UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales*.

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsable de tutorización

Miguel Ortega Titos
Departamento de Geometría y Topología

Julián Luengo Martín
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 17 de febrero de 2024

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)
Ver archivo `preliminares/dedicatoria.tex`

Índice general

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo `preliminares/agradecimiento.tex`).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: `preliminares/summary.tex`

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/introduccion.tex`

Parte I.

Fundamento teórico

1. Preliminares algebraicos

La teoría de homología es una rama de la topología que trata de resolver problemas topológicos en el ámbito del álgebra. Por este motivo es importante conocer muy bien algunas herramientas algebraicas que iremos utilizando con frecuencia. En todo el capítulo usaremos como referencia principal [Mac12].

1.1. Módulos

La estructura de módulo surge con la idea de generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo a un anillo. Nuestro interés en ellos radica en que la teoría de homología se construye sobre módulos y por ello es necesario hacer una introducción al campo. Esta sección fue complementada con los contenidos de [DF04].

Definición 1.1. Sea R un anillo cuyo elemento identidad $1 \neq 0$. Un R**-módulo izquierdo** A es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times A \to A$ con $(r, a) \to ra$ tal que dados $r, r' \in R$, $a, a' \in A$ se tiene

1. $(r + r') + a = ra + r'a$
2. $(rr')a = r(r'a)$
3. $r(a + a') = ra + ra'$
4. $1a = a$

De la definición anterior se sigue que $0a = 0$ y $(-1)a = -a$.

De manera análoga, definimos R**-módulo derecho** donde el anillo actúa por la derecha en vez de por la izquierda de forma que $p : A \times R \to A$. Si R es un anillo conmutativo, los R-módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R-módulos. Como los resultados de R-módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos con los R-módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R**-módulos** o **módulos** a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. El interés de los R-módulos subyace en la cantidad de estructuras conocidas que engloba. Si por ejemplo consideramos el K-módulo donde K es un cuerpo, éste adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Ahora sea A un $\mathbb{Z}$-módulo. Definimos el producto p de forma que para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ con $n > 0$, $na = a + a + \cdots + a$ n veces, $0a = 0$ y $(-n)a = -(na)$. Entonces A tiene estructura de **grupo abeliano**. En particular, si R es un anillo entonces es también un R-módulo.

Definición 1.2. Sea A un R-módulo izquierdo y S un subconjunto de A. Diremos que S es un **submódulo** de A, esto es, $S \subset A$, si S es cerrado respecto a la suma y si $r \in R$, $s \in S$ entonces $rs \in S$.

De la definición anterior se deduce que S es un R-módulo.

Definición 1.3. Sea R un R-módulo. Si un submódulo de R es un subconjunto $L \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $rL = \{rl \ : \ l \in L\} \subset L$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal** de R.

Tomando un ideal izquierdo L de R y un R-módulo izquierdo A, definimos el producto del ideal L por el módulo A

$$LA = \left\{ \sum_{i=0}^{n} l_i a_i \ : \ l_i \in L, \ a_i \in A, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde LA es un submódulo de A. En particular, el producto de dos ideales izquierdos LL' es también un ideal izquierdo y $(LL')A = L(L'A)$.

Definición 1.4. Sean A, B R-módulos. Definimos el **homomorfismo de R-módulos** de A a B como la aplicación $\alpha : A \to B$ tal que

1. $\alpha(a + a') = \alpha(a) + \alpha(a')$
2. $\alpha(ra) = r(\alpha a)$

para todo $a, a' \in A$, $r \in R$.

Es frecuente escribir el homomorfismo de R-módulos $\alpha : A \to B$ como $A \xrightarrow{\alpha} B$. Respecto a la notación de la imagen de un elemento $a \in A$ por α, pondremos $\alpha(a)$ o simplemente αa. En cuanto a la imagen de A por α, lo representaremos de manera análoga por $\alpha(A)$ o αA.

