UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsable de tutorización

Miguel Ortega Titos
Departamento de Geometría y Topología

Julián Luengo Martín
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 21 de noviembre de 2023

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)
Ver archivo `preliminares/dedicatoria.tex`

Índice general

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo `preliminares/agradecimiento.tex`).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: `preliminares/summary.tex`

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/introduccion.tex`

Parte I.

Fundamento teórico

1. Preliminares algebraicos

1.1. Módulos

Definición 1.1. Sea R un anillo cuyo elemento identidad $1 \neq 0$. Un **R-módulo izquierdo** A es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times A \to A$ con $(r, a) \to ra$ tal que dados $r, r' \in R$, $a, a' \in A$ se tiene

1. $(r + r') + a = ra + r'a$
2. $(rr')a = r(r'a)$
3. $r(a + a') = ra + ra'$
4. $1a = a$

De la definición anterior se sigue que $0a = 0$ y $(-1)a = -a$.

De manera análoga, definimos **R-módulo derecho** donde el anillo actúa por la izquierda en vez de por la derecha de forma que $p : A \times R \to A$. Si R es un anillo conmutativo, los R-módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R-módulos. Como los resultados de R-módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos simplemente con los R-módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R-módulos a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. ej

Definición 1.2. Sea A un R-módulo izquierdo y S un subconjunto de A. Diremos que S es un submódulo izquierdo de A, esto es, $S \subset A$, si S es cerrado respecto a la suma y si $r, s \in S$ entonces $rs \in S$. Por tanto, S es un R-módulo.

Si un submódulo de R es un subconjunto $L \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $rL \subset L$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal izquierdo** de R. Tomando un ideal izquierdo L de R y A un R-módulo izquierdo, definimos el producto del ideal L por el módulo A

$$LA = \{\text{todas las sumas finitas } \sum l_i a_i, \text{ para } l_i \in L,\ a_i \in A\}$$

donde LA es un submódulo de A. En particular, el producto de dos ideales izquierdos LL' es también un ideal izquierdo y $(LL')A = L(L'A)$.

Definición 1.3. Sean A, B R-módulos. Definimos el **homomorfismo de R-módulos** de A a B como la aplicación $\alpha : A \to B$ tal que

1. $\alpha(a + a') = \alpha a + \alpha a'$
2. $\alpha(ra) = r(\alpha a)$

para todo $a, a' \in A$, $r \in R$.

También es frecuente escribir el homomorfismo de R-módulos $\alpha : A \to B$ como $A \xrightarrow{\alpha} B$.

Cuando $\alpha : A \to B$ sea un homomorfismo de R-módulos, diremos que A es el **dominio** y B el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\mathrm{Im}(\alpha) = \{\alpha(a) : a \in A\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{a \in A : \alpha(a) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando $\alpha(A) = B$, un **monomorfismo** cuando $\ker(\alpha) = \{0\}$ y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre A y B diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\omega : A \to A$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dados dos homomorfismos de R-módulos $\alpha_1, \alpha_2 : A \to B$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$ para todo $a \in A$. Además, dados dos homomorfismos de R-módulos $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, su **composición** $\beta \circ \alpha : A \to C$ es también un homomorfismo de R-módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β. En ocasiones usaremos la notación $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : A \to B$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : B \to A$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_A$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1_B$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : A \to A$ tal que $\gamma \circ \alpha = 1_A$. No tiene por qué existir ni ser única.

Definición 1.4. Sea $\{A_i, \alpha_i\}$ una familia de R-módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \to A_{i+1}$. Diremos que la secuencia

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** cuando $\mathrm{Im}\,\alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$.

Para cada submódulo $T \subset B$, la inclusión de T en B es un monomorfismo $i : T \to B$. Las **clases laterales** de T en B son los conjuntos $b + T = \{b + t : t \in T\}$ donde $b \in B$. Dos clases laterales $b_1 + T$, $b_2 + T$ son iguales si $b_1 - b_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano B/T se convierte en un R-módulo cuando $r(b + T) = rb + T$ para todo $r \in R$. A este R-módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de B sobre T. El homomorfismo $\pi : B \to B/T$ tal que $\pi(b) = b + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de B.

