



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024



Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

**Responsable de
tutorización**

Miguel Ortega Titos
Departamento de Geometría y Topología

Julián Luengo Martín
*Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial*

Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías
Informática y de
Telecomunicación

Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 27 de mayo de 2024

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Fundamento teórico	1
1. Fundamentos del álgebra homológica	3
1.1. Módulos	3
1.2. Sucesiones exactas	7
1.3. Categorías y funtores	8
1.4. Módulos diferenciales	10
1.5. Complejos de cadenas	11
1.6. Subcomplejos y complejos cociente	14
2. Simples y complejos simpliciales	17
2.1. Simples	17
2.2. Complejos simpliciales	19
2.3. Celdas y CW-complejos	22
2.4. Aplicaciones simpliciales	27
2.5. Complejos simpliciales abstractos	28
3. Homología simplicial	31
3.1. Homología simplicial orientada	31
3.2. Homología del complejo cono	35
3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris	37
3.4. Conexión y el módulo de homología $H_0(K; R)$	41
4. Homología persistente	45
4.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips	45
4.2. Módulos de homología persistente	47
4.3. Representación de la homología persistente	48
Bibliografía	59

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Fundamento teórico

1. Fundamentos del álgebra homológica

La teoría de homología es una rama de la topología que trata de resolver problemas topológicos en el ámbito del álgebra. Por este motivo es importante conocer muy bien algunas herramientas algebraicas que iremos utilizando con frecuencia. En todo el capítulo usaremos como referencia principal [Mac12].

1.1. Módulos

La estructura de módulo surge con la idea de generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo a un anillo. Nuestro interés en ellos radica en que la teoría de homología se construye sobre módulos y por ello es necesario hacer una introducción al campo. Esta sección recoge algunas definiciones y resultados de interés vistos en la asignatura de Álgebra Moderna y complementada con los contenidos de [DFo4].

Definición 1.1. Sea R un anillo con elemento identidad $1 \neq 0$. Un R -módulo izquierdo M es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times M \rightarrow M$ con $(r, m) \rightarrow rm$ tal que dados $r, r' \in R, m, m' \in M$ se tiene

1. $(r + r')m = rm + r'm,$
2. $(rr')m = r(r'm),$
3. $r(m + m') = rm + rm',$
4. $1m = m.$

De la definición anterior se sigue que $0m = 0$ y $(-1)m = -m$.

De manera análoga, definimos R -módulo derecho donde el anillo actúa por la derecha en vez de por la izquierda de forma que $p : M \times R \rightarrow M$. Si R es un anillo conmutativo, los R -módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R -módulos. Como los resultados de R -módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos con los R -módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R -módulos o módulos a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. El interés de los R -módulos subyace en la cantidad de estructuras conocidas que engloba. Si por ejemplo consideramos el K -módulo donde K es un cuerpo, éste adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Ahora sea M un \mathbb{Z} -módulo. Definimos el producto p de forma que para $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in M$ con $n > 0$, $nm = m + m + \dots + m$ (n veces), $0m = 0$ y $(-n)m = -(nm)$. Entonces M ha de tener estructura de **grupo abeliano**. En particular, si R es un anillo entonces es también un R -módulo.

Definición 1.2. Sea M un R -módulo izquierdo y N un subconjunto de M . Diremos que N es un **submódulo** de M , esto es, $N \subset M$, si N es cerrado respecto a la suma y si $r \in R, n \in N$ entonces $rn \in N$.

De la definición anterior se deduce que N es un R -módulo.

Definición 1.3. Sea R un R -módulo. Si un submódulo de R es un subconjunto $I \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $\langle I \rangle = \{ri : i \in I\} \subset I$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal** de R . En particular, si I consta de un único elemento $i \in I$, diremos que es el **ideal generado por i** y lo denotaremos por $\langle i \rangle$.

Definición 1.4. Sea M un R -módulo y sea $m \in M$. El conjunto $\langle m \rangle = \{rm : r \in R\}$ es un submódulo de M que denominaremos **submódulo cíclico generado por m** .

Observación 1.1. Nótese que si R es un R -módulo, el submódulo cíclico generado por un elemento es el ideal generado por el mismo elemento.

Definición 1.5. Sea M un R -módulo y sean S un subconjunto de M . Sea $\langle S \rangle$ el submódulo formado por la intersección de todos los submódulos de M que contienen a S . Diremos entonces que $\langle S \rangle$ es el **submódulo generado por S** y los elementos de S los llamaremos **generadores** de $\langle S \rangle$.

Definición 1.6. Sea M un R -módulo. Un submódulo N de M es **finitamente generado** si existe un subconjunto finito $S \subset M$ tal que $N = \langle S \rangle$.

Lema 1.1. Sea M un R -módulo. M es finitamente generado por n elementos si, y sólo si, existe un epimorfismo $\phi : R^n \rightarrow M$.

Definición 1.7. Sea M un R -módulo finitamente generado por n elementos y sea $\phi : R^n \rightarrow M$ un epimorfismo. Diremos que M es **finitamente presentado** si $\ker \phi$ es finitamente generado.

Definición 1.8. Sean M, N R -módulos. Definimos el **homomorfismo de R -módulos** de M a N como la aplicación $\alpha : M \rightarrow N$ tal que

1. $\alpha(m + m') = \alpha(m) + \alpha(m')$,
2. $\alpha(rm) = r\alpha(m)$

para todo $m, m' \in M, r \in R$.

Cuando $\alpha : M \rightarrow N$ sea un homomorfismo de R -módulos, diremos que M es el **dominio** y N el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\text{Im}(\alpha) = \{\alpha(m) : m \in M\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{m \in M : \alpha(m) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando α sea sobreyectiva, un **monomorfismo** cuando α sea inyectiva y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre M y N diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\alpha : M \rightarrow M$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dado que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de R -módulos coincide con el de los grupos abelianos subyacentes, la siguiente caracterización es inmediata de la ya conocida para grupos:

Proposición 1.1. Sea $\alpha : M \rightarrow N$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces

1. α es un monomorfismo si, y sólo si, $\ker(\alpha) = 0$.
2. α es un epimorfismo si, y sólo si, $\text{Im}(\alpha) = N$.

Es frecuente escribir el homomorfismo de R -módulos $\alpha : M \rightarrow N$ como $M \xrightarrow{\alpha} N$. Respecto a la notación de la imagen de un elemento $m \in M$ por α , pondremos $\alpha(m)$ o simplemente

αm . En cuanto a la imagen de A por α , lo representaremos de manera análoga por $\alpha(M)$ o αM .

Dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha_1, \alpha_2 : M \rightarrow N$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(m) = \alpha_1(m) + \alpha_2(m)$ para todo $m \in M$. Además, dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha : M \rightarrow N$, $\beta : N \rightarrow P$, su **composición** $\beta \circ \alpha : M \rightarrow P$ es también un homomorfismo de R -módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β . En ocasiones usaremos la notación por yuxtaposición $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : M \rightarrow N$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : N \rightarrow M$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_M$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_N$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : N \rightarrow M$ tal que $\gamma \circ \alpha = \text{id}_M$. De manera análoga, el homomorfismo $\theta : M \rightarrow N$ es **inversa derecha** de α si $\alpha \circ \theta = \text{id}_N$.

Si $T \subseteq N$, el conjunto $\alpha^{-1}T = \{m \in M : \alpha(m) \in T\}$ es un submódulo de M , llamado la **imagen inversa** (completa) de T . En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de N que consiste solo en el elemento cero.

Sea $T \subseteq N$ donde N es un R -módulo, llamaremos **inclusión** o **inyección canónica** al homomorfismo $i : T \rightarrow N$ tal que $i(t) = t$ para todo $t \in T$. En particular, i es un monomorfismo. Las **clases laterales** de T en N son los conjuntos $n + T = \{n + t : t \in T\}$ donde $n \in N$. Dos clases laterales $n_1 + T$, $n_2 + T$ son iguales si $n_1 - n_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano N/T se convierte en un R -módulo cuando $r(n + T) = rn + T$ para todo $r \in R$. A este R -módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de N sobre T . El homomorfismo $\pi : N \rightarrow N/T$ tal que $\pi(n) = n + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de N .

Proposición 1.2 (Teorema de factorización). *Sea $\beta : M \rightarrow M'$ un homomorfismo de módulos con $T \subset \ker \beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : M/T \rightarrow M'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\pi} & M/T \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & M' \end{array}$$

es conmutativo. Al homomorfismo β' lo llamaremos **homomorfismo inducido** por β .

Teorema 1.1 (Primer teorema de isomorfía). *Sea $\beta : M \rightarrow M'$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces*

$$\frac{M}{\ker \beta} \cong \text{Im } \beta.$$

Definición 1.9. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos el **producto directo** o **producto directo externo** de $\{M_i\}_{i \in I}$ como el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i\},$$

donde las operaciones se definen componente a componente:

$$\begin{aligned} (x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} &= (x_i + y_i)_{i \in I}, \\ r(x_i)_{i \in I} &= (rx_i)_{i \in I}, \end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $x_i, y_i \in M_i$, $i \in I$.

1. Fundamentos del álgebra homológica

Definición 1.10. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos la **suma directa** o **suma directa interna** de $\{M_i\}_{i \in I}$ como el submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$ tal que

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i = 0 \text{ p.c.t. } i \in I\}.$$

Nota. Recordemos que una condición se cumple "para casi todo"(p.c.t.) elemento de un conjunto si se cumple para todo elemento en él salvo en un subconjunto finito de elementos.

Definición 1.11. Sea B un conjunto y sea M el R -módulo tal que $M = \bigoplus_{b \in B} R_b$ donde $R_b = R$ para todo $b \in B$. Llamaremos a dicho R -módulo el **R -módulo libre de base B** y lo notaremos por $R\langle B \rangle$. De esta forma, cada $x \in R\langle B \rangle$ se representa por $x = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ donde $\lambda_b \in R$ son coeficientes no nulos en un número finito de posiciones b .

Teorema 1.2 (Propiedad universal de los módulos libres). *Sean B un conjunto, M un R -módulo y $\varphi : B \rightarrow M$ una aplicación entre conjuntos. Entonces existe un único homomorfismo de R -módulos $\phi : R\langle B \rangle \rightarrow M$ de forma que $\phi(b) = \varphi(b)$ para todo $b \in B$. Es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow i & \searrow \phi & \\ R\langle B \rangle & & \end{array}$$

conmuta.

Definición 1.12. Sea M un R -módulo libre. Si para toda base B de M , B tiene la misma cardinalidad, entonces decimos que M tiene **rango** $\text{rg } M = \#B$, donde $\#B$ es la cardinalidad alguna base de M .

Definición 1.13. Sea x un elemento de un R -módulo. Decimos que x es un **elemento de torsión** si existe un $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $rx = 0$. Por otro lado, x es un **elemento sin torsión** si el único elemento $r \in R$ que satisface $rx = 0$ es $r = 0$. Un R -módulo se clasifica como **módulo de torsión** si cada uno de sus elementos es un elemento de torsión. Análogamente, un **módulo sin torsión** es aquel cuyos elementos no nulos son elementos sin torsión.

Definición 1.14. Sea M un R -módulo. Definimos el **anulador de M** como el submódulo $\text{Ann}(M) = \{r \in R : rm = 0, \forall m \in M\}$. De manera análoga, llamaremos **anulador de $m \in M$** al submódulo $\text{Ann}(m) = \{r \in R : rm = 0, \forall m \in M\}$.

Definición 1.15. Definimos el **submódulo de torsión** de un R -módulo M como el conjunto $\text{Tor}(M) = \{x \in M : \text{Ann}(x) \neq \{0\}\}$. Es decir, el conjunto de todos los elementos de torsión de M .

Teorema 1.3 (Descomposición cíclica primaria). *Sea R un dominio de ideales principales y sea M un R -módulo finitamente generado. Entonces M se descompone como la suma directa*

$$M \cong R^f \oplus \bigoplus_{i=1}^k \frac{R}{\langle r_i \rangle}$$

donde R^f es un módulo libre de rango f y $R/\langle r_1 \rangle, \dots, R/\langle r_k \rangle$ son módulos cíclicos con anuladores $\langle r_1 \rangle, \dots, \langle r_k \rangle$. Además, f y los ideales $\langle r_1 \rangle, \dots, \langle r_k \rangle$ de R generados por $r_1, \dots, r_k \in R$ están determinados de manera única salvo el orden por M .

Ejemplo 1.2. Consideremos un espacio vectorial V . Entonces podemos considerar, por ejemplo, su base canónica y generar todo V a partir de ella. En consecuencia, V es un módulo libre. Además, aplicando el teorema de **Descomposición cíclica primaria**, es claro que la parte libre de la descomposición es isomorfa a V y por tanto V carece de parte cíclica.

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.16. Sea $\{A_i, \alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una familia de R -módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** en A_i cuando $\text{Im } \alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$. Si la sucesión es exacta para todo $i \in \mathbb{Z}$, diremos que la sucesión es **exacta larga** o simplemente exacta.

Definición 1.17. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la **sucesión exacta** es **corta** si

$$(\sigma, \gamma) : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0.$$

Es decir, una sucesión exacta de cinco R -módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

Proposición 1.3. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Entonces

1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B$ es exacta (en A) si, y sólo si, σ es inyectiva.
2. La sucesión $B \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} 0$ es exacta (en C) si, y sólo si, γ es sobreyectiva.

Demostración. El único homomorfismo que cumple $0 \rightarrow A$ tiene imagen 0 en A y por tanto, el núcleo de σ será este si, y sólo si, σ es inyectiva. De manera similar, el único homomorfismo $C \rightarrow 0$ es el homomorfismo nulo para todo elemento de C , que es la imagen de γ si, y sólo si, γ es sobreyectiva. \square

Corolario 1.1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, σ es inyectiva, γ es sobreyectiva y $\text{Im } \sigma = \ker \gamma$.

Como acabamos de probar, la exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker \gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la sucesión exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B . Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \rightarrow \sigma A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \rightarrow C$; juntos estos proveen un isomorfismo de sucesiones exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\gamma} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sigma' & & \parallel & & \downarrow (\gamma')^{-1} \\ 0 & \longrightarrow & \sigma A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & B/\sigma A \longrightarrow 0. \end{array}$$

1. Fundamentos del álgebra homológica

En resumen, una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Ejemplo 1.3. Respecto al **Teorema de factorización**, la inclusión i y la proyección π producen una sucesión exacta corta.

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/T \rightarrow 0.$$

1.3. Categorías y funtores

La teoría de categorías fue introducida por primera vez por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en [EM45]. En particular, las categorías son estructuras algebraicas que capturan la noción de composición. Gracias a ellas podemos analizar y comparar estructuras algebraicas, permitiendo sacar conclusiones comunes y trasladar problemas complejos a otros espacios donde resolverlos es más sencillo. En esta sección haré una breve introducción de las categorías apoyándome en [ML13].

Definición 1.18. Una **categoría** \mathcal{C} es una tripleta $(\mathcal{O}, \text{hom}, \circ)$ formada por:

1. Una clase \mathcal{O} , cuyos elementos denominamos **objetos** de \mathcal{C} y notamos por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de \mathcal{C} , un conjunto $\text{hom}(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B . Si $f \in \text{hom}(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ y a cada morfismo $g : B \rightarrow C$ un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$ que satisface
 - **Asociatividad.** Si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ son morfismos de \mathcal{C} , entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - **Identidad.** A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $\text{id}_B : B \rightarrow B$ tal que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ entonces $g \circ \text{id}_B = g$ y $\text{id}_B \circ f = f$.

Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g .

Ejemplo 1.4. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de conjuntos Set**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.
- **La categoría de grupos Grp**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de espacios topológicos Top**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$.
- **La categoría de R -módulos $R\text{-Mod}$** , donde los objetos son todos los R -módulos y los morfismos todos los homomorfismos de módulos.

- **La categoría de sucesiones exactas de R -módulos de longitud n .** Los objetos son dichas sucesiones $S : A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n$. Para dos sucesiones S y S' , los morfismos son de la forma $\Gamma : S \rightarrow S'$ tal que $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es una tupla donde los $\gamma_i : A_i \rightarrow A'_i$ son homomorfismos de R -módulos tal que

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A_n \\
 \gamma_1 \downarrow & & \gamma_2 \downarrow & & & & \gamma_{n-1} \downarrow & & \gamma_n \downarrow \\
 A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A'_n
 \end{array}$$

conmuta para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

También es posible encontrar colecciones propias de una categoría que siguen manteniendo dicha estructura.

Definición 1.19. Una **subcategoría** \mathcal{D} de una categoría \mathcal{C} consiste en:

1. Una subclase de objetos de \mathcal{C} , denotada por $Obj(\mathcal{D})$, tal que cada objeto de \mathcal{D} es también un objeto de \mathcal{C} .
2. Para cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{D})$, un subconjunto de morfismos $hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son también morfismos en \mathcal{C} .
3. La ley de composición en \mathcal{D} es inducida por la ley de composición en \mathcal{C} , y esta composición es cerrada en \mathcal{D} .

Además, diremos que \mathcal{D} es una **subcategoría plena** si para cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{D})$, $hom_{\mathcal{D}}(A, B) = hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Definición 1.20. Sea $f \in hom(A, B)$ un morfismo en la categoría \mathcal{C} . Diremos que f es una **equivalencia** en \mathcal{C} si existe en \mathcal{C} otro morfismo $g \in hom(B, A)$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.

Observación 1.2. Nótese que si $f \in hom(A, B)$ es una equivalencia en \mathcal{C} , $g \in hom(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in hom(B, A)$ tal que $g' \circ f = id_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ id_B = g'$.

Dentro de la teoría de categorías, los funtores tienen un papel principal, pues nos van a permitir llevar objetos y morfismos de una categoría a otra preservando identidades y composiciones.

Definición 1.21. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías. Un **functor covariante** de \mathcal{C} a \mathcal{D} es una pareja de funciones denotadas por la misma letra T tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.
2. Una **función de morfismos** que asigna a cada morfismo $\gamma : C \rightarrow C'$ de \mathcal{C} un morfismo $T(\gamma) : T(C) \rightarrow T(C')$ de \mathcal{D} . Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = id_{T(C)}, \quad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \quad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

1. Fundamentos del álgebra homológica

Es decir, un funtor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de \mathcal{C} en \mathcal{D} .

Definición 1.22. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías. Diremos que \mathcal{C} y \mathcal{D} son **isomorfos** si existen funtores covariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tales que $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$.

1.4. Módulos diferenciales

Comenzaremos definiendo lo que es un módulo de homología y estableceremos la terminología que emplearemos cuando trabajemos con ellos.

Definición 1.23. Sea C un R -módulo junto a un endomorfismo $d : C \rightarrow C$ tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Diremos entonces que C es un **módulo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C .

Llamaremos a los elementos de C **cadena**s. El submódulo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el submódulo de **bordes** $B(C) = \text{Im } d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\text{Im } d \subset \ker d$.

Definición 1.24. Sea C un módulo diferencial. Definimos el **R -módulo de homología** de C como el módulo cociente $H(C; R)$ tal que

$$H(C; R) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

En particular, cuando C sea un \mathbb{Z} -módulo diferencial, lo llamaremos **grupo diferencial** y notaremos $H(C; \mathbb{Z})$ simplemente por $H(C)$.

Por tanto, el módulo de homología de un módulo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C . A los elementos de $H(C; R)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Definición 1.25. Sean C y C' dos módulos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \rightarrow C'$ es un **homomorfismo de módulos diferenciales** si f es un homomorfismo de módulos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del módulo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$, que sea un ciclo o un borde, y $f : C \rightarrow C'$ es un homomorfismo de módulos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente. En efecto, si $z \in Z(C)$, entonces

$$d'f(z) = f(dz) = f(0) = 0.$$

Esto es, $f(z) \in \ker d'$. Ahora, si $b \in B(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $dc = b$. En consecuencia,

$$d'f(c) = f(dc) = f(b),$$

y por tanto, $f(b) \in \text{Im } d'$.