Cuando $\alpha : A \to B$ sea un homomorfismo de R-módulos, diremos que A es el **dominio** y B el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\mathrm{Im}(\alpha) = \{\alpha(a) : a \in A\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{a \in A : \alpha(a) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando $\alpha(A) = B$, un **monomorfismo** cuando $\ker(\alpha) = \{0\}$ y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre A y B diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\omega : A \to A$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dados dos homomorfismos de R-módulos $\alpha_1, \alpha_2 : A \to B$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$ para todo $a \in A$. Además, dados dos homomorfismos de R-módulos $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, su **composición** $\beta \circ \alpha : A \to C$ es también un homomorfismo de R-módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β. En ocasiones usaremos la notación por yuxtaposición $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : A \to B$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : B \to A$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_A$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_B$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : A \to A$ tal que $\gamma \circ \alpha = \mathrm{id}_A$. No tiene por qué existir ni ser única.

Sea $T \subseteq B$ donde B es un R-módulo, llamaremos **inclusión** o **inyección canónica** al homomorfismo $i : T \to B$ tal que $i(t) = t$ para todo $t \in T$. En particular, i es un monomorfismo. Las **clases laterales** de T en B son los conjuntos $b + T = \{b + t : t \in T\}$ donde $b \in B$. Dos clases laterales $b_1 + T$, $b_2 + T$ son iguales si $b_1 - b_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano B/T se convierte en un R-módulo cuando $r(b + T) = rb + T$ para todo $r \in R$. A este R-módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de B sobre T. El homomorfismo $\pi : B \to B/T$ tal que $\pi(b) = b + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de B.

Proposición 1.1. *Sea $\beta : B \to B'$ un homomorfismo de módulos con $T \subset \ker \beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : B/T \to B'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\beta"'] & B/T \arrow[d, "\beta'"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Definamos $\beta'(b + T) = \beta(b)$. Por estar T contenida en el núcleo de β, la función está bien definida. En efecto, si $a, b \in B$ entonces $a + T = b + T \Rightarrow a - b \in T \subset \ker \beta \Rightarrow \beta(a - b) = 0 \Rightarrow \beta(a) = \beta(b)$. Como β es un homomorfismo, β' también lo es. □

Si $\alpha : A \to B$ es un homomorfismo de módulos y $S \subseteq A$, el conjunto $\alpha S = \{\alpha(s) \ : \ s \in S\}$ es un submódulo de B llamado la **imagen** de S bajo α. De manera similar, si $T \subseteq B$, el conjunto $\alpha^{-1}T = \{s \in A \ : \ \alpha(s) \in T\}$ es un submódulo de A, llamado la **imagen inversa** (completa) de T. En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de B que consiste solo del elemento cero.

Definición 1.5. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos indexada por I. Definimos el **producto directo** o **producto directo externo** de $\{A_i\}_{i \in I}$ como el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in A_i\}$$

donde las operaciones se definen componente a componente:

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$$
$$r(x_i)_{i \in I} = (rx_i)_{i \in I}$$

para todo $r \in R$, $x_i, y_i \in A_i$.

Definición 1.6. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos indexada por I. Definimos la **suma directa** o **suma directa interna** de $\{A_i\}_{i \in I}$ como el submódulo de $\prod_{i \in I}$ tal que

$$\bigoplus_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i = 0 \text{ p.c.t. } i\}$$

Definición 1.7. Sea B un conjunto y sea $\mathcal{L}(B)$ un R-módulo tal que $\mathcal{L}(B) = \bigoplus_{b \in B} R_b$ donde $R_b = R$ para todo $b \in B$. Llamaremos a dicho R-módulo el **R-módulo libre de base** B. De esta forma cada $x \in \mathcal{L}(B)$ se representa por $x = \sum_{b \in B} \lambda_b \cdot b$ donde $\lambda_b \in R$ son coeficientes no nulos en un número finito de posiciones b.

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.8. Sea $\{A_i, \alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una familia de R-módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \to A_{i+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** cuando $\operatorname{Im}\alpha_i = \ker\alpha_{i+1}$.