Proposición 1.1. *Sea $\beta : B \to B'$ un homomorfismo de módulos con $T \subset \ker\beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : B/T \to B'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/T \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & B' \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Definamos $\beta'(b + T) = \beta(b)$. Por estar T contenida en el núcleo de β, la función está bien definida. En efecto, si $a, b \in B$ entonces $a + T = b + T \Rightarrow a - b \in T \subset \ker\beta \Rightarrow \beta(a - b) = 0 \Rightarrow \beta(a) = \beta(b)$. Como β es un homomorfismo, β' también lo es. □

En particular, si $\beta : B \to B'$ es un epimorfismo con núcleo T, $\beta' : B/T \to B'$ es un isomorfismo. Esta afirmación puede expresarse de la siguiente manera: cada β con $\beta(T) = 0$ *factoriza de manera única* a través de la proyección π. Esta propiedad caracteriza a $\pi : B \to B/T$ hasta un isomorfismo de B/T, de la siguiente manera:

Proposición 1.2. *Si $T \subset B$ y $\eta : B \to D$ es tal que $\eta(T) = 0$ y cada $\beta : B \to B'$ con $\beta(T) = 0$ factoriza de manera única a través de η, entonces hay un isomorfismo $\theta : B/T \cong D$ con $\theta\pi = \eta$.*

Demostración. Factorizar η a través de π y π a través de η, así que $\eta = (\eta'\pi)\eta = 1_\eta$. Pero η factoriza *únicamente* a través de π, así que $\eta'\pi = 1$. Simétricamente, $\pi'\eta = 1$. Por lo tanto $\pi' = (\eta')^{-1}$ y η' es el isomorfismo deseado θ. $\square$

Para cualquier $T \subseteq B$ la inyección i y la proyección π producen una secuencia exacta.

$$0 \to T \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/T \to 0.$$

Definición 1.5. Sean A, B y C R-módulos y $\sigma : A \to B$, $\gamma : B \to C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la secuencia

$$(\sigma, \gamma) : 0 \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \to 0$$

es una **secuencia exacta corta**. Es decir, una secuencia exacta de cinco R-módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

La exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker \gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la secuencia exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B. Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \to A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \to C$; juntos estos proveen un isomorfismo de secuencias exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma A \arrow[r] & B \arrow[r] & B/\sigma A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En resumen, una secuencia exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Si $\alpha : A \to B$ y $S \subseteq A$, el conjunto αS de todos los elementos αs para $s \in S$ es un submódulo de B llamado la **imagen** de S bajo α. De manera similar, si $T \subseteq B$, el conjunto $\alpha^{-1}T$ de todos los $s \in A$ con $\alpha s \in T$ es un submódulo de A, llamada la **imagen inversa** (completa) de T. En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de B que consiste solo del elemento cero.

Para $K \subseteq S \subseteq A$ el módulo S/K es llamado un **subcociente** de A; es un módulo cociente del submódulo S de A, y simultáneamente un submódulo del módulo cociente A/K. Además, si $K' \subseteq K \subseteq S' \subseteq S \subseteq A$, entonces K'/K es un submódulo de S'/K y la proyección compuesta $S' \to (S'/K)/(K'/K)$ tiene núcleo K', por lo tanto el isomorfismo familiar $(S'/K)/(K'/K) \cong S'/K'$. Esto nos permite escribir cada subcociente $(S'/K)/(K'/K)$ de un subcociente S/K directamente como un subcociente de A. Si $\alpha : A \to A'$ tiene $\alpha S \subseteq S'$ y $\alpha K \subseteq K'$, entonces $\alpha s + K'$ es una clase lateral de S'/K' determinada de manera única por la clase lateral $s + K$ de S/K. Por lo tanto $\alpha_*(s + K) = \alpha s + K'$ define un homomorfismo

$$\alpha_* : S/K \to S'/K'$$

$$(\alpha S \subseteq S', \alpha K \subseteq K')$$

llamado el homomorfismo **inducido** por α en los subcocientes dados.

