \cap \bar{e},$$

luego $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} . Es decir, S es cerrado en X y por tanto en Y . Finalmente, concluimos que Y es cerrado en X tomando $S = Y$. \square

Definición 2.16. Sea X un CW-complejo. Diremos que el subespacio $X^{(p)}$ de X es el **p -esqueleto** de X si es igual a la unión de todas las celdas de dimensión menor o igual que p . En particular, es un subcomplejo de dimensión p de X .

Teorema 2.2. Sea X un CW-complejo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X es conexo por caminos.
2. X es conexo.

3. El 1-esqueleto de X es conexo.

4. Algún n -esqueleto de X es conexo para algún n .

Demostración. Obviamente, (1) \implies (2) y (3) \implies (4), por lo que basta con demostrar que (2) \implies (3) y (4) \implies (1).

Para probar (2) \implies (3), demostramos el contrarrecíproco. Supongamos que $X^{(1)} = X'^{(1)} \cup X''^{(1)}$ es una desconexión del 1-esqueleto de X . Mostramos por inducción en n que para cada $n > 1$, el n -esqueleto $X^{(n)}$ tiene una desconexión $X^{(n)} = X'^{(n)} \cup X''^{(n)}$ tal que $X'^{(n)} \subseteq X'^{(n-1)}$ y $X''^{(n)} \subseteq X''^{(n-1)}$ para cada n . Supongamos $X^{(n-1)} = X'^{(n-1)} \cup X''^{(n-1)}$ es una desconexión de $X^{(n-1)}$ para algún $n > 1$. Para cada celda n -dimensional e , la restricción de su aplicación característica $\Phi: D^n \rightarrow X^{(n)}$ a ∂D^n es continua en $X^{(n-1)}$; dado que $\partial D^n \cong S^{n-1}$ es conexo, su imagen debe yacer completamente en uno de los conjuntos $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$. Por lo tanto, $\overline{\Phi(D)}$ tiene una intersección no trivial con $X'^{(n)}$ o $X''^{(n)}$, pero no con ambos. Dividimos las n -celdas en dos colecciones disjuntas \mathcal{E}' y \mathcal{E}'' , según si sus cierres interseccionan $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$, respectivamente, y definimos

$$X'^{(n)} = X'^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}'} \overline{\Phi(e)} \right), \quad X''^{(n)} = X''^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}''} \overline{\Phi(e)} \right).$$

Claramente, $X^{(n)}$ es la unión disjunta de $X'^{(n)}$ y $X''^{(n)}$, y ambos conjuntos son no vacíos debido a la hipótesis inductiva. Esto completa la inducción.

Ahora, definimos $X' = \bigcup_n X'^{(n)}$ y $X'' = \bigcup_n X''^{(n)}$. Como antes, $X = X' \cup X''$, y ambos conjuntos son no vacíos. Por el mismo argumento que arriba, si e es cualquier celda de X de cualquier dimensión, su clausura debe estar contenida en uno de estos conjuntos. Así, X' y X'' están ambos abiertos y cerrados en X , lo que indica que X está desconectado.

Para demostrar (4) \implies (1), supongamos que X es un complejo CW cuyo n -esqueleto está conectado para algún $n \geq 0$. Mostramos por inducción en k que $X^{(k)}$ está conectado por caminos para cada $k \geq n$. Primero, necesitamos mostrar que $X^{(n)}$ en sí mismo está conectado por caminos. Si $n = 0$, entonces $X^{(n)}$ es discreto y conectado, así que es un singleton y por lo tanto ciertamente conectado por caminos. En caso contrario, elijamos cualquier punto $x_0 \in X^{(n)}$ y dejemos que S_n sea la componente de camino de $X^{(n)}$ que contiene a x_0 . Para cada celda e de $X^{(n)}$, notemos que $\overline{\Phi(e)}$ es la imagen continua de un espacio conectado por caminos, así que es conectado por caminos. Por lo tanto, si $\overline{\Phi(e)}$ tiene una intersección no trivial con la componente de camino S_n , debe estar contenida en S_n . Se sigue que S_n es cerrado y abierto en $X^{(n)}$. Ya que estamos asumiendo que $X^{(n)}$ es conectado, se sigue que $S_n = X^{(n)}$.

Ahora, supongamos que hemos demostrado que $X^{(k-1)}$ es conexo por caminos para algún $k > n$, y dejemos S_k ser la componente de camino de $X^{(k)}$ que contiene a $X^{(k-1)}$. Para cada k -celda e , su clausura $\overline{\Phi(e)}$ es un subconjunto de $X^{(k)}$ conexo por caminos que tiene una intersección no trivial con $X^{(k-1)}$, por lo tanto, está contenido en S_k . Se sigue que $X^{(k)} = S_k$, y la inducción está completa. \square

Lema 2.3. Sea X un CW-complejo. Entonces la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito.

Demostración. Consideremos cualquier n -celda $e \in X$ y probemos el lema por inducción. Para el caso $n = 0$, $\bar{e} = e$ es trivialmente un subcomplejo finito. Supongamos ahora el lema cierto para las celdas de dimensión menor o igual que n y veámoslo para $n + 1$. Por la condición

2. Símplices y complejos simpliciales

(C) , $\bar{e} \setminus e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de dimensión menor que $n + 1$. Dichas celdas están contenidas en subcomplejos finitos por hipótesis de inducción. Sin embargo, la unión de dichos subcomplejos finitos con e es de hecho un subcomplejo finito que contiene a \bar{e} . \square

Lema 2.4. Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es discreto si, y sólo si, su intersección con cada celda es finita.

Demostración. Sea S un subconjunto discreto de X . Entonces, la intersección de la clausura de cada celda e de X con S es un subconjunto discreto de un conjunto compacto, luego es finito. En consecuencia, $S \cap e$ también lo es.

Para la otra implicación supongamos que S es un subconjunto cuya intersección con cualquier celda es finita. Como la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito, entonces por hipótesis tenemos que $S \cap \bar{e}$ es finito para cada celda e de X . Esto significa que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} y por la condición (W), S es cerrado en X . Sin embargo, este argumento podemos aplicarlo a cualquier subconjunto de S , luego todo subconjunto de S es cerrado en X . Por lo tanto, la topología inducida en S es discreta. \square

Teorema 2.3. Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es compacto si, y sólo si, es cerrado en X y está contenido en un subcomplejo finito.

Demostración. Todo subcomplejo finito de X es compacto pues es unión finita de clausuras de celdas, las cuales son compactas. En consecuencia, si K es un subconjunto cerrado de X contenido en un subcomplejo finito, entonces es compacto.

Supongamos ahora que $K \subseteq X$ es compacto. Si K intersecara una cantidad infinita de celdas, podríamos tomar un punto de cada intersección de forma que tuviéramos un subconjunto infinito discreto de K , lo cual es imposible. Es decir, K está contenido en la unión de un número finito de celdas y por el **Lema 2.3**, está contenido en un subcomplejo finito. \square

Corolario 2.2. Un CW-complejo es compacto si, y sólo si, es un complejo finito.

Proposición 2.6. Todo p -símplice es una celda cerrada de dimensión p .

Demostración. Inmediato por la **Proposición 2.5**. \square

2.4. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.5. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación entre los conjuntos de vértices de K y L . Supongamos que siempre que los vértices v_0, \dots, v_n de K generen un símplice en K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símplice de L . Entonces podemos extender f a una aplicación continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies |f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$$

Llamaremos a g la **aplicación simplicial** (lineal) inducida por f .

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple τ en L . Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $|f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$ es un punto de τ . Es decir, $|f|$ es una aplicación lineal del símple σ generado por v_0, \dots, v_n al símple τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$. Por ser $|f| : \sigma \rightarrow \tau$ lineal en un espacio de dimensión finita, entonces es continua.

Ahora tan solo nos queda ver que $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Bien, pues por ser $|f| : \sigma \rightarrow \tau$ continua, también lo es $|f| : \sigma \rightarrow |L|$. Finalmente por el **Lema 2.2**, $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua. \square

Lema 2.6. Supongamos que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símple de K si, y sólo si, $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo. Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L .

Demostración. Por hipótesis, cada símple $\sigma \in K$ se identifica con otro símple $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i)\right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(f(v_i)) = \sum_{i=0}^n t_i v_i = x$$

\square

2.5. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simple, nos serán de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.17. Un **complejo simplicial abstracto** finito (o simplemente complejo abstracto) es una colección finita \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$.

Al elemento A de \mathcal{S} lo llamaremos **símple** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A . En cuanto a la **dimensión** de \mathcal{S} , diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de \mathcal{S} es infinita. El **conjunto de vértices** V de \mathcal{S} diremos que es la unión de elementos de \mathcal{S} que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de \mathcal{S} a cualquier subcolección de \mathcal{S} que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean $V_{\mathcal{S}}, V_{\mathcal{T}}$ los conjuntos de vértices de los complejos abstractos \mathcal{S}, \mathcal{T} respectivamente. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_{\mathcal{S}} \rightarrow V_{\mathcal{T}}$ tal que $\{a_0, \dots, a_p\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \dots, f(a_p)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.18. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \dots, a_p\} \subset V$ tales que los vértices a_0, \dots, a_p generan un símple de K . Entonces llamaremos a la colección \mathcal{K} el **esquema de vértices** de K .

