UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

trabajo de fin de grado

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsables de tutorización

Miguel Ortega Titos
Departamento de Geometría y Topología

Julián Luengo Martín
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
E.T.S. de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 23 de junio de 2024

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)
Ver archivo `preliminares/dedicatoria.tex`

Índice general

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo `preliminares/agradecimiento.tex`).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).
File: `preliminares/summary.tex`

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo `preliminares/introduccion.tex`

Parte I.

Fundamento teórico

1. Fundamentos del álgebra homológica

La teoría de homología es una rama de la topología que trata de resolver problemas topológicos en el ámbito del álgebra. Por este motivo es importante conocer muy bien algunas herramientas algebraicas que iremos utilizando con frecuencia. En todo el capítulo usaremos como referencia principal [Mac12].

1.1. Módulos

La estructura de módulo surge con la idea de generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo a un anillo. Nuestro interés en ellos radica en que la teoría de homología se construye sobre módulos y por ello es necesario hacer una introducción al campo. Esta sección recoge algunas definiciones y resultados de interés vistos en la asignatura de Álgebra Moderna y complementada con los contenidos de [DF04].

Definición 1.1. Sea R un anillo con elemento identidad $1 \neq 0$. Un R**-módulo izquierdo** M es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times M \to M$ con $(r, m) \to rm$ tal que dados $r, r' \in R$, $m, m' \in A$ se tiene

1. $(r + r')m = rm + r'm$,
2. $(rr')m = r(r'm)$,
3. $r(m + m') = rm + rm'$,
4. $1m = m$.

De la definición anterior se sigue que $0m = 0$ y $(-1)m = -m$.

De manera análoga, definimos R**-módulo derecho** donde el anillo actúa por la derecha en vez de por la izquierda de forma que $p : M \times R \to M$. Si R es un anillo conmutativo, los R-módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R-módulos. Como los resultados de R-módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos con los R-módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R**-módulos** o **módulos** a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. El interés de los R-módulos subyace en la cantidad de estructuras conocidas que engloba. Si por ejemplo consideramos el K-módulo donde K es un cuerpo, éste adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Ahora sea M un $\mathbb{Z}$-módulo. Definimos el producto p de forma que para $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in M$ con $n > 0$, $nm = m + m + \ldots + m$ (n veces), $0m = 0$ y $(-n)m = -(nm)$. Entonces M ha de tener estructura de **grupo abeliano**. En particular, si R es un anillo entonces es también un R-módulo.

Definición 1.2. Sea M un R-módulo izquierdo y N un subconjunto de M. Diremos que N es un **submódulo** de M, esto es, $N \subset M$, si N es cerrado respecto a la suma y si $r \in R$, $n \in N$ entonces $rn \in N$.

De la definición anterior se deduce que N es un R-módulo.

Definición 1.3. Sea R un R-módulo. Si un submódulo de R es un subconjunto $I \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $\langle I \rangle = \{ri \ : \ i \in I\} \subset I$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal** de R. En particular, si I consta de un único elemento $i \in I$, diremos que es el **ideal generado por** i y lo denotaremos por $\langle i \rangle$.

Definición 1.4. Sea M un R-módulo y sea $m \in M$. El conjunto $\langle m \rangle = \{rm : r \in R\}$ es un submódulo de M que denominaremos **submódulo cíclico generado por** m.

Observación 1.1. Nótese que si R es un R-módulo, el submódulo cíclico generado por un elemento es el ideal generado por el mismo elemento.

Definición 1.5. Sea M un R-módulo y sean S un subconjunto de M. Sea $\langle S \rangle$ el submódulo formado por la intersección de todos los submódulos de M que contienen a S. Diremos entonces que $\langle S \rangle$ es el **submódulo generado por** S y los elementos de S los llamaremos **generadores** de $\langle S \rangle$.

Definición 1.6. Sea M un R-módulo. Un submódulo N de M es **finitamente generado** si existe un subconjunto finito $S \subset M$ tal que $N = \langle S \rangle$.

Lema 1.1. *Sea M un R-módulo. M es finitamente generado por n elementos si, y sólo si, existe un epimorfismo $\phi : R^n \to M$.*

Definición 1.7. Sea M un R-módulo finitamente generado por n elementos y sea $\phi : R^n \to M$ un epimorfismo. Diremos que M es **finitamente presentado** si $\ker \phi$ es finitamente generado.

Definición 1.8. Sean M, N R-módulos. Definimos el **homomorfismo de R-módulos** de M a N como la aplicación $\alpha : M \to N$ tal que

1. $\alpha(m + m') = \alpha(m) + \alpha(m')$,
2. $\alpha(rm) = r\alpha(m)$

para todo $m, m' \in M$, $r \in R$.

Cuando $\alpha : M \to N$ sea un homomorfismo de R-módulos, diremos que M es el **dominio** y N el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\mathrm{Im}(\alpha) = \{\alpha(m) : m \in M\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{m \in M : \alpha(m) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando α sea sobreyectiva, un **monomorfismo** cuando α sea inyectiva y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre M y N diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\alpha : M \to M$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dado que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de R-módulos coincide con el de los grupos abelianos subyacentes, la siguiente caracterización es inmediata de la ya conocida para grupos:

Proposición 1.1. *Sea $\alpha : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos. Entonces*

1. *α es un monomorfismo si, y sólo si,* $\ker(\alpha) = 0$.
2. *α es un epimorfismo si, y sólo si,* $\mathrm{Im}(\alpha) = N$.

Es frecuente escribir el homomorfismo de R-módulos $\alpha : M \to N$ como $M \xrightarrow{\alpha} N$. Respecto a la notación de la imagen de un elemento $m \in M$ por α, pondremos $\alpha(m)$ o simplemente

αm. En cuanto a la imagen de A por α, lo representaremos de manera análoga por $\alpha(M)$ o αM.

Dados dos homomorfismos de R-módulos $\alpha_1, \alpha_2 : M \to N$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(m) = \alpha_1(m) + \alpha_2(m)$ para todo $m \in M$. Además, dados dos homomorfismos de R-módulos $\alpha : M \to N$, $\beta : N \to P$, su **composición** $\beta \circ \alpha : M \to P$ es también un homomorfismo de R-módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β. En ocasiones usaremos la notación por yuxtaposición $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : M \to N$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : N \to M$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_M$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_N$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : N \to M$ tal que $\gamma \circ \alpha = \mathrm{id}_M$. De manera análoga, el homomorfismo $\theta : M \to N$ es **inversa derecha** de α si $\alpha \circ \theta = \mathrm{id}_N$.

Si $T \subseteq N$, el conjunto $\alpha^{-1}T = \{m \in M \ : \ \alpha(m) \in T\}$ es un submódulo de M, llamado la **imagen inversa** (completa) de T. En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de N que consiste solo en el elemento cero.

Sea $T \subseteq N$ donde N es un R-módulo, llamaremos **inclusión** o **inyección canónica** al homomorfismo $i : T \to N$ tal que $i(t) = t$ para todo $t \in T$. En particular, i es un monomorfismo. Las **clases laterales** de T en N son los conjuntos $n + T = \{n + t : t \in T\}$ donde $n \in N$. Dos clases laterales $n_1 + T$, $n_2 + T$ son iguales si $n_1 - n_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano N/T se convierte en un R-módulo cuando $r(n + T) = rn + T$ para todo $r \in R$. A este R-módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de N sobre T. El homomorfismo $\pi : N \to N/T$ tal que $\pi(n) = n + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de N.

Proposición 1.2 (Teorema de factorización). *Sea $\beta : M \to M'$ un homomorfismo de módulos con $T \subset \ker \beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : M/T \to M'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\beta"'] & M/T \arrow[d, "\beta'"] \\
 & M'
\end{tikzcd}$$

*es conmutativo. Al homomorfismo β' lo llamaremos **homomorfismo inducido** por β.*

Teorema 1.1 (Primer teorema de isomorfía). *Sea $\beta : M \to M'$ un homomorfismo de R-módulos. Entonces*

$$\frac{M}{\ker \beta} \cong \operatorname{Im} \beta.$$

Definición 1.9. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos indexada por I. Definimos el **producto directo** o **producto directo externo** de $\{M_i\}_{i \in I}$ como el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in M_i\},$$

donde las operaciones se definen componente a componente:

$$\begin{aligned}
(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} &= (x_i + y_i)_{i \in I}, \\
r(x_i)_{i \in I} &= (r x_i)_{i \in I},
\end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $x_i, y_i \in M_i$, $i \in I$.

Definición 1.10. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos indexada por I. Definimos la **suma directa** o **suma directa interna** de $\{M_i\}_{i\in I}$ como el submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$ tal que

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} : x_i = 0 \text{ p.c.t. } i \in I\}.$$

Nota. Recordemos que una condición se cumple "para casi todo"(p.c.t.) elemento de un conjunto si se cumple para todo elemento en él salvo en un subconjunto finito de elementos.

Definición 1.11. Sea B un conjunto y sea M el R-módulo tal que $M = \bigoplus_{b\in B} R_b$ donde $R_b = R$ para todo $b \in B$. Llamaremos a dicho R-módulo el **R-módulo libre de base** B y lo notaremos por $R\langle B\rangle$. De esta forma, cada $x \in R\langle B\rangle$ se representa por $x = \sum_{b\in B} \lambda_b b$ donde $\lambda_b \in R$ son coeficientes no nulos en un número finito de posiciones b.