Los grupos diferenciales definen una categoría \mathcal{C} donde los objetos son los módulos diferenciales y los morfismos son los homomorfismos de módulos diferenciales. Tomemos como ley de composición interna la composición de dichos homomorfismos. Claramente es

asociativa pues si $C, C', \bar{C}, \tilde{C} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, y $f: C \rightarrow C', g: C' \rightarrow \bar{C}, h: \bar{C} \rightarrow \tilde{C}$, entonces $h \circ (g \circ f)$ se cumple si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h \circ (g \circ f)) &= (\tilde{d}h) \circ (g \circ f) = (h\tilde{d}) \circ (g \circ f) = h \circ (\tilde{d}g) \circ f \\ &= h \circ (gd') \circ f = h \circ g \circ (d'f) = h \circ g \circ (fd) = (h \circ g) \circ fd \\ &= ((h \circ g) \circ f)d \end{aligned}$$

y por tanto $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. La propiedad de identidad se sigue de existir el homomorfismo identidad de módulos.

Definición 1.26. Sean C, C' módulos diferenciales y $f: C \rightarrow C'$ un homomorfismo de módulos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f): H(C; R) \rightarrow H(C'; R)$ tal que

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f .

Proposición 1.4. En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de módulos diferenciales a la categoría de módulos.

Demostración. Por la definición dada del módulo de homología, es claro que la función objeto H asigna a cada grupo diferencial C un grupo de homología $H(C; R)$. En cuanto a la función de morfismos, la identidad de grupos diferenciales se preserva pues $H(\text{id})([c]) = \text{id}_*([c]) = [\text{id}(c)] = [c]$ para todo $c \in C$. Además, si $f, g \in \text{hom}(C)$, entonces

$$\begin{aligned} H(g \circ f)([c]) &= (g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = [g(f(c))] \\ &= g_*([f(c)]) = g_*(f_*([c])) = (H(g) \circ H(f))([c]) \end{aligned}$$

para todo $c \in C$, manteniendo la ley de composición. \square

1.5. Complejos de cadenas

Definición 1.27. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** C_\bullet de R -módulos es una familia $\{C_n, \partial_n\}$ donde C_n son R -módulos y $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ homomorfismos de R -módulos tales que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nota. Usualmente notaremos directamente ∂ al homomorfismo ∂_n independientemente del valor de n siempre y cuando se sobrentienda por el contexto.

Observación 1.3. La última condición es equivalente a que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo C_\bullet es por tanto una sucesión doblemente infinita

$$C_\bullet: \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \rightarrow \cdots$$

donde toda composición de homomorfismos de dicha familia es el homomorfismo nulo. La **homología** $H(C_\bullet)$ es la familia de R -módulos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}$$

1. Fundamentos del álgebra homológica

donde $H_n(C_\bullet)$ es el n -ésimo módulo de homología de C_\bullet .

Luego $H_n(C_\bullet) = 0$ implica que la sucesión C_\bullet es exacta en C_n . A los elementos de C_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Un **n-ciclo** o **ciclo de dimensión n** de C_\bullet es un elemento del submódulo $Z_n(C_\bullet) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** o **borde de dimensión n** es un elemento de $B_n(C_\bullet) = \text{Im } \partial_{n+1}$. La clase lateral de un ciclo c la notaremos por $[c] = c + \partial_{n+1}C_{n+1}$. Dos n -ciclos $c, c' \in C_n$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Nota. Si la dimensión se sobrentiende en estos casos, no la indicaremos de manera explícita.

Definición 1.28. Sea $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Su **suma directa** la definimos como el complejo de cadenas $\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i$ cuyos operadores borde vienen dados por $\bigoplus_{i \in I} \partial_n^i : \bigoplus_{i \in I} C_n^i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_{n-1}^i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.5. Sea $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Entonces su homología conmuta con la suma directa, esto es, $H_n(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para demostrar que la homología conmuta con sumas directas, queremos mostrar que para una colección de complejos de cadenas $\{C_\bullet^i, \partial^i\}_{i \in I}$, los homomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i \right) &\rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) : [(c_i)] \mapsto ([c_i]), \\ \psi : \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i) &\rightarrow H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i \right) : ([c_i]) \mapsto [(c_i)], \end{aligned}$$

están bien definidos y son inversos uno del otro.

En primer lugar, para comprobar que dichas aplicaciones están bien definidas, observemos que $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $[0] = [(c_i - c'_i)]$. Esto ocurre si, y sólo si, existe un $b_i \in C_\bullet^i$ tal que $\partial_i(b_i) = (c_i - c'_i)$, lo cual es equivalente a $c_i + \partial_i(b_i) = c'_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\phi([(c_i)]) = \phi([(c'_i)]) = [(c'_i + \partial_i(b_i))] = [(c'_i)]$. De manera análoga, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\psi([(c_i)]) = \psi([(c'_i)])$. Esto implica que tanto ϕ como ψ están bien definidos.

En segundo lugar, es claro que ϕ y ψ son homomorfismos de R -módulos. Además, ϕ lleva la clase de equivalencia $[(c_i)]$ a $([c_i])$, mientras que ψ lleva $([c_i])$ a $[(c_i)]$, lo que demuestra que son inversos el uno del otro. \square

Definición 1.29. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas** $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una familia de homomorfismos de R -módulos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Cuando se sobrentienda del contexto, notaremos simplemente por ∂ a los correspondientes ∂_n y ∂'_n .

Los complejos de cadenas, junto con sus morfismos, forman una categoría que denotaremos por $R\text{-Ch}_\bullet$. Esto se debe a que existe la identidad y se cumple la propiedad de asociatividad

para la composición de morfismos. En efecto, para tres morfismos $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ y $h : C''_\bullet \rightarrow \bar{C}_\bullet$, se tiene que

$$h_n \circ (g_n \circ f_n) = (h_n \circ g_n) \circ f_n$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, ya que son homomorfismos de módulos diferenciales. En consecuencia, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Sea $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ un morfismo de complejos de cadenas. Definimos $H_n(f) = f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ dado que

$$f_*([c]) = f_*(c + \partial_{C_{n+1}}) = fc + \partial_{C'_{n+1}} = [f(c)].$$

Entonces f_* es un homomorfismo de R -módulos, como recoge el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas y morfismos de cadenas a la categoría de R -módulos.*

Demostración. Como vimos anteriormente, H_n asigna a cada complejo de cadenas C_\bullet un R -módulo. Para demostrar que H_n también asigna a cada morfismo de cadenas un homomorfismo de R -módulos, consideremos $[c], [c'] \in H_n(C_\bullet)$ y $r, s \in R$. Entonces, podemos ver que

$$\begin{aligned} f_*(r[c] + s[c']) &= f_*(r(c + \partial_{C_{n+1}}) + s(c' + \partial_{C_{n+1}})) \\ &= f_*(rc + \partial_{C_{n+1}} + sc' + \partial_{C_{n+1}}) \\ &= f_*(rc + sc' + \partial_{C_{n+1}}) \\ &= f(rc + sc') + \partial_{C'_{n+1}} \\ &= rf(c) + sf(c') + \partial_{C'_{n+1}} \\ &= r(f(c) + \partial_{C'_{n+1}}) + s(f(c') + \partial_{C'_{n+1}}) \\ &= r(f_*(c + \partial_{C_{n+1}})) + s(f_*(c' + \partial_{C_{n+1}})) \\ &= rf_*([c]) + sf_*([c']). \end{aligned}$$

Además, si consideramos $f = \text{id}$ la identidad, es claro que id_* es la identidad de R -módulos. \square

Definición 1.30. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas y $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ dos aplicaciones de cadenas entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n.$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 1.4. *Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, entonces*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet).$$

Demostración. Si c es un ciclo de C_n , tenemos que $\partial_n c = 0$. Por la Def. 1.30 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial_{n+1} s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(C'_\bullet)$, como queríamos demostrar. \square

1. Fundamentos del álgebra homológica

Definición 1.31. Una aplicación de cadenas $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una **equivalencia de cadenas** si existe otra aplicación $h : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ y homotopías $s : h \circ f \rightarrow \text{id}_{C_\bullet}$, $t : f \circ h \rightarrow \text{id}_{C'_\bullet}$ tales que $h \circ f \simeq \text{id}_{C_\bullet}$, $f \circ h \simeq \text{id}_{C'_\bullet}$.

Como $H_n(\text{id}_{C_\bullet}) = \text{id}_{H_n(C_\bullet)}$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 1.2. Si $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.7. Sean $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ y $f', g' : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Sean $s : f \rightarrow g$, $s' : f' \rightarrow g'$ homotopías de cadenas entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces la composición

$$f's + s'g : f' \circ f \rightarrow g' \circ g \quad g' \circ g : C_\bullet \rightarrow C''_\bullet$$

es una homotopía de cadenas.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadenas tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$\begin{cases} f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g, \\ \partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g. \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades

$$\begin{aligned} f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g, \\ f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - g' \circ g, \\ \partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g &= f' \circ f - g' \circ g, \end{aligned}$$

donde finalmente queda

$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g.$$

□

1.6. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 1.32. Un **subcomplejo** S_\bullet de C_\bullet es una familia de submódulos $S_n \subset C_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, S_\bullet es un complejo en sí con el operador borde ∂ inducido de C_\bullet y la inclusión $i : S_\bullet \rightarrow C_\bullet$ es una aplicación de cadenas.

Definición 1.33. Sea S_\bullet un subcomplejo de C_\bullet . El **complejo cociente** C_\bullet/S_\bullet es la familia $(C_\bullet/S_\bullet)_n = C_n/S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial'_n : C_n/S_n \rightarrow C_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por ∂_{C_\bullet} .

Definición 1.34. Sean $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. La sucesión de complejos

$$C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$$

es **exacta** en C'_\bullet si $\text{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada sucesión $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ de módulos es exacta en C'_n .

Definición 1.35. Un complejo C_\bullet es **positivo** si $C_n = 0$ para todo $n < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$. Su n -ésimo módulo de homología es entonces positivo ya que $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo $n < 0$. De manera análoga, un complejo C_\bullet es **negativo** si $C_n = 0$ para todo $n > 0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.36. Sea C_\bullet un complejo positivo de R -módulos. Denominaremos **aumento de C_\bullet** al homomorfismo sobreyectivo $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ de forma que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

Definición 1.37. Sea C_\bullet un complejo de cadenas positivo, $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ un aumento de C_\bullet y sea $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el complejo positivo \tilde{C}_\bullet tal que $\tilde{C}_n = C_n$ para todo $n \geq 0$, $\tilde{C}_n = 0$ para todo $n < -1$ y $\tilde{C}_{-1} = R$. Consideremos también $\tilde{\partial}_n = \partial_n$ para todo $n \geq 1$ y $\tilde{\partial}_0 = \varepsilon$. Llamaremos a este complejo **complejo aumentado** de C_\bullet .

Definición 1.38. Sea A un módulo. Definimos el siguiente complejo positivo donde $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$. Un **complejo sobre A** es un complejo positivo C_\bullet junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : C_0 \rightarrow A$ tal que $\varepsilon \partial = 0 : C_1 \rightarrow A$.

Definición 1.39. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ es una aplicación de cadenas $f : A \rightarrow C_\bullet$ tal que $\varepsilon f = \text{id}_A$ junto con una homotopía $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow f\varepsilon$ donde $\text{id}_{C_\bullet} \simeq f\varepsilon$. En otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \rightarrow C_0$ y una homotopía de cadenas formada por los homomorfismos $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$\varepsilon f = \text{id}_A, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = \text{id}_{C_0}, \quad \partial_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = \text{id}_{C_n} \quad n > 0.$$

Podemos extender el complejo estableciendo $C_{-1} = A$, $\partial_0 = \varepsilon : C_0 \rightarrow C_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Aplicando la definición anterior, $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow 0$ es una homotopía de cadenas. Si $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son isomorfos por $\varepsilon_* : H_0(C_\bullet) \rightarrow A$ para $n = 0$ y $H_n(C_\bullet) = 0$ para $n > 0$.

Consideremos un complejo de cadenas $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde cada C_n es un \mathbb{Z} -módulo libre y $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ es el operador diferencial de C_\bullet que cumple $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para todo n . Este tipo de complejos aparece frecuentemente en el estudio de espacios topológicos.

Supongamos además que cada C_n es finitamente generado. Entonces, el n -ésimo grupo de homología de C_\bullet , definido como

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})},$$

es un grupo abeliano finitamente generado. Este resultado se sigue del hecho de que el núcleo y la imagen de los morfismos entre \mathbb{Z} -módulos libres finitamente generados son también finitamente generados.

El teorema de **Descomposición cíclica primaria** y, en particular, el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados afirma que cualquier grupo abeliano finitamente generado G puede expresarse como una suma directa de grupos cíclicos de la forma

$$G \cong \mathbb{Z}^\beta \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde β es el rango de G y cada \mathbb{Z}_{m_i} es un grupo cíclico de orden m_i , donde m_i divide a m_{i+1} para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Aplicando este teorema al n -ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet)$, obtenemos que

$$H_n(C_\bullet) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

1. Fundamentos del álgebra homológica

donde β_n es el rango de $H_n(C_\bullet)$, conocido como el **n-ésimo número de Betti** de C_\bullet , y los m_i son los **n-ésimos coeficientes de torsión**, donde m_i divide a m_{i+1} para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Definición 1.40. Sea C_\bullet un complejo de cadenas y k un entero no negativo. El **k-ésimo número de Betti**, $\beta_n(C_\bullet)$, se define como el rango del n -ésimo módulo de homología de C_\bullet sobre el dominio de ideales principales R , $H_n(C_\bullet; R)$. Esto es, $\beta_n(C_\bullet) = \text{rg}(H_n(C_\bullet; R))$. Si no hay lugar a confusión lo notaremos simplemente por β_n .

Definición 1.41. Dado un complejo de cadenas C_\bullet y considerando la descomposición en sumas directas del n -ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet; R)$ sobre un dominio de ideales principales R , definimos los **n-ésimos coeficientes de torsión** como los $m_i \in R$ donde $i \in \{1, \dots, k\}$ que aparecen en la descomposición

$$H_n(C_\bullet; R) \cong R^{\beta_n} \oplus \frac{R}{\langle m_1 \rangle} \oplus \dots \oplus \frac{R}{\langle m_k \rangle},$$

donde cada m_i divide a m_{i+1} .

Los números de Betti β_n proporcionan una medida de la dimensionalidad de la n -ésima homología, mientras que los coeficientes de torsión $\{m_i\}$ representan los órdenes de los sumandos cíclicos de torsión en la descomposición de homología y reflejan la estructura torsional de $H_n(C_\bullet; R)$.

La homología con coeficientes en \mathbb{Z} es fundamental en topología algebraica, proporcionando una rica estructura para el estudio de espacios topológicos. Sin embargo, el uso de coeficientes en otros anillos, particularmente en cuerpos, puede simplificar significativamente los cálculos y aún así ofrecer información valiosa para ciertas aplicaciones. La elección de un cuerpo como coeficientes, por ejemplo \mathbb{Z}_2 , reduce la complejidad de los cálculos al evitar problemas relacionados con la torsión, facilitando la manipulación algebraica. Al estudiar la homología con estos coeficientes alternativos, aunque se obtiene una visión menos detallada del espacio, a menudo es suficiente para resolver problemas específicos dentro de un contexto dado, tales como la detección de características topológicas esenciales o la simplificación de la clasificación de espacios topológicos.

2. Símplices y complejos simpliciales

Los espacios topológicos pueden llegar a ser complicados de estudiar. Los complejos simpliciales tienen la ventaja de ser estructuras fáciles de estudiar. Por este motivo, los dotaremos de cierta topología que nos permitirá construir homeomorfismos a un gran número de espacios topológicos. En este capítulo nos centraremos en la definición y el estudio de estos objetos en profundidad en la línea de [Mun18] y lo complementaremos con algunas aportaciones de [Lee10].

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplex. Su sencillez y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplex y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzamos recordando algunos conceptos de la geometría afín.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N -dimensional, lo notaremos simplemente por \mathbb{R}^N .

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N . Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^p t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_p$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \dots, a_p\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nótese que la transformación afín T de \mathbb{R}^N tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de \mathbb{R}^N con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual $\{e_1, \dots, e_N\}$, obtenemos una transformación afín $S : P \rightarrow \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tal que $S(a_i) = e_i$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en \mathbb{R}^N . Definimos el **p-símplice** o **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ generado por a_0, \dots, a_p como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i = 1$$

con $t_i \geq 0, i \in \{0, 1, \dots, p\}$. Diremos que t_i es la **i-ésima coordenada baricéntrica** de x respecto a a_0, a_1, \dots, a_p .



Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3.

Proposición 2.1. Sea σ un k -símplice definido como en 2.3. Entonces, para cualquier $p \in \sigma$, las coordenadas baricéntricas t_0, \dots, t_k de p están determinadas de manera única.

Demostración. Por definición, cualquier punto arbitrario $p \in \sigma$ puede escribirse como una combinación convexa de los puntos a_i . Esto garantiza la existencia de una solución (no negativa) al sistema lineal

$$At = \begin{pmatrix} a_{01} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N} & \cdots & a_{kN} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ 1 \end{pmatrix} = p^*,$$

donde A es la matriz que contiene a los a_i como columnas, extendidos con un 1 en la última fila para incorporar la condición de que la suma de t_i sea igual a 1, asegurando que estamos considerando combinaciones convexas.

Para demostrar la unicidad, supongamos la existencia de otro vector t' tal que $At' = p^*$. Esto lleva a $A(t - t') = 0$. Supongamos que $A(t - t') = Av = 0$, donde $v = t - t'$. Esto implica que para $v_i = t_i - t'_i$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$

$$\sum_{i=0}^k v_i \cdot \begin{pmatrix} a_{0i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que lleva a que $v_0 = v_1 = \dots = v_k = 0$, debido a la independencia lineal de las columnas de A . En consecuencia, $t = t'$, demostrando así que las coordenadas baricéntricas son únicas para cualquier punto p en σ . \square

Los puntos a_0, \dots, a_p que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número p lo llamaremos la **dimensión** de σ , que notaremos por $\dim \sigma$.

Definición 2.4. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ un símple. Una **cara de dimensión** p de σ será cualquier símple generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \dots, a_p\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i , $i \in \{0, \dots, p\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos $\text{Bd } \sigma$. Finalmente, definimos el **interior** de σ , $\text{Int } \sigma$, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

En ocasiones, para dos símlices σ y τ , escribiremos $\tau \preceq \sigma$ si τ es cara de σ . En caso de ser cara propia, lo notaremos por $\tau \prec \sigma$.

Proposición 2.2. Si σ es un símple, entonces es unión disjunta del interior de todas sus caras.

Demostración. Sea x un elemento del símple $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ y sean t_0, \dots, t_p sus coordenadas baricéntricas. Consideremos ahora σ_k el símple resultante de eliminar los vértices cuya coordenada tenía valor nulo. Esto es, tomamos el símple $\sigma_k = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ donde $t_{i_s} > 0$ para todo $s \in \{1, \dots, k\}$. Por la construcción de σ_k , tenemos que x pertenece a su interior.

Ahora sabemos que todo punto de un símple pertenece al interior de una cara. Finalmente, la unicidad de las coordenadas baricéntricas nos garantiza que la unión del interior de dos caras es disjunta. \square

Dado un símple σ podemos definir un orden sobre sus vértices. Dos órdenes de σ los consideraremos equivalentes si podemos pasar de uno a otro con un número par de permutaciones. Así, los ordenamientos posibles para los vértices de σ se pueden agrupar en dos clases de equivalencia distintas, que definimos como las **orientaciones del símple** σ .

Definición 2.5. Decimos que un símple $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_p]$ está **orientado** si se le ha asignado una de estas orientaciones. Utilizaremos $[a_0 a_1 \dots a_p]$ para denotar la clase de equivalencia dada por la orientación $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ del símple generado por los vértices a_0, a_1, \dots, a_p .

2.2. Complejos simpliciales

La importancia de los complejos simpliciales reside en su capacidad para descomponer espacios topológicos en componentes manejables, permitiendo un análisis detallado de su estructura. Al considerar la forma en que estos símlices se conectan y orientan entre sí, los complejos simpliciales facilitarán la definición de cadenas y ciclos simpliciales que serán indispensables en el estudio de la homología simplicial.