Definición 1.9. Sean A, B y C R-módulos y $\sigma : A \to B$, $\gamma : B \to C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la **sucesión exacta** es **corta** si

$$(\sigma, \gamma) : 0 \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \to 0$$

Es decir, una sucesión exacta de cinco R-módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

La exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker\gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la sucesión exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B. Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \to A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \to C$; juntos estos proveen un isomorfismo de sucesiones exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma'"] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, "(\gamma')^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r] & B/\sigma A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En resumen, una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Ejemplo 1.2. Respecto a la Proposición 1.1, la inclusión i y la proyección π producen una sucesión exacta corta.

$$0 \to T \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/T \to 0.$$

1.3. Categorías

La teoría de categorías fue introducida por primera vez por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en [EM45]. En particular, las categorías son estructuras algebraicas que capturan la noción de composición. Gracias a ellas podemos analizar y comparar estructuras algebraicas, permitiendo sacar conclusiones comunes y trasladar problemas complejos a otros espacios donde resolverlos es más sencillo. En esta sección haré una breve introducción de las categorías apoyándome en [ML13].

Definición 1.10. Una **categoría** $\mathcal{C}$ es una tripleta $(\mathcal{O}, \hom, \circ)$ formada por

1. Una clase $\mathcal{O}$, cuyos elementos denominamos **objetos** de $\mathcal{C}$ y notamos por $Obj(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, un conjunto $\hom(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B. Si $f \in \hom(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \to B$ y a cada morfismo $g : B \to C$ un morfismo $g \circ f : A \to C$ que satisface
   - **Asociatividad**. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
   - **Identidad**. A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $\mathrm{id}_B : B \to B$ tal que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ entonces $g \circ \mathrm{id}_B = g$ y $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

   Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g.

Ejemplo 1.3. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de espacios topológicos**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \to Y$.
- **La categoría de grupos**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de conjuntos**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.
- **La categoría de sucesiones exactas de R-módulos de longitud n**. Los objetos son dichas sucesiones $S : A_1 \to \cdots \to A_n$. Para dos sucesiones S y S', los morfismos son de la forma $\Gamma : S \to S'$ tal que $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ es una tupla donde los $\gamma_i : A_i \to A'_i$ son homomorfismos de R-módulos tal que

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"'] & \cdots \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & A_n \arrow[d, "\gamma_n"] \\ A'_1 \arrow[r] & A'_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r] & A'_n \end{tikzcd}$$

  conmuta para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Definición 1.11. Sea $f \in \hom(A, B)$ un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$. Diremos que f es una **equivalencia** en $\mathcal{C}$ si existe en $\mathcal{C}$ otro morfismo $g \in \hom(B, A)$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Nótese que si $f \in \hom(A, B)$ es una equivalencia en $\mathcal{C}$, $g \in \hom(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \hom(B, A)$ tal que $g' \circ f = \mathrm{id}_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ \mathrm{id}_B = g'$.

1.4. Funtores

Dentro de la teoría de categorías los funtores tienen un papel principal, pues nos va a permitir llevar objetos y morfismos de una categoría a otra preservando identidades y composiciones.

Definición 1.12. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una pareja de funciones *denotadas por la misma letra* T tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.
2. Una **función de morfismos** qu asigna a cada morfismo $\gamma : C \to C'$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $T(\gamma) : T(C) \to T(C')$ de $\mathcal{D}$. Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = \mathrm{id}_{T(C)}, \qquad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \qquad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

Es decir, un funtor covariante $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

2. Símplices y complejos simpliciales

Los espacios topológicos pueden llegar a ser complicados de estudiar. Los complejos simpliciales tienen la ventaja de ser estructuras fáciles de estudiar y definiéndolos en cierta forma como espacios topológicos admiten homeomorfismos a un gran número de espacios topológicos. En este capítulo nos centraremos en la definición y el estudio de estos objetos en profundidad en la línea de [Mun18] y lo complementaremos con alguna aportación de [Lee10].