Teorema 1.2 (Propiedad universal de los módulos libres)**.** *Sean B un conjunto, M un R-módulo y $\varphi : B \to M$ una aplicación entre conjuntos. Entonces existe un único homomorfismo de R-módulos $\phi : R\langle B\rangle \to M$ de forma que $\phi(b) = \varphi(b)$ para todo $b \in B$. Es decir, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & M \\ R\langle B\rangle \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 1.12. Sea M un R-módulo libre. Si para toda base B de M, B tiene la misma cardinalidad, entonces decimos que M tiene **rango** $\operatorname{rg} M = \#B$, donde $\#B$ es la cardinalidad alguna base de M.

Definición 1.13. Sea x un elemento de un R-módulo. Decimos que x es un **elemento de torsión** si existe un $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $rx = 0$. Por otro lado, x es un **elemento sin torsión** si el único elemento $r \in R$ que satisface $rx = 0$ es $r = 0$. Un R-módulo se clasifica como **módulo de torsión** si cada uno de sus elementos es un elemento de torsión. Análogamente, un **módulo sin torsión** es aquel cuyos elementos no nulos son elementos sin torsión.

Definición 1.14. Sea M un R-módulo. Definimos el **anulador de** M como el submódulo $\operatorname{Ann}(M) = \{r \in R : rm = 0,\ \forall m \in M\}$. De manera análoga, llamaremos **anulador de** $m \in M$ al submódulo $\operatorname{Ann}(M) = \{r \in R : rm = 0,\ \forall m \in M\}$.

Definición 1.15. Definimos el **submódulo de torsión** de un R-módulo M como el conjunto $\operatorname{Tor}(M) = \{x \in M : \operatorname{Ann}(x) \neq \{0\}\}$. Es decir, el conjunto de todos los elementos de torsión de M.

Teorema 1.3 (Descomposición cíclica primaria)**.** *Sea R un dominio de ideales principales y sea M un R-módulo finitamente generado. Entonces M se descompone como la suma directa*

$$M \cong R^f \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \frac{R}{\langle r_i\rangle}$$

donde R^f es un módulo libre de rango f y $R/\langle r_1\rangle, \dots, R/\langle r_k\rangle$ son módulos cíclicos con anuladores $\langle r_1\rangle, \dots, \langle r_k\rangle$. Además, f y los ideales $\langle r_1\rangle, \dots, \langle r_k\rangle$ de R generados por $r_1, \dots, r_k \in R$ están determinados de manera única salvo el orden por M.

Ejemplo 1.2. Consideremos un espacio vectorial V. Entonces podemos considerar, por ejemplo, su base canónica y generar todo V a partir de ella. En consecuencia, V es un módulo libre. Además, aplicando el teorema de Descomposición cíclica primaria, es claro que la parte libre de la descomposición es isomorfa a V y por tanto V carece de parte cíclica.

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.16. Sea $\{A_i, \alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una familia de R-módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \to A_{i+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** en A_i cuando $\operatorname{Im}\alpha_i = \ker\alpha_{i+1}$. Si la sucesión es exacta para todo $i \in \mathbb{Z}$, diremos que la sucesión es **exacta larga** o simplemente exacta.

Definición 1.17. Sean A, B y C R-módulos y $\sigma : A \to B$, $\gamma : B \to C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la **sucesión exacta** es **corta** si

$$(\sigma, \gamma) : 0 \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \to 0.$$

Es decir, una sucesión exacta de cinco R-módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

Proposición 1.3. *Sean A, B y C R-módulos y $\sigma : A \to B$, $\gamma : B \to C$ homomorfismos entre ellos. Entonces*

1. *La sucesión $0 \to A \xrightarrow{\sigma} B$ es exacta (en A) si, y sólo si, σ es inyectiva.*

2. *La sucesión $B \to C \xrightarrow{\gamma} 0$ es exacta (en C) si, y sólo si, γ es sobreyectiva.*

Demostración. El único homomorfismo que cumple $0 \to A$ tiene imagen 0 en A y por tanto, el núcleo de σ será este si, y sólo si, σ es inyectiva. De manera similar, el único homomorfismo $C \to 0$ es el homomorfismo nulo para todo elemento de C, que es la imagen de γ si, y sólo si, γ es sobreyectiva. □

Corolario 1.1. *La sucesión $0 \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \to 0$ es exacta si, y sólo si, σ es inyectiva, γ es sobreyectiva y $\operatorname{Im}\sigma = \ker\gamma$.*

Como acabamos de probar, la exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker\gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la sucesión exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B. Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \to \sigma A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \to C$; juntos estos proveen un isomorfismo de sucesiones exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma'"] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, "(\gamma')^{-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r] & B/\sigma A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En resumen, una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Ejemplo 1.3. Respecto al Teorema de factorización, la inclusión i y la proyección π producen una sucesión exacta corta.

$$0 \to T \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/T \to 0.$$

1.3. Categorías y funtores

La teoría de categorías fue introducida por primera vez por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en [EM45]. En particular, las categorías son estructuras algebraicas que capturan la noción de composición. Gracias a ellas podemos analizar y comparar estructuras algebraicas, permitiendo sacar conclusiones comunes y trasladar problemas complejos a otros espacios donde resolverlos es más sencillo. En esta sección haré una breve introducción de las categorías apoyándome en [ML13].

Definición 1.18. Una **categoría** $\mathcal{C}$ es una tripleta $(\mathcal{O}, \hom, \circ)$ formada por:

1. Una clase $\mathcal{O}$, cuyos elementos denominamos **objetos** de $\mathcal{C}$ y notamos por $Obj(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, un conjunto $\hom(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B. Si $f \in \hom(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \to B$ y a cada morfismo $g : B \to C$ un morfismo $g \circ f : A \to C$ que satisface
   - **Asociatividad**. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
   - **Identidad**. A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $\mathrm{id}_B : B \to B$ tal que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ entonces $g \circ \mathrm{id}_B = g$ y $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

   Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g.

Ejemplo 1.4. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de conjuntos Set**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.
- **La categoría de grupos Grp**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de espacios topológicos Top**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \to Y$.
- **La categoría de R-módulos R-Mod**, donde los objetos son todos los R-módulos y los morfismos todos los homomorfismos de módulos.

- **La categoría de sucesiones exactas de R-módulos de longitud n**. Los objetos son dichas sucesiones $S : A_1 \to \cdots \to A_n$. Para dos sucesiones S y S', los morfismos son de la forma $\Gamma : S \to S'$ tal que $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ es una tupla donde los $\gamma_i : A_i \to A_i'$ son homomorfismos de R-módulos tal que

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"'] & \cdots \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & A_n \arrow[d, "\gamma_n"] \\ A_1' \arrow[r] & A_2' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{n-1}' \arrow[r] & A_n' \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

También es posible encontrar colecciones propias de una categoría que siguen manteniendo dicha estructura.

Definición 1.19. Una **subcategoría** $\mathcal{D}$ de una categoría $\mathcal{C}$ consiste en:

1. Una subclase de objetos de $\mathcal{C}$, denotada por $Obj(\mathcal{D})$, tal que cada objeto de $\mathcal{D}$ es también un objeto de $\mathcal{C}$.

2. Para cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{D})$, un subconjunto de morfismos $\hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son también morfismos en $\mathcal{C}$.

3. La ley de composición en $\mathcal{D}$ es inducida por la ley de composición en $\mathcal{C}$, y esta composición es cerrada en $\mathcal{D}$.

Además, diremos que $\mathcal{D}$ es una **subcategoría plena** si para cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathcal{D})$, $\hom_{\mathcal{D}}(A, B) = \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Definición 1.20. Sea $f \in \hom(A, B)$ un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$. Diremos que f es una **equivalencia** en $\mathcal{C}$ si existe en $\mathcal{C}$ otro morfismo $g \in \hom(B, A)$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Observación 1.2. Nótese que si $f \in \hom(A, B)$ es una equivalencia en $\mathcal{C}$, $g \in \hom(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \hom(B, A)$ tal que $g' \circ f = \mathrm{id}_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ \mathrm{id}_B = g'$.

Dentro de la teoría de categorías, los funtores tienen un papel principal, pues nos van a permitir llevar objetos y morfismos de una categoría a otra preservando identidades y composiciones.

Definición 1.21. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una pareja de funciones denotadas por la misma letra T tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.

2. Una **función de morfismos** qu asigna a cada morfismo $\gamma : C \to C'$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $T(\gamma) : T(C) \to T(C')$ de $\mathcal{D}$. Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = \mathrm{id}_{T(C)}, \qquad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \qquad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

Es decir, un funtor covariante $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

Definición 1.22. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Diremos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son **isomorfas** si existen funtores covariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

1.4. Módulos diferenciales

Comenzaremos definiendo lo que es un módulo de homología y estableceremos la terminología que emplearemos cuando trabajemos con ellos.

Definición 1.23. Sea C un R-módulo junto a un endomorfismo $d : C \to C$ tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Diremos entonces que C es un **módulo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C.