Definición 2.6. Un **complejo simplicial** (finito) K en \mathbb{R}^N es una colección (finita) de símlices en \mathbb{R}^N tal que:

1. Toda cara de un símple de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos símlices de K o es el vacío o es una cara de ambos símlices.

Nota. Si bien los complejos simpliciales se pueden formular sin la restricción de finitud, nosotros trabajaremos principalmente en el caso finito por simplicidad en algunos resultados.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símlices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

2. Símplices y complejos simpliciales

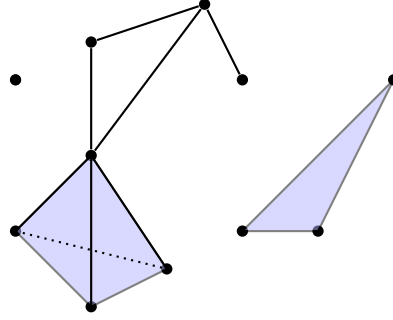


Figura 2.2.: Visualización de un complejo simplicial.

Lema 2.1. Una colección K de símplexes es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Toda cara de un símplex de K está en K .
2. La intersección dos a dos del interior de los símplexes de K es vacía.

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplexes $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$ y considero $x \in s$. Si s fuera una cara propia de σ , entonces x pertenecería a la frontera de σ , lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ . Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen (1) y (2). Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices b_0, \dots, b_m de σ que están en τ . Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a b_0, \dots, b_m . Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \text{Int } s \cap \text{Int } t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ . Se sigue de (2) que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \dots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ' , lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. \square

Definición 2.7. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K .

Definición 2.8. Sea K un complejo simplicial. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p . Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ lo llamaremos el **conjunto de vértices** de K .

Definición 2.9. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^N tal que $|K|$ es la unión de todos los símplexes de K . Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de \mathcal{T} son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de \mathbb{R}^N para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ , pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma, O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$

donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $(\cup_{i \in I} O_i) \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ . En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

En general, la topología de $|K|$ es más fina que la inducida de la topología usual de \mathbb{R}^N . Si A es cerrado en $|K|$ con la topología inducida de la usual, $A = B \cap |K|$ para algún cerrado B de \mathbb{R}^N y por tanto $B \cap \sigma$ sería cerrado en σ para cada símple σ de K . Como consecuencia, $B \cap |K| = A$ es cerrado en $|K|$ con la topología \mathcal{T} definida anteriormente. No obstante, la otra inclusión no tiene por qué cumplirse:

Ejemplo 2.1. Consideremos el complejo no finito K en \mathbb{R} cuyos símple σ son todos los intervalos $[m, m+1]$ con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, todos los intervalos de la forma $[1/(n+1), 1/n]$ donde $n \in \mathbb{N}$ y todas sus respectivas caras. Como resultado tenemos que $|K| = \mathbb{R}$, donde $F = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en nuestra topología \mathcal{T} pero no en la inducida por la usual. Dicho de otra forma, $\mathbb{R} \setminus F$ es abierto en \mathcal{T} pero no en la usual.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

A continuación, mencionemos algunas propiedades relevantes de este espacio topológico. Para ello fijemos un complejo simplicial finito K en \mathbb{R}^N .

Proposición 2.3. Sea K un complejo simplicial finito. Entonces el poliedro $|K|$ es compacto.

Demostración. Si K es un complejo simplicial, sus símple σ son conjuntos cerrados y acotados. En consecuencia, $|K|$ es unión finita de conjuntos cerrados y acotados, luego es cerrado y acotado en \mathbb{R}^N . Por lo tanto, es compacto. \square

Proposición 2.4. Sea K un complejo simplicial. Si $x \in |K|$, entonces existe un único símple σ en K tal que x pertenece a su interior.

Demostración. Si $x \in |K|$, entonces existe algún símple σ de K tal que $x \in \sigma$. Por la **Proposición 2.2**, x pertenece al interior de alguna cara τ de σ . Supongamos ahora que existe otro símple ρ de K tal que $x \in \text{Int } \rho$. Por consiguiente, si $x \in \text{Int } \rho \cap \text{Int } \tau$, entonces x pertenecería a una cara común μ de ρ y τ . Esto es, $\mu = \rho \cap \tau$. Ahora si $\rho \neq \mu$, el elemento x debería tener alguna coordenada baricéntrica nula respecto a los vértices de ρ , en contradicción con que x pertenece al interior de ρ . En consecuencia, $\rho = \mu$. De manera análoga obtenemos $\tau = \mu$ y por tanto, $\rho = \tau$. \square

Definición 2.10. Sea K un complejo simplicial y sea $x \in |K|$. Llamaremos **símple soporte** de x al único símple que contiene a x en su interior y lo notaremos por $\text{sop}(x)$.

Corolario 2.1. Sean σ, τ símple σ, τ de K tal que $\text{Int } \sigma \cap \tau$ es no vacía. Entonces σ es una cara de τ .

Demostración. Consideremos $x \in \text{Int } \sigma \cap \tau$. Por la **Proposición 2.2** sabemos que τ es la unión de todas sus caras lo que implica que existe una cara μ de τ cuyo interior contiene a x . Por lo tanto, $x \in \text{Int } \mu \cap \text{Int } \sigma$ y como consecuencia de la **Proposición 2.4**, $\mu = \sigma$. \square

Lema 2.2. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua si, y sólo si, $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$.

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_{\sigma}$ por ser σ un subespacio de K . Supongamos ahora que $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X , $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_{\sigma}^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_{\sigma}$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. \square

Definición 2.11. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X . Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$ es una **triangulación**.

Definición 2.12. Sea X un espacio topológico Hausdorff no vacío. Diremos que X es una **m -variedad** si cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m con la topología usual. Análogamente, diremos que X es una **m -variedad con borde** si cada punto tiene un entorno homeomorfo al semiespacio $\mathbb{H}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$.

Observación 2.1. Nótese que toda m -variedad es una m -variedad con borde. Para verlo, consideremos x en la m -variedad y un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m . Entonces, tiene un entorno abierto homeomorfo a cualquier bola abierta de \mathbb{R}^m y en particular, a una contenida en \mathbb{H} .

2.3. Celdas y CW-complejos

A continuación presentamos una generalización del concepto de complejo simplicial, propuesta por J.H.C. Whitehead en [Whi49]. Los CW-complejos reemplazan la estructura simplicial tradicional por estructuras homeomorfas a bolas abiertas, facilitando el estudio de una gama más amplia de espacios topológicos.

Iniciaremos esta sección estableciendo la notación que utilizaremos. Denotaremos la **bola abierta** centrada en x_0 y de radio r en el espacio \mathbb{R}^N con la topología usual por el conjunto $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}$. Además, para cualquier subconjunto U de \mathbb{R}^N , denotaremos su **clausura** como \bar{U} y su **frontera** como $\text{Bd } U$. Por último, la **esfera unidad** de dimensión n será representada simplemente como S^{n-1} .

Definición 2.13. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es una **celda** abierta (cerrada) de dimensión p o **p -celda** si X es homeomorfo a la bola unidad abierta (cerrada) de dimensión p .

Sería interesante disponer de resultados que nos digan cuándo un subconjunto dado puede ser una celda. Para ello, recordemos el siguiente resultado de topología básica:

Lema 2.3. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre ellos. Si X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada.

La siguiente proposición será de gran utilidad para ver que los complejos simpliciales no son más que un caso particular de los CW-complejos.

Proposición 2.5. Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo compacto con interior no vacío, entonces D es una n -celda cerrada y su interior es una n -celda abierta. De hecho, dado cualquier punto $p \in \text{Int } D$, existe un homeomorfismo $F : \bar{B}_1(0) \rightarrow D$ que envía 0 a p , $B_1(0)$ a $\text{Int } D$, y S^{n-1} a $\text{Bd } D$.

Demostración. Sea p un punto interior de D . Reemplazando D por su imagen bajo la traslación $x \mapsto x - p$, podemos suponer que $p = 0 \in \text{Int } D$. Entonces existe algún $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(0)$ está contenida en D . Utilizando la dilatación $x \mapsto x/\varepsilon$, podemos asumir $B_1(0) \subseteq D$. A continuación demostraremos que cada semirrecta cerrada que comienza en el origen interseca $\text{Bd } D$ en exactamente un punto. Sea R tal semirrecta cerrada. Dado que D es compacto, su intersección con R es compacta; por lo tanto, hay un punto x_0 en esta intersección donde la distancia al origen alcanza su máximo. Este punto se identifica fácilmente

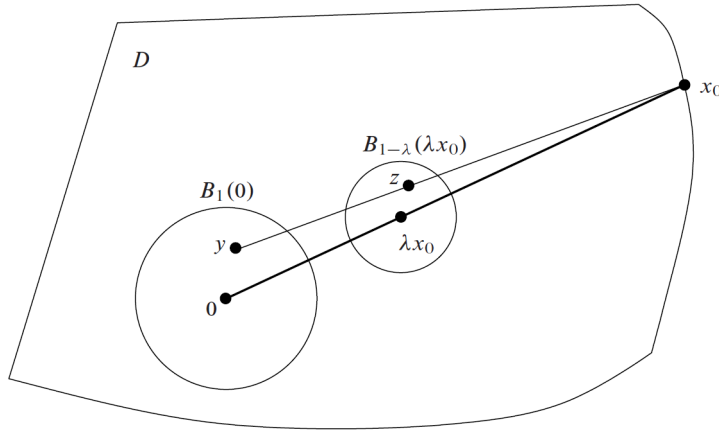


Figura 2.3.: Esquema que muestra la idea de que cada rayo tan sólo tiene un punto en la frontera en la demostración de la **Proposición 2.5**. Fuente [Lee10].

como parte del borde de D . Para demostrar que solo puede haber un punto así, mostramos que el segmento de línea desde 0 hasta x_0 consta enteramente de puntos interiores de D , excepto x_0 mismo. Cualquier punto en este segmento que no sea x_0 se puede escribir en la forma λx_0 para $0 \leq \lambda < 1$. Supongamos que $z \in B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$, y sea $y = (z - \lambda x_0) / (1 - \lambda)$. En consecuencia $|y| < 1$, por lo que $y \in B_1(0) \subseteq D$. Como y y x_0 están ambos en D y $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y$, se sigue de la convexidad que $z \in D$. Así, la bola abierta $B_{1-\lambda}(x_0)$ está contenida en D , lo que implica que λx_0 es un punto interior.

Ahora definamos una aplicación $f : \text{Bd } D \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

En palabras, $f(x)$ es el punto donde el segmento de línea que parte del origen hasta x interseca la esfera unidad. Puesto que f es la restricción de una aplicación continua, es continua, por lo que la discusión del párrafo anterior muestra que es biyectiva. Dado que ∂D es compacto, el **Lema 2.3** nos garantiza que f es cerrada. Por ser f biyectiva, continua y cerrada, entonces f es un homeomorfismo.

Finalmente, definamos $F : \overline{B}_1(0) \rightarrow D$ de forma que

$$F(x) = \begin{cases} |x|f^{-1}\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

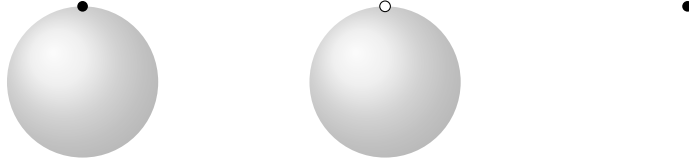
Entonces F es continua lejos del origen porque f^{-1} lo es, y también lo es en el origen pues la acotación de f^{-1} implica que $F(x) \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow 0$. Geométricamente, F lleva cada segmento de línea radial que conecta 0 con un punto $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ linealmente sobre el segmento radial de 0 al punto $f^{-1}(\omega) \in \text{Bd } D$. Por convexidad, F toma sus valores en D . La aplicación F es inyectiva, ya que puntos en rayos distintos van a rayos distintos, y cada segmento radial se lleva linealmente a su imagen. Es sobreyectiva porque cada punto $y \in D$ está en algún rayo desde 0 . Por el **Lema 2.3**, F es un homeomorfismo. \square

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.14. Sea (X, \mathcal{E}) , donde X es un espacio topológico Hausdorff y \mathcal{E} una colección de celdas abiertas. Diremos entonces que (X, \mathcal{E}) es un **CW-complejo** si se cumple que:

- (C) Consideremos la bola unidad $B_1(0)$ de dimensión p . Para cada p -celda $e \in \mathcal{E}$, existe una aplicación continua $f_e : \overline{B_1(0)} \rightarrow X$ de forma que la restricción a $B_1(0)$ es homeomorfa a la celda e y la restricción a la frontera $\text{Bd } \overline{B_1(0)}$ está contenida en una unión finita de celdas de dimensión menor a p . A dicha función la llamaremos **función característica**.
- (W) Un subconjunto F de X es cerrado si, y sólo si, $F \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} para todo $e \in \mathcal{E}$.

Normalmente denotaremos al CW-complejo (X, \mathcal{E}) simplemente por X .



(a) S^2 como unión de sus celdas. (b) 1-celda de S^2 . (c) 0-celda de S^2 .

Figura 2.4.: Visualización de un CW-complejo para S^2 .

Una propiedad importante de los CW-complejos es que mantienen su estructura en subconjuntos bajo ciertas condiciones razonables.

Definición 2.15. Sea X un CW-complejo. Diremos que $Y \subseteq X$ es un **subcomplejo** de X si es unión de celdas de X de forma que si Y contiene una celda, entonces también contiene su clausura.

Teorema 2.1. Sea X un CW-complejo y sea Y un subcomplejo de X . Entonces Y es cerrado en X y, además, es un CW-complejo con la topología y la colección de celdas inducidas.

Demostración. Es claro que Y es Hausdorff. Además, por definición tenemos que Y es la unión disjunta de sus celdas. Sea $e \subseteq Y$ una celda abierta de Y . Como su clausura también está contenida en Y , entonces existe un número finito de celdas de X con intersección no vacía con \bar{e} que, a su vez, son celdas de Y . En consecuencia, la condición (C) se cumple. Es más, cualquier aplicación característica $f_e : \overline{B_1(0)} \rightarrow X$ de X lo es también de Y para cualquier celda $e \subseteq Y$.

En cuanto a la condición (W), supongamos que S es un subconjunto de Y tal que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} para toda celda en Y . Sea ahora e una celda de X que no esté contenida en Y . Sabemos que $\bar{e} \setminus e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de X , de las cuales un subconjunto de ellas están contenidas en Y . Llamemos a dichas celdas e_1, \dots, e_n . Por consiguiente, $\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n \subseteq Y$ y además,

$$S \cap \bar{e} = S \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} = ((S \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (S \cap \bar{e}_n)) \cap \bar{e},$$

luego $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} . Es decir, S es cerrado en X y por tanto en Y . Finalmente, concluimos que Y es cerrado en X tomando $S = Y$. \square

Definición 2.16. Sea X un CW-complejo. Diremos que el subespacio $X^{(p)}$ de X es el **p -esqueleto** de X si es igual a la unión de todas las celdas de dimensión menor o igual que p . En particular, es un subcomplejo de dimensión p de X .

Teorema 2.2. Sea X un CW-complejo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X es conexo por arcos.
2. X es conexo.
3. El 1-esqueleto de X es conexo.
4. Algún n -esqueleto de X es conexo para algún n .

Demostración. Obviamente, (1) \Rightarrow (2) y (3) \Rightarrow (4), por lo que basta con demostrar que (2) \Rightarrow (3) y (4) \Rightarrow (1).

Para probar (2) \Rightarrow (3) razonaremos por contrarrecíproco. Supongamos que $X^{(1)} = X'^{(1)} \cup X''^{(1)}$ es una unión no conexa del 1-esqueleto de X . Veamos por inducción en n que para cada $n > 1$, el n -esqueleto $X^{(n)}$ puede expresarse como unión no conexa $X^{(n)} = X'^{(n)} \cup X''^{(n)}$ tal que $X'^{(n)} \subseteq X'^{(n-1)}$ y $X''^{(n)} \subseteq X''^{(n-1)}$ para cada n . Supongamos $X^{(n-1)} = X'^{(n-1)} \cup X''^{(n-1)}$ es una unión no conexa de $X^{(n-1)}$ para algún $n > 1$. Para cada celda n -dimensional e , la restricción de su aplicación función característica $f_e: D^n \rightarrow X^{(n)}$ a ∂D^n es continua en $X^{(n-1)}$. Dado que $\partial D^n \cong S^{n-1}$ es conexo, su imagen debe estar contenida en uno de los conjuntos $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$. Por lo tanto, $\overline{f_e(D)}$ tiene una intersección no trivial con $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$, pero no con ambos. Dividimos las n -celdas en dos colecciones disjuntas \mathcal{E}' y \mathcal{E}'' , según si sus clausuras intersecan $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$, respectivamente, y definimos

$$X'^{(n)} = X'^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}'} \overline{f_e(D)} \right), \quad X''^{(n)} = X''^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}''} \overline{f_e(D)} \right).$$

Claramente, $X^{(n)}$ es la unión disjunta de $X'^{(n)}$ y $X''^{(n)}$, y ambos conjuntos son no vacíos debido a la hipótesis de inducción.

Ahora, definamos $X' = \bigcup_n X'^{(n)}$ y $X'' = \bigcup_n X''^{(n)}$. Como antes, $X = X' \cup X''$, y ambos conjuntos son no vacíos. Por el mismo argumento que arriba, si e es cualquier celda de X de cualquier dimensión, su clausura debe estar contenida en uno de estos conjuntos. Así, X' y X'' son ambos abiertos y cerrados en X , lo que implica que X no es conexo.

Para demostrar (4) \Rightarrow (1), supongamos que X es un CW-complejo cuyo n -esqueleto es conexo para algún $n \geq 0$. Mostremos por inducción en k que $X^{(k)}$ es conexo por arcos para cada $k \geq n$. Primero, necesitamos mostrar que $X^{(n)}$ en sí mismo es conexo por arcos. Si $n = 0$, entonces $X^{(n)}$ es discreto y conexo, así que es un conjunto unitario y por lo tanto conexo por arcos. En caso contrario, elijamos cualquier punto $x_0 \in X^{(n)}$ y consideremos S_n la componente arcoconexa de $X^{(n)}$ que contiene a x_0 . Para cada celda e de $X^{(n)}$, notemos que $\overline{f_e(D)}$ es la imagen continua de un espacio conexo por arcos, así que es conexo por arcos. Por lo tanto, si $\overline{f_e(D)}$ tiene una intersección no trivial con la componente arcoconexa S_n , debe estar contenida en S_n . En consecuencia, S_n es cerrado y abierto en $X^{(n)}$. Como estamos asumiendo que $X^{(n)}$ es conexo, entonces $S_n = X^{(n)}$.

Ahora, supongamos que hemos demostrado que $X^{(k-1)}$ es conexo por arcos para algún $k > n$ y sea S_k la componente arcoconexa de $X^{(k)}$ que contiene a $X^{(k-1)}$. Para cada k -celda e , su clausura $\overline{f_e(D)}$ es un subconjunto de $X^{(k)}$ conexo por arcos que tiene intersección no trivial con $X^{(k-1)}$ y, por lo tanto, está contenido en S_k . Se sigue que $X^{(k)} = S_k$, completando la inducción. \square

Lema 2.4. Sea X un CW-complejo. Entonces la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito.

2. Símplices y complejos simpliciales

Demostración. Consideremos cualquier n -celda $e \in X$ y probemos el lema por inducción. Para el caso $n = 0$, $\bar{e} = e$ es trivialmente un subcomplejo finito. Supongamos ahora el lema cierto para las celdas de dimensión menor o igual que n y veámoslo para $n + 1$. Por la condición (C), $\bar{e} \setminus e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de dimensión menor que $n + 1$. Dichas celdas están contenidas en subcomplejos finitos por hipótesis de inducción. Sin embargo, la unión de dichos subcomplejos finitos con e es de hecho un subcomplejo finito que contiene a \bar{e} . \square

Lema 2.5. *Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es discreto si, y sólo si, su intersección con cada celda es finita.*

Demostración. Sea S un subconjunto discreto de X . Entonces, la intersección de la clausura de cada celda e de X con S es un subconjunto discreto de un conjunto compacto, luego es finito. En consecuencia, $S \cap e$ también lo es.