Si S y T son submódulos de A, su **intersección** $S \cap T$ (como conjuntos) es también un submódulo, así como su **unión** $S + T$, consistiendo de todas las sumas $s + t$ para $s \in S$, $t \in T$. El **teorema del isomorfismo de Noether** afirma que 1_A induce un isomorfismo

$$1_* : S/(S \cap T) \cong (S+T)/T.$$

1.2. Categorías

Definición 1.6. Una **categoría** $\mathcal{C}$ es una tripleta $(\mathcal{O}, \hom, \circ)$ formada por

1. Una clase $\mathcal{O}$, cuyos elementos denominamos **objetos** de $\mathcal{C}$ y notamos por $Obj(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, un conjunto $\hom(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B. Si $f \in \hom(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \to B$ y a cada morfismo $g : B \to C$ un morfismo $g \circ f : A \to C$ satisfaciendo
   - **Asociatividad**. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
   - **Identidad**. A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $1_B : B \to B$ tal que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ entonces $g \circ 1_B = g$ y $1_B \circ f = f$.

   Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g.

Ejemplo 1.2. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de espacios topológicos**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \to Y$.
- **La categoría de grupos**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de conjuntos**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.

Definición 1.7. Sea $f \in \hom(A, B)$ un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$. Diremos que f es una **equivalencia** en $\mathcal{C}$ si existe en $\mathcal{C}$ otro morfismo $g \in \hom(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Nótese que si $f \in \hom(A, B)$ es una equivalencia en $\mathcal{C}$, $g \in \hom(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \hom(B, A)$ tal que $g' \circ f = 1_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ 1_B = g'$.

1.3. Funtores

Definición 1.8. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una pareja de funciones *denotadas por la misma letra* T tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.
2. Una **función de morfismos** qu asigna a cada morfismo $\gamma : C \to C'$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $T(\gamma) : T(C) \to T(C')$ de $\mathcal{D}$. Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = 1_{T(C)}, \qquad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \qquad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

Es decir, un funtor covariante $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

2. Símplices y complejos simpliciales

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplice. Su simplicidad y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplice y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzaremos recordando algunos conceptos de la geometría afín y seguiremos en la línea de MUNKRES.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N-dimensional, lo notaremos por $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^N$. Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \cdots = t_n$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \ldots, a_n\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Nótese que la transformación afín T de $\mathbb{R}^N$ tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$ con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual, obtenemos una transformación afín $S : P \to \mathbb{R}^n \times 0$ tal que $S(a_i) = (0, \overset{i-1}{\ldots}, 1, \overset{i+1}{\ldots}, 0)$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \ldots, a_n\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en $\mathbb{R}^N$. Definimos el **n-símplex** o **símplice** $\sigma = [a_0, \ldots, a_n]$ generado por $a_0, \ldots, a_n$ como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1$$

con $t_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Los coeficientes t_i están determinados de manera única por el punto x. A los términos $t_0, \ldots, t_n$ los llamamos las **coordenadas baricéntricas** de σ con respecto a $a_0, \ldots, a_n$.

Los puntos $a_0, \ldots, a_n$ que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número n lo llamaremos la **dimensión** de σ.