Llamaremos a los elementos de C **cadenas**. El submódulo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el submódulo de **bordes** $B(C) = \operatorname{Im} d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

Definición 1.24. Sea C un módulo diferencial. Definimos el R**-módulo de homología** de C como el módulo cociente $H(C; R)$ tal que

$$H(C; R) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

En particular, cuando C sea un $\mathbb{Z}$-módulo diferencial, lo llamaremos **grupo diferencial** y notaremos $H(C; \mathbb{Z})$ simplemente por $H(C)$.

Por tanto, el módulo de homología de un módulo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C. A los elementos de $H(C; R)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Definición 1.25. Sean C y C' dos módulos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \to C'$ es un **homomorfismo de módulos diferenciales** si f es un homomorfismo de módulos y además $d' f = f d$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del módulo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$, que sea un ciclo o un borde, y $f \colon C \to C'$ es un homomorfismo de módulos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente. En efecto, si $z \in Z(C)$, entonces

$$d' f(z) = f(dz) = f(0) = 0.$$

Esto es, $f(z) \in \ker d'$. Ahora, si $b \in B(C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $dc = b$. En consecuencia,

$$d' f(c) = f(dc) = f(b),$$

y por tanto, $f(b) \in \operatorname{im} d'$.

Los grupos diferenciales definen una categoría $\mathcal{C}$ donde los objetos son los módulos diferenciales y los morfismos son los homomorfismos de módulos diferenciales. Tomemos como ley de composición interna la composición de dichos homomorfismos. Claramente es asociativa pues si $C, C', \bar{C}, \tilde{C} \in Obj(\mathcal{C})$, y $f\colon C \to C'$, $g\colon C' \to \bar{C}$, $h\colon \bar{C} \to \tilde{C}$, entonces $h \circ (g \circ f)$ se cumple si, y sólo si,

$$\begin{aligned}\tilde{d}(h \circ (g \circ f)) = (\tilde{d}h) \circ (g \circ f) = (h\bar{d}) \circ (g \circ f) = h \circ (\bar{d}g) \circ f \\ = h \circ (gd') \circ f = h \circ g \circ (d'f) = h \circ g \circ (fd) = (h \circ g) \circ fd \\ = ((h \circ g) \circ f)d\end{aligned}$$

y por tanto $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. La propiedad de identidad se sigue de existir el homomorfismo identidad de módulos.

Definición 1.26. Sean C, C' módulos diferenciales y $f : C \to C'$ un homomorfismo de módulos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C; R) \to H(C'; R)$ tal que

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f.

Proposición 1.4. *En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de módulos diferenciales a la categoría de módulos.*

Demostración. Por la definición dada del módulo de homología, es claro que la función objeto H asigna a cada grupo diferencial C un grupo de homología $H(C; R)$. En cuanto a la función de morfismos, la identidad de grupos diferenciales se preserva pues $H(\mathrm{id})([c]) = \mathrm{id}_*([c]) = [\mathrm{id}(c)] = [c]$ para todo $c \in C$. Además, si $f, g \in \hom(C)$, entonces

$$\begin{aligned}H(g \circ f)([c]) = (g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = [g(f(c))] \\ = g_*([f(c)]) = g_*(f_*([c])) = (H(g) \circ H(f))([c])\end{aligned}$$

para todo $c \in C$, manteniendo la ley de composición. □

1.5. Complejos de cadenas

Definición 1.27. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** $C_\bullet$ de R-módulos es una familia $\{C_n, \partial_n\}$ donde C_n son R-módulos y $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ homomorfismos de R-módulos tales que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nota. Usualmente notaremos directamente ∂ al homomorfismo ∂_n independientemente del valor de n siempre y cuando se sobrentienda por el contexto.

Observación 1.3. La última condición es equivalente a que $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo $C_\bullet$ es por tanto una sucesión doblemente infinita

$$C_\bullet : \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \to \cdots$$

donde toda composición de homomorfismos de dicha familia es el homomorfismo nulo. La **homología** $H(C_\bullet)$ es la familia de R-módulos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

donde $H_n(C_\bullet)$ es el **n-ésimo módulo de homología** de $C_\bullet$.

Luego $H_n(C_\bullet) = 0$ implica que la sucesión $C_\bullet$ es exacta en C_n. A los elementos de C_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Un **n-ciclo** o **ciclo de dimensión n** de $C_\bullet$ es un elemento del submódulo $Z_n(C_\bullet) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** o **borde de dimensión n** es un elemento de $B_n(C_\bullet) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. La clase lateral de un ciclo c la notaremos por $[c] = c + \partial_{n+a} C_{n+1}$. Dos n-ciclos $c, c' \in C_n$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Nota. Si la dimensión se sobrentiende en estos casos, no la indicaremos de manera explícita.

Definición 1.28. Sea $\{C^i_\bullet, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Su **suma directa** la definimos como el complejo de cadenas $\bigoplus_{i \in I} C^i_\bullet$ cuyos operadores borde vienen dados por $\bigoplus_{i \in I} \partial^i_n : \bigoplus_{i \in I} C^i_n \to \bigoplus_{i \in I} C^i_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.5. *Sea $\{C^i_\bullet, \partial^i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Entonces su homología conmuta con la suma directa, esto es, $H_n(\bigoplus_{i \in I} C^i_\bullet) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(C^i_\bullet)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Para demostrar que la homología conmuta con sumas directas, queremos mostrar que para una colección de complejos de cadenas $\{C^i_\bullet, \partial^i\}_{i \in I}$, los homomorfismos

$$\phi : H_n\left(\bigoplus_{i \in I} C^i_\bullet\right) \to \bigoplus_{i \in I} H_n(C^i_\bullet) : [(c_i)] \mapsto ([c_i]),$$
$$\psi : \bigoplus_{i \in I} H_n(C^i_\bullet) \to H_n\left(\bigoplus_{i \in I} C^i_\bullet\right) : ([c_i]) \mapsto [(c_i)],$$

están bien definidos y son inversos uno del otro.

En primer lugar, para comprobar que dichas aplicaciones están bien definidas, observemos que $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $[0] = [(c_i - c'_i)]$. Esto ocurre si, y sólo si, existe un $b_i \in C^i_\bullet$ tal que $\partial_i(b_i) = (c_i - c'_i)$, lo cual es equivalente a $c_i + \partial_i(b_i) = c'_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\phi([(c_i)]) = \phi([(c'_i)]) = [(c'_i + \partial_i(b_i))] = [(c'_i)]$. De manera análoga, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si, y sólo si, $\psi([(c_i)]) = \psi([(c'_i)])$. Esto implica que tanto ϕ como ψ están bien definidos.

En segundo lugar, es claro que ϕ y ψ son homomorfismos de R-módulos. Además, ϕ lleva la clase de equivalencia $[(c_i)]$ a $([c_i])$, mientras que ψ lleva $([c_i])$ a $[(c_i)]$, lo que demuestra que son inversos el uno del otro. $\square$

Definición 1.29. Sean $C_\bullet, C'_\bullet$ complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas** $f : C_\bullet \to C'_\bullet$ es una familia de homomorfismos de R-módulos $f_n : C_n \to C'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Cuando se sobrentienda del contexto, notaremos simplemente por ∂ a los correspondientes ∂_n y ∂'_n.

Los complejos de cadenas, junto con sus morfismos, forman una categoría que denotaremos por R-$\mathbf{Ch}_\bullet$. Esto se debe a que existe la identidad y se cumple la propiedad de asociatividad para la composición de morfismos. En efecto, para tres morfismos $f : C_\bullet \to C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \to C''_\bullet$ y $h : C''_\bullet \to \overline{C}_\bullet$, se tiene que

$$h_n \circ (g_n \circ f_n) = (h_n \circ g_n) \circ f_n$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, ya que son homomorfismos de módulos diferenciales. En consecuencia, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Sea $f : C_\bullet \to C'_\bullet$ un morfismo de complejos de cadenas. Definimos $H_n(f) = f_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$ dado que

$$f_*([c]) = f_*(c + \partial C_{n+1}) = fc + \partial C'_{n+1} = [f(c)].$$

Entonces f_* es un homomorfismo de R-módulos, como recoge el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas y morfismos de cadenas a la categoría de R-módulos.*

Demostración. Como vimos anteriormente, H_n asigna a cada complejo de cadenas $C_\bullet$ un R-módulo. Para demostrar que H_n también asigna a cada morfismo de cadenas un homomorfismo de R-módulos, consideremos $[c], [c'] \in H_n(C_\bullet)$ y $r, s \in R$. Entonces, podemos ver que

$$\begin{aligned}
f_*(r[c] + s[c']) &= f_*(r(c + \partial C_{n+1}) + s(c' + \partial C_{n+1})) \\
&= f_*(rc + \partial C_{n+1} + sc' + \partial C_{n+1}) \\
&= f_*(rc + sc' + \partial C_{n+1}) \\
&= f(rc + sc') + \partial C'_{n+1} \\
&= rf(c) + sf(c') + \partial C'_{n+1} \\
&= r(f(c) + \partial C'_{n+1}) + s(f(c') + \partial C'_{n+1}) \\
&= r(f_*(c + \partial C_{n+1})) + s(f_*(c' + \partial C_{n+1})) \\
&= rf_*([c]) + sf_*([c']).
\end{aligned}$$

Además, si consideramos $f = \mathrm{id}$ la identidad, es claro que id_* es la identidad de R-módulos. □

Definición 1.30. Sean $C_\bullet, C'_\bullet$ complejos de cadenas y $f, g : C_\bullet \to C'_\bullet$ dos aplicaciones de cadenas entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n.$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 1.4. *Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : C_\bullet \to C'_\bullet$, entonces*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet).$$

Demostración. Si c es un ciclo de C_n, tenemos que $\partial_n c = 0$. Por la Def. 1.30 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(C'_\bullet)$, como queríamos demostrar. □

Definición 1.31. Una aplicación de cadenas $f : C_\bullet \to C'_\bullet$ es una **equivalencia de cadenas** si existe otra aplicación $h : C'_\bullet \to C_\bullet$ y homotopías $s : h \circ f \to \mathrm{id}_{C_\bullet}$, $t : f \circ h \to \mathrm{id}'_{C_\bullet}$ tales que $h \circ f \simeq \mathrm{id}_{C_\bullet}$, $f \circ h \simeq \mathrm{id}_{C'_\bullet}$.