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplice. Su sencillez y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplice y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzamos recordando algunos conceptos de la geometría afín.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N-dimensional, lo notaremos simplemente por $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \ldots, a_p\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^N$. Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{p} t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{p} t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \cdots = t_p$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \ldots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \ldots, a_p\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{p} t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Nótese que la transformación afín T de $\mathbb{R}^N$ tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$ con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_p - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_p - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual, obtenemos una transformación afín $S : P \to \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tal que $S(a_i) = (0, \overset{i-1}{\ldots}, 0, 1, 0, \overset{i+1}{\ldots}, 0)$ con $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \ldots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en $\mathbb{R}^N$. Definimos el **p-símplice** o **símplice** $\sigma = [a_0, \ldots, a_p]$ generado por $a_0, \ldots, a_p$ como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{p} t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{p} t_i = 1$$

con $t_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Definición 2.4. Sea σ un p-símplice. A los términos $t_0, \ldots, t_p$ los llamamos las **coordenadas baricéntricas** de σ con respecto a $a_0, \ldots, a_p$.

Proposición 2.1. *Sea $\sigma = [a_0, a_1, \ldots, a_p]$ un p-símplice. Entonces las coordenadas baricéntricas de cualquier $x \in \sigma$ están determinadas de manera única.*

Demostración. Sea $y \in \sigma$ un punto arbitrario del p-símplice en $\mathbb{R}^N$. Como hemos definido nuestro símplice como combinación convexa de los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tenemos que dichas coordenadas existen (además de ser no negativas) y son solución de la siguiente ecuación

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0p} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Np} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

donde $a_i = (a_{0i}, \ldots, a_{Ni})^T$ con $0 \leq i \leq p$, $x = (t_0, t_1, \ldots, t_p)^T$ e $y = (y_0, y_1, \ldots, y_p)^T$. El superíndice T indica la matriz traspuesta.

En cuanto a la unicidad, basta suponer la existencia de otro $x' = (t'_0, t'_1, \ldots, t'_p)^T$ tal que $Ax = y = Ax'$. Sin embargo, dicha igualdad se cumple si, y sólo si, $A(x - x') = 0$. Como $a_0, a_1, \ldots, a_p$ son afínmenente independientes, tenemos que el determinante de A no puede ser 0 y por tanto A no puede ser la matriz nula. Nos queda que $x - x' = 0$ debe cumplirse luego $x = x'$. □

Los puntos $a_0, \ldots, a_p$ que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número p lo llamaremos la **dimensión** de σ.

Definición 2.5. Sea $\sigma = [a_0, \ldots, a_p]$ un símplice. Una **cara de dimensión** p de σ será cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \ldots, a_p\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i, $i \in \{0, \ldots, p\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos Bd σ. Finalmente, definimos el **interior** de σ, Int σ, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

Dado un símplice σ podemos definir un orden sobre sus vértices. Dos órdenes de σ los consideraremos equivalentes si podemos pasar de uno a otro con un número par de permutaciones. Así, los ordenamientos posibles para los vértices de σ se pueden agrupar en dos clases de equivalencia distintas, que definimos como las **orientaciones del símplice** σ.

(a) 0-símplice (b) 1-símplice (c) 2-símplice (d) 3-símplice

Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Definición 2.6. Decimos que un símplice $\sigma = [a_0, a_1, \ldots, a_p]$ está **orientado** si se le ha asignado una de estas orientaciones. Utilizaremos $[a_0 a_1 \ldots a_p]$ para denotar la clase de equivalencia dada por la orientación $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ del símplice generado por los vértices $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

2.2. Complejos simpliciales

La importancia de los complejos simpliciales reside en su capacidad para descomponer espacios topológicos en componentes manejables, permitiendo un análisis detallado de su estructura. Al considerar la forma en que estos símplices se conectan y orientan entre sí, los complejos simpliciales facilitarán la definición de cadenas y ciclos simpliciales que serán indispensables en el estudio de la homología simplicial.