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.19. Si el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K , diremos que K es una **realización geométrica** de \mathcal{S} .

Proposición 2.7. Sea \mathcal{S} un complejo simplicial abstracto de dimensión N . Entonces existe una realización geométrica de \mathcal{S} en \mathbb{R}^{2N+1} .

Demostración. Consideremos un conjunto de puntos $p_i \in \mathbb{R}^{2N+1}$ de forma sus componentes son potencias de su índice i . Veamos que cualquier conjunto de $2N+2$ de estos puntos es afínmente independiente. Es decir, que los vectores formados por las diferencias entre estos puntos son linealmente independientes.

Para demostrarlo, consideremos un subconjunto de puntos $\{p_{j_k} : 1 \leq k \leq 2N+2\}$ de esta forma y analicemos el determinante de la matriz formada por los vectores correspondientes,

$$\begin{vmatrix} j_2 - j_1 & j_3 - j_1 & \cdots & j_{2N+2} - j_1 \\ j_2^2 - j_1^2 & j_3^2 - j_1^2 & \cdots & j_{2N+2}^2 - j_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_2^{2N+1} - j_1^{2N+1} & j_3^{2N+1} - j_1^{2N+1} & \cdots & j_{2N+2}^{2N+1} - j_1^{2N+1} \end{vmatrix}.$$

Simplificando mediante operaciones elementales de fila, este determinante se transforma en el determinante de Vandermonde, cuyo valor es conocido y se calcula como el producto de las diferencias entre los términos seleccionados,

$$\prod_{1 \leq k < l \leq 2N+2} (j_k - j_l).$$

Este resultado no es cero siempre que todos los j_k sean distintos, asegurando así la independencia lineal.

Respecto a la construcción del complejo simplicial, tomemos un símple abstracto A en \mathcal{S} con vértices $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ y consideremos el símple geométrico $\sigma_A = [p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_m}]$ en \mathbb{R}^{2N+1} . Dado que $m+1 \leq 2N+2$, el símple σ_A tiene dimensión m . Definimos K como el conjunto que contiene todos los símlices σ_A para cada $A \in \mathcal{S}$. Veamos que la intersección de dos símlices σ_A y σ_B en K es igual a $\sigma_{A \cap B}$ con $A, B \in \mathcal{S}$. Consideremos τ como el símple en \mathbb{R}^{2N+1} cuyos vértices son la unión de los vértices pertenecientes a σ_A y a σ_B , lo cual es posible ya que la suma de sus dimensiones no supera $2N$. De esta manera, la intersección $\sigma_A \cap \sigma_B$ resulta ser la cara de τ determinada por los vértices que σ_A y σ_B comparten, es decir, aquellos asociados a $A \cap B$. Concluimos entonces que $\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A \cap B}$. \square

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior y del **Lema 2.6**, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (a) Todo complejo abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .
- (b) Dos complejos simpliciales son afínmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.

2.6. Variedades y triangulaciones

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico Hausdorff no vacío. Diremos que X es una **m -variedad** si cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de

\mathbb{R}^m con la topología usual. Análogamente, diremos que X es una **m -variedad con borde** si cada punto tiene un entorno homeomorfo al semiespacio $\mathbb{H}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$.

Observación 2.2. Nótese que toda m -variedad es una m -variedad con borde. Para verlo, consideremos x en la m -variedad y un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m . Entonces, tiene un entorno abierto homeomorfo a cualquier bola abierta de \mathbb{R}^m y en particular, a una contenida en \mathbb{H} .

3. Homología simplicial

3.1. Homología simplicial orientada

Consideremos Σ_p el conjunto de todos los símlices de dimensión p de un complejo simplicial K . Para cada $\sigma \in \Sigma_p$, definimos Σ_p^+ y Σ_p^- como los conjuntos que contienen, respectivamente, un símlice orientado σ^+ y el símlice con orientación opuesta σ^- .

Definición 3.1. Sea K un complejo simplicial y sea R un anillo. Consideremos el conjunto. Definimos $C_p(K; R)$, el R -módulo de las p -cadenas simpliciales orientadas de K , como el cociente del R -módulo libre generado por $\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-$ sobre el submódulo generado por el conjunto $\{\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\}$. Esto es,

$$C_p(K; R) = \frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle}.$$

Para $p < 0$ o $p > \dim(K)$, definimos $C_p(K; R)$ como el R -módulo trivial.

El interés de definir el R -módulo de p -cadenas simpliciales orientadas radica tanto en la identificación de los elementos que contiene como en las operaciones algebraicas aplicables sobre ellos. Esta construcción nos permite manejar un símlice orientado y su opuesto como opuestos algebraicos en un marco formal. Veámoslo.

Nuestro objetivo es demostrar que efectivamente

$$\frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle} \cong R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle,$$

donde $\tilde{\Sigma}_p$ representa el conjunto de p -símlices en Σ_p con una orientación arbitrariamente fija para cada uno.

Para ello, definamos la aplicación $f : \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rightarrow R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Esta aplicación asigna a cada símlice orientado σ^+ en Σ_p^+ , un representante σ en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ con una orientación fija elegida arbitrariamente, y a cada σ^- en Σ_p^- , le asigna $-\sigma$ en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$, donde $-\sigma$ refleja el elemento opuesto de σ .

La aplicación f respeta las relaciones de orientación al asignar a símlices con orientaciones opuestas a elementos que son opuestos algebraicos en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Por la **Propiedad universal de los módulos libres**, esta aplicación induce un homomorfismo $\tilde{f} : R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle \rightarrow R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ que resulta ser sobreyectivo, ya que cada elemento en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ tiene al menos una preimagen en $R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle$.

Por definición de f , para cada elemento de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ en $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$, tenemos que $\tilde{f}(\sigma^+ + \sigma^-) = f(\sigma^+) + f(\sigma^-) = \sigma - \sigma = 0$, demostrando que todo el submódulo $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$ tiene imagen cero por \tilde{f} y, por ende, está contenido en el núcleo de \tilde{f} .

Además, si consideramos un elemento x en $R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle$ tal que $\tilde{f}(x) = 0$, este elemento puede expresarse como una combinación lineal de elementos en Σ_p^+ y Σ_p^- . La condición

3. Homología simplicial

$\tilde{f}(x) = 0$ implica que la suma de las imágenes bajo f de los términos en esta combinación lineal debe ser cero en $R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$. Esto solo ocurre si para cada σ , la suma total de los coeficientes correspondientes a σ^+ y σ^- es cero, lo que significa que cada término en x que contribuye a esta suma cero debe ser de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ o un múltiplo de este, luego $\tilde{f}(x) = 0$ implica que $x \in \langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle$.

Por tanto, el núcleo de \tilde{f} coincide precisamente con $\langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle$, y aplicando el **Primer teorema de isomorfía**, concluimos que

$$\frac{R\langle\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-\rangle}{\langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle} \cong R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle,$$

estableciendo la estructura algebraica deseada y completando la prueba.

Observación 3.1. En particular, la anterior construcción asigna a cada símplice orientado una cadena cuyo coeficiente del anillo es 1, 0 o -1 . A estas cadenas las llamaremos **p -cadenas elementales**. En ocasiones abusaremos de la notación para designar por σ a la cadena elemental respectiva del símplice orientado σ .

Definición 3.2. Sea K un complejo simplicial y sean $C_p(K; R), C_{p-1}(K; R)$ R -módulos de p -cadenas. Definimos el **operador borde de p -cadenas** como el homomorfismo $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ tal que

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p([v_0, v_1, \dots, v_p]) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p].$$

donde \hat{v}_i denota el vértice a eliminar.

Lema 3.1. El operador borde $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ está bien definido. En particular, si σ^+ y σ^- son las dos orientaciones del p -símplice σ , tenemos que

$$\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$$

Demostración. Probaremos que la suma de la imagen por el operador borde de $\sigma^+ = [v_0 v_1 \dots v_p]$ y $\sigma^- = [v_1 v_0 \dots v_p]$ es igual a 0. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned} \partial_p \sigma^+ &= [v_1 v_2 \dots] - [v_0 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_0 v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_p], \\ \partial_p \sigma^- &= [v_0 v_2 \dots] - [v_1 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_1 v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]. \end{aligned}$$

Al sumar ambas expresiones, los dos primeros términos de $\partial_p \sigma^+$ y $\partial_p \sigma^-$ se cancelan entre sí. Como consecuencia de la definición de $C_{p-1}(K; R)$, los términos restantes definen orientaciones opuestas del mismo símplice por lo que se cancelan y $\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$. \square

Lema 3.2. Sean $\partial_p : C_{p+1}(K; R) \rightarrow C_p(K; R)$, $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ operadores borde. Entonces $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \partial_p \partial_{p+1} [v_0, \dots, v_{p+1}] &= \partial_p \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left[\sum_{j>i}^{p+1} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_{p+1}] + \sum_{j<i}^{p+1} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right]. \end{aligned}$$

Es decir, el símplice $[v_0 \dots \hat{v}_k \dots \hat{v}_t \dots v_{p+1}]$ aparece dos veces en la anterior expresión con signos opuestos, donde $k, t \in \{0, \dots, p+1\}$. Esto nos lleva a discutir los siguientes casos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < t$. En el primer caso, $i = k < j = t$ donde el coeficiente es $(-1)^k (-1)^{t-1}$. En el segundo caso, $i = t > j = k$ con coeficiente $(-1)^t (-1)^k$. Concluimos por tanto que todo símplice de la expresión se anula y al anularse sobre los generadores, $\partial_{p-1} \partial_p$ es el homomorfismo nulo. \square

Definición 3.3. El complejo de cadenas positivo $C_\bullet(K; R) = \{C_p(K; R), \partial_p\}$ lo llamaremos **complejo de cadenas simpliciales** de K . La homología de dicho complejo la notaremos por $H_p(K; R)$ y la llamaremos **p - esimo R -módulo de homología** de K .