Como $H_n(\mathrm{id}_{C_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_n(C_\bullet)}$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 1.2. *Si $f : C_\bullet \to C'_\bullet$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.7. *Sean $f, g : C_\bullet \to C'_\bullet$ y $f', g' : C'_\bullet \to C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Sean $s : f \to g$, $s' : f' \to g'$ homotopías de cadenas entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces la composición*

$$f's + s'g : f' \circ f \to g' \circ g \qquad g' \circ g : C_\bullet \to C''_\bullet$$

es una homotopía de cadenas.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadenas tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda nos queda

$$\begin{cases} f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g, \\ \partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g. \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades

$$\begin{aligned} &f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g, \\ &f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - g' \circ g, \\ &\partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'g\partial = f' \circ f - g' \circ g, \end{aligned}$$

donde finalmente queda

$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g.$$

□

1.6. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 1.32. Un **subcomplejo** $S_\bullet$ de $C_\bullet$ es una familia de submódulos $S_n \subset C_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, $S_\bullet$ es un complejo en sí con el operador borde ∂ inducido de $C_\bullet$ y la inclusión $i : S_\bullet \to C_\bullet$ es una aplicación de cadenas.

Definición 1.33. Sea $S_\bullet$ un subcomplejo de $C_\bullet$. El **complejo cociente** $C_\bullet / S_\bullet$ es la familia $(C_\bullet / S_\bullet)_n = C_n / S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial'_n : C_n/S_n \to C_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por $\partial_{C_\bullet}$.

Definición 1.34. Sean $f : C_\bullet \to C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \to C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. La sucesión de complejos

$$C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$$

es **exacta** en $C'_\bullet$ si $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada sucesión $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ de módulos es exacta en C'_n.

Definición 1.35. Un complejo $C_\bullet$ es **positivo** si $C_n = 0$ para todo $n < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$. Su n-ésimo módulo de homología es entonces positivo ya que $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo $n < 0$. De manera análoga, un complejo $C_\bullet$ es **negativo** si $C_n = 0$ para todo $n > 0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.36. Sea $C_\bullet$ un complejo positivo de R-módulos. Denominaremos **aumento de** $C_\bullet$ al homomorfismo sobreyectivo $\varepsilon : C_0 \to R$ de forma que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

Definición 1.37. Sea $C_\bullet$ un complejo de cadenas positivo, $\varepsilon : C_0 \to R$ un aumento de $C_\bullet$ y sea $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el complejo positivo $\widetilde{C}_\bullet$ tal que $\widetilde{C}_n = C_n$ para todo $n \geq 0$, $\widetilde{C}_n = 0$ para todo $n < -1$ y $\widetilde{C}_{-1} = R$. Consideremos también $\widetilde{\partial}_n = \partial_n$ para todo $n \geq 1$ y $\widetilde{\partial}_0 = \varepsilon$. Llamaremos a este complejo **complejo aumentado** de $C_\bullet$.

Definición 1.38. Sea A un módulo. Definimos el siguiente complejo positivo donde $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$. Un **complejo sobre** A es un complejo positivo $C_\bullet$ junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : C_\bullet \to A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : C_0 \to A$ tal que $\varepsilon\partial = 0 : C_1 \to A$.

Definición 1.39. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : C_\bullet \to A$ es una aplicación de cadenas $f : A \to C_\bullet$ tal que $\varepsilon f = \mathrm{id}_A$ junto con una homotopía $s : \mathrm{id}_{C_\bullet} \to f\varepsilon$ donde $\mathrm{id}_{C_\bullet} \simeq f\varepsilon$. En otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \to C_0$ y una homotopía de cadenas formada por los homomorfismos $s_n : C_n \to C_{n+1}$ donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$\varepsilon f = \mathrm{id}_A, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = \mathrm{id}_{C_0}, \quad \partial_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = \mathrm{id}_{C_n},$$

para todo $n > 0$.

Podemos extender el complejo estableciendo $C_{-1} = A$, $\partial_0 = \varepsilon : C_0 \to C_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Por la definición anterior, la homotopía contráctil $s : \mathrm{id}_{C_\bullet} \to 0$ es una homotopía de cadenas. Si $\varepsilon : C_\bullet \to A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son isomorfos por $\varepsilon_* : H_0(C_\bullet) \to A$ para $n = 0$ y $H_n(C_\bullet) = 0$ para $n > 0$.

Consideremos un complejo de cadenas $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde cada C_n es un $\mathbb{Z}$-módulo libre y $d_n : C_n \to C_{n-1}$ es el operador diferencial de $C_\bullet$ que cumple $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para todo n. Este tipo de complejos aparece frecuentemente en el estudio de espacios topológicos.

Supongamos además que cada C_n es finitamente generado. Entonces, el n-ésimo grupo de homología de $C_\bullet$, definido como

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\mathrm{Im}(d_{n+1})},$$

es un grupo abeliano finitamente generado. Este resultado se sigue del hecho de que el núcleo y la imagen de los morfismos entre $\mathbb{Z}$-módulos libres finitamente generados son también finitamente generados.

El teorema de Descomposición cíclica primaria y, en particular, el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados afirma que cualquier grupo abeliano finitamente generado G puede expresarse como una suma directa de grupos cíclicos de la forma

$$G \cong \mathbb{Z}^\beta \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde β es el rango de G y cada $\mathbb{Z}_{m_i}$ es un grupo cíclico de orden m_i, donde m_i divide a m_{i+1} para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Aplicando este teorema al n-ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet)$,

obtenemos que
$$H_n(C_\bullet) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$
donde β_n es el rango de $H_n(C_\bullet)$, conocido como el **n-ésimo número de Betti** de $C_\bullet$, y los m_i son los **n-ésimos coeficientes de torsión**, donde m_i divide a m_{i+1} para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Definición 1.40. Sea $C_\bullet$ un complejo de cadenas y n un entero no negativo. El **n-ésimo número de Betti**, $\beta_n(C_\bullet)$, se define como el rango del n-ésimo módulo de homología de $C_\bullet$ sobre el dominio de ideales principales R, $H_n(C_\bullet; R)$. Esto es, $\beta_n(C_\bullet) = \mathrm{rg}(H_n(C_\bullet; R))$. Si no hay lugar a confusión lo notaremos simplemente por β_n.

Definición 1.41. Dado un complejo de cadenas $C_\bullet$ y considerando la descomposición en sumas directas del n-ésimo módulo de homología $H_n(C_\bullet; R)$ sobre un dominio de ideales principales R, definimos los **n-ésimos coeficientes de torsión** como los $m_i \in R$ donde $i \in \{1, \ldots, k\}$ que aparecen en la descomposición
$$H_n(C_\bullet; R) \cong R^{\beta_n} \oplus \frac{R}{\langle m_1 \rangle} \oplus \ldots \oplus \frac{R}{\langle m_k \rangle},$$
donde cada m_i divide a m_{i+1}.

Los números de Betti β_n proporcionan una medida de la dimensionalidad de la n-ésima homología, mientras que los coeficientes de torsión $\{m_i\}$ representan los órdenes de los sumandos cíclicos de torsión en la descomposición de homología y reflejan la estructura torsional de $H_n(C_\bullet; R)$.

La homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ es fundamental en topología algebraica, proporcionando una rica estructura para el estudio de espacios topológicos. Sin embargo, el uso de coeficientes en otros anillos, particularmente en cuerpos, puede simplificar significativamente los cálculos y aún así ofrecer información valiosa para ciertas aplicaciones. La elección de un cuerpo como coeficientes, por ejemplo $\mathbb{Z}_2$, reduce la complejidad de los cálculos al evitar problemas relacionados con la torsión, facilitando la manipulación algebraica. Al estudiar la homología con estos coeficientes alternativos, aunque se obtiene una visión menos detallada del espacio, a menudo es suficiente para resolver problemas específicos dentro de un contexto dado, tales como la detección de características topológicas esenciales o la simplificación de la clasificación de espacios topológicos.