Definición 2.7. Un **complejo simplicial** K en $\mathbb{R}^N$ es una colección de símplices en $\mathbb{R}^N$ tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K.
2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K es una cara de ambos símplices.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 2.1. *Una colección K de símplices es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Toda cara de un símplice de K está en K.*
2. *La intersección dos a dos del interior de los símplices de K es disjunta.*

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplices $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$ y considero $x \in s$. Si s fuera una cara propia de σ, entonces x pertenecería a la frontera de σ, lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ. Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen *(1)* y *(2)*. Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices $b_0, \ldots, b_m$ de σ que están en τ. Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a $b_0, \ldots, b_m$. Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \operatorname{Int} s \cap \operatorname{Int} t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ. Se sigue de *(2)* que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \ldots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ', lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. □

Definición 2.8. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K.

Entre los subcomplejos de un complejo simplicial, cabe destacar el siguiente. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p. Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ lo llamaremos el **conjunto de vértices** de K.

Definición 2.9. Sea K un complejo simplicial de $\mathbb{R}^N$ y sea $|K|$ el subconjunto de $\mathbb{R}^N$ tal que $|K|$ es la unión de todos los símplices de K. Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de $\mathcal{T}$ son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de $\mathbb{R}^N$ para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ, pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma$, $O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $(\cup_{i \in I} O_i) \cap \sigma = \cup_{i \in I}(O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ. En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

En general, la topología de $|K|$ es más fina que la inducida de la topología usual de $\mathbb{R}^N$. Si A es cerrado en $|K|$ con la topología inducida de la usual, $A = B \cap |K|$ para algún cerrado B de $\mathbb{R}^N$ y por tanto $B \cap \sigma$ sería cerrado en σ para cada símplice σ de K. Como consecuencia, $B \cap |K| = A$ es cerrado en $|K|$ con la topología $\mathcal{T}$ definida anteriormente.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

Lema 2.2. *Sea K un comlpejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \to X$ es continua si, y sólo si, $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_\sigma$ por ser σ un subespacio de K. Supongamos ahora que $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X, $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_\sigma^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_\sigma$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. $\square$

Definición 2.10. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X. Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \to X$ es una **triangulación**.

2.3. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.3. *Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ una aplicación entre los conjuntos de vértices de K y L. Supongamos que siempre que los vértices $v_0, \ldots, v_n$ de K generen* *un símplice en K, los puntos $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ son vértices de un símplice de L. Entonces podemos extender f a una aplicación continua $g : |K| \to |L|$ tal que*

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

Llamaremos a g la ***aplicación simplicial*** *(lineal) inducida por f.*

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ generan un símplice τ en L. Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i, con $i \in \{0, \ldots, n\}$, es igual a uno, luego $g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$ es un punto de τ. Podemos ver que g es una aplicación continua del símplice σ generado por $v_0, \ldots, v_n$ al símplice τ generado por $f(v_0), \ldots, f(v_n)$.

Ahora tan solo nos queda ver que $g : |K| \to |L|$ es continua. Bien, pues por ser $g : \sigma \to \tau$ continua, también lo es $g : \sigma \to |L|$. Finalmente por el Lema 2.2, $g : |K| \to |L|$ es continua. □

Lema 2.4. *Supongamos que $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices $v_0, \ldots, v_n$ de K generan un símplice de K si, y sólo si, $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ generan un símplice de L. Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \to |L|$ es un homeomorfismo. Diremos entonces que g es un* ***homeomorfismo simplicial*** *de K con L.*

Demostración. Por hipótesis, cada símplice $\sigma \in K$ se identifica con otro símplice $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \to \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \to \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h(\sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)) = \sum_{i=0}^{n} t_i f^{-1}(v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i = x$$

□

2.4. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simple, nos serán de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.11. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$.