Para la otra implicación supongamos que S es un subconjunto cuya intersección con cualquier celda es finita. Como la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito, entonces por hipótesis tenemos que $S \cap \bar{e}$ es finito para cada celda e de X . Esto significa que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en \bar{e} y por la condición (W), S es cerrado en X . Sin embargo, este argumento podemos aplicarlo a cualquier subconjunto de S , luego todo subconjunto de S es cerrado en X . Por lo tanto, la topología inducida en S es discreta. \square

Teorema 2.3. *Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es compacto si, y sólo si, es cerrado en X y está contenido en un subcomplejo finito.*

Demostración. Todo subcomplejo finito de X es compacto pues es unión finita de clausuras de celdas, las cuales son compactas. En consecuencia, si K es un subconjunto cerrado de X contenido en un subcomplejo finito, entonces es compacto.

Supongamos ahora que $K \subseteq X$ es compacto. Si K intersecara una cantidad infinita de celdas, podríamos tomar un punto de cada intersección de forma que tuviéramos un subconjunto infinito discreto de K , lo cual es imposible. Es decir, K está contenido en la unión de un número finito de celdas y por el **Lema 2.4**, está contenido en un subcomplejo finito. \square

Corolario 2.2. *Un CW-complejo es compacto si, y sólo si, es un complejo finito.*

Proposición 2.6. *Todo p -símplice es una celda cerrada de dimensión p .*

Demostración. Inmediato por la **Proposición 2.5**. \square

Una vez discutidas algunas propiedades básicas de los CW-complejos, ya estamos en condiciones de verificar que efectivamente los complejos simpliciales son CW-complejos.

Proposición 2.7. *Si K es un complejo simplicial finito, entonces el poliedro $|K|$ junto con la colección \mathcal{E} de interiores de los símplices de K forman un CW-complejo.*

Demostración. Supongamos que K es un complejo simplicial finito en \mathbb{R}^N . La condición (C) se obtiene de manera directa a partir de la **Proposición 2.5**.

En cuanto a la propiedad (W), consideremos F como un subconjunto de $|K|$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x en $|K|$ y sea U un entorno de x . Por la compacidad de $|K|$ y el hecho de que \mathcal{E} es un recubrimiento por abiertos de $|K|$, podemos escoger un subrecubrimiento finito e_1, \dots, e_k tal que $x \in U \subseteq \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$.

Fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_i} \in U$ para todo $n_i \geq n_0$. Como hay un número finito de e_j e infinitos x_{n_i} , existe una parcial convergente $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a x contenido en algún

\bar{e}_j para cierto $j \in \{1, \dots, k\}$. Esto muestra que $x \in \bar{e}_j$ y, puesto que $x_{n_i} \in F \cap \bar{e}_j$ para todo $n_i \geq n_0$, y $F \cap \bar{e}_j$ es cerrado en \bar{e}_j , concluimos que $x \in F \cap \bar{e}_j$. \square

2.4. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.6. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación entre los conjuntos de vértices de K y L . Supongamos que siempre que los vértices v_0, \dots, v_n de K generen un símple en K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símple de L . Entonces podemos extender f a una aplicación continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies |f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$$

Llamaremos a $|f|$ la **aplicación simplicial** (lineal) inducida por f .

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple τ en L . Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $|f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$ es un punto de τ . Es decir, $|f|$ es una aplicación lineal del símple σ generado por v_0, \dots, v_n al símple τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$. Por ser $|f| : \sigma \rightarrow \tau$ lineal en un espacio de dimensión finita, entonces es continua.

Ahora tan solo nos queda ver que $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Bien, pues por ser $|f| : \sigma \rightarrow \tau$ continua, también lo es $|f| : \sigma \rightarrow |L|$. Finalmente por el **Lema 2.2**, $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua. \square

Consideremos las funciones de la forma de f descrita en 2.6. Para cualquier complejo K , existe una aplicación identidad $\text{id}_K : K \rightarrow K$ que corresponde a la aplicación identidad en los vértices. Dadas tres aplicaciones $f : K \rightarrow L$, $g : L \rightarrow M$ y $h : M \rightarrow N$, la aplicación compuesta $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, pues es una composición de aplicaciones de conjuntos que preserva símple. Por lo tanto, existe una categoría de complejos simpliciales y estas funciones que denotaremos por **CSim**.

Por otro lado, veamos que el **Lema 2.6** nos garantiza la existencia de un funtor covariante entre esta categoría y los espacios topológicos.

Proposición 2.8. Existe un funtor covariante $|\cdot| : \mathbf{CSim} \rightarrow \mathbf{Top}$ de la categoría de aplicaciones simpliciales a la categoría de espacios topológicos.

Demostración. Para cada complejo simplicial K , la identidad en **CSim** es la función identidad $\text{id}_K : K \rightarrow K$. La aplicación simplicial inducida $|\text{id}_K| : |K| \rightarrow |K|$ es tal que

$$|\text{id}_K| \left(\sum_{i=0}^n t_i v_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i \text{id}_K(v_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

lo cual es precisamente la identidad en el espacio topológico $|K|$. Esto muestra que $|\cdot|$ preserva las identidades.

Sean ahora $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ dos morfismos en **CSim**. La composición en **CSim** es $g \circ f : K \rightarrow M$, y necesitamos demostrar que $|(g \circ f)| = |g| \circ |f|$. Para cualquier punto

2. Símplices y complejos simpliciales

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \text{ en } |K|,$$

$$|(g \circ f)|(x) = \sum_{i=0}^n t_i (g \circ f)(v_i) = \sum_{i=0}^n t_i g(f(v_i)).$$

Por otro lado,

$$(|g| \circ |f|)(x) = |g| \left(|f| \left(\sum_{i=0}^n t_i v_i \right) \right) = |g| \left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i) \right) = \sum_{i=0}^n t_i g(f(v_i)).$$

Ambas expresiones son iguales y por tanto, $|\cdot|$ preserva la composición de morfismos. \square

Normalmente abusaremos de la notación de forma que escribiremos la aplicación simplicial inducida $|f| : |K| \rightarrow |L|$ simplemente por $f : |K| \rightarrow |L|$.

Lema 2.7. *Supongamos que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símplex de K si, y sólo si, $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símplex de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo. Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L .*

Demostración. Por hipótesis, cada símplex $\sigma \in K$ se identifica con otro símplex $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i)\right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(f(v_i)) = \sum_{i=0}^n t_i v_i = x$$

\square

2.5. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simple, nos serán de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.17. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$. Además, diremos que el complejo abstracto es **finito** si dicha colección es finita.

Al elemento A de \mathcal{S} lo llamaremos **símplex** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A . En cuanto a la **dimensión** de \mathcal{S} , diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de \mathcal{S} es infinita. El **conjunto de vértices** V de \mathcal{S} diremos que es la unión de elementos de \mathcal{S} que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de \mathcal{S} a cualquier subcolección de \mathcal{S} que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos \mathcal{S}, \mathcal{T} respectivamente. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \rightarrow V_T$ tal que $\{a_0, \dots, a_p\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \dots, f(a_p)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.18. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \dots, a_p\} \subset V$ tales que los vértices a_0, \dots, a_p generan un símplice de K . Entonces llamaremos a la colección \mathcal{K} el **esquema de vértices** de K .

Definición 2.19. Si el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K , diremos que K es una **realización geométrica** de \mathcal{S} .

Proposición 2.9. Sea \mathcal{S} un complejo simplicial abstracto finito de dimensión N . Entonces existe una realización geométrica de \mathcal{S} en \mathbb{R}^{2N+1} .

Demostración. Consideremos un conjunto de puntos $p_i \in \mathbb{R}^{2N+1}$ de forma que sus componentes son potencias de su índice i . Veamos que cualquier conjunto de $2N+2$ de estos puntos es afínmente independiente. Es decir, que los vectores formados por las diferencias entre estos puntos son linealmente independientes.

Para demostrarlo, consideremos un subconjunto de puntos $\{p_{j_k} : 1 \leq k \leq 2N+2\}$ de esta forma y analicemos el determinante de la matriz formada por los vectores correspondientes,

$$\begin{vmatrix} j_2 - j_1 & j_3 - j_1 & \cdots & j_{2N+2} - j_1 \\ j_2^2 - j_1^2 & j_3^2 - j_1^2 & \cdots & j_{2N+2}^2 - j_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_2^{2N+1} - j_1^{2N+1} & j_3^{2N+1} - j_1^{2N+1} & \cdots & j_{2N+2}^{2N+1} - j_1^{2N+1} \end{vmatrix}.$$

Simplificando mediante operaciones elementales de fila, este determinante se transforma en el determinante de Vandermonde, cuyo valor es conocido y se calcula como el producto de las diferencias entre los términos seleccionados,

$$\prod_{1 \leq k < l \leq 2N+2} (j_k - j_l).$$

Este resultado no es cero siempre que todos los j_k sean distintos, asegurando así la independencia lineal.

Respecto a la construcción del complejo simplicial, tomemos un símplice abstracto A en \mathcal{S} con vértices $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ y consideremos el símplice geométrico $\sigma_A = [p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_m}]$ en \mathbb{R}^{2N+1} . Dado que $m+1 \leq 2N+2$, el símplice σ_A tiene dimensión m . Definimos K como el conjunto que contiene todos los símplices σ_A para cada $A \in \mathcal{S}$. Veamos que la intersección de dos símplices σ_A y σ_B en K es igual a $\sigma_{A \cap B}$ con $A, B \in \mathcal{S}$. Consideremos τ como el símplice en \mathbb{R}^{2N+1} cuyos vértices son la unión de los vértices pertenecientes a σ_A y a σ_B , lo cual es posible ya que la suma de sus dimensiones no supera $2N$. De esta manera, la intersección $\sigma_A \cap \sigma_B$ resulta ser la cara de τ determinada por los vértices que σ_A y σ_B comparten, es decir, aquellos asociados a $A \cap B$. Concluimos entonces que $\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A \cap B}$. \square

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior y del **Lema 2.7**, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (a) Todo complejo abstracto finito \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .

2. *Símplices y complejos simpliciales*

- (b) *Dos complejos simpliciales son afinmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.*

3. Homología simplicial

Este capítulo se centra en la homología simplicial, una rama de estudio crucial de la topología algebraica que utiliza complejos simpliciales para analizar y comprender la estructura de espacios topológicos triangulables. Tras explorar los fundamentos del álgebra homológica y la teoría de complejos simpliciales, ahora profundizamos en las propiedades teóricas y aplicaciones prácticas de la homología simplicial siguiendo los contenidos de [RA03].

3.1. Homología simplicial orientada

Consideremos Σ_p el conjunto de todos los símlices de dimensión p de un complejo simplicial K y el conjunto de sus clases de equivalencia por la relación de orientación. Para cada $\sigma \in \Sigma_p$, definimos Σ_p^+ y Σ_p^- como los conjuntos que contienen, respectivamente, un símplex orientado σ^+ y el símplex con orientación opuesta σ^- . En lo que sigue, R siempre será un **anillo unitario conmutativo**, a menos que se indique de manera explícita lo contrario.

Definición 3.1. Sea K un complejo simplicial y sea R un anillo. Consideremos los conjuntos definidos anteriormente. Definimos el **R -módulo de las p -cadenas simpliciales orientadas** de K , $C_p(K; R)$, como el cociente del R -módulo libre generado por $\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-$ sobre el submódulo generado por el conjunto $\{\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\}$. Esto es,

$$C_p(K; R) = \frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle}.$$

Para $p < 0$ o $p > \dim(K)$, definimos $C_p(K; R)$ como el R -módulo trivial.

El interés de definir el R -módulo de p -cadenas simpliciales orientadas radica tanto en la identificación de los elementos que contiene como en las operaciones algebraicas aplicables sobre ellos. Esta construcción nos permite manejar un símplex orientado y su opuesto como opuestos algebraicos en un marco formal. Veámoslo.

Nuestro objetivo es demostrar que efectivamente

$$\frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle} \cong R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle,$$

donde $\tilde{\Sigma}_p$ representa el conjunto de p -símlices en Σ_p con una orientación arbitrariamente fija para cada uno.

Para ello, definamos la aplicación $f : \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rightarrow R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Esta aplicación asigna a cada símplex orientado σ^+ en Σ_p^+ , un representante σ en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ con una orientación fija elegida arbitrariamente, y a cada σ^- en Σ_p^- , le asigna $-\sigma$ en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$, donde $-\sigma$ refleja el elemento opuesto de σ .

La aplicación f respeta las relaciones de orientación al asignar a símlices con orientaciones opuestas a elementos que son opuestos algebraicos en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Por la **Propiedad universal de**

3. Homología simplicial

los módulos libres, esta aplicación induce un homomorfismo $\tilde{f} : R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle \rightarrow R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ que resulta ser sobreyectivo, ya que cada elemento en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$ tiene al menos una preimagen en $R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle$.

Por definición de f , para cada elemento de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ en $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$, tenemos que $\tilde{f}(\sigma^+ + \sigma^-) = f(\sigma^+) + f(\sigma^-) = \sigma - \sigma = 0$, demostrando que todo el submódulo $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$ tiene imagen cero por \tilde{f} y, por ende, está contenido en el núcleo de \tilde{f} .

Además, si consideramos un elemento x en $R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle$ tal que $\tilde{f}(x) = 0$, este elemento puede expresarse como una combinación lineal de elementos en Σ_p^+ y Σ_p^- . La condición $\tilde{f}(x) = 0$ implica que la suma de las imágenes bajo f de los términos en esta combinación lineal debe ser cero en $R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle$. Esto solo ocurre si para cada σ , la suma total de los coeficientes correspondientes a σ^+ y σ^- es cero, lo que significa que cada término en x que contribuye a esta suma cero debe ser de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ o un múltiplo de este, luego $\tilde{f}(x) = 0$ implica que $x \in \langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$.

Por tanto, el núcleo de \tilde{f} coincide precisamente con $\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle$, y aplicando el **Primer teorema de isomorfía**, concluimos que

$$\frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle} \cong R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle,$$

estableciendo la estructura algebraica deseada y completando la prueba.

Observación 3.1. En particular, la anterior construcción asigna a cada símplice orientado una cadena cuyo coeficiente del anillo es 1, 0 o -1 . A estas cadenas las llamaremos **p -cadenas elementales**. En ocasiones abusaremos de la notación para designar por σ a la cadena elemental respectiva del símplice orientado σ .

Definición 3.2. Sea K un complejo simplicial y sean $C_p(K; R), C_{p-1}(K; R)$ R -módulos de p -cadenas. Definimos el **operador borde de p -cadenas** como el homomorfismo $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ tal que

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p([v_0, v_1, \dots, v_p]) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p].$$

donde \hat{v}_i denota el vértice a eliminar.

Lema 3.1. El operador borde $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ está bien definido. En particular, si σ^+ y σ^- son las dos orientaciones del p -símplice σ , tenemos que

$$\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$$

Demostración. Probaremos que la suma de la imagen por el operador borde de $\sigma^+ = [v_0 v_1 \dots v_p]$ y $\sigma^- = [v_1 v_0 \dots v_p]$ es igual a 0. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned} \partial_p \sigma^+ &= [v_1 v_2 \dots] - [v_0 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_0 v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_p], \\ \partial_p \sigma^- &= [v_0 v_2 \dots] - [v_1 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_1 v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]. \end{aligned}$$

Al sumar ambas expresiones, los dos primeros términos de $\partial_p \sigma^+$ y $\partial_p \sigma^-$ se cancelan entre sí. Como consecuencia de la definición de $C_{p-1}(K; R)$, los términos restantes definen

orientaciones opuestas del mismo símplice por lo que se cancelan y $\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$. \square

Lema 3.2. Sean $\partial_p : C_{p+1}(K; R) \rightarrow C_p(K; R)$, $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ operadores borde. Entonces $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \partial_p \partial_{p+1}[v_0, \dots, v_{p+1}] &= \partial_p \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left[\sum_{j>i}^{p+1} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_{p+1}] + \sum_{j<i}^{p+1} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right]. \end{aligned}$$

Es decir, el símplice $[v_0 \dots \hat{v}_k \dots \hat{v}_t \dots v_{p+1}]$ aparece dos veces en la anterior expresión con signos opuestos, donde $k, t \in \{0, \dots, p+1\}$. Esto nos lleva a discutir los siguientes casos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < t$. En el primer caso, $i = k < j = t$ donde el coeficiente es $(-1)^k(-1)^{t-1}$. En el segundo caso, $i = t > j = k$ con coeficiente $(-1)^t(-1)^k$. Concluimos por tanto que todo símplice de la expresión se anula y al anularse sobre los generadores, $\partial_{p-1}\partial_p$ es el homomorfismo nulo. \square

Definición 3.3. El complejo de cadenas positivo $C_\bullet(K; R) = \{C_p(K; R), \partial_p\}$ lo llamaremos **complejo de cadenas simpliciales** de K . La homología de dicho complejo la notaremos por $H_p(K; R)$ y lo llamaremos **p -ésimo R -módulo de homología** de K .

Si $R = \mathbb{Z}$, el módulo $H_p(K; \mathbb{Z})$ lo notaremos simplemente por $H_p(K)$ y diremos que es el **p -ésimo grupo de homología** de K .

Proposición 3.1. Sea K un complejo simplicial no vacío. Entonces el complejo de cadenas positivo $\{C_p(K; R), \partial_p\}$ admite un aumento.

Demostración. Sea $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$ el homomorfismo que extiende linealmente $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice $v \in K$. Veamos que $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow R$ es nulo. Tomando $[v_0, v_1] \in C_1(K; R)$ obtenemos que $\varepsilon(\partial_1[v_0, v_1]) = \varepsilon(v_1 - v_0) = 1 - 1 = 0$, como queríamos ver. \square

Definición 3.4. Sea $\tilde{C}_\bullet(K; R)$ el complejo aumentado del complejo de cadenas simpliciales $C_\bullet(K; R)$. Denominaremos **p -ésimo módulo de homología reducida** de K al módulo de homología $H_p(\tilde{C}_\bullet; R)$ y lo denotaremos por $\tilde{H}(K; R)$.

Proposición 3.2. Sean K y L dos complejos simpliciales junto con una aplicación simplicial $f : |K| \rightarrow |L|$. Esta aplicación induce un homomorfismo entre los complejos de cadenas, $C(f)$, el cual se define extendiendo linealmente la función

$$C(f)([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [f(v_0) \dots f(v_p)] & \text{si los vértices son distintos entre sí,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, si f es la identidad, entonces $C(f)$ es simplemente la identidad también. Además, si $g : |L| \rightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, se cumple que $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$.

Demostración. Para demostrar esto, primero observamos que la definición de $C(f)$ es independiente de la orientación de los símplices. Luego, verificamos la igualdad $\partial_p \circ C(f) = C(f) \circ \partial_p$.

3. Homología simplicial

Si no hay vértices repetidos, se tiene que:

$$\begin{aligned} C(f)\partial_p([v_0 \dots v_p]) &= C(f) \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i [f(v_0) \dots \widehat{f(v_i)} \dots f(v_p)] = \partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]). \end{aligned}$$

Si hay vértices repetidos, digamos $f(v_i) = f(v_j)$, entonces $\partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]) = 0$. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i C(f)([v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]) = 0$$

debido a que $C(f)([v_0 \dots \hat{v}_k \dots v_p]) = 0$ para $k \neq i, j$ y cuando $i < j$,

$$(-1)^i [f(v_0) \dots \widehat{f(v_i)} \dots f(v_j) \dots f(v_p)] + (-1)^j [f(v_0) \dots f(v_i) \dots \widehat{f(v_j)} \dots f(v_p)] = 0$$

también se anula. Esto se debe a que si no hay más vértices repetidos, como $f(v_i) = f(v_j)$, el número de trasposiciones necesarias para cambiar de un símplice orientado al otro es $j - i - 1$, dado que $f(v_j)$ ocupa el lugar $j - 1$ en el primer símplice. La fórmula $C(g \circ f) = C(g)C(f)$ se sigue directamente de la definición de $C(f)$. \square

Observación 3.2. El resultado anterior nos garantiza que $C : \mathbf{Csim} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Ch}_\bullet$ es un funtor covariante entre la categoría de complejos simpliciales y la categoría de complejos de cadenas.