Definición 2.4. Sea $\sigma = [a_0, \ldots, a_n]$ un símplice. Una **cara** de σ será cualquier símplice generado por un subconjunto de $\{a_0, \ldots, a_n\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos Bd σ. Finalmente, definimos el **interior** de σ, Int σ, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

(a) 0-símplex (b) 1-símplex (c) 2-símplex (d) 3-símplex

Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

2.2. Complejos simpliciales

BIB - MUNKRES, JOHN LEE

Definición 2.5. Un **complejo simplicial** K en $\mathbb{R}^N$ es una colección de símplices en $\mathbb{R}^N$ tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K.
2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K es una cara de ambos símplices.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 2.1. *Una colección K de símplices es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Toda cara de un símplice de K está en K.*
2. *Los símplices de K tienen interior disjunto dos a dos. REVISRA*

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplices $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$. Si s fuera una cara propia de σ, entonces x pertenecería a la frontera de σ, lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ. Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen *(1)* y *(2)*. Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices $b_0, \ldots, b_m$ de σ que están en τ. Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a $b_0, \ldots, b_m$. Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \operatorname{Int} s \cap \operatorname{Int} t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ. Se sigue de *(2)* que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \ldots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ', lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. □

Definición 2.6. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K.

Entre los subcomplejos de un complejo simplicial, cabe destacar el siguiente. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p. Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ es el conjunto de vértices de K.

Definición 2.7. Sea K un complejo simplicial de $\mathbb{R}^N$ y sea $|K|$ el subconjunto de $\mathbb{R}^N$ tal que $|K|$ es la unión de todos los símplices de K. Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de $\mathcal{T}$ son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de $\mathbb{R}^N$ para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ, pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma$, $O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $\cup_{i \in I} O_i \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ. En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

Lema 2.2. *Sea K un comlpejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \to X$ es continua si, y sólo si, $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Demostración. Si f es continua, también lo es f_σ por ser σ un subespacio de K. Supongamos ahora que $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X, $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_\sigma^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_\sigma$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. □

Definición 2.8. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X. Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \to X$ es una **triangulación**.

2.3. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.3. *Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ una aplicación. Supongamos que siempre que los vértices $v_0, \ldots, v_n$ de K generen un símplice en K, los puntos $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ son vértices de un símplice de L. Entonces podemos extender f a una aplicación continua $g : |K| \to |L|$ tal que*

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

*Llamaremos a g la **aplicación simplicial** (lineal) inducida por f.*

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ generan un símplice τ en L. Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i, con $i \in \{0, \ldots, n\}$, es igual a uno, luego $g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$ es un punto de τ. Podemos ver que g es una aplicación continua del símplice σ generado por $v_0, \ldots, v_n$ al símplice τ generado por $f(v_0), \ldots, f(v_n)$.

Ahora tan solo nos queda ver que $g : |K| \to |L|$ es continua. Bien, pues por ser $g : \sigma \to \tau$ continua, también lo es $g : \sigma \to |L|$. Finalmente por el Lema 2.2, $g : |K| \to |L|$ es continua. □

Lema 2.4. *Supongamos que $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices $v_0, \ldots, v_n$ de K generan un símplice de K si, y sólo si, $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ generan un símplice de L. Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \to |L|$ es un homeomorfismo.*

Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L.

Demostración. Por hipótesis, cada símplice $\sigma \in K$ se identifica con otro símplice $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \to \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \to \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h(\sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)) = \sum_{i=0}^{n} t_i f^{-1}(v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i = x$$

□

2.4. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simples, son de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.9. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$.

Al elemento A de $\mathcal{S}$ lo llamaremos **símplice** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A.

En cuanto a la **dimensión** de $\mathcal{S}$, diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de $\mathcal{S}$ es infinita. El **conjunto de vértices** V de $\mathcal{S}$ diremos que es la unión de elementos de $\mathcal{S}$ que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de $\mathcal{S}$ a cualquier subcolección de $\mathcal{S}$ que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ respectivamente. Dos complejos abstractos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \to V_T$ tal que $\{a_0, \ldots, a_n\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \ldots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.10. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset V$ tales que los vértices $a_0, \ldots, a_n$ generan un símplice de K. Entonces llamaremos a la colección $\mathcal{K}$ el **esquema de vértices** de K.

Después de realizar todas las definiciones pertinentes, ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) Todo complejo abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K.

(b) Dos complejos simpliciales son linealmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.