Al elemento A de $\mathcal{S}$ lo llamaremos **símplice** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A. En cuanto a la **dimensión** de $\mathcal{S}$, diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de $\mathcal{S}$ es infinita. El **conjunto**

de vértices V de $\mathcal{S}$ diremos que es la unión de elementos de $\mathcal{S}$ que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de $\mathcal{S}$ a cualquier subcolección de $\mathcal{S}$ que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ respectivamente. Dos complejos abstractos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \to V_T$ tal que $\{a_0, \ldots, a_p\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \ldots, f(a_p)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.12. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \ldots, a_p\} \subset V$ tales que los vértices $a_0, \ldots, a_p$ generan un símplice de K. Entonces llamaremos a la colección $\mathcal{K}$ el **esquema de vértices** de K.

Después de realizar todas las definiciones pertinentes, ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) Todo complejo abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K.

(b) Dos complejos simpliciales son afínmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.

Demostración. Para demostrar (a), empezaremos tomando un conjunto de índices J. Llamemos $\mathbf{E}^J$ al subconjunto de funciones $x : J \to \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^J$ tales que $x(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in J$ excepto para un número finito de valores. Sea Δ^J la colección de todos los símplices en $\mathbf{E}^J$ generados por subconjuntos finitos de la base usual de $\mathbf{E}^J$. Δ^J es un complejo simplicial. Sean entonces σ, τ símplices de Δ^J, la unión de sus conjuntos de vértices es afínmente independiente y genera un símplice en Δ^J. Diremos que Δ^J es un **símplice de dimensión infinita**.

Sea ahora $\mathcal{S}$ un complejo abstracto con conjunto de vértices V. Tomamos un conjunto de índices J lo bastante grande para que podamos tomar una aplicación inyectiva $f : V \to J$. A continuación, vamos a tomar un subcomplejo de Δ^J tal que para cada símplice abstracto $\{a_0, \ldots, a_p\} \in \mathcal{S}$, el símplice (geométrico) generado por $f(a_0), \ldots, f(a_p)$ está en K. Por tanto K es un complejo simplicial y f es un isomorfismo entre $\mathcal{S}$ y el esquema de vértices de K.

En cuanto a (b), es una consecuencia inmediata del Lema 2.4. $\square$

Definición 2.13. Si el complejo simplicial abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K, diremos que K es una **realización geométrica** de $\mathcal{S}$.

3. Homología

Mediante el uso de estructuras algebraicas como grupos y complejos de cadenas, la homología asigna a cada espacio topológico una serie de grupos de homología, que reflejan características clave como agujeros y vacíos en diferentes dimensiones. Estos grupos permiten no sólo discernir la estructura interna de los espacios, sino también compararlos de manera abstracta. Usaremos de referencia [Mac12].

3.1. Grupos diferenciales

Comenzaremos definiendo lo que es un grupo de homología y estableceremos la terminología que emplearemos cuando trabajemos con ellos.

Definición 3.1. Sea C un grupo abeliano junto a un endomorfismo $d : C \to C$ tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Diremos entonces que C es un **grupo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C.

Llamaremos a los elementos de C **cadenas**. El subgrupo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el subgrupo de **bordes** $B(C) = \operatorname{Im} d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

Definición 3.2. Sea C un grupo diferencial. Definimos el **grupo de homología** de C como el grupo cociente $H(C)$ tal que

$$H(C) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

Por tanto, el grupo de homología de un grupo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C. A los elementos de $H(C)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Definición 3.3. Sean C y C' dos grupos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \to C'$ es un **homomorfismo de grupos diferenciales** si f es un homomorfismo de grupos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del grupo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$ que sea un ciclo o un borde y $f : C \to C'$ es un homomorfismo de grupos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente.

Definición 3.4. Sean C, C' grupos diferenciales y $f : C \to C'$ un homomorfismo de grupos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C) \to H(C')$ tal que

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f.

En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de grupos diferenciales a la categoría de grupos.