Definición 3.5. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial y sea $C(f) : C_\bullet(K; R) \rightarrow C_\bullet(L; R)$ una aplicación de cadenas definida como en la **Proposición 3.2**. Llamaremos a $C(f)$ la **aplicación de cadenas inducida por f** y la notaremos por $f_\#$.

Corolario 3.1. Toda aplicación simplicial inducida $f : |K| \rightarrow |L|$ induce un homomorfismo de R -módulos

$$H_p(f) : H_p(K; R) \rightarrow H_p(L; R)$$

que notaremos por f_* y que cumple que si $g : |L| \rightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\text{id}_* = \text{id}$.

Observación 3.3. La última implicación del corolario se traduce en que tenemos un funtor covariante que va de la categoría de complejos simpliciales con los homeomorfismos simpliciales a la categoría de R -módulos con sus homomorfismos.

Lema 3.3. La aplicación de cadenas $f_\# : C_\bullet(K; R) \rightarrow C_\bullet(L; R)$ preserva el homomorfismo de aumento y como resultado, induce un homomorfismo f_* de módulos de homología reducida.

Demostración. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial, $f_\#$ su aplicación de cadenas inducida y sean $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$, $\varepsilon : C_0(L; R) \rightarrow R$ aumentos de $C_\bullet(K; R)$, $C_\bullet(L; R)$ respectivamente. Llamemos indistintamente ε a ambos aumentos en función del dominio en el que nos encontremos. Ahora definamos $\varepsilon(f_\#(v)) = 1$ y $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice de K y extendamos por linealidad. Por consiguiente $\varepsilon \circ f_\# = \varepsilon$. Esta ecuación implica que $f_\#$ lleva el núcleo de $\varepsilon_K : C_0(K; R) \rightarrow R$ al núcleo de $\varepsilon_L : C_0(L; R) \rightarrow R$, lo que induce un homomorfismo $f_* : \tilde{H}_0(K; R) \rightarrow \tilde{H}_0(L; R)$. \square

Teorema 3.1. Sean f, g aplicaciones simpliciales de K a L ; $f_#, g_#$ sus aplicaciones de cadenas inducidas y sea $s : f_# \rightarrow g_#$ una homotopía de cadenas entre ellas. Entonces los homomorfismos inducidos f_*, g_* para sus módulos de homología son iguales.

Demostración. Sea z un p -ciclo de K . Entonces

$$g_*(z) - f_*(z) = \partial sz + s\partial z = \partial sz + 0$$

por lo que $f(z)$ y $g(z)$ tienen la misma clase de homología. Por tanto, $f_*([z]) = g_*([z])$ como se quería. \square

3.2. Homología del complejo cono

A continuación, exploraremos un nuevo complejo simplicial que construiremos a partir de otro dado. El complejo cono nos facilitará la obtención de algunos resultados relevantes en homología.

Definición 3.6. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $w \in \mathbb{R}^N$ tal que cada semirrecta con origen w corta a $|K|$ a lo sumo en un punto. Definimos el **cono sobre K con vértice w** como el conjunto cuyos elementos son los símlices de K o símlices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$, donde $[v_0, \dots, v_p] \in K$. Lo denotaremos por $w * K$.

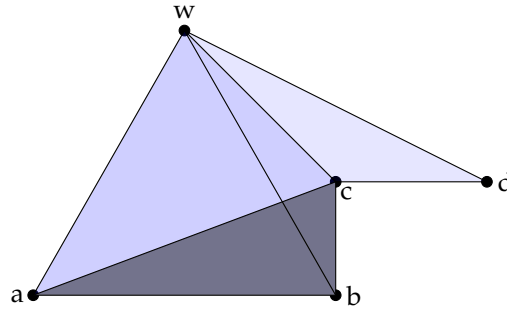


Figura 3.1.: Cono sobre el complejo formado por el 2-síndice $[a, b, c]$, el 1-síndice $[c, d]$ y todas sus caras con vértice w .

Lema 3.4. El cono $w * K$ es un complejo simplicial.

Demostración. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un símlice de K . Primero veamos que el conjunto $\{w, v_0, \dots, v_p\}$ es afínmente independiente. Si w perteneciera al plano P generado por los puntos v_0, \dots, v_p , podríamos considerar el segmento que une w con un punto de $x \in \text{Int } \sigma$. Dicho conjunto, por ser abierto en P , contendría un intervalo de puntos en el segmento, contradiciendo la hipótesis de que las semirrectas que parten de w cortan a lo sumo en un punto a $|K|$.

Veamos ahora que $w * K$ es un complejo simplicial. Los símlices de $w * K$ pueden ser de tres tipos:

1. Símlices $[v_0, \dots, v_p]$ pertenecientes a K .
2. Símlices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$.

3. Homología simplicial

3. El 0-símplice $[w]$.

Si σ, τ son símlices del primer tipo, entonces $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ puesto que K es un complejo simplicial. El símplex $\text{Int}[w, v_0, \dots, v_p]$ es la unión de todos los segmentos abiertos que unen w con v_0, \dots, v_p , luego dos símlices de esta forma tienen intersección vacía pues las semirrectas que parten de w cortan a K a lo sumo en un punto. Finalmente, si σ es del primer tipo y τ del segundo, $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ por el mismo argumento recién dado. \square

Proposición 3.3. Sea K un complejo simplicial y sea $w * K$ el cono sobre K de vértice w . Entonces la homología orientada de $w * K$ es $H_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \neq 0$ y $H_0(w * K; R) \cong R$. En el caso de la homología reducida, $\tilde{H}_0(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $D_\bullet = \{D_p, \partial_p\}$ un complejo de cadenas tal que $D_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $D_0 = R$. Definimos la aplicación de cadenas $f : D_\bullet \rightarrow C_\bullet(w * K; R)$ de forma que $f_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $f_0(r) = rw$. Por otro lado, por la **Proposición 3.1** podemos definir el aumento $\varepsilon : C_\bullet(w * K; R) \rightarrow D_\bullet$ dado por $\varepsilon_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $\varepsilon_0(v) = 1$ para todo vértice v del cono. Nuestro objetivo es ver que efectivamente f es una equivalencia de cadenas junto a ε . De manera directa tenemos que $\varepsilon \circ f = \text{id}_D$, luego $\varepsilon \circ f \simeq \text{id}_D$. Veamos ahora que $f \circ \varepsilon$ es homotópica a la identidad. Para ello vamos a definir s como la familia $\{s_p\}$ de homomorfismos $s_p : C_p(w * K; R) \rightarrow C_{p+1}(w * K; R)$ tal que

$$s_p([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [wv_0 \dots v_p] & \text{si } v_i \neq w \quad 0 \leq i \leq p, \quad p \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

induce una extensión lineal. Dicha familia está bien definida para $C_p(w * K; R)$. Veamos que $\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p = \text{id}_{C_p(w * K; R)} - f_p\varepsilon_p$ se cumple, por lo que s es una homotopía de cadenas. Para el caso en que $p \in \mathbb{Z}$ es menor que 0, se cumple de manera trivial. Si $p = 0$, distinguimos dos casos. Cuando $v \neq w$ tenemos que $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = \partial_1[w, v] = v - w = (\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v)$. Por el contrario si $v = w$, $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = 0$ y también $(\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v) = \text{id}_0(w) - (f_0 \varepsilon_0)(w) = w - w = 0$. Por último, veamos que sucede cuando $p > 0$. Supongamos primero que $w \neq v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= \partial_{p+1}[wv_0 \dots v_p] + s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= [v_0 \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^i [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \\ &= [v_0 \dots v_p] = (\text{id}_{C_p} - f_p \varepsilon_p)[v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Finalmente si $w = v_{i_0}$ para algún i_0 entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= s_{p-1}\partial_p[v_0 \dots v_p] = s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= (-1)^{i_0} s_{p-1}[v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = (-1)^{i_0} [wv_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] \\ &= (-1)^{i_0} [v_{i_0} v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = [v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Es decir, $f \circ \varepsilon \simeq \text{id}_{C(w * K; R)}$ y por el **Corolario 1.2** induce un isomorfismo $\varepsilon_* : H_p(w * K; R) \rightarrow H_p(D; R)$.

Para el caso reducido consideremos el complejo aumentado D_\bullet dado por el aumento $\text{id}_R : D_0 \rightarrow R$. Como consecuencia, la homología de \tilde{D} es trivial. Además, podemos extender los homomorfismos ε y f a homomorfismos $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} para los complejos aumentados de forma que $\tilde{\varepsilon}_{-1} = \tilde{f}_{-1} = \text{id}_R$. Por la misma homotopía s obtenemos que $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} son equivalencias homotópicas entre los complejos aumentados y por tanto, $\tilde{H}_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. \square

Corolario 3.2. *La homología simplicial reducida de cualquier símplice es nula.*

Corolario 3.3. *Sea σ un n -símplice y sea $\text{Bd } \sigma$ su borde. Entonces $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ es trivial si $p \neq n - 1$ y $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) \cong R$. Además, para el caso no trivial, un generador es la clase de la cadena $\partial(\sigma)$.*

Demostración. Dado el símplice anterior, los complejos de cadenas aumentados de σ y su borde coinciden hasta dimensión $p \leq n - 1$. Por el Corolario 3.2 deducimos que $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \leq n - 2$. Además, $C_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \geq n$. Por lo tanto, $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) = \ker \partial_{n-1}$. Aquí, ∂_{n-1} representa el operador borde en ambos complejos aumentados (es decir, $\partial_0 = \varepsilon$ indica el aumento). Dado que el complejo aumentado de σ tiene homología trivial, entonces $\ker \partial_{n-1} = \text{Im } \partial_n$, y además ∂_n es inyectivo donde el operador borde $\partial_n : C_n(\sigma; R) \rightarrow C_{n-1}(\sigma; R) = C_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$ aparece en el complejo de σ . Puesto que $C_n(\sigma; R)$ es isomorfo a R generado por σ , se sigue que $\text{Im } \partial_n$, y por tanto $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$, es isomorfo a R generado por $\partial(\sigma)$. \square

3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

Nombrada en honor a los matemáticos austriacos Walther Mayer y Leopold Vietoris, la sucesión de Mayer-Vietoris es una herramienta esencial en la topología algebraica y la teoría de homología. Esta sucesión permite analizar la homología de un complejo simplicial a partir de la homología de sus subcomplejos, de manera análoga a como el teorema de Seifert-van Kampen describe el grupo fundamental de un espacio topológico a partir de subespacios abiertos y conexos por arcos.

Lema 3.5 (Lema de la serpiente). *Sean $A_\bullet = \{A_n, \partial_A\}$, $B_\bullet = \{B_n, \partial_B\}$ y $C_\bullet = \{C_n, \partial_C\}$ complejos de cadenas y sean f, g aplicaciones de cadenas tales que la sucesión*

$$0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$$

es exacta. Existe entonces una sucesión exacta de homología

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) \\ & & & & & & \downarrow \partial_* \\ & & & & H_{p-1}(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_{p-1}(B_\bullet; R) \xrightarrow{g_*} H_{p-1}(C_\bullet; R) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

donde ∂_* es el operador borde inducido en B_\bullet que llamaremos **operador conector**.

3. Homología simplicial

Demostración. Para realizar esta prueba usaremos una persecución de diagramas. Usaremos el siguiente diagrama como guía:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{f} & B_{p+1} & \xrightarrow{g} & C_{p+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial_A \downarrow & & \partial_B \downarrow & & \partial_C \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{f} & B_p & \xrightarrow{g} & C_p \longrightarrow 0 \\
 & & \partial_A \downarrow & & \partial_B \downarrow & & \partial_C \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{f} & B_{p-1} & \xrightarrow{g} & C_{p-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Paso 1. Para definir el operador conector ∂_* , primero tenemos que comprobar que si tenemos un ciclo de C_p , entonces podemos asignarle un único ciclo en A_{p-1} . Por tanto, sea c_p un ciclo de C_p (esto es, $c_p \in \ker \partial_C$) y escojamos $b_p \in B_p$ tal que $g(b_p) = c_p$ (recordemos que g es sobreyectiva por ser la sucesión exacta corta). El elemento $\partial_B b_p$ de B_{p-1} pertenece al núcleo de g pues $g(\partial_B b_p) = \partial_C g(b_p) = \partial_C c_p = 0$. Por tanto, existe un elemento $a_{p-1} \in A_{p-1}$ tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$, pues $\ker g = \text{Im } f$. Tenemos que dicho elemento es único por ser f inyectiva. Además, a_{p-1} es un ciclo. Como $f(\partial_A a_{p-1}) = \partial_B f(a_{p-1}) = \partial_B \partial_B b_p = 0$, entonces $\partial_A a_{p-1} = 0$ por ser f inyectiva. Definimos $\partial_*[c_p] = [a_{p-1}]$ donde los corchetes denotan la clase de homología.

Paso 2. Queremos probar ahora que ∂_* es un homomorfismo de módulos bien definido. Sean c_p, c'_p dos elementos del núcleo de $\partial_C : C_p \rightarrow C_{p-1}$. Sean b_p, b'_p elementos de B_p tal que $g(b_p) = c_p$ y $g(b'_p) = c'_p$. Escojamos ahora a_{p-1} y a'_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ y $f(a'_{p-1}) = \partial_B b'_p$.

Para probar que ∂_* está bien definido, veamos que no depende del b_p y c_p escogido. Supongamos que $c_p \sim c'_p$ y veamos entonces que a_{p-1} y a'_{p-1} también lo son. Por tanto, supongamos que $c_p - c'_p = \partial_C c_{p+1}$. Escojemos b_{p+1} tal que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Esto implica que

$$f(b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C g(b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C c_{p+1} = 0.$$

En consecuencia, podemos tomar a_p tal que $f(a_p) = b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}$ luego

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B (b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}) = 0 = f(a_{p-1} - a'_{p-1}).$$

Por ser f inyectiva, $\partial_A a_p = a_{p-1} - a'_{p-1}$, como buscábamos.

Ya sabemos que ∂_* está bien definido, veamos que es un homomorfismo de módulos. Para ello basta fijarnos en que $g(b_p + b'_p) = c_p + c'_p$ y que $f(a_{p-1} + a'_{p-1}) = \partial_B (b_p + b'_p)$. Por tanto $\partial_*[c_p + c'_p] = [a_{p-1} + a'_{p-1}]$ por definición y en consecuencia, $\partial_*[c_p + c'_p] = \partial_*[c_p] + \partial_*[c'_p]$. Ahora si $\lambda \in R$, de manera análoga obtenemos que $\lambda \partial_*[b_p] = \lambda[c_p] = [\lambda c_p] = \partial_*[\lambda b_p]$.

Paso 3. Probaremos la exactitud de $H_p(B_\bullet; R)$ por doble inclusión. Como $g \circ f = 0$ tenemos que $g_* \circ f_* = 0$. Esto implica que si $\gamma \in \text{Im } f_*$, entonces $g_*(\gamma) = 0$.

Para probar la otra inclusión, consideremos $\gamma = [b_p]$ y supongamos que $g_*(\gamma) = 0$. Entonces $g(b_p) = \partial_C c_{p+1}$ para algún $c_{p+1} \in C_p$. Escojamos b_{p+1} de manera que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Entonces

$$g(b_p - \partial_B b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C g(b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C c_{p+1} = 0,$$

luego $b_p - \partial_B b_{p+1} = f(a_p)$ para algún a_p . Ahora, a_p es un ciclo pues

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B b_p - 0 = 0$$

y f es inyectiva. Es más, $f_*[a_p] = [f(a_p)] = [b_p - \partial_B b_{p+1}] = [b_p]$ y por tanto $[b_p] \in \text{Im } f_*$ como queríamos.

Paso 4. Probemos la exactitud en $H_p(C_\bullet; R)$. Sea $\alpha = [c_p]$ un elemento de $H_p(C_\bullet; R)$. Escogamos b_p tal que $g(b_p) = c_p$ y ahora tomemos a_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial_* \alpha = [a_{p-1}]$ por definición.

Procederemos de nuevo por doble inclusión. Consideremos primero que $\alpha \in \text{Im } g_*$. Entonces $\alpha = [g(b_p)]$ donde b_p es un ciclo en B . Esto implica que $f(a_{p-1}) = 0$ de donde $a_{p-1} = 0$ y por tanto $\partial_* \alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\partial_* \alpha = 0$. Entonces $a_{p-1} = \partial_A a_p$ para algún a_p . Deducimos entonces que $b_p - f(a_p)$ es un ciclo y que $\alpha = g_*[b_p - f(a_p)]$ luego $\alpha \in \text{Im } g_*$. Realizando los cálculos obtenemos que

$$\partial_B(b_p - f(a_p)) = \partial_B(b_p) - \partial_B(f(a_p)) = \partial_B(b_p) - f(a_{p-1}) = 0,$$

$$g_*[b_p - f(a_p)] = [g(b_p) - 0] = [c_p] = \alpha.$$

Paso 5. Finalmente obtengamos la exactitud para $H_{p-1}(A_\bullet; R)$. Si $\beta \in \text{Im } \partial_*$, entonces $\beta = [a_{p-1}]$ donde $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p por definición. En consecuencia,

$$f_*(\beta) = [f(a_{p-1})] = [\partial_B b_p] = 0.$$

Consideremos ahora el caso donde $f_*(\beta) = 0$. Sea $\beta = [a_{p-1}]$. Entonces $[f(a_{p-1})] = 0$ por lo que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p . Definimos $c_p = g(b_p)$. En consecuencia, c_p es un ciclo ya que $\partial_C c_p = g(\partial_B b_p) = g(f(a_{p-1})) = 0$ y $\beta = \partial_*[c_p]$ por definición. Esto es, $\beta \in \text{Im } \partial_*$. \square

Definición 3.7. En las condiciones del anterior lema, llamaremos a la sucesión obtenida **sucesión exacta larga de homología**.

Una consecuencia importante del resultado anterior es su naturalidad, un concepto de gran interés en teoría de categorías.

Teorema 3.2. Sean $\alpha : A_\bullet \rightarrow A'_\bullet$, $\beta : B_\bullet \rightarrow B'_\bullet$ y $\gamma : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{f} & B_\bullet & \xrightarrow{g} & C_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \xrightarrow{f'} & B'_\bullet & \xrightarrow{g'} & C'_\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las sucesiones horizontales son sucesiones exactas de complejos de cadenas. Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A_\bullet; R) & \longrightarrow \\ & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & \\ \longrightarrow & H_p(A'_\bullet; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(B'_\bullet; R) & \xrightarrow{g'_*} & H_p(C'_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(A'_\bullet; R) & \longrightarrow \end{array}$$

3. Homología simplicial

es conmutativo.