2. Símplices y complejos simpliciales

Los espacios topológicos pueden llegar a ser complicados de estudiar. Los complejos simpliciales tienen la ventaja de ser estructuras fáciles de estudiar. Por este motivo, los dotaremos de cierta topología que nos permitirá construir homeomorfismos a un gran número de espacios topológicos. En este capítulo nos centraremos en la definición y el estudio de estos objetos en profundidad en la línea de [Mun18] y lo complementaremos con algunas aportaciones de [Lee10].

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplice. Su sencillez y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplice y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzamos recordando algunos conceptos de la geometría afín.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N-dimensional, lo notaremos simplemente por $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \ldots, a_p\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^N$. Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{p} t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{p} t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \ldots = t_p$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \ldots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \ldots, a_p\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{p} t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Nótese que la transformación afín T de $\mathbb{R}^N$ tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^N$ con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_p - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_p - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual $\{e_1, \ldots, e_N\}$, obtenemos una transformación afín $S : P \to \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tal que $S(a_i) = e_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en $\mathbb{R}^N$. Definimos el **p-símplice** o **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ generado por $a_0, \dots, a_p$ como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{p} t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{p} t_i = 1$$

con $t_i \geq 0$, $i \in \{0, 1, \dots, p\}$. Diremos que t_i es la ***i*-ésima coordenada baricéntrica** de x respecto a $a_0, a_1, \dots, a_p$.

(a) 0-símplice (b) 1-símplice (c) 2-símplice (d) 3-símplice

Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3.

Proposición 2.1. *Sea σ un k-símplice definido como en 2.3. Entonces, para cualquier $p \in \sigma$, las coordenadas baricéntricas $t_0, \dots, t_k$ de p están determinadas de manera única.*

Demostración. Por definición, cualquier punto arbitrario $p \in \sigma$ puede escribirse como una combinación convexa de los puntos a_i. Esto garantiza la existencia de una solución (no negativa) al sistema lineal

$$At = \begin{pmatrix} a_{01} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N} & \cdots & a_{kN} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ 1 \end{pmatrix} = p^*,$$

donde A es la matriz que contiene a los a_i como columnas, extendidos con un 1 en la última fila para incorporar la condición de que la suma de t_i sea igual a 1, asegurando que estamos considerando combinaciones convexas.

Para demostrar la unicidad, supongamos la existencia de otro vector t' tal que $At' = p^*$. Esto lleva a $A(t - t') = 0$. Supongamos que $A(t - t') = Av = 0$, donde $v = t - t'$. Esto implica que para $v_i = t_i - t'_i$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$

$$\sum_{i=0}^{k} v_i \cdot \begin{pmatrix} a_{0i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que lleva a que $v_0 = v_1 = \cdots = v_k = 0$, debido a la independencia lineal de las columnas de A. En consecuencia, $t = t'$, demostrando así que las coordenadas baricéntricas son únicas para cualquier punto p en σ. $\square$

Los puntos $a_0, \dots, a_p$ que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número p lo llamaremos la **dimensión** de σ, que notaremos por $\dim \sigma$.

Definición 2.4. Sea $\sigma = [a_0, \ldots, a_p]$ un símplice. Una **cara de dimensión** p de σ será cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \ldots, a_p\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i, $i \in \{0, \ldots, p\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos Bd σ. Finalmente, definimos el **interior** de σ, $\operatorname{Int}\sigma$, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

En ocasiones, para dos símplices σ y τ, escribiremos $\tau \preceq \sigma$ si τ es cara de σ. En caso de ser cara propia, lo notaremos por $\tau \prec \sigma$.

Proposición 2.2. *Si σ es un símplice, entonces es unión disjunta del interior de todas sus caras.*

Demostración. Sea x un elemento del símplice $\sigma = [a_0, \ldots, a_p]$ y sean $t_0, \ldots, t_p$ sus coordenadas baricéntricas. Consideremos ahora σ_k el símplice resultante de eliminar los vértices cuya coordenada tenía valor nulo. Esto es, tomamos el símplice $\sigma_k = [a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]$ donde $t_{i_s} > 0$ para todo $s \in \{1, \ldots, k\}$. Por la construcción de σ_k, tenemos que x pertenece a su interior.

Ahora sabemos que todo punto de un símplice pertenece al interior de una cara. Finalmente, la unicidad de las coordenadas baricéntricas nos garantiza que la unión del interior de dos caras es disjunta. $\square$

2.2. Complejos simpliciales

La importancia de los complejos simpliciales reside en su capacidad para descomponer espacios topológicos en componentes manejables, permitiendo un análisis detallado de su estructura. Al considerar la forma en que estos símplices se conectan y orientan entre sí, los complejos simpliciales facilitarán la definición de cadenas y ciclos simpliciales que serán indispensables en el estudio de la homología simplicial.

Definición 2.5. Un **complejo simplicial geométrico** (finito), o simplemente **complejo simplicial** (finito), K en $\mathbb{R}^N$, es una colección (finita) de símplices en $\mathbb{R}^N$ tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K.

2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K es o el vacío o una cara de ambos símplices.

Nota. Si bien los complejos simpliciales se pueden formular sin la restricción de finitud, nosotros trabajaremos principalmente en el caso finito por simplicidad en algunos resultados.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 2.1. *Una colección K de símplices es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Toda cara de un símplice de K está en K.*

2. *La intersección dos a dos del interior de los símplices de K es vacía.*

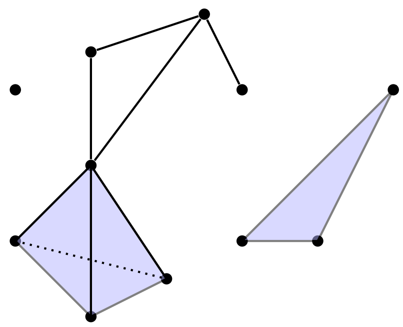


Figura 2.2.: Visualización de un complejo simplicial.

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplices $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$ y considero $x \in s$. Si s fuera una cara propia de σ, entonces x pertenecería a la frontera de σ, lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ. Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen *(1)* y *(2)*. Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices $b_0, \ldots, b_m$ de σ que están en τ. Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a $b_0, \ldots, b_m$. Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \operatorname{Int} s \cap \operatorname{Int} t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ. Se sigue de *(2)* que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \ldots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ', lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. $\square$

Definición 2.6. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K.

Definición 2.7. Sea K un complejo simplicial. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p. Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ lo llamaremos el **conjunto de vértices** de K.

Definición 2.8. Sea K un complejo simplicial de $\mathbb{R}^N$ y sea $|K|$ el subconjunto de $\mathbb{R}^N$ tal que $|K|$ es la unión de todos los símplices de K. Definimos el **politopo** o **espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de $\mathcal{T}$ son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de $\mathbb{R}^N$ para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ, pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma$, $O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $(\cup_{i \in I} O_i) \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ. En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

En general, la topología de $|K|$ es más fina que la inducida de la topología usual de $\mathbb{R}^N$. Si A es cerrado en $|K|$ con la topología inducida de la usual, $A = B \cap |K|$ para algún cerrado B de $\mathbb{R}^N$ y por tanto $B \cap \sigma$ sería cerrado en σ para cada símplice σ de K. Como consecuencia, $B \cap |K| = A$ es cerrado en $|K|$ con la topología $\mathcal{T}$ definida anteriormente. No obstante, la otra inclusión no tiene por qué cumplirse:

Ejemplo 2.1. Consideremos el complejo no finito K en $\mathbb{R}$ cuyos símplices son todos los intervalos $[m, m+1]$ con $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, todos los intervalos de la forma $[1/(n+1), 1/n]$ donde $n \in \mathbb{N}$ y todas sus respectivas caras. Como resultado tenemos que $|K| = \mathbb{R}$, donde $F = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en nuestra topología $\mathcal{T}$ pero no en la inducida por la usual. Dicho de otra forma, $\mathbb{R} \backslash F$ es abierto en $\mathcal{T}$ pero no en la usual.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

A continuación, mencionemos algunas propiedades relevantes de este espacio topológico. Para ello fijaremos un complejo simplicial finito K en $\mathbb{R}^N$.

Proposición 2.3. *Sea K un complejo simplicial finito. Entonces el poliedro $|K|$ es compacto.*

Demostración. Si K es un complejo simplicial, sus símplices son conjuntos cerrados y acotados. En consecuencia, $|K|$ es unión finita de conjuntos cerrados y acotados, luego es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^N$. Por lo tanto, es compacto. □

Proposición 2.4. *Sea K un complejo simplicial. Si $x \in |K|$, entonces existe un único símplice en K tal que x pertenece a su interior.*

Demostración. Si $x \in |K|$, entonces existe algún símplice σ de K tal que $x \in \sigma$. Por la Proposición 2.2, x pertenece al interior de alguna cara τ de σ. Supongamos ahora que existe otro símplice ρ de K tal que $x \in \operatorname{Int} \rho$. Por consiguiente, si $x \in \operatorname{Int} \rho \cap \operatorname{Int} \tau$, entonces x pertenecería a una cara común μ de ρ y τ. Esto es, $\mu = \rho \cap \tau$. Ahora si $\rho \neq \mu$, el elemento x debería tener alguna coordenada baricéntrica nula respecto a los vértices de ρ, en contradicción con que x pertenece al interior de ρ. En consecuencia, $\rho = \mu$. De manera análoga obtenemos $\tau = \mu$ y por tanto, $\rho = \tau$. □

Definición 2.9. Sea K un complejo simplicial y sea $x \in |K|$. Llamaremos **símplice soporte de** x al único símplice que contiene a x en su interior y lo notaremos por $\operatorname{sop}(x)$.