Demostración. Para demostrar (a), empezaremos tomando un conjunto de índices J. Llamemos $\mathbf{E}^J$ al subconjunto de funciones $x : J \to \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^J$ tales que $x(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in J$ excepto para un número finito de valores. Sea Δ^J la colección de todos los símplices en $\mathbf{E}^J$ generados por subconjuntos finitos de la base usual de $\mathbf{E}^J$. Δ^J es un complejo simplicial. Sean entonces σ, τ símplices de Δ^J, la unión de sus conjuntos de vértices es afínmente independiente y genera un símplice en Δ^J. Diremos que Δ^J es un *símplice de dimensión infinita*.

Sea ahora $\mathcal{S}$ un complejo abstracto con conjunto de vértices V. Tomamos un conjunto de índices J lo bastante grande para que podamos tomar una aplicación inyectiva $f : V \to J$. A continuación, vamos a tomar un subcomplejo de Δ^J tal que para cada símplice abstracto $\{a_0, \ldots, a_n\} \in \mathcal{S}$, el símplice (geométrico) generado por $f(a_0), \ldots, f(a_n)$ está en K. Por tanto K es un complejo simplicial y f es un isomorfismo entre $\mathcal{S}$ y el esquema de vértices de K.

En cuanto a (b), es una consecuencia inmediata del Lema 2.4. □

Definición 2.11. Si el complejo simplicial abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K, diremos que K es una **realización geométrica** de $\mathcal{S}$.

3. Homología

El término de homología se puede definir de manera puramente algebraica, lo cual marcó un avance significativo en el desarrollo de la topología algebraica. En este capítulo, presentaremos una síntesis concisa de los fundamentos que subyacen a las diversas aproximaciones para construir la teoría de la homología. Estos principios servirán como base para abordar casos específicos en capítulos posteriores y comprender mejor las propiedades topológicas de los espacios.

3.1. Grupos de homología

Definición 3.1. Sea C un grupo abeliano junto a un endomorfismo $d : C \to C$ tal que $d^2 = 0$. Diremos entonces que C es un **grupo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C.

Llamaremos a los elementos de C **cadenas**. El subgrupo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el subgrupo de **bordes** $B(C) = \operatorname{Im} d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

Definición 3.2. Sea C un grupo diferencial. Definimos el **grupo de homología** de C como el grupo cociente $H(C)$ tal que

$$H(C) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

Por tanto, el grupo de homología de un grupo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C. A los elementos de $H(C)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Ejemplo 3.1. contenidos...

Definición 3.3. Sean C y C' dos grupos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \to C'$ es un **homomorfismo de grupos diferenciales** si f es un homomorfismo de grupos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del grupo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$ que sea un ciclo o un borde y $f : C \to C'$ es un homomorfismo de grupos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente.

Definición 3.4. Sean C, C' grupos diferenciales y $f : C \to C'$ un homomorfismo de grupos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C) \to H(C')$ satisfaciendo

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f.

En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de grupos diferenciales a la categoría de grupos.

Ejemplo 3.2. contenidos...

3.2. Complejos de cadena

Definición 3.5. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** K de R-módulos es una familia $\{K_n, \partial_n\}$ donde K_n son R-módulos y $\partial_n : K_n \to K_{n-1}$ homomorfismos de R-módulos tales que $\partial_n \partial_{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La última condición es equivalente a que $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo K es por tanto una secuencia doblemente infinita

$$K : \cdots \to K_1 \to K_0 \to K_{-1} \to \cdots$$

donde toda composición es el homomorfismo con imagen el cero. La **homología** $H(K)$ es la familia de módulos