Demostración. Es claro que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_p(A_\bullet; R) & \xrightarrow{f_*} & H_p(B_\bullet; R) & \xrightarrow{g_*} & H_p(C_\bullet; R) \\ \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ H_p(A'_\bullet; R) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(B'_\bullet; R) & \xrightarrow{g'_*} & H_p(C'_\bullet; R) \end{array}$$

es conmutativo, pues los homomorfismos inducidos de las aplicaciones de cadenas conservan la conmutatividad. Por tanto, basta estudiar la conmutatividad en

$$\begin{array}{ccc} H_p(C_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A_\bullet; R) \\ \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* \\ H_p(C'_\bullet; R) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{p-1}(A'_\bullet; R) . \end{array}$$

Sea $[a] \in H_p(A_\bullet; R)$ y tomemos b_p de manera que $g(b_p) = c_p$. Además tomemos $a_{p-1} \in A_p$ de forma que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial'_*[c_p] = [a_{p-1}]$ por definición. Consideremos ahora $c'_p = \gamma(c_p)$. Nuestro objetivo es ver que $\partial'_*[c'_p] = \alpha_*[a_{p-1}]$. Está claro que $\beta(b_p)$ es preimagen de c_p por g' , pues $g'\beta(b_p) = \gamma g(b_p) = \gamma(c_p) = c'_p$. Así mismo, $\alpha(c_{p-1})$ lo es de $\partial'_D \beta(b_p)$, pues $f'\alpha(a_{p-1}) = \beta f(a_{p-1}) = \beta(\partial_B b_p) = \partial'_D \beta(b_p)$. Esto es, $\partial'_*[c_p] = [\alpha(a_{p-1})]$ por definición. \square

Proposición 3.4 (Sucesión de Mayer-Vietoris). *Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 sub-complejos de K tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_p(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R) \xrightarrow{g} H_p(K; R) \rightarrow H_{p-1}(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow \cdots$$

tal que $f(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c))$, $g(d, e) = j_{1\#}(d) + j_{2\#}(e)$ donde $i_t : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_t$ y $j_t : K_t \rightarrow K_1 \cup K_2$ para $t \in \{1, 2\}$ son las respectivas inclusiones.

Demostración. La demostración consiste en construir la sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \rightarrow C_\bullet(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R) \xrightarrow{g} C_\bullet(K; R) \rightarrow 0$$

y aplicar el **Lema de la serpiente**.

Para ello comencemos describiendo el complejo de cadenas $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$. Recordemos que la suma directa de un complejo de cadenas se definía como la suma directa de los R -módulos de dimensión p $C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R)$, cuyo operador borde $\partial'(d, e) = (\partial_1 d, \partial_2 e)$ donde ∂_1, ∂_2 corresponden a los operadores borde de K_1 y K_2 respectivamente.

Para comprobar la exactitud de la sucesión, comencemos estudiando la exactitud en los extremos de ésta. Es claro que f es inyectiva por ser una inclusión. En cuanto a la sobreyectividad de g , tomemos $d \in C_p(K; R)$ donde d sea la suma de símlices orientados. Notemos por d_1 a los elementos de dicha suma provenientes de K_1 . Entonces $d - d_1 \in K_2$ y $g(d_1, d - d_1) = d$.

Para estudiar la exactitud en $C_\bullet(K_1; R) \oplus C_\bullet(K_2; R)$, consideremos la inclusión $k : K_1 \cap K_2 \rightarrow K$ y la respectiva inclusión de cadenas inducida $k_\# : C_\bullet(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow C_\bullet(K; R)$. Nótese

que $g(f(c)) = k_{\#}(c) - k_{\#}(c) = 0$. Sea ahora $g(d, e) = 0$, entonces $d = -e$ si las consideramos como cadenas de K . Como d proviene de K_1 y e de K_2 , ambas deben de provenir de $K_1 \cap K_2$ y en consecuencia, $(d, e) = (d, -d) = f(d)$, como queríamos.

La homología de $C_{\bullet}(K_1; R) \oplus C_{\bullet}(K_2; R)$ de dimensión p , que notaremos por $H_p(K_1 \oplus K_2; R)$, es entonces

$$H_p(K_1 \oplus K_2; R) \cong H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R)$$

por la **Proposición 1.5**. Finalmente aplicamos el **Lema de la serpiente** y en consecuencia tenemos la sucesión deseada.

Para obtener la sucesión de Mayer-Vietoris de homología reducida, reemplazaremos los complejos de cadenas anteriores por sus correspondientes complejos de cadenas aumentados. Consideremos para ello el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(K_1 \cap K_2; R) & \longrightarrow & C_0(K_1; R) \oplus C_0(K_2; R) & \longrightarrow & C_0(K; R) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{K_1 \cap K_2} & & \downarrow \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \oplus R & \xrightarrow{\tilde{g}} & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

La conmutatividad y la exactitud se mantienen en la parte inferior del diagrama si definimos $\tilde{f}(r) = (r, r)$ y $\tilde{g}(r', r) = r' + r$. Las aplicaciones $\varepsilon_{K_1 \cap K_2}$, $\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ y ε son sobreyectivas pues la intersección de K_1 y K_2 es no vacía. De este modo, la homología de sus respectivos complejos de cadenas es nula en dimensión -1 y en dimensión 0 es igual a la de sus respectivos módulos de homología reducida $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2; R)$, $\tilde{H}_0(K_1; R) \oplus \tilde{H}_0(K_2; R)$ y $\tilde{H}_0(K; R)$. Para finalizar, aplicamos de nuevo el **Lema de la serpiente**. \square

3.4. Conexión y el módulo de homología $H_0(K; R)$

Uno de los resultados más destacados en la teoría de homología simplicial es su capacidad para identificar y clasificar las componentes conexas de un complejo simplicial. Utilizando el módulo de homología de dimensión cero, H_0 , veremos que es posible determinar directamente el número de componentes conexas en el complejo.

Proposición 3.5. *Sea K un complejo simplicial. Entonces K se puede partir en subcomplejos disjuntos K_1, K_2, \dots, K_s cuyos poliedros son las componentes conexas del poliedro $|K|$.*

Demostración. Consideremos las componentes conexas X_1, X_2, \dots, X_s del politopo de K . Para cada j , consideremos K_j como la colección de todos los símlices σ de K tales que $\sigma \subset X_j$. Si un símlice pertenece a K_j para algún j , entonces todas sus caras también pertenecen a K_j . Por lo tanto, K_1, K_2, \dots, K_s son subcomplejos de K . Estos subcomplejos son disjuntos entre sí, debido a que las componentes conexas X_1, X_2, \dots, X_s del poliedro $|K|$ son disjuntos. Además, si $\sigma \in K$ entonces $\sigma \subset X_j$ para algún j , ya que σ es un subconjunto conexo del espacio topológico $|K|$, y todo subconjunto conexo de un espacio topológico se encuentra contenido en alguna componente conexa. Por consiguiente, σ pertenece a K_j . En consecuencia, $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$ y $|K| = |K_1| \cup |K_2| \cup \dots \cup |K_s|$. \square

Definición 3.8. Sea K un complejo simplicial y sean v, w dos vértices de K . Diremos que v, w pueden unirse por un **camino de aristas** si existen vértices v_0, \dots, v_k en K de forma que $v_0 = v$, $v_k = w$ y $[v_i, v_{i+1}]$ es un 1-símlice para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

3. Homología simplicial

Lema 3.6. *El poliedro $|K|$ de un complejo simplicial K es un espacio topológico conexo si, y sólo si, cualesquiera dos vértices de K pueden ser unidos por un camino de aristas.*

Demostración. Consideremos un par de vértices cualesquiera del camino de aristas v_{i_0}, v_{j_0} de K . Claramente si $i_0 = j_0$ entonces es trivialmente conexo. Supongamos entonces sin pérdida de generalidad $i_0 < j_0$. Entonces podemos definir una aplicación lineal y continua $\alpha_i : \left[\frac{i-i_0}{j_0-i_0}, \frac{i+1-i_0}{j_0-i_0} \right] \rightarrow [v_i, v_{i+1}]$ tal que

$$\alpha_i(\lambda) = (1 - \lambda)v_{i_0} + \lambda v_{j_0+1}$$

para todo $i \in \{i_0, \dots, j_0 - 1\}$. Por tanto, la función $\alpha : [0, 1] \rightarrow [v_{i_0}, v_{j_0}]$ tal que $\alpha(\lambda) = \alpha_i(\lambda)$ si $\lambda \in [i, i+1]$ es un arco que conecta ambos vértices. En consecuencia, $[v, w]$ es arco conexo. Por ser cada símplice convexo, y por tanto arco conexo, $|K|$ es arco conexo. Concluimos aplicando el **Teorema 2.2**. \square

Teorema 3.3. *Sea K un complejo simplicial y R un anillo unitario conmutativo. Supongamos que el poliedro $|K|$ de K es conexo. Entonces $H_0(K; R) \cong R$.*

Demostración. Consideremos el complejo de cadenas aumentado $\tilde{C}(K; R)$ y su respectiva homología reducida $\tilde{H}(K; R)$. Es claro que el submódulo de bordes del complejo aumentado $B_0(K; R)$ está contenido en $\ker \tilde{\partial}_0$, dado que $\tilde{\partial}_0 \circ \tilde{\partial}_1 = 0$.

Para la otra inclusión, consideremos w_0, w_1, \dots, w_m vértices de K que determinan un camino de aristas. Cada $w_j - w_{j-1}$ es una arista de K para $j = 1, 2, \dots, m$, y se sigue que:

$$[w_m] - [w_0] = \sum_{j=1}^m ([w_j] - [w_{j-1}]) = \tilde{\partial}_1 \left(\sum_{j=1}^m [w_j, w_{j-1}] \right) \in B_0(K; R).$$

Dado que $|K|$ es conexo, por el **Lema 3.6** sabemos que cualquier par de vértices de K puede ser unido por un camino de aristas. Por lo tanto, $v - u \in B_0(K; R)$ para cualquier par de vértices u y v de K .

Escojamos un vértice $u \in K$. Entonces, para cualquier conjunto de coeficientes $r_1, r_2, \dots, r_s \in R$ y vértices v_1, v_2, \dots, v_s de K , tenemos que

$$\sum_{j=1}^s r_j [v_j] = \sum_{j=1}^s r_j ([v_j] - [u]) + \left(\sum_{j=1}^s r_j \right) [u],$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^s r_j ([v_j] - [u]) \in B_0(K; R).$$

En consecuencia,

$$z - \tilde{\partial}_0([u]) \in B_0(K; R)$$

para todo $z \in \tilde{C}_0(K; R)$. Esto muestra que $\ker \tilde{\partial}_0 \subseteq B_0(K; R)$. Finalmente, el homomorfismo $\tilde{\partial}_0 : \tilde{C}_0(K; R) \rightarrow R$ es sobreyectivo y su núcleo es $B_0(K; R)$. Además, sabemos que $Z_0(K; R) = C_0(K; R)$, pues $\tilde{\partial}_0$ es el homomorfismo nulo. Entonces

$$H_0(K; R) = \frac{Z_0(K; R)}{B_0(K; R)} = \frac{C_0(K; R)}{B_0(K; R)}.$$

Por el **Primer teorema de isomorfía**, el homomorfismo $\tilde{\partial}_0$ induce un isomorfismo de $H_0(K; R)$ a R , y por lo tanto $H_0(K; R) \cong R$, como se requería. \square

Corolario 3.4. Sea K un complejo simplicial y sea R un anillo unitario conmutativo. Entonces $H_0(K; R) \cong R^s$, donde s es el número de componentes conexas del poliedro $|K|$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de componentes conexas de $|K|$. Si $|K|$ es conexo, entonces el resultado se sigue del **Teorema 3.3**. Supongamos ahora que podemos descomponer K en subcomplejos K_1, \dots, K_s disjuntos dos a dos. Por la **Sucesión de Mayer-Vietoris**, tenemos que la sucesión

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_0(K_1 \cap K \setminus K_1; R) \rightarrow H_0(K_1; R) \oplus H_0(K \setminus K_1; R) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(K; R) \rightarrow H_{-1}(K_1 \cap K \setminus K_1; R) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

es exacta, donde $K \setminus K_1 = \bigcup_{i=2}^{m+1} K_i$. Sin embargo, la intersección $K_1 \cap K \setminus K_1$ es vacía luego su módulo de homología de dimensión 0 y -1 es el trivial. Por hipótesis de inducción, $H_0(K_1) \oplus H_0(K \setminus K_1; R) \cong R \oplus R^{s-1} = R^s$. Finalmente, por ser la secuencia exacta en $H_0(K; R)$ y ser $H_{-1}(K_1 \cap K \setminus K_1; R)$ el módulo trivial, el núcleo del operador conector es todo $H_0(K; R)$ y por tanto, $H_0(K; R) \cong H_0(K_1; R) \oplus H_0(K \setminus K_1; R)$. \square

4. Homología persistente

Este capítulo se dedica a la homología persistente, un concepto de gran relevancia en la topología computacional que proporciona herramientas poderosas para analizar y entender la estructura subyacente de los datos a través de múltiples escalas. Originada en los trabajos iniciales de matemáticos como Edelsbrunner, Letscher y Zomorodian, la homología persistente permite la identificación y el análisis de características topológicas que persisten a lo largo de variaciones en la escala en la que se observa.

Este capítulo se centrará en detallar los principios teóricos detrás de la homología persistente. En particular, estudiaremos en profundidad el Teorema de Representación, un resultado central en la teoría que muestra cómo transformar el nacimiento y muerte de las clases de homología en constructos algebraicos que se pueden analizar y manipular computacionalmente. Seguiremos como esquema principal los resultados de [ZC04] y [DW22].

4.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips

La homología persistente es una herramienta poderosa de la topología computacional, comúnmente utilizada para analizar conjuntos de datos representados como nubes de puntos. Aunque la homología en sí de estos conjuntos puede no ser de gran interés debido a su simplicidad o falta de estructura topológica relevante, la homología persistente permite revelar información de interés mediante la construcción de estructuras topológicas a partir de los datos.

En este contexto, los complejos de Čech y Vietoris-Rips se emplean frecuentemente para capturar la estructura topológica subyacente de las nubes de puntos. Estos complejos dotan de estructura de complejo simplicial a los datos, facilitando su representación, el estudio de su forma y sus características a múltiples escalas.

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_v\}_{v \in V}$ un recubrimiento de X . Llamaremos **nervio** de \mathcal{U} al complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices V tal que la familia v_0, \dots, v_p genera un p -símplice si, y sólo si, $U_{v_0} \cap \dots \cap U_{v_p} \neq \emptyset$. Lo notaremos por $N(\mathcal{U})$.

Teorema 4.1 (del Nervio). Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_v\}_{v \in V}$ un recubrimiento por abiertos numerable de X . Supongamos además que para todo subconjunto no vacío de vértices $S \subseteq V$ tenemos que $\bigcap_{s \in S} U_s$ es contráctil o vacío. Entonces $N(\mathcal{U})$ es homotópicamente equivalente a X .

Demostración. contenidos... □

Definición 4.2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X . Definimos el **complejo de Čech** $C(V, \varepsilon)$ como el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$, donde

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_\varepsilon(v) : v \in V\},$$

siendo $B_\varepsilon(v)$ la bola abierta de centro x y radio $\varepsilon > 0$.

Proposición 4.1. *El complejo de Čech $C(V, \varepsilon)$ es un complejo simplicial abstracto.*

Demostración. Sea $V = \{x_i\}_{i=1}^M$ un subconjunto de puntos en el espacio métrico X . Definimos $\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_\varepsilon(x) : x \in V\}$ como un recubrimiento por abiertos de V para algún $\varepsilon > 0$. Veamos que el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$ de \mathcal{B}_ε es el complejo abstracto cuyos vértices son los conjuntos $B_\varepsilon(x)$ y los símlices se forman por colecciones de estos conjuntos que tienen intersecciones no vacías.

Supongamos que tenemos un símplex $\sigma = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ en $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$. Esto implica que

$$\bigcap_{j=1}^k B_\varepsilon(x_{i_j}) \neq \emptyset.$$

Consideremos ahora cualquier subconjunto de bolas de la forma $\{B_\varepsilon(x_{i_j})\}_{j \in J}$ donde $J \subseteq \{1, \dots, k\}$. Es claro que por ser σ un símplex,

$$\bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus J} B_\varepsilon(x_{i_j}) \neq \emptyset,$$

por lo que el conjunto de vértices restantes también forma un símplex en $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$. Por lo tanto, todas las caras de cualquier símplex σ son también símlices en $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$. Es decir, el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$ es cerrado bajo inclusiones.

Dado que V es finito y cada símplex se define como un subconjunto de V , entonces cada símplex sólo puede tener un número finito de subconjuntos. En consecuencia, el número de caras de cada símplex también es finito. \square

Definición 4.3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X . Definimos el **complejo de Vietoris-Rips** $VR(V, \varepsilon)$ como el complejo abstracto cuyo conjunto de vértices es V , de forma que $\{v_0, v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ genera un p -símplex si, y sólo si, $d(v_i, v_j) \leq \varepsilon$ para todo $0 \leq i, j \leq p$.

Proposición 4.2. *El complejo de Vietoris-Rips $VR(V, \varepsilon)$ es un complejo simplicial abstracto.*

Demostración. Primero veamos que el conjunto es cerrado bajo inclusiones. Supongamos que $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ es un p -símplex en $VR(V, \varepsilon)$. Por definición, esto significa que para todo i, j tal que $0 \leq i, j \leq p$, se cumple que $d(v_i, v_j) \leq \varepsilon$. Consideremos ahora un subconjunto no vacío $\tau = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\} \subseteq \sigma$. Para cualquier par de índices a, b con $1 \leq a, b \leq k$, los vértices v_{i_a} y v_{i_b} también cumplen que $d(v_{i_a}, v_{i_b}) \leq \varepsilon$, pues $\tau \subseteq \sigma$. Por lo tanto, τ es un $(k-1)$ -símplex en $VR(V, \varepsilon)$.

Por otro lado, cada p -símplex σ en $VR(V, \varepsilon)$ es un subconjunto finito de V . El número de subconjuntos de cualquier conjunto finito es finito, y en particular, el número de subconjuntos de σ es $2^{|\sigma|}$, donde $|\sigma|$ es el número de vértices en σ . En consecuencia, cada símplex en $VR(V, \varepsilon)$ tiene un número finito de caras. \square

Proposición 4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X . Entonces*

$$C(V, \varepsilon) \subseteq VR(V, 2\varepsilon) \subseteq C(V, 2\varepsilon).$$

Demostración. La primera inclusión es inmediata pues si un punto x pertenece a la intersección $\bigcap_{v \in V} B(v, \varepsilon)$, entonces la distancia para cada par de puntos de V es, a lo sumo, 2ε . En consecuencia, cualquier símplex de $C(V, \varepsilon)$ se encuentra en $VR(V, 2\varepsilon)$.

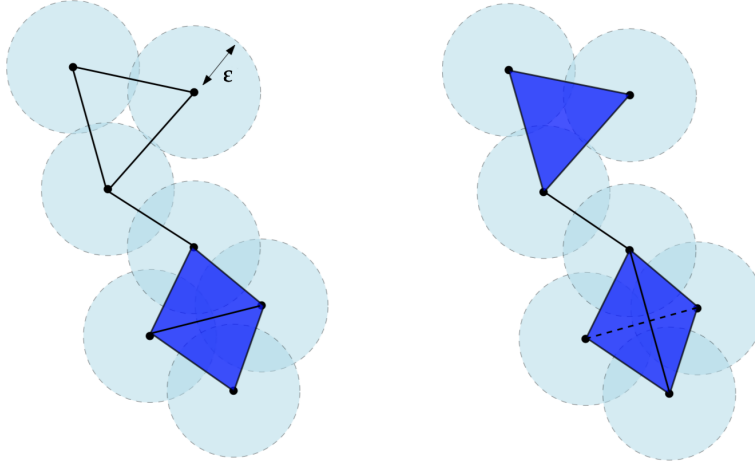


Figura 4.1.: Representación de los complejos simpliciales Čech (izquierda) y Vietoris-Rips (derecha) para un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 . En el complejo de Čech, los simplices se forman por la intersección no vacía de círculos de radio ε centrados en los puntos. El complejo de Vietoris-Rips conecta puntos que distan hasta 2ε , independientemente de las intersecciones de los círculos. Los simplices de mayor dimensión están coloreados en azul, resaltando las diferencias en la estructura simplicial generada por cada método. Fuente [CM21].