Corolario 2.1. *Sean σ, τ símplices de K tal que $\operatorname{Int} \sigma \cap \tau$ es no vacía. Entonces σ es una cara de τ.*

Demostración. Consideremos $x \in \operatorname{Int} \sigma \cap \tau$. Por la Proposición 2.2 sabemos que τ es la unión de todas sus caras lo que implica que existe una cara μ de τ cuyo interior contiene a x. Por lo tanto, $x \in \operatorname{Int} \mu \cap \operatorname{Int} \sigma$ y como consecuencia de la Proposición 2.4, $\mu = \sigma$. □

Lema 2.2. *Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \to X$ es continua si, y sólo si, $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_\sigma$ por ser σ un subespacio de K. Supongamos ahora que $f|_\sigma$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X, $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_\sigma^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_\sigma$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. □

Para finalizar esta sección, comentaremos la principal utilidad del estudio de complejos simpliciales introduciendo el concepto de triangulación.

Definición 2.10. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X. Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \to X$ es una **triangulación**.

La triangulación nos permite representar un espacio topológico usando un complejo simplicial, lo que es útil porque muchos espacios topológicos importantes pueden ser triangulados. En el Capítulo 3, veremos que estudiar ciertas propiedades topológicas en estos complejos es más sencillo y manejable.

El siguiente ejemplo muestra la triangulación de una esfera en $\mathbb{R}^3$ por el método de "proyección radial". Para ello, recordemos el siguiente resultado:

Proposición 2.5. *Sean X, Y espacios topológicos tales que X es compacto e Y es Hausdorff. Si además $f : X \to Y$ es una aplicación continua, entonces f es cerrada. En particular, si f es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.*

Ejemplo 2.2. Consideremos el complejo simplicial K, que es un tetraedro en $\mathbb{R}^3$ formado por símplices de dimensión 2. Denotamos su poliedro asociado por $|K|$. Supongamos que el origen de $\mathbb{R}^3$ es el centro de $|K|$ y que $\mathbb{S}^2$ es la esfera unidad con radio 1 con la topología inducida de la usual. Definimos la función $f : |K| \to \mathbb{S}^2$ por

$$f(t) = \frac{t}{\|t\|}$$

que es continua en todo $|K|$, pues $0 \notin |K|$. Para cada $s \in \mathbb{S}^2$, definimos $g : \mathbb{S}^2 \to |K|$ tal que

$$g(s) = t = s \cdot \sup\{\lambda : \lambda s \in \text{envolvente convexa de } |K|\},$$

donde el supremo asegura que t está en la frontera de $|K|$. De este modo, se verifica que $g(f(t)) = t$ para todo $t \in |K|$. Por lo tanto, f es una biyección continua desde un conjunto compacto hacia un espacio Hausdorff, luego es un homeomorfismo y en consecuencia, una triangulación de la esfera $\mathbb{S}^2$.

En particular, las esferas pertenecen a una familia de espacios topológicos conocidos como **variedades topológicas**. Estos espacios son el objeto central de estudio en la topología, siendo el objetivo su clasificación bajo homeomorfismos.

Definición 2.11. Sea X un espacio topológico Hausdorff no vacío. Diremos que X es una m**-variedad** o **variedad de dimensión** n si cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ con la topología usual.

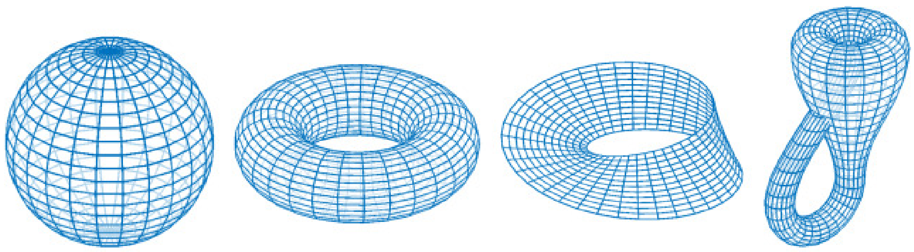


Figura 2.3.: Ejemplos de variedades de dimensión 2: (a) Esfera, (b) Toro, (c) Banda de Möbius y (d) Botella de Klein. Fuente [DLK20].

Aunque existen un gran número de resultados fundamentales relacionados con el estudio de las variedades topológicas, este análisis escapa de los contenidos de este trabajo. Sin embargo, veremos que estos espacios serán necesarios en la aplicación experimental realizada para comprender cómo las redes neuronales transforman los datos desde el punto de vista de la topología.

2.3. Celdas y CW-complejos

A continuación presentamos una generalización del concepto de complejo simplicial, propuesta por J.H.C. Whitehead en [Whi49]. Los CW-complejos reemplazan la estructura simplicial tradicional por estructuras homeomorfas a bolas abiertas, facilitando el estudio de una gama más amplia de espacios topológicos.

Iniciaremos esta sección estableciendo la notación que utilizaremos. Denotaremos la **bola abierta** centrada en x_0 y de radio r en el espacio $\mathbb{R}^N$ con la topología usual por el conjunto $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}$. Además, para cualquier subconjunto U de $\mathbb{R}^N$, denotaremos su **clausura** como $\overline{U}$ y su **frontera** como $\operatorname{Bd} U$. Por último, la **esfera unidad** de dimensión n será representada simplemente como $\mathbb{S}^{n-1}$.

Definición 2.12. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es una **celda** abierta (cerrada) de dimensión p o p-celda si X es homeomorfo a la bola unidad abierta (cerrada) de dimensión p.

Sería interesante disponer de resultados que nos digan cuándo un subconjunto dado puede ser una celda. La siguiente proposición será de gran utilidad para ver que los complejos simpliciales no son más que un caso particular de los CW-complejos.

Proposición 2.6. *Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo compacto con interior no vacío, entonces D es una n-celda cerrada y su interior es una n-celda abierta. De hecho, dado cualquier punto $p \in \operatorname{Int} D$, existe un homeomorfismo $F : \overline{B}_1(0) \to D$ que envía 0 a p, $B_1(0)$ a $\operatorname{Int} D$, y $\mathbb{S}^{n-1}$ a $\operatorname{Bd} D$.*

Demostración. Sea p un punto interior de D. Reemplazando D por su imagen bajo la traslación $x \mapsto x - p$, podemos suponer que $p = 0 \in \operatorname{Int} D$. Entonces existe algún $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(0)$ está contenida en D. Utilizando la dilatación $x \mapsto x/\varepsilon$, podemos asumir $B_1(0) \subseteq D$. A continuación demostraremos que cada semirrecta cerrada que comienza en el origen interseca $\operatorname{Bd} D$ en exactamente un punto. Sea R tal semirrecta cerrada. Dado que D es compacto, su intersección con R es compacta; por lo tanto, hay un punto x_0 en esta intersección donde la distancia al origen alcanza su máximo. Este punto se identifica fácilmente como parte del borde de D. Para demostrar que solo puede haber un punto así, mostramos que el segmento de línea desde 0 hasta x_0 consta enteramente de puntos interiores de D, excepto x_0 mismo. Cualquier punto en este segmento que no sea x_0 se puede escribir en la forma λx_0 para $0 \leq \lambda < 1$. Supongamos que $z \in B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$, y sea $y = (z - \lambda x_0)/(1-\lambda)$. En consecuencia $|y| < 1$, por lo que $y \in B_1(0) \subseteq D$. Como y y x_0 están ambos en D y $z = \lambda x_0 + (1-\lambda)y$, se sigue de la convexidad que $z \in D$. Así, la bola abierta $B_{1-\lambda}(x_0)$ está contenida en D, lo que implica que λx_0 es un punto interior.

Ahora definamos una aplicación $f : \operatorname{Bd} D \to \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Básicamente, $f(x)$ es el punto donde el segmento de línea que parte del origen hasta x interseca la esfera unidad. Puesto que f es la restricción de una aplicación continua, es

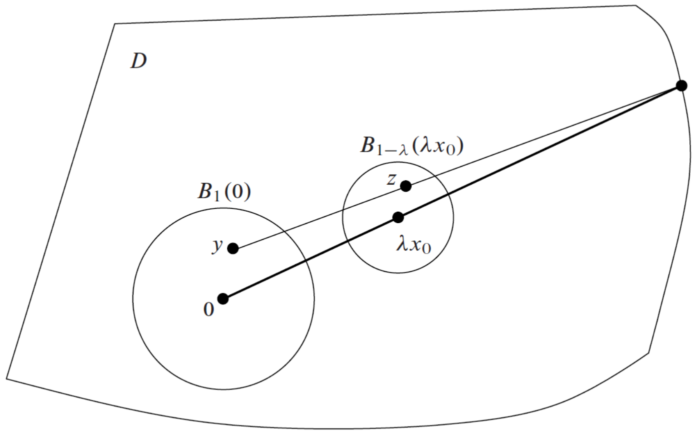


Figura 2.4.: Esquema que muestra la idea de que cada rayo tan sólo tiene un punto en la frontera en la demostración de la Proposición 2.6. Fuente [Lee10].

continua, por lo que la discusión del párrafo anterior muestra que es biyectiva. Dado que $\operatorname{Bd} D$ es compacto, la Proposición 2.5 nos garantiza que f es cerrada. Por ser f biyectiva, continua y cerrada, entonces f es un homeomorfismo.