Si $R = \mathbb{Z}$, $H_p(K; \mathbb{Z})$ lo notaremos simplemente por $H_p(K)$ y diremos que es el **p - esimo grupo de homología** de K .

Proposición 3.1. Sea K un complejo simplicial no vacío. Entonces el complejo de cadenas positivo $\{C_p(K; R), \partial_p\}$ admite un aumento.

Demostración. Sea $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$ el homomorfismo que extiende linealmente $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice $v \in K$. Veamos que $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow R$ es nulo. Tomando $[v_0, v_1] \in C_1(K; R)$ obtenemos que $\varepsilon(\partial_1[v_0, v_1]) = \varepsilon(v_1 - v_0) = 1 - 1 = 0$, como queríamos ver. \square

Definición 3.4. Sea $\tilde{C}_\bullet(K; R)$ el complejo aumentado del complejo de cadenas simpliciales $C_\bullet(K; R)$. Denominaremos **p - esimo módulo de homología reducida** de C_\bullet al módulo de homología $H_p(\tilde{C}_\bullet; R)$ y lo denotaremos por $\tilde{H}(C_\bullet; R)$.

Proposición 3.2. Sean K y L dos complejos simpliciales junto con una aplicación simplicial $f : |K| \rightarrow |L|$. Esta aplicación induce un homomorfismo entre los complejos de cadenas, $C(f)$, el cual se define extendiendo linealmente la función

$$C(f)([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [f(v_0) \dots f(v_p)] & \text{si los vértices son distintos entre sí,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, si f es la identidad, entonces $C(f)$ es simplemente la identidad también. Además, si $g : |L| \rightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, se cumple que $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$.

Demostración. Para demostrar esto, primero observamos que la definición de $C(f)$ es independiente de la orientación de los símplices. Luego, verificamos la igualdad $\partial_p \circ C(f) = C(f) \circ \partial_p$. Si no hay vértices repetidos, se tiene que:

$$\begin{aligned} C(f) \partial_p([v_0 \dots v_p]) &= C(f) \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i [f(v_0) \dots \widehat{f(v_i)} \dots f(v_p)] = \partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]). \end{aligned}$$

3. Homología simplicial

Si hay vértices repetidos, digamos $f(v_i) = f(v_j)$, entonces $\partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]) = 0$. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i C(f)([v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]) = 0$$

debido a que $C(f)([v_0 \dots \hat{v}_k \dots v_p]) = 0$ para $k \neq i, j$ y cuando $i < j$,

$$(-1)^i [f(v_0) \dots \widehat{f(v_i)} \dots f(v_j) \dots f(v_p)] + (-1)^j [f(v_0) \dots f(v_i) \dots \widehat{f(v_j)} \dots f(v_p)] = 0$$

también se anula. Esto se debe a que si no hay más vértices repetidos, como $f(v_i) = f(v_j)$, el número de trasposiciones necesarias para cambiar de un símlice orientado al otro es $j - i - 1$, dado que $f(v_j)$ ocupa el lugar $j - 1$ en el primer símlice. La fórmula $C(g \circ f) = C(g)C(f)$ se sigue directamente de la definición de $C(f)$. \square

Observación 3.2. El resultado anterior nos garantiza que $C : \mathbf{Csim} \rightarrow \mathbf{Ch}_\bullet(R)$ es un funtor covariante entre la categoría de complejos simpliciales y la categoría de complejos de cadenas.

Definición 3.5. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial y sea $C(f) : C_\bullet(K; R) \rightarrow C_\bullet(L; R)$ una aplicación de cadenas definida como en la **Proposición 3.2**. Llamaremos a $C(f)$ la **aplicación de cadenas inducida por f** y la notaremos por $f_\#$.

Corolario 3.1. Toda aplicación simplicial $f : |K| \rightarrow |L|$ induce un homomorfismo de R -módulos

$$H(f) : H_p(K; R) \rightarrow H_p(L; R)$$

que notaremos por f_* y que cumple que si $g : |L| \rightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\text{id}_* = \text{id}$.

Observación 3.3. La última implicación del corolario se traduce en que tenemos un funtor covariante $H : \mathbf{Csim} \rightarrow \mathbf{RMod}$ que va de la categoría de complejos simpliciales con los homeomorfismos simpliciales a la categoría de R -módulos con sus homomorfismos.

Lema 3.3. La aplicación de cadenas $f_\# : C_\bullet(K; R) \rightarrow C_\bullet(L; R)$ preserva el homomorfismo de aumento y como resultado, induce un homomorfismo f_* de módulos de homología reducida.

Demostración. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial, $f_\#$ su aplicación de cadenas inducida y sean $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$, $\varepsilon : C_0(L; R) \rightarrow R$ aumentos de $C_\bullet(K; R)$, $C_\bullet(L; R)$ respectivamente. Llamemos indistintamente ε a ambos aumentos en función del dominio en el que nos encontremos. Ahora definamos $\varepsilon(f_\#(v)) = 1$ y $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice de K y extendamos por linealidad. Por consiguiente $\varepsilon \circ f_\# = \varepsilon$. Esta ecuación implica que $f_\#$ lleva el núcleo de $\varepsilon_K : C_0(K; R) \rightarrow R$ al núcleo de $\varepsilon_L : C_0(L; R) \rightarrow R$, lo que induce un homomorfismo $f_* : \tilde{H}_0(K; R) \rightarrow \tilde{H}_0(L; R)$. \square

Teorema 3.1. Sean f, g aplicaciones simpliciales de K a L ; $f_\#, g_\#$ sus aplicaciones de cadenas inducidas y sea $s : f_\# \rightarrow g_\#$ una homotopía de cadenas entre ellas. Entonces los homomorfismos inducidos f_*, g_* para sus módulos de homología son iguales.

Demostración. Sea z un p -ciclo de K . Entonces

$$g_*(z) - f_*(z) = \partial s z + s \partial z = \partial s z + 0$$

por lo que $f(z)$ y $g(z)$ tienen la misma clase de homología. Por tanto, $f_*([z]) = g_*([z])$ como se quería. \square

3.2. Homología del complejo cono

A continuación, exploraremos un nuevo complejo simplicial que construiremos a partir de otro dado. El complejo cono nos facilitará la obtención de algunos resultados relevantes en homología.

Definición 3.6. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $w \in \mathbb{R}^N$ tal que cada semirrecta con origen w corta a $|K|$ a lo sumo en un punto. Definimos el **cono sobre K con vértice w** como el conjunto cuyos elementos son los símlices de K o símlices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$, donde $[v_0, \dots, v_p] \in K$. Lo denotaremos por $w * K$.

Lema 3.4. El cono $w * K$ es un complejo simplicial.

Demostración. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un símplex de K . Primero veamos que el conjunto $\{w, v_0, \dots, v_p\}$ es afínmente independiente. Si w perteneciera al plano P generado por los puntos v_0, \dots, v_p , podríamos considerar el segmento que une w con un punto de $x \in \text{Int } \sigma$. Dicho conjunto, por ser abierto en P , contendría un intervalo de puntos en el segmento, contradiciendo la hipótesis de que las semirrectas que parten de w cortan a $|K|$ a lo sumo en un punto.

Veamos ahora que $w * K$ es un complejo simplicial. Los símlices de $w * K$ pueden ser de tres tipos:

1. Símlices $[v_0, \dots, v_p]$ pertenecientes a K .
2. Símlices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$.
3. El 0-símplex $[w]$.

Si σ, τ son símlices del primer tipo, entonces $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ puesto que K es un complejo simplicial. El símplex $\text{Int}[w, v_0, \dots, v_p]$ es la unión de todos los segmentos abiertos que unen w con v_0, \dots, v_p , luego dos símlices de esta forma tienen intersección vacía pues las semirrectas que parten de w cortan a K a lo sumo en un punto. Finalmente, si σ es del primer tipo y τ del segundo, $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ por el mismo argumento recién dado. \square

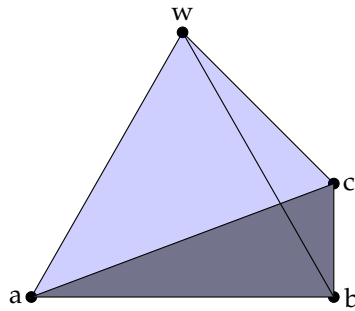


Figura 3.1.: Cono sobre el complejo formado por el 2-símplex $[a, b, c]$ y todas sus caras con vértice w .