$$H_n(K) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

Luego $H_n(K) = 0$ implica que la secuencia K es exacta en K_n. A los elementos de K_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Si la dimensión se sobrentiende, la llamaremos simplemente **cadena**. Un **n-ciclo** de K es un elemento del submódulo $C_n(K) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** es un elemento de $\partial_{n+1} K_{n+1}$. La clase lateral de un ciclo c se escribe $[c] = c + \partial K_{n+1}$. Dos n-ciclos $c, c' \in C_n(K)$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Definición 3.6. Sean K, K' complejos de cadena. Una **aplicación de cadena** o **morfismo de cadena** $f : K \to K'$ es una familia de homomorfismos de R-módulos $f_n : K_n \to K'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La función $H_n(f) = f_*$ definida por $f_*([c]) = f_*(c + \partial K_{n+1}) = fc + \partial K'_{n+1}$ es un homomorfismo $H_n(f) : H_n(K) \to H_n(K')$. Así mismo, cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadena y morfismos de cadenas a la categoría de módulos.

Definición 3.7. Sean K, K' cadenas de complejos y $f, g : K \to K'$ dos aplicaciones de cadena entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : K_n \to K'_{n+1}$ para cada dimensión $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 3.1. *Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : K \to K'$, entonces*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(K) \to H_n(K')$$

Demostración. Si c es un ciclo de K_n, tenemos que $\partial_n c = 0$. Por 3.7 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(K')$, como queríamos demostrar. □

Definición 3.8. Una aplicación de cadena $f : K \to K'$ es una **equivalencia de cadena** si existe otra aplicación $h : K' \to K$ y homotopías $s : h \circ f \to 1_K$, $t : f \circ h \to 1_{K'}$ tales que $h \circ f \simeq 1_K$, $f \circ h \simeq 1_{K'}$.

Como $H_n(1_K) = 1$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 3.1. *Si $f : K \to K'$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(K) \to H_n(K')$ es un isomorfismo para cada dimensión $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 3.1. *Sean $f, g : K \to K'$ y $f', g' : K' \to K''$ aplicaciones de cadena. Sean $s : f \to g$, $s' : f' \to g'$ homotopías de cadena entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces su composición*

$$f's + s'g : f' \circ f \to g' \circ g \qquad g' \circ g : K \to K''$$

es una homotopía de cadena.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadena tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g$$
$$\partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g$$

Sumando ambas igualdades

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g$$

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - g' \circ g$$
$$\partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'g\partial = f' \circ f - g' \circ g$$
$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g$$

□

3.3. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 3.9. Un **subcomplejo** S de K es una familia de submódulos $S_n \subset K_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, S es un complejo en sí con el operador borde inducido $\partial = \partial_K$ y la inclusión $i : S \to K$ es una aplicación de cadena.

Definición 3.10. Sea S un subcomplejo de K. El **complejo cociente** K/S es la familia $(K/S)_n = K_n/S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial' : K_n/S_n \to K_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por ∂_K.

La proyección es la aplicación de cadena $\pi : K \to K/S$ y la secuencia corta S_n FLECHARARA $K_n FLECHA (K/S)_n$ es exacta para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Si $f : K \to K'$ es una transformación de cadenas, entonces $\ker(f) = \{\ker(f_n)\}$ es un subcomplejo de K, $\mathrm{Im}(f) = \{f_n(K_n)\}$ es un subcomplejo de K', mientras que $K'/\mathrm{Im}(f)$ es el cociente de f y $K/\ker(f)$ el conúcleo.

Definición 3.11. Un par de aplicaciones de cadenas $K \xrightarrow{f} K' \xrightarrow{g} K''$ es **exacto** en K' si $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada secuencia $K_n \xrightarrow{f_n} K'_n \xrightarrow{g_n} K''_n$ de módulos es exacta en K'_n.

Para cualquier $f : K \to K'$,

$$0 \to \ker(f) \to K \xrightarrow{f} K' \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$$

es una secuencia exacta de complejos.