Finalmente, definamos $F : \overline{B}_1(0) \to D$ de forma que

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Entonces F es continua lejos del origen porque f^{-1} lo es, y también lo es en el origen pues la acotación de f^{-1} implica que $F(x) \to 0$ conforme $x \to 0$. Geométricamente, F lleva cada segmento de línea radial que conecta 0 con un punto $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ linealmente sobre el segmento radial de 0 al punto $f^{-1}(\omega) \in \operatorname{Bd} D$. Por convexidad, F toma sus valores en D. La aplicación F es inyectiva, ya que puntos en rayos distintos van a rayos distintos, y cada segmento radial se lleva linealmente a su imagen. Es sobreyectiva porque cada punto $y \in D$ está en algún rayo desde 0. Por la Proposición 2.5, F es un homeomorfismo. □

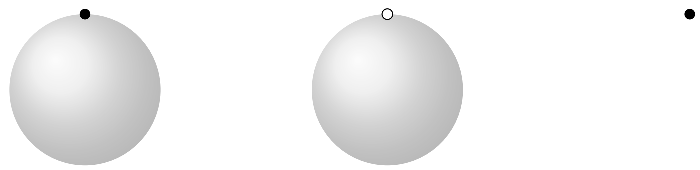
Definición 2.13. Sea $(X, \mathcal{E})$, donde X es un espacio topológico Hausdorff y $\mathcal{E}$ una colección de celdas abiertas. Diremos entonces que que $(X, \mathcal{E})$ es un **CW-complejo** si se cumple que:

- **(C)** Consideremos la bola unidad $B_1(0)$ de dimensión p. Para cada p-celda $e \in \mathcal{E}$, existe una aplicación continua $f_e : \overline{B}_1(0) \to X$ de forma que la restricción a $B_1(0)$ es homeomorfa a la celda e y la restricción a la frontera $\operatorname{Bd} \overline{B}_1(0)$ está contenida en una unión finita de celdas de dimensión menor a p. A dicha función la llamaremos **función característica**.

- **(W)** Un subconjunto F de X es cerrado si, y sólo si, $F \cap \overline{e}$ es cerrado en $\overline{e}$ con la topología inducida de X para todo $e \in \mathcal{E}$.

Normalmente denotaremos al CW-complejo $(X, \mathcal{E})$ simplemente por X.

Una propiedad importante de los CW-complejos es que mantienen su estructura en subconjuntos bajo ciertas condiciones razonables.



(a) $\mathbb{S}^2$ como unión de sus celdas. (b) 1-celda de $\mathbb{S}^2$. (c) 0-celda de $\mathbb{S}^2$.

Figura 2.5.: Visualización de un CW-complejo para $\mathbb{S}^2$.

Definición 2.14. Sea X un CW-complejo. Diremos que $Y \subseteq X$ es un **subcomplejo** de X si es unión de celdas de X de forma que si Y contiene una celda, entonces también contiene su clausura.

Teorema 2.1. *Sea X un CW-complejo y sea Y un subcomplejo de X. Entonces Y es cerrado en X y, además, es un CW-complejo con la topología y la colección de celdas inducidas.*

Demostración. Es claro que Y es Hausdorff. Además, por definición tenemos que Y es la unión disjunta de sus celdas. Sea $e \subseteq Y$ una celda abierta de Y. Como su clausura también está contenida en Y, entonces existe un número finito de celdas de X con intersección no vacía con $\overline{e}$ que, a su vez, son celdas de Y. En consecuencia, la condición (C) se cumple. Es más, cualquier aplicación característica $f_e :\to X$ de X lo es también de Y para cualquier celda $e \subseteq Y$.

En cuanto a la condición (W), supongamos que S es un subconjunto de Y tal que $S \cap \overline{e}$ es cerrado en $\overline{e}$ con la topología inducida de Y para toda celda en Y. Sea ahora e una celda de X que no esté contenida en Y. Sabemos que $\overline{e} \backslash e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de X, de las cuales un subconjunto de ellas están contenidas en Y. Llamemos a dichas celdas $e_1, \ldots, e_n$. Por consiguiente, $\overline{e}_1 \cup \cdots \cup \overline{e}_n \subseteq Y$ y además,

$$S \cap \overline{e} = S \cap (\overline{e}_1 \cup \cdots \cup \overline{e}_n) \cap \overline{e} = ((S \cap \overline{e}_1) \cup \cdots \cap (S \cap \overline{e}_n)) \cap \overline{e},$$

luego $S \cap \overline{e}$ es cerrado en $\overline{e}$ con la topología inducida de Y. Es decir, S es cerrado en X y por tanto en Y. Finalmente, concluimos que Y es cerrado en X tomando $S = Y$. □

Definición 2.15. Sea X un CW-complejo. Diremos que el subespacio $X^{(p)}$ de X es el ***p*-esqueleto** de X si es igual a la unión de todas las celdas de dimensión menor o igual que p. En particular, es un subcomplejo de dimensión p de X.

Teorema 2.2. *Sea X un CW-complejo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X es conexo por arcos.*
2. *X es conexo.*
3. *El 1-esqueleto de X es conexo.*
4. *Algún n-esqueleto de X es conexo para algún n.*

Demostración. Obviamente, $(1) \Rightarrow (2)$ y $(3) \Rightarrow (4)$, por lo que basta con demostrar que $(2) \Rightarrow (3)$ y $(4) \Rightarrow (1)$.

Para probar $(2) \Rightarrow (3)$ razonaremos por contrarrecíproco. Supongamos que $X^{(1)} = X'^{(1)} \cup X''^{(1)}$ es una unión no conexa del 1-esqueleto de X. Veamos por inducción en n que para cada

$n > 1$, el n-esqueleto $X^{(n)}$ puede expresarse como unión no conexa $X^{(n)} = X'^{(n)} \cup X''^{(n)}$ tal que $X'^{(n)} \subseteq X'^{(n-1)}$ y $X''^{(n)} \subseteq X''^{(n-1)}$ para cada n. Supongamos $X^{(n-1)} = X'^{(n-1)} \cup X''^{(n-1)}$ es una unión no conexa de $X^{(n-1)}$ para algún $n > 1$. Para cada celda n-dimensional e, la restricción de su aplicación función característica $f_e \colon D^n \to X^{(n)}$ a ∂D^n es continua en $X^{(n-1)}$. Dado que $\partial D^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ es conexo, su imagen debe estar contenida en uno de los conjuntos $X'^{(n)}$ o $X''^{(n)}$. Por lo tanto, $\overline{f_e(D)}$ tiene una intersección no trivial con $X'^{(n)}$ o $X''^{(n)}$, pero no con ambos. Dividimos las n-celdas en dos colecciones disjuntas $\mathcal{E}'$ y $\mathcal{E}''$, según si sus clausuras intersecan $X'^{(n-1)}$ o $X''^{(n-1)}$, respectivamente, y definimos

$$X'^{(n)} = X'^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}'} \overline{f_e(e)} \right), \quad X''^{(n)} = X''^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}''} \overline{f_e(e)} \right).$$

Claramente, $X^{(n)}$ es la unión disjunta de $X'^{(n)}$ y $X''^{(n)}$, y ambos conjuntos son no vacíos debido a la hipótesis de inducción.

Ahora, definamos $X' = \bigcup_n X'^{(n)}$ y $X'' = \bigcup_n X''^{(n)}$. Como antes, $X = X' \cup X''$, y ambos conjuntos son no vacíos. Por el mismo argumento que arriba, si e es cualquier celda de X de cualquier dimensión, su clausura debe estar contenida en uno de estos conjuntos. Así, X' y X'' son ambos abiertos y cerrados en X, lo que implica que X no es conexo.

Para demostrar (4) $\Rightarrow$ (1), supongamos que X es un CW-complejo cuyo n-esqueleto es conexo para algún $n \geq 0$. Mostremos por inducción en k que $X^{(k)}$ es conexo por arcos para cada $k \geq n$. Primero, necesitamos mostrar que $X^{(n)}$ en sí mismo es conexo por arcos. Si $n = 0$, entonces $X^{(n)}$ es discreto y conexo, así que es un conjunto unitario y por lo tanto conexo por arcos. En caso contrario, elijamos cualquier punto $x_0 \in X^{(n)}$ y consideremos S_n la componente arcoconexa de $X^{(n)}$ que contiene a x_0. Para cada celda e de $X^{(n)}$, notemos que $\overline{f_e(e)}$ es la imagen continua de un espacio conexo por arcos, así que es conexo por arcos. Por lo tanto, si $\overline{f_e(e)}$ tiene una intersección no trivial con la componente arcoconexa S_n, debe estar contenida en S_n. En consecuencia, S_n es cerrado y abierto en $X^{(n)}$. Como estamos asumiendo que $X^{(n)}$ es conexo, entonces $S_n = X^{(n)}$.