Proposición 3.3. Sea K un complejo simplicial y sea $w * K$ el cono sobre K de vértice w . Entonces la homología orientada de $w * K$ es $H_p(w * K; \mathbb{R}) = 0$ para todo $p \neq 0$ y $H_0(w * K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. En el caso de la homología reducida, $\tilde{H}_0(w * K; \mathbb{R}) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

3. Homología simplicial

Demostración. Sea $D_\bullet = \{D_p, \partial_p\}$ un complejo de cadenas tal que $D_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $D_0 = R$. Definimos la aplicación de cadenas $f : D_\bullet \rightarrow C_\bullet(w * K; R)$ de forma que $f_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $f_0(r) = rw$. Por otro lado, por la **Proposición 3.1** podemos definir el aumento $\varepsilon : C_\bullet(w * K; R) \rightarrow D_\bullet$ dado por $\varepsilon_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $\varepsilon_0(v) = 1$ para todo vértice v del cono. Nuestro objetivo es ver que efectivamente f es una equivalencia de cadenas junto a ε . De manera directa tenemos que $\varepsilon \circ f = \text{id}_D$, luego $\varepsilon \circ f \simeq \text{id}_D$. Veamos ahora que $f \circ \varepsilon$ es homotópica a la identidad. Para ello vamos a definir s como la familia $\{s_p\}$ de homomorfismos $s_p : C_p(w * K; R) \rightarrow C_{p+1}(w * K; R)$ tal que

$$s_p([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [wv_0 \dots v_p] & \text{si } v_i \neq w \quad 0 \leq i \leq p, \quad p \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

induce una extensión lineal. Dicha familia está bien definida para $C_p(w * K; R)$. Veamos que $\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p = \text{id}_{C_p(w * K; R)} - f_p\varepsilon_p$ se cumple, por lo que s es una homotopía de cadenas. Para el caso en que $p \in \mathbb{Z}$ es menor que 0 se cumple de manera trivial. Si $p = 0$ distinguimos dos casos. Cuando $v \neq w$ tenemos que $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = \partial_1[w, v] = v - w = (\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v)$. Por el contrario si $v = w$, $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = 0$ y también $(\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v) = \text{id}_0(w) - (f_0 \varepsilon_0)(w) = w - w = 0$. Por último, veamos que sucede cuando $p > 0$. Supongamos primero que $w \neq v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= \partial_{p+1}[wv_0 \dots v_p] + s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= [v_0 \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^i [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \\ &= [v_0 \dots v_p] = (\text{id}_{C_p} - f_p \varepsilon_p)[v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Finalmente si $w = v_{i_0}$ para algún i_0 entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= s_{p-1}\partial_p[v_0 \dots v_p] = s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= (-1)^{i_0} s_{p-1}[v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = (-1)^{i_0} [wv_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] \\ &= (-1)^{i_0} [v_{i_0} v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = [v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Es decir, $f \circ \varepsilon \simeq \text{id}_{C(w * K; R)}$ y por el **Corolario 1.2** induce un isomorfismo $\varepsilon_* : H_p(w * K; R) \rightarrow H_p(D; R)$.

Para el caso reducido consideremos el complejo aumentado D_\bullet dado por el aumento $\text{id}_R : D_0 \rightarrow R$. Como consecuencia, la homología de \tilde{D} es trivial. Además, podemos extender los homomorfismos ε y f a homomorfismos $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} para los complejos aumentados de forma que $\tilde{\varepsilon}_{-1} = \tilde{f}_{-1} = \text{id}_R$. Por la misma homotopía s obtenemos que $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} son equivalencias homotópicas entre los complejos aumentados y por tanto, $\tilde{H}_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. \square

Corolario 3.2. *La homología simplicial reducida de cualquier símlice es nula.*

Corolario 3.3. *Sea σ un n -símlice y sea $\text{Bd } \sigma$ su borde. Entonces $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ es trivial si $p = n - 1$ y $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) \cong R$. Además, para el caso no trivial, un generador es la clase de la*

cadena $\partial(\sigma)$.

Demostración. Dado el símple anterior, los complejos de cadenas aumentados de σ y su borde coinciden hasta dimensión $p \leq n-1$. Por el **Corolario 3.2** deducimos que $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \leq n-2$. Además, $C_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \geq n$. Por lo tanto, $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) = \ker \partial_{n-1}$. Aquí, ∂_{n-1} representa el operador borde en ambos complejos aumentados (es decir, $\partial_0 = \varepsilon$ indica el aumento). Dado que el complejo aumentado de σ tiene homología trivial, entonces $\ker \partial_{n-1} = \text{Im } \partial_n$, y además ∂_n es inyectivo donde el operador borde $\partial_n : C_n(\sigma; R) \rightarrow C_{n-1}(\sigma; R) = C_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$ aparece en el complejo de σ . Puesto que $C_n(\sigma; R)$ es isomorfo a R generado por σ , se sigue que $\text{Im } \partial_n$, y por tanto $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$, es isomorfo a R generado por $\partial(\sigma)$. \square

3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

Nombrada en honor a los matemáticos austriacos Walther Mayer y Leopold Vietoris, la sucesión de Mayer-Vietoris es una herramienta esencial en la topología algebraica y la teoría de homología. Esta sucesión permite analizar la homología de un complejo simplicial a partir de la homología de sus subcomplejos, de manera análoga a como el teorema de Seifert-van Kampen describe el grupo fundamental de un espacio topológico a partir de subespacios abiertos y conexos por caminos.

Lema 3.5 (Lema de la serpiente). Sean $A_\bullet = \{A_n, \partial_A\}$, $B_\bullet = \{B_n, \partial_B\}$ y $C_\bullet = \{C_n, \partial_C\}$ complejos de cadenas y sean f, g aplicaciones de cadenas tales que la sucesión

$$0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$$

es exacta. Existe entonces una sucesión exacta de homología

$$\cdots \rightarrow H_p(A_\bullet; R) \xrightarrow{f_*} H_p(B_\bullet; R) \xrightarrow{g_*} H_p(C_\bullet; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A_\bullet; R) \xrightarrow{f_*} H_{p-1}(B_\bullet; R) \rightarrow \cdots$$

donde ∂_* es el operador borde inducido en B_\bullet .

Demostración. Para realizar esta prueba usaremos una persecución de diagramas. Usaremos el siguiente diagrama como guía:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{f} & B_{p+1} & \xrightarrow{g} & C_{p+1} \longrightarrow 0 \\ & & \partial_A \downarrow & & \partial_B \downarrow & & \partial_C \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{f} & B_p & \xrightarrow{g} & C_p \longrightarrow 0 \\ & & \partial_A \downarrow & & \partial_B \downarrow & & \partial_C \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{f} & B_{p-1} & \xrightarrow{g} & C_{p-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Paso 1. Para definir el operador conector ∂_* , primero tenemos que comprobar que si tenemos un ciclo de C_p , entonces podemos asignarle un único ciclo en A_{p-1} . Por tanto, sea c_p un ciclo de C_p (esto es, $c_p \in \ker \partial_C$) y escojamos $b_p \in B_p$ tal que $g(b_p) = c_p$ (recordemos que g es sobreyectiva por ser la sucesión exacta corta). El elemento $\partial_B b_p$ de B_{p-1} pertenece al

3. Homología simplicial

núcleo de g pues $g(\partial_B b_p) = \partial_C g(b_p) = \partial_C c_p = 0$. Por tanto, existe un elemento $a_{p-1} \in A_{p-1}$ tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$, pues $\ker g = \text{Im } f$. Tenemos que dicho elemento es único por ser f inyectiva. Además, a_{p-1} es un ciclo. Como $f(\partial_A a_{p-1}) = \partial_B f(a_{p-1}) = \partial_B \partial_B b_p = 0$, entonces $\partial_A a_{p-1} = 0$ por ser f inyectiva. Definimos $\partial_*[c_p] = [a_{p-1}]$ donde los corchetes denotan la clase de homología.

Paso 2. Queremos probar ahora que ∂_* es un homomorfismo de módulos bien definido. Sean c_p, c'_p dos elementos del núcleo de $\partial_C : C_p \rightarrow C_{p-1}$. Sean b_p, b'_p elementos de B_p tal que $g(b_p) = c_p$ y $g(b'_p) = c'_p$. Escojamos ahora a_{p-1} y a'_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ y $f(a'_{p-1}) = \partial_B b'_p$.

Para probar que ∂_* está bien definido, veamos que no depende del b_p y c_p escogido. Supongamos que $c_p \sim c'_p$ y veamos entonces que a_{p-1} y a'_{p-1} también lo son. Por tanto, supongamos que $c_p - c'_p = \partial_C c_{p+1}$. Escojemos b_{p+1} tal que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Esto implica que

$$f(b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C g(b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C c_{p+1} = 0$$

En consecuencia, podemos tomar a_p tal que $f(a_p) = b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}$ luego

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B(b_p - b'_p) - 0 = f(a_{p-1} - a'_{p-1})$$

Por ser f inyectiva, $\partial_A a_p = a_{p-1} - a'_{p-1}$, como buscábamos.

Ya sabemos que ∂_* está bien definido, veamos que es un homomorfismo de módulos. Para ello basta fijarnos en que $g(b_p + b'_p) = c_p + c'_p$ y que $f(a_{p-1} + a'_{p-1}) = \partial_B(b_p + b'_p)$. Por tanto $\partial_*[c_p + c'_p] = [a_{p-1} + a'_{p-1}]$ por definición y en consecuencia, $\partial_*[c_p + c'_p] = \partial_*[c_p] + \partial_*[c'_p]$. Ahora si $\lambda \in R$, de manera análoga obtenemos que $\lambda \partial_*[b_p] = \lambda[c_p] = [\lambda c_p] = \partial_*[\lambda b_p]$.