Para la segunda inclusión, consideremos ahora un simple $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$ de $VR(V, 2\varepsilon)$. Por la definición de complejo de Vietoris-Rips, tenemos que $d(v_i, v_j) \leq 2\varepsilon$ para todo $i, j \in \{0, \dots, p\}$. Considerando las bolas abiertas de radio 2ε centradas en v_i y en v_j , tenemos que su intersección es no vacía, pues $v_i \in \overline{B}_{2\varepsilon}(v_j)$ y $v_j \in \overline{B}_{2\varepsilon}(v_i)$. En el supuesto de que los puntos pertenecieran a la frontera de las bolas, la intersección de las bolas abiertas también sería no vacía pues $\varepsilon > 0$. En consecuencia, tenemos que $\sigma \in C(V, 2\varepsilon)$. \square

4.2. Módulos de homología persistente

Definición 4.4. Sea K un complejo simplicial. Una **filtración** \mathcal{F} de K es una familia totalmente ordenada de subcomplejos $\{K^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\emptyset, K \in \mathcal{F}$ y si $i \leq j$, entonces $K^i \subseteq K^j$. En particular, llamaremos a dicho orden **filtro**.

A partir de la definición anterior, podemos construir los complejos de cadenas asociados $C(K^i; R)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así mismo, podemos obtener sus respectivos submódulos de ciclos $Z_p(K^i)$ y bordes $B_p(K^i)$ para cada R -módulo de cadenas orientadas $C_p(K^i; R)$.

Definición 4.5. Sea \mathcal{F} una filtración, sea p un número natural y sean $i, j \in \{0, \dots, n\}$ tales que $i \leq j$. Definimos el (i, j) -ésimo R -módulo de homología persistente de dimensión p asociado a \mathcal{F} como

$$H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F}; R) := \text{Im } f_p^{i \rightarrow j},$$

donde $f_p^{i \rightarrow j}$ es el homomorfismo inducido entre las clases de homología de la inclusión que va de K^i a K^j . El rango de $H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F}; R)$ diremos que es el (i, j) -ésimo **número de Betti de persistencia de dimensión p** y lo notaremos por $\beta_p^{i \rightarrow j}$.

4. Homología persistente

Proposición 4.4. Sea \mathcal{F} una filtración del complejo simplicial K . Entonces

$$H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F}; R) \cong \frac{Z_p(K^i)}{B_p(K^j) \cap Z_p(K^i)}$$

es un isomorfismo de R -módulos.

Demostración. Sabemos que el cociente anterior está bien definido, pues $Z_p(K^i) \cap B_p(K^j)$ es un submódulo de $Z_p(K^i)$. Para ver que en efecto existe un isomorfismo, consideraremos la proyección $\pi_i : Z_p(K^i) \rightarrow H_p(K^i; R)$. Aplicando el **Primer teorema de isomorfía**, tenemos que

$$\frac{Z_p(K^i)}{\ker \pi_i} \cong \text{Im } \pi_i$$

es un isomorfismo. Sin embargo, nótese que

$$\begin{aligned} \ker \pi_i &= \{z \in Z_p(K^i) : \pi_i(z) = [0]\} = \{z \in Z_p(K^i) : [z] = [0]\} \\ &= \{z \in Z_p(K^i) : z \in B_p(K^j)\} = B_p(K^j) \cap Z_p(K^i). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} H_p^{i \rightarrow j}(\mathcal{F}; R) &= \text{Im } f_p^{i \rightarrow j} = \{f_p^{i \rightarrow j}([z]) : [z] \in H_p(K^i; R)\} \\ &= \{[(i_{i,j,*})_p(z)] : z \in Z_p(K^i)\} = \{\pi_i(z) : z \in Z_p(K^i)\} = \text{Im } \pi_i. \end{aligned}$$

□

La homología persistente facilita la interpretación de la homología en los distintos niveles de la filtración, permitiendo un análisis cuantitativo de su evolución. Al observar el nacimiento y desaparición de las clases de homología mediante los módulos de homología persistente, se obtiene información detallada de la estructura topológica general de la filtración.

Definición 4.6. Dada una filtración \mathcal{F} , decimos que un elemento $\alpha \neq 0$ en $H_p(K^i; R)$ **nace** en K^i si $\alpha \notin H_p^{i-1 \rightarrow i}(\mathcal{F}; R)$. Además, decimos que α **mueve** en K^j si se fusiona con una clase proveniente de una dimensión anterior cuando se desplaza de K^{j-1} a K^j . Esto es, si $f_p^{i \rightarrow j-1}(\alpha) \notin H_p^{i-1 \rightarrow j-1}(\mathcal{F}; R)$ pero $f_p^{i \rightarrow j}(\alpha) \in H_p^{i-1 \rightarrow j}(\mathcal{F}; R)$.

4.3. Representación de la homología persistente

Nuestro objetivo ahora es obtener una representación de la homología persistente que nos permita interpretarla. Originalmente, esta representación se ha realizado mediante los **diagramas de persistencia**. En estos diagramas, cada clase de homología que nace en un complejo simplicial K^i y muere en K^j se representa por un punto (i, j) en el plano cartesiano, para cada dimensión p .

Aunque intuitivos, los diagramas de persistencia presentan ciertas limitaciones. El principal problema radica en que no logran capturar de manera efectiva la multiplicidad de la persistencia; es decir, múltiples clases que nacen y mueren simultáneamente se representan mediante un mismo punto, lo que puede conducir a ambigüedades en la interpretación de los datos.

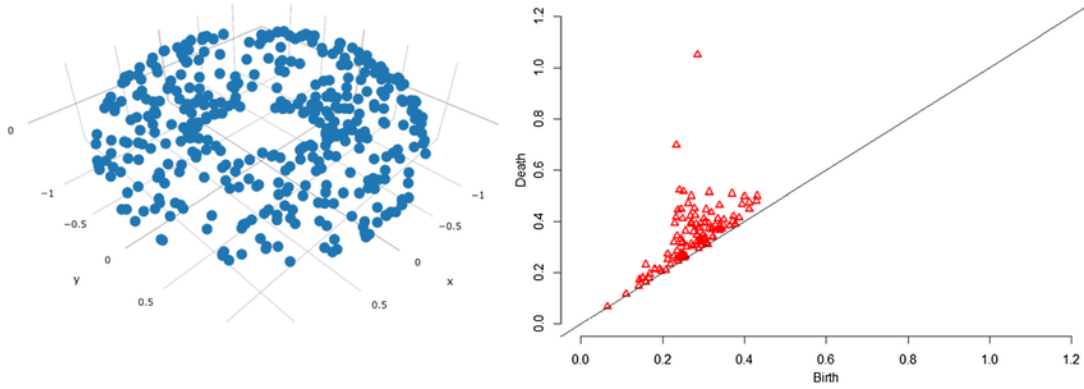


Figura 4.2.: Diagrama de persistencia para la homología de dimensión 1 de la filtración de Vietoris-Rips de 2000 puntos i.i.d. en un toro. El gráfico destaca dos puntos significativos que representan las clases de equivalencia de los ciclos unidimensionales del toro, destacando su persistencia topológica. Fuente [DP19].

Para abordar estos problemas, Zomorodian y Carlsson introdujeron un enfoque innovador mediante el uso del **código de barras** [ZCo4]. Este método no solo ofrece una visualización clara y detallada de la vida de cada clase de homología, sino que también facilita la interpretación de su multiplicidad y relevancia en el contexto de los datos analizados. Esta interpretación fue posible ya que demostraron que todo módulo de persistencia puede identificarse de manera biyectiva con una estructura algebraica más general, conocida como **módulos graduados**, bajo ciertas hipótesis.

A continuación profundizaremos en la aplicación y las implicaciones de estos métodos, explorando en detalle el Teorema de Correspondencia como se discute en [CK18].

Definición 4.7. Sea $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$ una familia de R -módulos. Diremos que dicha familia es un **módulo de persistencia discreto** sobre R si para cada $i \leq j$ existe un homomorfismo de R -módulos $f_{i,j} : M_i \rightarrow M_j$ tal que:

1. El homomorfismo $f_i = f_{i,i} = \text{id}_{M_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. La composición $f_{i,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Observación 4.1. Nótese que con esta definición, todo módulo de homología persistente es de hecho un módulo de persistencia discreto. Dada una dimensión $p \in \mathbb{Z}$ fija, los R -módulos los componen los módulos de homología y sus homomorfismos inducidos por la inclusión cumplen dichas propiedades.

Definición 4.8. Sean $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}, \mathcal{N} = \{\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{g_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$ dos módulos de persistencia discretos. Diremos que la familia de homomorfismos $\varphi_\bullet = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\varphi_i : M_i \rightarrow N_i$ es un **homomorfismo de módulos de persistencia discreto** si $g_{i,j} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ f_{i,j}$.

La anterior definición es equivalente a decir que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 M_0 & \xrightarrow{f_0} & M_1 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_i & \xrightarrow{f_i} & M_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & \dots \\
 \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} & & \\
 N_0 & \xrightarrow{g_0} & N_1 & \xrightarrow{g_1} & \dots & \xrightarrow{g_{i-1}} & N_i & \xrightarrow{g_i} & N_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+1}} & \dots
 \end{array}$$

4. Homología persistente

conmuta. En las condiciones anteriores, los módulos de persistencia discretos junto a sus homomorfismos forman una categoría que notaremos por $R\text{-PersMod}$. Claramente se tiene que existe el homomorfismo identidad $\text{id}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, donde a cada módulo y homomorfismo de módulos se le asocia él mismo. Además, la identidad conmuta con la familia de homomorfismos de módulos, pues es la composición con la identidad de homomorfismos de módulos componente a componente. Veamos ahora la asociatividad en la composición de los homomorfismos de módulos de persistencia discretos. Consideremos cuatro módulos de persistencia discretos $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$, $\mathcal{N} = \{\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{g_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$, $\mathcal{P} = \{\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{h_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$ y $\mathcal{Q} = \{\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{p_{i,j}\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}\}$; y tres homomorfismos $\varphi_{\bullet} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $\psi_{\bullet} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$, y $\theta_{\bullet} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$. Para demostrar la asociatividad, necesitamos verificar que

$$(\theta \circ (\psi \circ \varphi))_i = ((\theta \circ \psi) \circ \varphi)_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, dicha composición es la asociatividad de la composición de homomorfismos de módulos componente a componente, por lo que tenemos que:

$$\theta_i \circ (\psi_i \circ \varphi_i) = (\theta_i \circ \psi_i) \circ \varphi_i.$$

Además, para cualquier $i \leq j$ en \mathbb{N} , necesitamos mostrar que:

$$h_{i,j} \circ (\theta \circ (\psi \circ \varphi))_i = (\theta \circ (\psi \circ \varphi))_j \circ f_{i,j}.$$

Sustituyendo la definición de composición, esto se reduce a verificar que

$$h_{i,j} \circ (\theta_i \circ (\psi_i \circ \varphi_i)) = (\theta_j \circ (\psi_j \circ \varphi_j)) \circ f_{i,j} \quad i \leq j \text{ en } \mathbb{N}.$$

O equivalentemente, que $((h_{i,j} \circ \theta_i) \circ \psi_i) \circ \varphi_i = \theta_j \circ (\psi_j \circ (\varphi_j \circ f_{i,j}))$. Debido a que cada homomorfismo respeta las estructuras de los módulos de persistencia, tenemos:

$$h_{i,j} \circ \theta_i = \theta_j \circ p_{i,j},$$

$$p_{i,j} \circ \psi_i = \psi_j \circ g_{i,j},$$

$$g_{i,j} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ f_{i,j}.$$

Aplicando estas igualdades y la asociatividad de homomorfismos de módulos, concluimos que:

$$\begin{aligned} h_{i,j} \circ (\theta_i \circ (\psi_i \circ \varphi_i)) &= ((h_{i,j} \circ \theta_i) \circ \psi_i) \circ \varphi_i = ((\theta_j \circ p_{i,j}) \circ \psi_i) \circ \varphi_i \\ &= (\theta_j \circ (p_{i,j} \circ \psi_i)) \circ \varphi_i = (\theta_j \circ (\psi_j \circ g_{i,j})) \circ \varphi_i \\ &= \theta_j \circ ((\psi_j \circ g_{i,j}) \circ \varphi_i) = \theta_j \circ (\psi_j \circ (g_{i,j} \circ \varphi_i)) = \theta_j \circ (\psi_j \circ (\varphi_j \circ f_{i,j})). \end{aligned}$$

Definición 4.9. Sea R un anillo. Diremos que R es un **anillo graduado** si puede descomponerse como una suma directa

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n,$$

donde $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Los elementos de R_n distintos de cero se denominan **homogéneos de grado n** .

Definición 4.10. Sea R un anillo graduado y sea M un R -módulo. Diremos que M es un

módulo graduado si puede escribirse como

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n,$$

donde M_n son grupos abelianos y $R_m M_n \subseteq M_{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Un elemento de M_n distinto de cero se llama **homogéneo de grado n** .

Los módulos graduados no son más que un tipo particular de módulos. Para cada módulo graduado M , el morfismo identidad $\text{id}_M : M \rightarrow M$ es simplemente el morfismo identidad de R -módulos. Este morfismo es claramente un homomorfismo de módulos graduados que preserva la graduación. Consideremos ahora dos módulos graduados M, N y un homomorfismo de módulos graduados $f : M \rightarrow N$. Si tenemos otro módulo graduado P y un homomorfismo $g : N \rightarrow P$, su composición $g \circ f$ es la composición de homomorfismos de R -módulos. Por lo tanto, la asociatividad de la composición se sigue directamente de la asociatividad de la composición de homomorfismos de R -módulos. En consecuencia, los módulos graduados sobre R junto con los homomorfismos de módulos graduados forman una categoría, que denotaremos por $R\text{-GrMod}$.

Los módulos de persistencia discretos sobre un anillo R y los $R[t]$ -módulos graduados son conceptos íntimamente relacionados. Si \mathcal{M} es un módulo de persistencia discreto, podemos definir un $R[t]$ -módulo graduado $\alpha(\mathcal{M})$ como

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i,$$

donde el producto por t lo definimos como $t \cdot m_i = f_{i,i+1}(m_i)$ para todo $m_i \in M_i$. Análogamente, podemos definir un módulo de persistencia discreto a partir de un $R[t]$ -módulo $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$, de forma que

$$\beta \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \right) = \mathcal{M}.$$

Aquí, los morfismos los obtenemos a partir del producto por t , esto es, $f_{i,i+1}(m_i) = t \cdot m_i$ para todo $m_i \in M_i$. El siguiente resultado nos proporciona formalmente cómo de íntima es esta relación.

Lema 4.1. *Las aplicaciones α y β definidas anteriormente forman una pareja isomorfa de funtores covariantes entre $R\text{-PersMod}$ y $R[t]\text{-GrMod}$. En particular, ambas categorías son isomorfas.*

Demostración. Sea $\varphi_{\bullet} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morfismo de módulos de persistencia discretos. Definamos

$$\alpha(\varphi_{\bullet}) : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i$$

donde a cada $m_i \in M_i$ le asignamos $\varphi_i(m_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Veamos que $\alpha : R\text{-PersMod} \rightarrow R[t]\text{-GrMod}$ es un funtor covariante. Primero veamos que $\alpha(\varphi_{\bullet})$ es un morfismo de módulos graduados. Tenemos que $\alpha(\varphi_{\bullet})$ es un homomorfismo de grupos pues cada φ_i lo es, cumple que $\alpha(\varphi_i)(M_i) \subseteq N_i$ y además, si $m = (m_0, m_1, \dots)$ es un elemento de \mathcal{M} , entonces

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi_{\bullet})(tm) &= \alpha(\varphi_{\bullet})(0, tm_0, tm_1, \dots) = (0, \varphi_0(tm_0), \varphi_1(tm_1), \dots) \\ &= (0, t\varphi_0(m_0), t\varphi_1(m_1), \dots) = t\alpha(\varphi_{\bullet})(m), \end{aligned}$$

4. Homología persistente

donde la última igualdad es consecuencia de la segunda propiedad de los morfismos de módulos de persistencia discretos. En cuanto a las propiedades funtoriales, es evidente que α lleva identidades en identidades. Además, si ψ_\bullet es otro morfismo de módulos de persistencia discretos, tenemos que

$$(\alpha(\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet))(m) = (\psi_i(\varphi_i(m_i)))_{i \in \mathbb{N}} = \alpha(\psi_\bullet)(\varphi_i(m_i))_{i \in \mathbb{N}} = (\alpha(\psi_\bullet) \circ \alpha(\varphi_\bullet))(m).$$

Consideremos ahora el homomorfismo de $R[t]$ -módulos graduados

$$\eta : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i,$$

que para cada $i \in \mathbb{N}$ induce un homomorfismo $\eta_i : M_i \rightarrow N_i$ compatible con el producto por t . En consecuencia, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 & \xrightarrow{t} & M_1 & \xrightarrow{t} & \cdots & \xrightarrow{t} & M_i & \xrightarrow{t} & M_{i+1} & \xrightarrow{t} & \cdots \\ \downarrow \eta_0 & & \downarrow \eta_1 & & & & \downarrow \eta_i & & \downarrow \eta_{i+1} & & \\ N_0 & \xrightarrow{t} & N_1 & \xrightarrow{t} & \cdots & \xrightarrow{t} & N_i & \xrightarrow{t} & N_{i+1} & \xrightarrow{t} & \cdots \end{array}$$

es conmutativo. Definamos ahora $\beta(\eta) = (\eta_0, \eta_1, \dots)$ y veamos que es un homomorfismo de módulos de persistencia discretos entre \mathcal{M} y \mathcal{N} . En consecuencia, β nos da homomorfismos de grupos $\eta_i : M_i \rightarrow N_i$ que, a su vez, son homomorfismos de R -módulos. Para comprobarlo, basta tomar cualquier $r \in R$ y $m_i \in M_i$ y vemos que $\eta_i(rm_i) = \eta(rm_i) = r\eta(m_i) = r\eta_i(m_i)$. Como los homomorfismos de R -módulos de \mathcal{M} y \mathcal{N} se obtienen mediante la multiplicación por t , entonces para todo $m_i \in M_i$ tenemos que

$$\eta_{i+1}(tm_i) = \eta(tm_i) = t\eta(m_i) = t\eta_i(m_i),$$

por lo que $\beta(\eta)$ es un homomorfismo de módulos de persistencia discretos. Claramente β conserva la identidad. Luego para otro $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y cualquier $m = (m_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$,

$$(\beta(\theta \circ \eta))(m) = (\theta(\eta(m_i)))_{i \in \mathbb{N}} = \beta(\theta)(\eta(m_i))_{i \in \mathbb{N}} = (\beta(\theta) \circ \beta(\eta))(m).$$

Esto es, β es un funtor covariante. Finalmente, por la construcción de α y β tenemos que $\beta \circ \alpha$ es el funtor identidad en $R[t]$ -GrMod y que $\alpha \circ \beta$ es el funtor identidad en R -PersMod. \square

En la práctica generalmente trabajaremos con módulos de persistencia que cumplen ciertas condiciones de finitud. Por ello, resulta de gran interés conocer si la correspondencia recién realizada se sigue cumpliendo bajo estos casos.

Definición 4.11. Diremos que un módulo de persistencia discreto \mathcal{M} es de **tipo finito** si existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $N \leq i \leq j$ el homomorfismo $f_{i,j}$ es un isomorfismo.

Definición 4.12. Diremos que un módulo de persistencia discreto \mathcal{M} es de **tipo finitamente presentado (generado)** si es de tipo finito y además, M_i es finitamente presentado (generado) para todo $i \in \mathbb{N}$.

Nuestro objetivo será probar que el **Lema 4.1** sigue siendo cierto para los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados.

Lema 4.2. Sea \mathcal{M} un módulo de persistencia discreto. Si \mathcal{M} es de tipo finitamente presentado, entonces $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado.

Demostración. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ de forma que $f_{i,j} : M_i \rightarrow N_i$ es un isomorfismo para todo $N \leq i \leq j$. Sea G un conjunto de generadores de M_i . Queremos ver que $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ es un sistema de generadores también para $\alpha(\mathcal{M})$. Para ello, veamos que todo elemento homogéneo de $\alpha(\mathcal{M})$ está generado por la unión de los G_i . Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $m_k \in \alpha(\mathcal{M})$ un elemento homogéneo de grado k . Si $k \leq N$, entonces m_k está generado por los elementos de G_k por construcción. Si $k > N$, veamos que m_k está generado por G_N . Por ser $f_{N,k}$ un isomorfismo, podemos tomar $m_N = f_{N,k}^{-1}(m_k)$. Pero como m_D está generado por G_N , entonces m_k está generado por $f_{N,k}(G_N)$. Por como hemos construido α , $f_{N,k}(G_N) = t^{k-N}G_N$ y como $t^{k-N} \in R[t]$, entonces m_k está generado por G_N . En consecuencia, $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente generado.