3.2. Complejos de cadenas

Definición 3.5. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** K de R-módulos es una familia $\{K_n, \partial_n\}$ donde K_n son R-módulos y $\partial_n : K_n \to K_{n-1}$ homomorfismos de R-módulos tales que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 3.1. La última condición es equivalente a que $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo K es por tanto una sucesión doblemente infinita

$$K : \cdots \to K_1 \to K_0 \to K_{-1} \to \cdots$$

donde toda composición de homomorfismos de dicha familia es el homomorfismo nulo. La **homología** $H(K)$ es la familia de R-módulos

$$H_n(K) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

donde $H_n(K)$ es el n**-ésimo módulo de homología** de K.

Luego $H_n(K) = 0$ implica que la sucesión K es exacta en K_n. A los elementos de K_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Un **n-ciclo** o **ciclo de dimensión n** de K es un elemento del submódulo $Z_n(K) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** o **borde de dimensión n** es un elemento de $B_n(K) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. Si la dimensión se sobrentiende en estos casos, no es necesario indicarla de manera explícita. La clase lateral de un ciclo c la notaremos por $[c] = c + \partial K_{n+1}$. Dos n-ciclos $c, c' \in C_n(K)$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Definición 3.6. Sean K, K' complejos de cadenas. La **suma directa** $K \oplus K'$ es un complejo de cadenas cuyos operadores bordes vienen definidos por $\partial_n \oplus \partial'_n : K_n \oplus K'_n \to K_{n-1} \oplus K'_{n-1}$.

Definición 3.7. Sean K, K' complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas** $f : K \to K'$ es una familia de homomorfismos de R-módulos $f_n : K_n \to K'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & K_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dr, dotted] & K_n \arrow[l, "\partial_n"'] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, dotted] & K_{n+1} \arrow[l, "\partial_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & K'_{n-1} \arrow[l] & K'_n \arrow[l, "\partial'_n"] & K'_{n+1} \arrow[l, "\partial'_{n+1}"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Cuando se sobrentienda del contexto, notaremos simplemente por ∂ a los correspondientes ∂_n y ∂'_n.

La función $H_n(f) = f_*$ definida por $f_*([c]) = f_*(c + \partial K_{n+1}) = fc + \partial K'_{n+1}$ es un homomorfismo $H_n(f) : H_n(K) \to H_n(K')$. Así mismo, cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas y morfismos de cadenas a la categoría de módulos.

Definición 3.8. Sean K, K' complejos de cadenas y $f, g : K \to K'$ dos aplicaciones de cadenas entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : K_n \to K'_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 3.1. *Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : K \to K'$, entonces*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(K) \to H_n(K')$$

Demostración. Si c es un ciclo de K_n, tenemos que $\partial_n c = 0$. Por la Def. 3.8 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(K')$, como queríamos demostrar. □

Definición 3.9. Una aplicación de cadenas $f : K \to K'$ es una **equivalencia de cadenas** si existe otra aplicación $h : K' \to K$ y homotopías $s : h \circ f \to \mathrm{id}_K$, $t : f \circ h \to \mathrm{id}_{K'}$ tales que $h \circ f \simeq \mathrm{id}_K$, $f \circ h \simeq \mathrm{id}_{K'}$.

Como $H_n(\mathrm{id}_K) = \mathrm{id}_{H_n(K)}$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 3.1. *Si $f : K \to K'$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(K) \to H_n(K')$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 3.1. *Sean $f, g : K \to K'$ y $f', g' : K' \to K''$ aplicaciones de cadenas. Sean $s : f \to g$, $s' : f' \to g'$ homotopías de cadenas entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces la composición*

$$f's + s'g : f' \circ f \to g' \circ g \qquad g' \circ g : K \to K''$$

es una homotopía de cadenas.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadenas tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$\begin{cases} f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g \\ \partial s' g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g$$

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - g' \circ g$$

$$\partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'g\partial = f' \circ f - g' \circ g$$
$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g$$

□

3.3. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 3.10. Un **subcomplejo** S de K es una familia de submódulos $S_n \subset K_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, S es un complejo en sí con el operador borde ∂ inducido de K y la inclusión $i : S \to K$ es una aplicación de cadenas.