Paso 3. Probaremos la exactitud de $H_p(B_\bullet; R)$ por doble inclusión. Como $g \circ f = 0$ tenemos que $g_* \circ f_* = 0$. Esto implica que si $\gamma \in \text{Im } f_*$, entonces $g_*(\gamma) = 0$.

Para probar la otra inclusión, consideremos $\gamma = [b_p]$ y supongamos que $g_*(\gamma) = 0$. Entonces $g(b_p) = \partial_C c_{p+1}$ para algún $c_{p+1} \in C_p$. Escojamos b_{p+1} de manera que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Entonces

$$g(b_p - \partial_B b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C g(b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C c_{p+1} = 0$$

luego $b_p - \partial_B b_{p+1} = f(a_p)$ para algún a_p . Ahora, a_p es un ciclo pues

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B b_p - 0 = 0$$

y f es inyectiva. Es más, $f_*[a_p] = [f(a_p)] = [b_p - \partial_B b_{p+1}] = [b_p]$ y por tanto $[b_p] \in \text{Im } f_*$ como queríamos.

Paso 4. Probemos la exactitud en $H_p(C_\bullet; R)$. Sea $\alpha = [c_p]$ un elemento de $H_p(C_\bullet; R)$. Escojamos b_p tal que $g(b_p) = c_p$ y ahora tomemos a_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial_*\alpha = [a_{p-1}]$ por definición.

Procederemos de nuevo por doble inclusión. Consideremos primero que $\alpha \in \text{Im } g_*$. Entonces $\alpha = [g(b_p)]$ donde b_p es un ciclo en B . Esto implica que $f(a_{p-1}) = 0$ de donde $a_{p-1} = 0$ y por tanto $\partial_*\alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\partial_*\alpha = 0$. Entonces $a_{p-1} = \partial_A a_p$ para algún a_p . Deducimos entonces que $b_p - f(a_p)$ es un ciclo y que $\alpha = g_*[b_p - f(a_p)]$ luego $\alpha \in \text{Im } g_*$. Realizando los cálculos obtenemos que

$$\partial_B(b_p - f(a_p)) = \partial_B(b_p) - \partial_B(f(a_p)) = \partial_B(b_p) - f(a_{p-1}) = 0$$

$$g_*[b_p - f(a_p)] = [g(b_p) - 0] = [c_p] = \alpha$$

Paso 5. Finalmente obtengamos la exactitud para $H_{p-1}(A_\bullet; R)$. Si $\beta \in \text{Im } \partial_*$, entonces $\beta = [a_{p-1}]$ donde $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p por definición. En consecuencia,

$$f_*(\beta) = [f(a_{p-1})] = [\partial_B b_p] = 0$$

Consideremos ahora el caso donde $f_*(\beta) = 0$. Sea $\beta = [a_{p-1}]$. Entonces $[f(a_{p-1})] = 0$ por lo que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p . Definimos $c_p = g(b_p)$. En consecuencia, c_p es un ciclo ya que $\partial_C c_p = g(\partial_B b_p) = g(f(a_{p-1})) = 0$ y $\beta = \partial_*[c_p]$ por definición. Esto es, $\beta \in \text{Im } \partial_*$. \square

Definición 3.7. En las condiciones del anterior lema, llamaremos a la sucesión obtenida **sucesión exacta larga de homología**.

Una consecuencia importante del resultado anterior es su naturalidad, un concepto de gran interés en teoría de categorías.

Teorema 3.2. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{f} & B_\bullet & \xrightarrow{g} & C_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \xrightarrow{f'} & B'_\bullet & \xrightarrow{g'} & C'_\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las sucesiones horizontales son sucesiones exactas de complejos de cadenas. Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \longrightarrow & H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A_\bullet; R) & \longrightarrow & \\ & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \longrightarrow & H_p(A'_\bullet; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(B'_\bullet; R) & \xrightarrow{g'_*} & H_p(C'_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(A'_\bullet; R) & \longrightarrow & . \end{array}$$

es conmutativo, siendo α, β, γ aplicaciones de cadenas.

Demostración. Es claro que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) \\ \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ H_p(A'_\bullet; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(B'_\bullet; R) & \xrightarrow{g'_*} & H_p(C'_\bullet; R) \end{array}$$

es conmutativo, pues los homomorfismos inducidos de las aplicaciones de cadenas conservan la conmutatividad. Por tanto, basta estudiar la conmutatividad en

$$\begin{array}{ccc} H_p(C_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A_\bullet; R) \\ \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* \\ H_p(C'_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(A'_\bullet; R) . \end{array}$$

3. Homología simplicial

Sea $[a] \in H_p(A_\bullet; R)$ y tomemos b_p de manera que $g(b_p) = c_p$. Además tomemos $a_{p-1} \in A_p$ de forma que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial'_*[c_p] = [a_{p-1}]$ por definición. Consideremos ahora $c'_p = \gamma(c_p)$. Nuestro objetivo es ver que $\partial'_*[c'_p] = \alpha_*[a_{p-1}]$. Está claro que $\beta(b_p)$ es preimagen de c_p por g' , pues $g'\beta(b_p) = \gamma g(b_p) = \gamma(c_p) = c'_p$. Así mismo, $\alpha(c_{p-1})$ lo es de $\partial'_D \beta(b_p)$, pues $f'\alpha(a_{p-1}) = \beta f(a_{p-1}) = \beta(\partial_B b_p) = \partial'_D \beta(b_p)$. Esto es, $\partial'_*[c_p] = [\alpha(a_{p-1})]$ por definición. \square

Proposición 3.4 (Sucesión de Mayer-Vietoris). *Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 sub-complejos de K tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_p(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R) \xrightarrow{g} H_p(K; R) \rightarrow H_{p-1}(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow \cdots$$

tal que $f(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c))$, $g(d, e) = j_{1\#}(d) + j_{2\#}(e)$ donde $i_t : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_t$ y $j_t : K_t \rightarrow K_1 \cup K_2$ para $t \in \{1, 2\}$ son las respectivas inclusiones.

Demostración. La demostración consiste en construir la sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \rightarrow C_\bullet(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R) \xrightarrow{g} C_\bullet(K; R) \rightarrow 0$$

y aplicar el **Lema de la serpiente**.

Para ello comencemos describiendo el complejo de cadenas $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$. Recordemos que la suma directa de un complejo de cadenas se definía como la suma directa de los R -módulos de dimensión p $C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R)$, cuyo operador borde $\partial'(d, e) = (\partial_1 d, \partial_2 e)$ donde ∂_1, ∂_2 corresponden a los operadores borde de K_1 y K_2 respectivamente.

Para comprobar la exactitud de la sucesión, comencemos estudiando la exactitud en los extremos de ésta. Es claro que f es inyectiva por ser una inclusión. En cuanto a la sobreyectividad de g , tomemos $d \in C_p(K; R)$ donde d sea la suma de símlices orientados. Notemos por d_1 a los elementos de dicha suma provenientes de K_1 . Entonces $d - d_1 \in K_2$ y $g(d_1, d - d_1) = d$.

Para estudiar la exactitud en $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$, consideremos la inclusión $k : K_1 \cap K_2 \rightarrow K$ y la respectiva inclusión de cadenas inducida $k_\# : C_\bullet(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow C_\bullet(K; R)$. Nótese que $g(f(c)) = k_\#(c) - k_\#(c) = 0$. Sea ahora $g(d, e) = 0$, entonces $d = -e$ si las consideramos como cadenas de K . Como d proviene de K_1 y e de K_2 , ambas deben de provenir de $K_1 \cap K_2$ y en consecuencia, $(d, e) = (d, -d) = f(d)$, como queríamos.

La homología de $K_1 \oplus K_2$ de dimensión p es entonces

$$H_p(K_1 \oplus K_2; R) \cong H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R)$$

por la **Proposición 1.5**. Finalmente aplicamos el **Lema de la serpiente** y en consecuencia tenemos la sucesión deseada.

Para obtener la sucesión de Mayer-Vietoris de homología reducida, reemplazaremos los complejos de cadenas anteriores por sus correspondientes complejos de cadenas aumentados. Consideremos para ello el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(K_1 \cap K_2; R) & \longrightarrow & C_0(K_1; R) \oplus C_0(K_2; R) & \longrightarrow & C_0(K; R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{K_1 \cap K_2} & & \downarrow \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \oplus R & \xrightarrow{\tilde{g}} & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

La conmutatividad y la exactitud se mantienen en la parte inferior del diagrama si definimos $\tilde{f}(r) = (r, r)$ y $\tilde{g}(r', r) = r' + r$. Las aplicaciones $\varepsilon_{K_1 \cap K_2}, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ y ε son sobreyectivas pues la intersección de K_1 y K_2 es no vacía. De este modo, la homología de sus respectivos complejos de cadenas es nula en dimensión -1 y en dimensión 0 es igual a la de sus respectivos módulos de homología reducida $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2; R)$, $\tilde{H}_0(K_1; R) \oplus \tilde{H}_0(K_2; R)$ y $\tilde{H}_0(K; R)$. Para finalizar, aplicamos de nuevo el **Lema de la serpiente**. \square

4. Homología persistente

4.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_v\}_{v \in V}$ un recubrimiento de X . Llamaremos **nervio** de \mathcal{U} al complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices V tal que la familia v_0, \dots, v_p genera un p -símplice si, y sólo si, $U_{v_0} \cap \dots \cap U_{v_p} \neq \emptyset$. Lo notaremos por $N(\mathcal{U})$.