Para ver que $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado, consideremos el epimorfismo $\mu_i : R^{n_i} \rightarrow M_i$ que genera M_i por extensión lineal sobre G_i . Considerando $n = \sum_{i=1}^N n_i$, existe una aplicación $\mu : R[t]^N \rightarrow \alpha(\mathcal{M})$ que corresponde al sistema de generadores G . Para cada $g_i \in G$, denotemos por e_i a su correspondiente elemento en el sistema de generadores de $R[t]^N$.

A continuación definamos un conjunto finito de elementos del núcleo de μ . sea H_i el sistema de generadores de $\ker \mu_i$ para cada $0 \leq i \leq N$. Es claro que $H_i \subseteq \ker \mu_i$. Es más, para cualquier $0 \leq i < j \leq N$ y cualquier $g_i \in G_i$ tal que $f_{i,j}(g_i) \neq 0$, tenemos que

$$f_{i,j}(g_i) = \sum_{k=0}^{n_j} \lambda_k g_{j_k}$$

donde $\lambda_k \in R$ y $G_i = \{g_{j_0}, g_{j_1}, \dots, g_{j_k}\}$. Por tanto, el correspondiente elemento

$$t^{j-i}e_i - \sum_{k=0}^{n_j} \lambda_k e_{j_k}$$

pertenece al $\ker \mu$. Denotemos ahora por $H_{i,j}$ al conjunto finito obtenido tomando los elementos de la forma de la expresión anterior para cada $g_i \in G_i$ tal que $f_{i,j}(g_i) \neq 0$. Sea $H = \bigcup_{i=0}^N H_i \cup \bigcup_{0 < i < j \leq N} H_{i,j}$.

A continuación, fijemos un elemento x del núcleo de μ de la forma

$$x = \sum_l \lambda_l e_l$$

de forma que $\lambda_l \in R[t]$ y e_l es un generador de $R[t]^n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x es homogéneo de algún grado k . Veamos por casos que x es finitamente generado por los elementos de H_k .

Supongamos que $k \leq N$ y que todos los escalares λ_l son de grado 0. Entonces, todos los e_l que aparecen en x son del mismo grado y por tanto, sus imágenes por μ son generadores de M_k . Es decir, x está generado por H_k .

Supongamos ahora que $k \leq N$ y que algún λ_l es de grado positivo. Por ser x homogéneo, entonces λ_l es de la forma $r_l t^{d_l}$, donde $r_l \in R$ y $d_l > 0$. Como el grado de e_l es $k - d_l$, entonces

4. Homología persistente

existe un elemento $h_l \in H_{k-d_l, k}$ de la forma

$$h_l = t^{d_l} e_l - \sum_{m=0}^{n_l} \tilde{\lambda}_m e_{lm},$$

donde todos los e_{lm} son de grado k y $\tilde{\lambda}_m \in R$. Por consiguiente, en $x - r_l h_l$ el coeficiente de e_l en x es 0 en t y por tanto, sólo estamos introduciendo sumandos de grado 0 en t .

Iterando esta construcción para cada sumando de con coeficiente de grado positivo, obtenemos un elemento $x' = x - \sum_w r_w h_w$, donde $r_w \in R$, $h_w \in H$ y x' tiene solamente coeficientes de grado 0 en t . Esto es, $x = x' \sum_w r_w h_w$. Finalmente, aplicando la primera parte de la demostración tenemos que x es generado por H .

Para concluir, consideremos $k > N$. En dicho caso, cada λ_l es de grado al menos $k - N$, pues el grado maximal de e_l es N . Luego $x = t^{k-N} x'$, donde x' es homogéneo de grado N . Como $0 = \mu(x) = t^{k-N} \mu(x')$, entonces $x' \in \ker \mu$. Por la segunda parte de la demostración, concluimos que x' es generado por H y por tanto, x también. \square

Para los siguientes dos lemas, fijaremos el $R[t]$ -módulo graduado finitamente presentado $\mathbf{M} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ junto con la aplicación $\mu : R[t]^n \rightarrow \mathbf{M}$ cuyo núcleo es finitamente generado. Consideremos además el sistema de generadores $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ de \mathbf{M} y sea $H = \{h_1, \dots, h_m\}$ un sistema de generadores de $\ker \mu$. Además, consideremos que tanto los elementos de G como de H son homogéneos del grado del respectivo módulo. Finalmente, vamos a asumir que dichos elementos están ordenados por grado en orden no decreciente.

Lema 4.3. *Cada M_i de \mathbf{M} es finitamente presentado como un R -módulo.*

Demostración. Veamos primero que M_i es finitamente generado. Sea d_j el grado de g_j para $1 \leq j \leq n$. Sea n_i el número de elementos de G con grado menor o igual que i . Definamos $\mu_i : R^{n_i} \rightarrow M_i$ de forma que μ_i asigne al j -ésimo generador $e_{ij} \in R^{n_i}$ el elemento $t^{i-d_j} g_j$. Cada elemento $x \in M_i$ es un componente homogéneo de grado i de una combinación lineal de los generadores de \mathbf{M} . Dado que solo los generadores g_j cuyo grado d_j es menor o igual que i pueden contribuir a esta combinación para formar un elemento de grado i , x puede expresarse como:

$$x = \sum_{d_j=1}^i r_j t^{i-d_j} g_j,$$

donde $r_j \in R$. Considerando el generador en R^{n_i} cuyas entradas son los coeficientes r_j , entonces

$$\mu_i((r_1, \dots, r_{n_i})) = \sum_{d_j=1}^i r_j t^{i-d_j} g_j = x$$

y en consecuencia, μ_i es sobreyectivo. Esto es, M_i es finitamente generado.

A continuación veamos que $\ker \mu_i$ también es finitamente generado. Sean e_1, \dots, e_n los generadores de $R[t]^n$ con imagen g_1, \dots, g_n por μ respectivamente. Sea m_i el número de elementos h_j de H cuyo grado d'_j es menor o igual que i . Para cada h_j tal que $1 \leq j \leq m_i$, consideremos $t^{i-d'_j} h_j$ que podemos reescribir como

$$t^{i-d'_j} h_j = \sum_{k=1}^{m_i} r_k t^{i-d_k} e_k$$

para ciertos $r_k \in R$. Definamos ahora

$$h_{j_i} = \sum_{k=1}^{n_i} r_k e_{ki}$$

y definamos $H_i = \{h_{j_i} : 1 \leq i \leq m_i\}$. Veamos que H_i genera el núcleo de μ . Es claro que $\mu_i(h_{j_i}) = \mu(h_{j_i}) = 0$. Fijemos ahora un elemento arbitrario x de $\ker \mu_i$. Tenemos entonces que x es combinación lineal de $\{e_{1_i}, \dots, e_{n_i}\}$ con coeficientes en R . Reemplazando e_{j_i} por $t^{i-d_j} e_j$, obtenemos un elemento homogéneo $x' \in R[t]^n$ de grado i . Por hipótesis, podemos escribir x' como combinación de elementos de H de forma que

$$x' = \sum_{k=1}^{m_i} r'_k t^{i-d'_k} h_{k_i}$$

donde $r'_k \in R$. En consecuencia, veamos que

$$x = \sum_{k=1}^{m_i} r'_k h_{k_i}.$$

Para ello, procederemos comparando coeficientes. Consideremos $j \in \{1, \dots, n_i\}$ y sea $c_j \in R$ el coeficiente de e_{j_i} en x . Sea c'_j el coeficiente de e_{j_i} en la suma de la expresión anterior, escribiendo cada h_{k_i} como combinación lineal de los e_{j_i} . Por la construcción realizada, c_j es el coeficiente de $t^{i-d_j} e_j$ en x' y c'_j es el coeficiente de $t^{i-d_j} e_j$ en la suma $\sum_{k=1}^{m_i} r'_k t^{i-d'_k} h_{k_i}$. Esto es, $c_j = c'_j$. Como x se escogió de manera arbitraria de $\ker \mu_i$, entonces H_i lo genera. \square

Lema 4.4. $\beta(\mathbf{M})$ es de tipo finito. En particular, es de tipo finitamente presentado.

Demostración. Sea N el grado máximo de los $g_j \in G_j$, $h_k \in H_k$ de forma que $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Veamos que la multiplicación por t induce un isomorfismo entre M_i y M_{i+1} para todo $i \geq N$.

Si $y \in M_{i+1}$, entonces existen $\lambda_j \in R[t]$ de grado al menos 1 de forma que $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$. Por tanto, $y = ty'$ donde $y' \in M_i$ mostrando que la multiplicación por t es sobreyectiva.

Para ver que es inyectiva, consideremos $y \in M_i$ de forma que $ty = 0$. Sea $x \in R[t]^n$ tal que $\mu(x) = y$. Entonces $\mu(tx) = ty = 0$ y por tanto, veamos tx se puede escribir como

$$tx = \sum_{j=0}^m \tilde{\lambda}_j h_j,$$

donde cada λ_j no trivial es un polinomio de grado al menos 1. Es inmediato, pues cada h_j es de grado menor o igual que N y tx es de grado mayor o igual que $N + 1$. En consecuencia, también podemos descomponer tx como

$$tx = \sum_{j=0}^m t \lambda_j h_j = t \sum_{j=0}^m \lambda_j h_j.$$

Por ser $R[t]^n$ un módulo libre, tenemos que $x = \sum_{j=0}^m \lambda_j h_j$ y por tanto, $x \in \ker \mu$ lo que implica que $y = 0$. \square

4. Homología persistente

Teorema 4.2 (Teorema de Correspondencia). *Sea R un anillo unitario. Entonces, un isomorfismo entre la categoría de $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados y la categoría de módulos de persistencia discretos.*

Demostración. Estas categorías son subcategorías de $R[t]$ -GrMod y R -PersMod respectivamente. Restringiendo α y β a dichas subcategorías, por el **Lema 4.2** tenemos que α es un funtor covariante de los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados a los $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados. Así mismo, por los lemas 4.3 y 4.4, β es un funtor covariante de los $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados a los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados. En consecuencia, estas subcategorías son isomorfas. \square

El Teorema de descomposición de módulos graduados nos dará la clave para representar los módulos de persistencia.

Teorema 4.3 (Teorema de descomposición de módulos graduados). *Sea F un cuerpo y sea M un $F[t]$ -módulo graduado finitamente generado. Entonces M se descompone de manera única, salvo isomorfismos, como*

$$M \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{a_i} \cdot R[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m t^{b_j} \cdot \frac{R[t]}{\langle t^{c_j} \rangle} \right),$$

donde $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{N}$, y para cada j , t^{c_j} es un elemento homogéneo tal que divide a t^{c_j+1} .

Demostración. Véase [Web85]. \square

De manera intuitiva, primero hemos construido una única estructura algebraica que contiene todos los complejos de la filtración. Después, hemos seguido calculando una suma directa a partir de los complejos, llegando así a un espacio mucho más grande que está graduado según el orden inducido de la filtración. A continuación, recordamos el momento en que cada símplice entra utilizando un coeficiente polinomial, codificando así el orden de filtración en el anillo de coeficientes polinomiales. A partir de aquí, el **Teorema de descomposición de módulos graduados** nos proporciona una factorización simple cuando el anillo base es un cuerpo F . Aquí, el anillo graduado $F[t]$ es un DIP y sus únicos ideales graduados son homogéneos de la forma $(t^n) = t^n \cdot R[t]$, donde $n \geq 0$. Ahora que hemos transformado los módulos de persistencia discretos en objetos más manejables, queremos parametrizar las clases de isomorfismo de los $F[t]$ -módulos por objetos más sencillos de interpretar.

Definición 4.13. Definimos un \mathcal{P} -Intervalo como un par ordenado (i, j) tal que $0 \leq i \leq j \leq \mathbb{Z}^\infty = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Nuestro objetivo ahora es asociar un $F[t]$ -módulo graduado a un conjunto S de \mathcal{P} -intervalos mediante una biyección Q . Para ello, definimos $Q(i, j) = t^i F[t] / (t^{j-i})$ para el \mathcal{P} -intervalo (i, j) . Es claro que $Q(i, +\infty) = t^i F[t]$. Además, para un conjunto de \mathcal{P} -intervalos $S = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}$, definimos

$$Q(S) = \bigoplus_{l=1}^n Q(i_l, j_l).$$

Nuestra correspondencia puede ahora redefinirse como sigue.

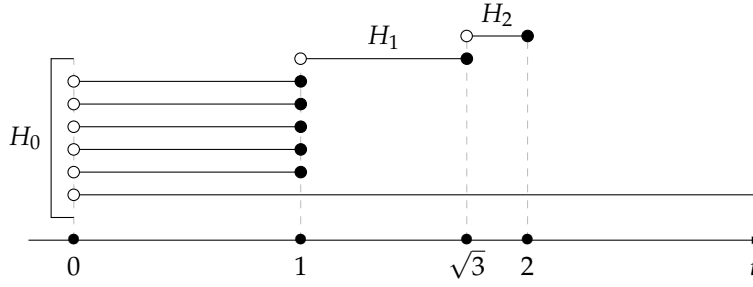


Figura 4.3.: Ejemplo de código de barras mostrando la persistencia de clases de homología a través del tiempo. Cada línea horizontal representa una clase de homología que persiste a través de un intervalo específico, indicando la escala a la que dichas características topológicas son detectables.

Corolario 4.1. La correspondencia $S \mapsto Q(S)$ define una biyección entre los conjuntos finitos de \mathcal{P} -intervalos y los módulos graduados finitamente generados sobre el anillo graduado $F[t]$. Consecuentemente, las clases de isomorfismo de los módulos de persistencia de tipo finito sobre F están en correspondencia biyectiva con los conjuntos finitos de \mathcal{P} -intervalos.

En el contexto de filtraciones de complejos simpliciales, este resultado da lugar a la descripción de la homología persistente conocida como **código de barras**: cada \mathcal{P} -intervalo (i, j) describe un ciclo que aparece en la filtración i y especifica su clase de homología hasta que se convierte en borde en el instante j .

Corolario 4.2. Sea F un cuerpo, K un complejo simplicial y \mathcal{F} una filtración discreta finita asociada. Entonces, el (i, j) -ésimo número de Betti de persistencia de dimensión k , $\beta_k^{i,j}$, es igual al número de \mathcal{P} -intervalos (i, j) asociados al módulo de homología persistente k -dimensional $H_k^{i \rightarrow j}(C_\bullet; F)$.

Demostración. Consideremos la filtración \mathcal{F} del complejo simplicial K , donde cada subcomplejo K^i está incluido en K^{i+1} para cada $i \in \{0, \dots, N\}$, siendo $K^0 = \emptyset$ y $K^N = K$. Asociamos a cada K^i el complejo de cadenas orientado $C_\bullet(K^i; F)$ y, así mismo, su módulo de homología $H_k(K^i; F)$ de dimensión k .

Esta sucesión de homologías induce un módulo de homología persistente $H_k^\bullet(\mathcal{F}; F)$, definido por los homomorfismos inducidos por las inclusiones:

$$H_k(K^0; F) \rightarrow H_k(K^1; F) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(K^N; F).$$

Dado que estamos trabajando con módulos sobre un cuerpo F , tenemos que los módulos de homología tienen estructura de espacio vectorial. En consecuencia, escogemos generadores para cada $H_k(K^i; F)$. Para ello, seleccionamos una base inicial en $H_k(K^0; F)$ y la adaptamos adecuadamente extendiéndola o reduciéndola a lo largo de la filtración para reflejar la evolución de las clases de homología.

Aplicando el **Teorema de Correspondencia** y el **Teorema de descomposición de módulos graduados** sobre el anillo de polinomios $F[t]$, podemos descomponer el módulo de persistencia como sigue:

$$H_k^\bullet(\mathcal{F}; F) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{a_i} \cdot F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m t^{b_j} \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{c_j} \rangle} \right)$$

4. Homología persistente

donde los números a_i y b_j indican en qué parte del complejo aparece un ciclo de dimensión k , mientras que c_j nos dice cuándo desaparece un ciclo que había surgido en b_j . La duración de una clase de homología, que surge en b_j y termina en c_j , se mide simplemente como $b_j - c_j$. Por otro lado, los elementos libres nos dan información sobre los ciclos que comienzan en a_i y no terminan. Aplicando la imagen inversa por \mathcal{Q} de la descomposición obtenemos los \mathcal{P} -intervalos requeridos.

Es decir, hemos demostrado que el número de Betti de persistencia $\beta_k^{i,j}$, definido como el rango de $H_k^\bullet(\mathcal{F}; F)$ desde el tiempo i hasta justo antes de j , es igual al número de \mathcal{P} -intervalos (i, j) que muestra la descomposición. \square

Ejemplo 4.1. La [Figura ??](#) muestra un ejemplo de representación en código de barras. En este caso, los números de Betti de persistencia nos darían $\beta_0^{0 \rightarrow 1} = 6$, $\beta_1^{1 \rightarrow \sqrt{3}} = 1$ y $\beta_2^{\sqrt{3} \rightarrow 2} = 1$. Es decir, la persistencia nos estaría indicando que, al comienzo de la filtración aparecen 6 componentes conexas que en el instante 1 de tiempo se fusionan en una sola con un agujero unidimensional. A continuación, dicho agujero desaparece en el instante 3 para dar lugar a un vacío bidimensional con un breve periodo de vida.

Los diagramas de código de barras derivados de la homología persistente han demostrado ser herramientas muy útiles para la extracción de información relevante en campos como el análisis de datos. Este hecho es debido a ciertas propiedades de la homología persistente que la hacen relevante para un uso práctico. Entre ellas destaca su **estabilidad**, lo que significa que pequeñas perturbaciones en los datos no producen grandes cambios en los diagramas de código de barras. Esto es fundamental porque asegura que las características topológicas que se detectan son inherentes a la estructura de los datos y no artefactos del ruido o de variaciones menores [[CSEH05](#), [CDSGO16](#)]. Este hecho contrasta con la homología simplicial, pues dos complejos de Čech o Vietoris-Rips con distinto radio pueden tener invariantes topológicos completamente diferentes. Estos métodos no solo ofrecen una representación visual intuitiva de las características de los datos, sino que también proporcionan un marco robusto para la cuantificación y comparación de estructuras topológicas.

Bibliografía

- [CDSGO16] Frédéric Chazal, Vin De Silva, Marc Glisse, y Steve Oudot. *The structure and stability of persistence modules*, volumen 10. Springer, 2016.
- [CK18] René Corbet y Michael Kerber. The representation theorem of persistence revisited and generalized. *Journal of Applied and Computational Topology*, 2(1–2):1–31, July 2018.
- [CM21] Frédéric Chazal y Bertrand Michel. An introduction to topological data analysis: fundamental and practical aspects for data scientists. *Frontiers in artificial intelligence*, 4:108, 2021.
- [CSEHo5] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, y John Harer. Stability of persistence diagrams. En *Proceedings of the twenty-first annual symposium on Computational geometry*, páginas 263–271, 2005.
- [DFo4] David Steven Dummit y Richard M Foote. *Abstract algebra*, volumen 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [DP19] Vincent Divol y Wolfgang Polonik. On the choice of weight functions for linear representations of persistence diagrams. *Journal of Applied and Computational Topology*, 3, 09 2019.
- [DW22] Tamal Krishna Dey y Yusu Wang. *Computational topology for data analysis*. Cambridge University Press, 2022.
- [EM45] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.
- [Lee10] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volumen 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Mun18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.
- [RAo3] A.Q.T.A.Q.E.D. Rafael Ayala. *Elementos de la teoría de homología clásica*. Serie Ciencias / Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla, 2003.
- [Web85] Cary Webb. Decomposition of graded modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(4):565–571, 1985.
- [Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:213–245, 1949.
- [ZCo4] Afra Zomorodian y Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. En *Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry*, páginas 347–356, 2004.