Definición 3.11. Sea S un subcomplejo de K. El **complejo cociente** K/S es la familia $(K/S)_n = K_n/S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial'_n : K_n/S_n \to K_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por ∂_K.

Definición 3.12. Sean $f : K \to K'$, $g : K' \to K''$ aplicaciones de cadenas. La sucesión de complejos $K \xrightarrow{f} K' \xrightarrow{g} K''$ es **exacta** en K' si $\operatorname{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada sucesión $K_n \xrightarrow{f_n} K'_n \xrightarrow{g_n} K''_n$ de módulos es exacta en K'_n.

Definición 3.13. Un complejo K es **positivo** si $K_n = 0$ para todo $n < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$. Su n-ésimo módulo de homología es entonces positivo ya que $H_n(K) = 0$ para todo $n < 0$. De manera análoga, un complejo K es **negativo** si $K_n = 0$ para todo $n > 0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Los complejos negativos suelen notarse con índices superiores positivos donde K_{-n} se sustituye por K^n y $\partial_{-n} : K_{-n} \to K_{-n-1}$ por $\delta^n : K^n \to K^{n+1}$ quedando así

$$0 \to K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \xrightarrow{\delta^1} K^2 \to \cdots, \quad \delta \circ \delta = 0$$

donde el n-ésimo módulo de homología $H^n(K) = \ker(\delta^n)/\operatorname{Im}(\delta^{n-1})$ es positivo en los índices superiores. A dicho complejo lo llamaremos **complejo de cocadenas**.

Definición 3.14. Sean f y g aplicaciones de cadenas de K a K' y sea s una homotopía de cadenas entre ellas. Diremos que s es una **homotopía de cocadenas** si está escrita con índices superiores. Esto es, $s^n : K^n \to K'^{n-1}$ con $\delta s + s\delta = f - g$.

Definición 3.15. Sea A un módulo. Definimos el siguiente complejo positivo donde $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$. Un **complejo sobre** A es un complejo positivo K junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : K \to A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : K_0 \to A$ tal que $\varepsilon\partial = 0 : K_1 \to A$.

Definición 3.16. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : K \to A$ es una aplicación de cadenas $f : A \to K$ tal que $\varepsilon f = \mathrm{id}_A$ junto con una homotopía $s : \mathrm{id}_K \to f\varepsilon$ donde $\mathrm{id}_K \simeq f\varepsilon$. En otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \to K_0$ y $s_n : K_n \to K_{n+1}, n = 0, 1, \ldots$, tal que

$$\varepsilon f = \mathrm{id}_A, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = \mathrm{id}_{K_0}, \quad \partial_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = \mathrm{id}_{K_n} \quad n > 0$$

Podemos extender el complejo estableciendo $K_{-1} = A$, $\partial_0 = \varepsilon : K_0 \to K_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Aplicando la Def. 3.16, $s : \mathrm{id}_K \to 0$ es una homotopía de cadenas. Si $\varepsilon : K \to A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son isomorfos por $\varepsilon_* : H_0(K) \to A$ para $n = 0$ y $H_n(K) = 0$ para $n > 0$.

Los complejos K de $\mathbb{Z}$-módulos libres surgen en topología. Si cada K_n es finitamente generado, entonces cada $H_n(K)$ es un grupo abeliano finitamente generado. El teorema de estructura para tales grupos presenta $H_n(K)$ como una suma directa

$$\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde el número β_n de sumandos cíclicos infinitos y los enteros $m_1, \ldots, m_k$ (cada uno divisor del siguiente) dependen solo de $H_n(K)$. El entero β_n lo llamaremos el **n-ésimo número de Betti** de K y a los $\{m_i\}$ los **n-ésimos coeficientes de torsión**.

Bibliografía

[DF04] David Steven Dummit y Richard M Foote. *Abstract algebra*, volumen 3. Wiley Hoboken, 2004.

[EM45] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.

[Lee10] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volumen 202. Springer Science & Business Media, 2010.

[Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.

[ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[Mun18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.