Teorema 4.1 (del Nervio). Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_v\}_{v \in V}$ un recubrimiento por abiertos numerable de X . Supongamos además que para todo subconjunto no vacío de vértices $S \subseteq V$ tenemos que $\bigcap_{s \in S} U_s$ es contráctil o vacío. Entonces $N(\mathcal{U})$ es homotópicamente equivalente a X .

Demostración. contenidos... □

Definición 4.2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X . Definimos el **complejo de Čech** $C(V, \varepsilon)$ como el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$, donde

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_\varepsilon(v) : v \in V\},$$

siendo $B_\varepsilon(v)$ la bola abierta de centro x y radio $\varepsilon > 0$.

Definición 4.3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X . Definimos el **complejo de Vietoris-Rips** $VR(V, \varepsilon)$ como el complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es V , de forma que $\{v_0, v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ genera un p -símplice si, y sólo si, $d(v_i, v_j) \leq \varepsilon$ para todo $0 \leq i, j \leq p$.

Proposición 4.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X . Entonces

$$C(V, \varepsilon) \subseteq VR(V, 2\varepsilon) \subseteq C(V, 2\varepsilon).$$

Demostración. La primera inclusión es inmediata pues si un punto x pertenece a la intersección $\bigcap_{v \in V} B(v, \varepsilon)$, entonces la distancia para cada par de puntos de V es, a lo sumo, 2ε . En consecuencia, cualquier símplice de $C(V, \varepsilon)$ se encuentra en $VR(V, 2\varepsilon)$.

Para la segunda inclusión, consideremos ahora un símplice $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$ de $VR(V, 2\varepsilon)$. Por la definición de complejo de Vietoris-Rips, tenemos que $d(v_i, v_j) \leq 2\varepsilon$ para todo $i, j \in \{0, \dots, p\}$. Considerando las bolas abiertas de radio 2ε centradas en v_i y en v_j , tenemos que su intersección es no vacía, pues $v_i \in \overline{B}_{2\varepsilon}(v_j)$ y $v_j \in \overline{B}_{2\varepsilon}(v_i)$. En el supuesto de que los puntos pertenecieran a la frontera de las bolas, la intersección de las bolas abiertas también sería no vacía pues $\varepsilon > 0$. En consecuencia, tenemos que $\sigma \in C(V, 2\varepsilon)$. □

4.2. Módulos de homología persistente

Definición 4.4. Sea K un complejo simplicial. Una **filtración** \mathcal{F} de K es una familia totalmente ordenada de subcomplejos $\{K^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\emptyset, K \in \mathcal{F}$ y si $i \leq j$, entonces $K^i \subseteq K^j$. En particular, llamaremos a dicho orden **filtro**.

4. Homología persistente

A partir de la definición anterior, podemos construir los complejos de cadenas asociados $C(K^i; R)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así mismo, podemos obtener sus respectivos submódulos de ciclos Z_p^i y bordes B_p^i para cada cadena $C_p(K^i; R)$.

Definición 4.5. Sea \mathcal{F} una filtración, sea p un número natural y sean $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Definimos el (i, j) -ésimo R -módulo de homología persistente de nivel p asociado a \mathcal{F} como

$$H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F}) := \text{Im } f_p^{i,j}.$$

El rango de $H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F})$ diremos que es el (i, j) -ésimo número de Betti de persistencia de nivel p y lo notaremos por $\beta_p^{i,j}$.

Proposición 4.2. Sea \mathcal{F} una filtración del complejo simplicial K . Entonces

$$H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F}) \cong \frac{Z_p(K_j)}{B_p(K_j) \cap Z_p(K_i)}$$

es un isomorfismo de R -módulos.

Demostración. Sabemos que el cociente anterior está bien definido, pues $Z_p(K_i) \cap B_p(K_j)$ es un submódulo de $Z_p(K_i)$. Para ver que en efecto existe un isomorfismo, consideraremos la proyección canónica $\pi_i : Z_p(K_i) \rightarrow H_p(K_i)$. Aplicando el **Primer teorema de isomorfía**, tenemos que

$$\frac{Z_p(K_i)}{\ker \pi_i} \cong \text{Im } \pi_i$$

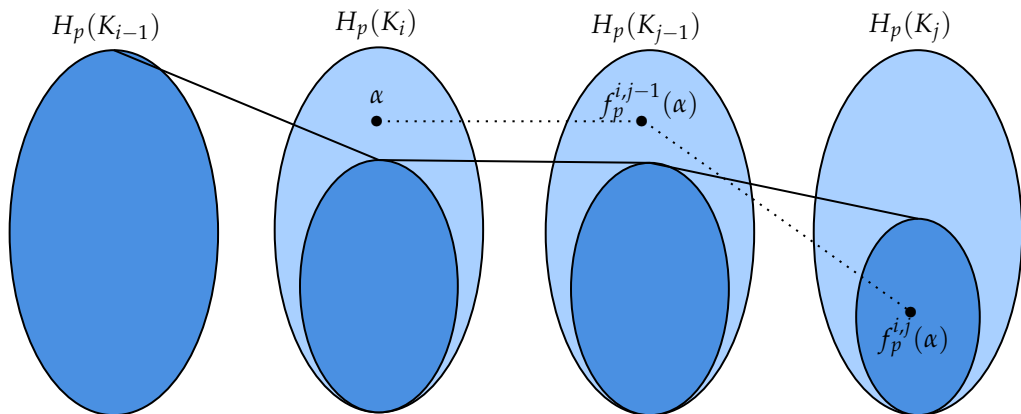
es un isomorfismo. Sin embargo, nótese que

$$\begin{aligned} \ker \pi_i &= \{z \in Z_p(K_i) : \pi_i(z) = [0]\} = \{z \in Z_p(K_i) : [z] = [0]\} \\ &= \{z \in Z_p(K_i) : z \in B_p(K_j)\} = B_p(K_j) \cap Z_p(K_i). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} H_p^{i,j}(\mathcal{F}) &= \text{Im } f_p^{i,j} = \{f_p^{i,j}([z]) : [z] \in H_p(K_i)\} \\ &= \{[(i_{i,j})_p(z)] : z \in Z_p(K_i)\} = \{\pi_i(z) : z \in Z_p(K_i)\} = \text{Im } \pi_i. \end{aligned}$$

□



Definición 4.6. Dada una filtración F , decimos que un elemento $\alpha \neq 0$ en $H^p(K_i)$ nace en K_i si $\alpha \notin H^{p-1}(K_{i-1}, F)$. Además, decimos que α muere entrando en K_j si se fusiona con una clase proveniente de un nivel anterior cuando se desplaza de K_j a K_{j-1} ; es decir, si $f_{i,j-1}^p(\alpha) \notin H^{p-1}(K_{i-1}, F)$ pero $f_{i,j}^p(\alpha) \in H^{p-1}(K_j, F)$.

4.3. Representación de la homología persistente

Lema 4.1. Sea A un R -módulo. A es finitamente generado por n elementos si, y sólo si, existe un epimorfismo $\phi : R^n \rightarrow A$.

Demostración. Sea M un módulo generado por un conjunto finito de elementos $\{m_1, \dots, m_n\}$. Consideremos el homomorfismo $\phi : R^n \rightarrow M$ definido por

$$\phi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i m_i.$$

Este homomorfismo ϕ es claramente sobreyectivo, ya que cada elemento m en M puede ser expresado como $\phi(a_1, \dots, a_n)$ para algunos $a_1, \dots, a_n \in R$.

Por otro lado, si existe un homomorfismo sobreyectivo $\phi : R^n \rightarrow M$, entonces, para cada $m \in M$ existe una n -tupla (a_1, \dots, a_n) en R^n tal que $\phi(a_1, \dots, a_n) = m$. Los elementos $\phi(e_i)$, donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de R^n , generan M . De aquí se sigue que M es finitamente generado. \square

Definición 4.7. Sea A un R -módulo finitamente generado por n elementos y sea $\phi : R^n \rightarrow A$ un epimorfismo. Diremos que A es **finitamente presentado** si $\ker \phi$ es finitamente generado.

Definición 4.8. ARREGLAR Sea $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de R -módulos. Diremos que dicha familia es un **módulo de persistencia discreto** sobre el anillo R si para cada $i \leq j$ existe un homomorfismo de R -módulos $f_{i,j} : M_i \rightarrow M_j$ tal que:

1. $f_{i,i} = \text{id}_{M_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Definición 4.9. Sean $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$, $\mathcal{N} = \{\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{g_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$ dos módulos de persistencia discretos. Diremos que la familia de homomorfismos $\varphi_\bullet = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\varphi_i : M_i \rightarrow N_i$ es un **homomorfismo de módulos de persistencia discreto** si $g_{i,j} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ f_{i,j}$.

La anterior definición es equivalente a decir que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_i & \xrightarrow{f_i} & M_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & \dots \\ \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} & & \\ N_0 & \xrightarrow{g_0} & N_1 & \xrightarrow{g_1} & \dots & \xrightarrow{g_{i-1}} & N_i & \xrightarrow{g_i} & N_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & \dots \end{array}$$

conmuta. En las condiciones anteriores, los módulos de persistencia discretos junto a sus homomorfismos forman una categoría que notaremos por $R\text{-PersMod}$.