Un complejo K es **positivo** si $K_n = 0$ para $n < 0$. Su homología es entonces positiva ($H_n(K) = 0$ para $n < 0$). De manera análoga, un complejo K es **negativo** si $K_n = 0$ para $n > 0$. Suele notarse con índices superiores positivos y tiene la forma

$$0 \to K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \xrightarrow{\delta^1} K^2 \to \cdots, \quad \delta\delta = 0,$$

con homología $H^n(K) = \ker(\delta^n)/\mathrm{Im}(\delta^{n-1})$ positiva en los índices superiores. En esta forma, a menudo se le llama **complejo derecho** o **complejo de cocadenas**.

Definición 3.12. Sean f y g aplicaciones de cadena de K a K' y sea s una homotopía de cadenas entre ellas. Diremos que s es una **homotopía de cocadena** si está escrita con índices superiores. Esto es, $s^n : K^n \to K'^{n-1}$ con $\delta s + s\delta = f - g$.

Consideremos ahora el caso donde A es un módulo y definimos un complejo positivo con $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$.

Un **complejo sobre** A es un complejo positivo K junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : K \to A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : K_0 \to A$ tal que $\varepsilon\partial = 0 : K_1 \to A$. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : K \to A$ es una aplicación de cadenas $f : A \to K$ tal que $\varepsilon f = 1_A$ junto con una homotopía $s : 1_K \simeq f\varepsilon$. En otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \to K_0$ y $s_n : K_n \to K_{n+1}, n = 0, 1, \ldots$, tal que

$$\varepsilon f = 1, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = 1_{K_0}, \quad \partial_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = 1_{K_n} \quad (n > 0).$$

Equivalentemente, extiende el complejo estableciendo $K_{-1} = A$, $\partial_0 = \varepsilon : K_0 \to K_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Entonces (2.5) establece simplemente que $s : 1_K \simeq 0$ para las aplicaciones 1, o del complejo extendido a sí mismo. Si $\varepsilon : K \to A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son $\varepsilon_* : H_0(K) \simeq A$ para $n = 0$ y $H_n(K) = 0$ para $n > 0$.

Los complejos K de grupos abelianos libres surgen en topología. Si cada K_n es finitamente generado, entonces cada $H_n(K)$ es un grupo abeliano finitamente generado. El teorema de estructura para tales grupos presenta $H_n(K)$ como una suma directa

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde el número b_n, de sumandos cíclicos infinitos y los enteros $m_1, \ldots, m_k$ (cada uno divisor del siguiente) dependen solo de $H_n(K)$. El entero b_n se llama el n-ésimo número de Betti de K, y los $\{m_i\}$ los coeficientes de torsión n-ésimos.

A. Ejemplo de apéndice

Los apéndices son opcionales.

Este fichero `apendice-ejemplo.tex` es una plantilla para añadir apéndices al TFG. Para ello, es necesario:

- Crear una copia de este fichero `apendice-ejemplo.tex` en la carpeta `apendices` con un nombre apropiado (p.e. `apendice01.tex`).
- Añadir el comando `\input{apendices/apendice01}` en el fichero principal `tfg.tex` donde queremos que aparezca dicho apéndice (debe de ser después del comando `\appendix`).

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

$\mathbb{R}$ Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$ Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$ Conjunto de números enteros.

Bibliografía

[AZ14] Martin Aigner y Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edición, 2014. Including illustrations by Karl H. Hofmann.

[CIMT22] Jesús Castro-Infantes, José M. Manzano, y Francisco Torralbo. Conjugate plateau constructions in product spaces, 2022. Preprint. arXiv: 2203.13162 [math.DG].

[Doe03] John Doe. Are we living in a simulation?, July 2003. Bacherlo's Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

[Eul85] Leonhard Euler. An essay on continued fractions. *Math. Systems Theory*, 18(4):295–328, 1985. Translated from the Latin by B. F. Wyman and M. F. Wyman.

[Rem56] Robert Charles Rempel. *Relaxation Effects for Coupled Nuclear Spins*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, June 1956.

[Tan96] Jian Tang. Spin structure of the nucleon in the asymptotic limit. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, September 1996.

[Wik23] Wikipedia. Leonhard Euler — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler, 2023. [Recurso online, accedido el 27 de julio de 2023].