4. Homología persistente

Definición 4.10. Sea R un anillo. Diremos que R es un **anillo graduado** si puede descomponerse como una suma directa

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n,$$

donde $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Los elementos de R_n distintos de cero se denominan **homogéneos de grado n** .

Definición 4.11. Sea R un anillo graduado y sea M un R -módulo. Diremos que M es un **módulo graduado** si puede escribirse como

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n,$$

donde M_n son grupos abelianos y $R_m M_n \subseteq M_{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Un elemento de M_n distinto de cero se llama **homogéneo de grado n** .

VER QUE LOS MODULOS RGADUADOS FORMAN UNA CATEGORIA

Los módulos de persistencia discretos sobre un anillo R y los $R[t]$ -módulos graduados son conceptos íntimamente relacionados. Si \mathcal{M} es un módulo de persistencia discreto, podemos definir un $R[t]$ -módulo graduado $\alpha(\mathcal{M})$ como

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i,$$

donde el producto por t lo definimos como $t \cdot m_i = f_{i,i+1}(m_i)$ para todo $m_i \in M_i$. Análogamente, podemos definir un módulo de persistencia discreto a partir de un $R[t]$ -módulo $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$, de forma que

$$\beta \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \right) = \mathcal{M}.$$

Aquí, los morfismos los obtenemos a partir del producto por t , esto es, $f_{i,i+1}(m_i) = t \cdot m_i$ para todo $m_i \in M_i$. El siguiente resultado nos proporciona formalmente cómo de íntima es esta relación.

Lema 4.2. Las aplicaciones α y β definidas anteriormente forman una pareja isomorfa de funtores entre $R\text{-PersMod}$ y $R[t]\text{-Gr-Mod}$. En particular, ambas categorías son isomorfas.

Demostración. Sea $\varphi_{\bullet} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morfismo de módulos de persistencia discretos. Definamos

$$\alpha(\varphi_{\bullet}) : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i$$

donde a cada $m_i \in M_i$ le asignamos $\varphi_i(m_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Veamos que $\alpha : R\text{-PersMod} \rightarrow R[t]\text{-Gr-Mod}$ es un funtor. Primero veamos que $\alpha(\varphi_{\bullet})$ es un morfismo de módulos graduados. Tenemos que $\alpha(\varphi_{\bullet})$ es un homomorfismo de grupos pues cada φ_i lo es, cumple que $\alpha(\varphi_i)(M_i) \subseteq N_i$ y además, si $m = (m_0, m_1, \dots)$ es un elemento de \mathcal{M} , entonces

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi_{\bullet})(tm) &= \alpha(\varphi_{\bullet})(0, tm_0, tm_1, \dots) = (0, \varphi_0(tm_0), \varphi_1(tm_1), \dots) \\ &= (0, t\varphi_0(m_0), t\varphi_1(m_1), \dots) = t\alpha(\varphi_{\bullet})(m), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la propiedad (2) de los morfismos de módulos de persistencia discretos. En cuanto a las propiedades funtoriales, es evidente que α lleva identidades en identidades. Además, si ψ_\bullet es otro morfismo de módulos de persistencia discretos, tenemos que

$$(\alpha(\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet))(m) = (\psi_i(\varphi_i(m_i)))_{i \in \mathbb{N}} = \alpha(\psi_\bullet)(\varphi_i(m_i))_{i \in \mathbb{N}} = (\alpha(\psi_\bullet) \circ \alpha(\varphi_\bullet))(m).$$

Consideremos ahora el homomorfismo de $R[t]$ -módulos graduados

$$\eta : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i,$$

que para cada $i \in \mathbb{N}$ induce un homomorfismo $\eta_i : M_i \rightarrow N_i$ compatible con el producto por t . En consecuencia, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 & \xrightarrow{t} & M_1 & \xrightarrow{t} & \cdots & \xrightarrow{t} & M_i & \xrightarrow{t} & M_{i+1} & \xrightarrow{t} & \cdots \\ \downarrow \eta_0 & & \downarrow \eta_1 & & & & \downarrow \eta_i & & \downarrow \eta_{i+1} & & \\ N_0 & \xrightarrow{t} & N_1 & \xrightarrow{t} & \cdots & \xrightarrow{t} & N_i & \xrightarrow{t} & N_{i+1} & \xrightarrow{t} & \cdots \end{array}$$

es conmutativo. Definamos ahora $\beta(\eta) = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ y veamos que es un homomorfismo de módulos de persistencia discretos entre \mathcal{M} y \mathcal{N} . En consecuencia, β nos da homomorfismos de grupos $\eta_i : M_i \rightarrow N_i$ que, a su vez, son homomorfismos de R -módulos. Para comprobarlo, basta tomar cualquier $r \in R$ y $m_i \in M_i$ y vemos que $\eta_i(rm_i) = \eta(rm_i) = r\eta(m_i) = r\eta_i(m_i)$. Como los homomorfismos de R -módulos de \mathcal{M} y \mathcal{N} se obtienen mediante la multiplicación por t , entonces para todo $m_i \in M_i$ tenemos que

$$\eta_{i+1}(tm_i) = \eta(tm_i) = t\eta(m_i) = t\eta_i(m_i),$$

por lo que $\beta(\eta)$ es un homomorfismo de módulos de persistencia discretos. Claramente β conserva la identidad. Luego para otro $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y cualquier $m = (m_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$,

$$(\beta(\theta \circ \eta))(m) = (\theta(\eta(m_i)))_{i \in \mathbb{N}} = \beta(\theta)(\eta(m_i))_{i \in \mathbb{N}} = (\beta(\theta) \circ \beta(\eta))(m).$$

Esto es, β es un funtor. Finalmente, por la construcción de α y β tenemos que $\beta \circ \alpha$ es el funtor identidad en $R[t]$ -Gr-Mod y que $\alpha \circ \beta$ es el funtor identidad en R -PersMod. \square

En la práctica generalmente trabajaremos con módulos de persistencia que cumplen ciertas condiciones de finitud. Por ello, resulta de gran interés conocer si la correspondencia recién realizada se sigue cumpliendo bajo estos casos.

Definición 4.12. Diremos que un módulo de persistencia discreto \mathcal{M} es de **tipo finito** si existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq i \leq j$ la aplicación $f_{i,j}$ es un isomorfismo.

Definición 4.13. Diremos que un módulo de persistencia discreto \mathcal{M} es de **finitamente presentado (generado)** si es de tipo finito y además, M_i es finitamente presentado (generado) para todo $i \in \mathbb{N}$.

Lema 4.3. Sea \mathcal{M} un módulo de persistencia discreto. Si \mathcal{M} es finitamente presentado, entonces $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado.

4. Homología persistente

Demostración. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ de forma que $f_{i,j} : M_i \rightarrow N_i$ es un isomorfismo para todo $N \leq i \leq j$. Sea G un conjunto de generadores de M_i . Queremos ver que $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ es un sistema de generadores también para $\alpha(\mathcal{M})$. Para ello, veamos que todo elemento homogéneo de $\alpha(\mathcal{M})$ está generado por la unión de los G_i . Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $m_k \in \alpha(\mathcal{M})$ un elemento homogéneo de grado k . Si $k \leq N$, entonces m_k está generado por los elementos de G_k por construcción. Si $k > N$, veamos que m_k está generado por G_N . Por ser $f_{N,k}$ un isomorfismo, podemos tomar $m_N = f_{N,k}^{-1}(m_k)$. Pero como m_D está generado por G_N , entonces m_k está generado por $f_{N,k}(G_N)$. Por como hemos construido α , $f_{N,k}(G_N) = t^{k-N}G_N$ y como $t^{k-N} \in R[t]$, entonces m_k está generado por G_N . En consecuencia, $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente generado.

Para ver que $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado, consideremos el epimorfismo $\mu_i : R^{n_i} \rightarrow M_i$ que genera M_i por extensión lineal sobre G_i . Considerando $n = \sum_{i=1}^N n_i$, existe una aplicación $\mu : R[t]^N \rightarrow \alpha(\mathcal{M})$ que corresponde al sistema de generadores G . Para cada $g_i \in G$, denotemos por e_i a su correspondiente elemento en el sistema de generadores de $R[t]^N$.

A continuación definamos un conjunto finito de elementos del núcleo de μ . sea H_i el sistema de generadores de $\ker \mu_i$ para cada $0 \leq i \leq N$. Es claro que $H_i \subseteq \ker \mu_i$. Es más, para cualquier $0 \leq i < j \leq N$ y cualquier $g_i \in G_i$ tal que $f_{i,j}(g_i) \neq 0$, tenemos que

$$f_{i,j}(g_i) = \sum_{k=0}^{n_j} \lambda_k g_{jk}$$

donde $\lambda_k \in R$ y $G_i = \{g_{j0}, g_{j1}, \dots, g_{jk}\}$. Por tanto, el correspondiente elemento

$$t^{j-i}e_i - \sum_{k=0}^{n_j} \lambda_k e_{jk}$$

pertenece al $\ker \mu$. Denotemos ahora por $H_{i,j}$ al conjunto finito obtenido tomando los elementos de la forma de la expresión anterior para cada $g_i \in G_i$ tal que $f_{i,j}(g_i) \neq 0$. Sea $H = \bigcup_{i=0}^N H_i \cup \bigcup_{0 < i < j \leq N} H_{i,j}$.

A continuación, fijemos un elemento x del núcleo de μ de la forma

$$x = \sum_l \lambda_l e_l$$

de forma que $\lambda_l \in R[t]$ y e_l es un generador de $R[t]^n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x es homogéneo de algún grado k . Veamos por casos que x es finitamente generado por los elementos de H_k .

Supongamos que $k \leq N$ y que todos los escalares λ_l son de grado 0. Entonces, todos los e_l que aparecen en x son del mismo grado y por tanto, sus imágenes por μ son generadores de M_k . Es decir, x está generado por H_k .

Supongamos ahora que $k \leq N$ y que algún λ_l es de grado positivo. Por ser x homogéneo, entonces λ_l es de la forma $r_l t^{d_l}$, donde $r_l \in R$ y $d_l > 0$. Como el grado de e_l es $k - d_l$, entonces existe un elemento $h_l \in H_{k-d_l,k}$ de la forma

$$h_l = t^{d_l}e_l - \sum_{m=0}^{n_l} \tilde{\lambda}_m e_{lm},$$

donde todos los e_{l_m} son de grado k y $\tilde{\lambda}_m \in R$. Por consiguiente, en $x - r_l h_l$ el coeficiente de e_l en x es 0 en t y por tanto, sólo estamos introduciendo sumandos de grado 0 en t .

Iterando esta construcción para cada sumando de con coeficiente de grado positivo, obtenemos un elemento $x' = x - \sum_w r_w h_w$, donde $r_w \in R$, $h_w \in H$ y x' tiene solamente coeficientes de grado 0 en t . Esto es, $x = x' \sum_w r_w h_w$. Finalmente, aplicando la primera parte de la demostración tenemos que x es generado por H .

Para concluir, consideremos $k > N$. En dicho caso, cada λ_l es de grado al menos $k - N$, pues el grado maximal de e_l es N . Luego $x = t^{k-N} x'$, donde x' es homogéneo de grado N . Como $0 = \mu(x) = t^{k-N} \mu(x')$, entonces $x' \in \ker \mu$. Por la segunda parte de la demostración, concluimos que x' es generado por H y por tanto, x también. \square

Para los siguientes dos lemas, fijaremos el $R[t]$ módulo graduado finitamente presentado $\mathbf{M} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ junto con la aplicación $\mu : R[t]^n \rightarrow \mathbf{M}$ cuyo núcleo es finitamente generado. Consideremos además el sistema de generadores $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ de \mathbf{M} y sea $H = \{h_1, \dots, h_m\}$ un sistema de generadores de $\ker \mu$. Además, consideremos que tanto los elementos de G como de H son homogéneos del grado del respectivo módulo. Finalmente, vamos a asumir que dichos elementos están ordenados por grado en orden no decreciente.

Lema 4.4. *Cada M_i de \mathbf{M} está finitamente presentado como un R -módulo.*

Demostración. Veamos primero que M_i es finitamente generado. Sea d_j el grado de g_j para $1 \leq j \leq n$. Sea n_i el número de elementos de G con grado menor o igual que i . Definamos $\mu_i : R^{n_i} \rightarrow M_i$ de forma que μ_i asigne al j -ésimo generador $e_{ij} \in R^{n_i}$ el elemento $t^{i-d_j} g_j$. VER QUE ES SOBREYECTIVA, y por tanto M_i es finitamente generado.

A continuación veamos que $\ker \mu_i$ también es finitamente generado. Sean e_1, \dots, e_n los generadores de $R[t]^n$ con imagen g_1, \dots, g_n por μ respectivamente. Sea m_i el número de elementos h_j de H cuyo grado d'_j es menor o igual que i . Para cada h_j tal que $1 \leq j \leq m_i$, consideremos $t^{i-d'_j} h_j$ que podemos reescribir como

$$t^{i-d'_j} h_j = \sum_{k=1}^{m_i} r_k t^{i-d_k} e_k$$

para ciertos $r_k \in R$. Definamos ahora

$$h_{j_i} = \sum_{k=1}^{n_i} r_k e_{ki}$$

y definamos $H_i = \{h_{j_i} : 1 \leq i \leq m_i\}$. Veamos que H_i genera el núcleo de μ_i . Es claro que $\mu_i(h_{j_i}) = \mu(h_j) = 0$. Fijemos ahora un elemento arbitrario x de $\ker \mu_i$. Tenemos entonces que x es combinación lineal de $\{e_{1_i}, \dots, e_{n_i}\}$ con coeficientes en R . Reemplazando e_{j_i} por $t^{i-d_j} e_j$, obtenemos un elemento homogéneo $x' \in R[t]^n$ de grado i . Por hipótesis, podemos escribir x' como combinación de elementos de H de forma que

$$x' = \sum_{k=1}^{m_i} r'_k t^{i-d'_k} h_{ki}$$

4. Homología persistente

donde $r'_k \in R$. En consecuencia, veamos que

$$x = \sum_{k=1}^{m_i} r'_k h_{ki}.$$

Para ello, procederemos comparando coeficientes. Consideremos $j \in \{1, \dots, n_i\}$ y sea $c_j \in R$ el coeficiente de e_{ji} en x . Sea c'_j el coeficiente de e_{ji} en la suma de la expresión anterior, escribiendo cada h_{ki} como combinación lineal de los e_{ji} . Por la construcción realizada, c_j es el coeficiente de $t^{i-d_j}e_j$ en x' y c'_j es el coeficiente de $t^{i-d_j}e_j$ en la suma $\sum_{k=1}^{m_i} r'_k t^{i-d'_k} h_{ki}$. Esto es, $c_j = c'_j$. Como x se escogió de manera arbitraria de $\ker \mu_i$, entonces H_i lo genera. \square

Lema 4.5. $\beta(\mathbf{M})$ es de tipo finito. En particular, es de tipo finitamente presentado (lema anterior).

Demostración. Sea N el grado máximo de los $g_j \in G_j$, $h_k \in H_k$ de forma que $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Veamos que la multiplicación por t induce un isomorfismo entre M_i y M_{i+1} para todo $i \geq N$.

Si $y \in M_{i+1}$, entonces existen $\lambda_j \in R[t]$ de grado al menos 1 de forma que $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$. Por tanto, $y = ty'$ donde $y' \in M_i$ mostrando que la multiplicación por t es sobreyectiva.

Para ver que es inyectiva, consideremos $y \in M_i$ de forma que $ty = 0$. Sea $x \in R[t]^n$ tal que $\mu(x) = y$. Entonces $\mu(tx) = ty = 0$ y por tanto, veamos tx se puede escribir como

$$tx = \sum_{j=0}^m \tilde{\lambda}_j h_j,$$

donde cada λ_j no trivial es un polinomio de grado al menos 1. Es inmediato, pues cada h_j es de grado menor o igual que N y tx es de grado mayor o igual que $N + 1$. En consecuencia, también podemos descomponer tx como

$$tx = \sum_{j=0}^m t\lambda_j h_j = t \sum_{j=0}^m \lambda_j h_j.$$

Por ser $R[t]^n$ un módulo libre, tenemos que $x = \sum_{j=0}^m \lambda_j h_j$ y por tanto, $x \in \ker \mu$ lo que implica que $y = 0$. \square

Teorema 4.2. Sea R un anillo unitario. Entonces, un isomorfismo entre la categoría de $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados y la categoría de módulos de persistencia discretos.

Demostración. Estas categorías son subcategorías de $R[t]$ -Gr-Mod y R -PersMod respectivamente. Restringiendo α y β a dichas subcategorías, por el ?? tenemos qwu α es un funtor de los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados a los $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados. Así mismo, por los lemas ?? y ??, β es un funtor de los $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados a los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados. En consecuencia, estas subcategorías son isomorfas. \square

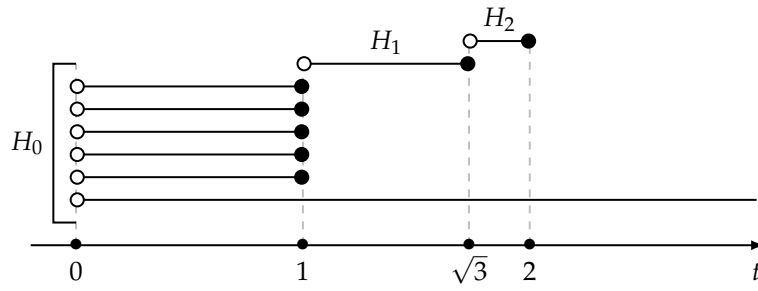
Teorema 4.3 (Teorema de descomposición de módulos graduados). Sea A un $R[t]$ -módulo graduado finitamente generado. Entonces A se descompone de manera única, salvo isomorfismos, como

$$A \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n-m} R[t](-a_i) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m R[t]/(t^{c_j})(-b_j) \right),$$

4.3. Representación de la homología persistente

donde $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{N}$, y para cada j , t^{c_j} es un elemento homogéneo tal que divide a t^{c_j+1} .

Demostración. Véase [Web85]. □



Bibliografía

- [DF04] David Steven Dummit y Richard M Foote. *Abstract algebra*, volumen 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [EM45] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.
- [Lee10] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volumen 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Mun18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.
- [Web85] Cary Webb. Decomposition of graded modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(4):565–571, 1985.
- [Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:213–245, 1949.