Ahora, supongamos que hemos demostrado que $X^{(k-1)}$ es conexo por arcos para algún $k > n$ y sea S_k la componente arcoconexa de $X^{(k)}$ que contiene a $X^{(k-1)}$. Para cada k-celda e, su clausura $\overline{f_e(e)}$ es un subconjunto de $X^{(k)}$ conexo por arcos que tiene intersección no trivial con $X^{(k-1)}$ y, por lo tanto, está contenido en S_k. Se sigue que $X^{(k)} = S_k$, completando la inducción. □

Lema 2.3. *Sea X un CW-complejo. Entonces la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito.*

Demostración. Consideremos cualquier n-celda $e \in X$ y probemos el lema por inducción. Para el caso $n = 0$, $\bar{e} = e$ es trivialmente un subcomplejo finito. Supongamos ahora el lema cierto para las celdas de dimensión menor o igual que n y veámoslo para $n + 1$. Por la condición (C), $\bar{e} \backslash e$ está contenido en la unión de un número finito de celdas de dimensión menor que $n + 1$. Dichas celdas están contenidas en subcomplejo finitos por hipótesis de inducción. Sin embargo, la unión de dichos subcomplejos finitos con e es de hecho un subcomplejo finito que contiene a $\bar{e}$. □

Lema 2.4. *Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es discreto si, y sólo si, su intersección con cada celda es finita.*

Demostración. Sea S un subconjunto discreto de X. Entonces, la intersección de la clausura de cada celda e de X con S es un subconjunto discreto de un conjunto compacto, luego es finito. En consecuencia, $S \cap e$ también lo es.

Para la otra implicación supongamos que S es un subconjunto cuya intersección con cualquier celda es finita. Como la clausura de cada celda está contenida en un subcomplejo finito, entonces por hipótesis tenemos que $S \cap \bar{e}$ es finito para cada celda e de X. Esto significa que $S \cap \bar{e}$ es cerrado en $\bar{e}$ y por la condición (W), S es cerrado en X. Sin embargo, este argumento podemos aplicarlo a cualquier subconjunto de S, luego todo subconjunto de S es cerrado en X. Por lo tanto, la topología inducida en S es discreta. □

Teorema 2.3. *Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es compacto si, y sólo si, es cerrado en X y está contenido en un subcomplejo finito.*

Demostración. Todo subcomplejo finito de X es compacto pues es unión finita de clausuras de celdas, las cuales son compactas. En consecuencia, si K es un subconjunto cerrado de X contenido en un subcomplejo finito, entonces es compacto.

Supongamos ahora que $K \subseteq X$ es compacto. Si K intersecara una cantidad infinita de celdas, podríamos tomar un punto de cada intersección de forma que tuviéramos un subconjunto infinito discreto de K, lo cual es imposible. Es decir, K está contenido en la unión de un número finito de celdas y por el Lema 2.3, está contenido en un subcomplejo finito. □

Corolario 2.2. *Un CW-complejo es compacto si, y sólo si, es un complejo finito.*

Proposición 2.7. *Todo p-símplice es una celda cerrada de dimensión p.*

Demostración. Inmediato por la Proposición 2.6. □

Una vez discutidas algunas propiedades básicas de los CW-complejos, ya estamos en condiciones de verificar que efectivamente los complejos simpliciales son CW-complejos.

Proposición 2.8. *Si K es un complejo simplicial finito, entonces el poliedro $|K|$ junto con la colección $\mathcal{E}$ de interiores de los símplices de K forman un CW-complejo.*

Demostración. Supongamos que K es un complejo simplicial finito en $\mathbb{R}^N$. La condición (C) se obtiene de manera directa a partir de la Proposición 2.6.

En cuanto a la propiedad (W), consideremos F como un subconjunto de $|K|$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x en $|K|$ y sea U un entorno de x. Por la compacidad de $|K|$ y el hecho de que $\mathcal{E}$ es un recubrimiento por abiertos de $|K|$, podemos escoger un subrecubrimiento finito $e_1, \ldots, e_k$ tal que $x \in U \subseteq \overline{e_1} \cup \ldots \cup \overline{e_k}$.

Fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_i} \in U$ para todo $n_i \geq n_0$. Como hay un número finito de e_j e infinitos x_{n_i}, existe una parcial convergente $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a x contenido en algún $\bar{e}_j$ para cierto $j \in \{1, \ldots, k\}$. Esto muestra que $x \in \bar{e}_j$ y, puesto que $x_{n_i} \in F \cap \overline{e_j}$ para todo $n_i \geq n_0$, y $F \cap \overline{e_j}$ es cerrado en $\overline{e_j}$, concluimos que $x \in F \cap \overline{e_j}$. □

2.4. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.5. *Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ una aplicación entre los conjuntos de vértices de K y L. Supongamos que siempre que los vértices $v_0, \dots, v_n$ de K generen un símplice en K, los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símplice de L. Entonces podemos extender f a una aplicación continua $|f| : |K| \to |L|$ tal que*

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \quad \Longrightarrow \quad |f|(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

Llamaremos a $|f|$ la ***aplicación simplicial*** *(lineal) inducida por f.*

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símplice τ en L. Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i, con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $|f|(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$ es un punto de τ. Es decir, $|f|$ es una aplicación lineal del símplice σ generado por $v_0, \dots, v_n$ al símplice τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$. Por ser $|f| : \sigma \to \tau$ lineal en un espacio de dimensión finita, entonces es continua.

Ahora tan solo nos queda ver que $|f| : |K| \to |L|$ es continua. Bien, pues por ser $|f| : \sigma \to \tau$ continua, también lo es $|f| : \sigma \to |L|$. Finalmente por el Lema 2.2, $|f| : |K| \to |L|$ es continua. □

Consideremos las funciones de la forma de f descrita en 2.5. Para cualquier complejo K, existe una aplicación identidad $\mathrm{id}_K : K \to K$ que corresponde a la aplicación identidad en los vértices. Dadas tres aplicaciones $f : K \to L$, $g : L \to M$ y $h : M \to N$, la aplicación compuesta $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, pues es una composición de aplicaciones de conjuntos que preserva símplices. Por lo tanto, existe una categoría de complejos simpliciales y estas funciones que denotaremos por **Csim**.

Por otro lado, veamos que el Lema 2.5 nos garantiza la existencia de un funtor covariante entre esta categoría y los espacios topológicos.

Proposición 2.9. *Existe un funtor covariante $|\cdot| :$ **CSim** $\to$ **Top** de la categoría de aplicaciones simpliciales a la categoría de espacios topológicos.*

Demostración. Para cada complejo simplicial K, la identidad en **CSim** es la función identidad $\mathrm{id}_K : K \to K$. La aplicación simplicial inducida $|\mathrm{id}_K| : |K| \to |K|$ es tal que

$$|\mathrm{id}_K| \left(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i \right) = \sum_{i=0}^{n} t_i i_K(v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i,$$

lo cual es precisamente la identidad en el espacio topológico $|K|$. Esto muestra que $|\cdot|$ preserva las identidades.

Sean ahora $f : K \to L$ y $g : L \to M$ dos morfismos en **CSim**. La composición en **CSim** es $g \circ f : K \to M$, y necesitamos demostrar que $|(g \circ f)| = |g| \circ |f|$. Para cualquier punto $x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ en $|K|$,

$$|(g \circ f)|(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i (g \circ f)(v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i g(f(v_i)).$$

Por otro lado,

$$(|g| \circ |f|)(x) = |g| \left(|f| \left(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i \right) \right) = |g| \left(\sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i) \right) = \sum_{i=0}^{n} t_i g(f(v_i)).$$

Ambas expresiones son iguales y por tanto, $|\cdot|$ preserva la composición de morfismos. $\square$

Normalmente abusaremos de la notación de forma que escribiremos la aplicación simplicial inducida $|f| : |K| \to |L|$ simplemente por $f : |K| \to |L|$.

Lema 2.6. *Supongamos que $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices $v_0, \ldots, v_n$ de K generan un símplice de K si, y sólo si, $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ generan un símplice de L. Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \to |L|$ es un homeomorfismo. Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L.*

Demostración. Por hipótesis, cada símplice $\sigma \in K$ se identifica con otro símplice $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \to \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \to \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h(\sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)) = \sum_{i=0}^{n} t_i f^{-1}(v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i = x$$

$\square$

2.5. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simple, nos serán de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.16. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$. Además, diremos que el complejo abstracto es **finito** si dicha colección es finita.

Al elemento A de $\mathcal{S}$ lo llamaremos **símplice** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A. En cuanto a la **dimensión** de $\mathcal{S}$, diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de $\mathcal{S}$ es infinita. El **conjunto de vértices** V de $\mathcal{S}$ diremos que es la unión de elementos de $\mathcal{S}$ que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de $\mathcal{S}$ a cualquier subcolección de $\mathcal{S}$ que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ respectivamente. Dos complejos abstractos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \to V_T$ tal que $\{a_0, \ldots, a_p\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \ldots, f(a_p)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.17. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \ldots, a_p\} \subset V$ tales que los vértices $a_0, \ldots, a_p$ generan un símplice de K. Entonces llamaremos a la colección $\mathcal{K}$ el **esquema de vértices** de K.

Definición 2.18. Si el complejo simplicial abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K, diremos que K es una **realización geométrica** de $\mathcal{S}$.

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{S}$ un complejo simplicial abstracto finito de dimensión N. Entonces existe una realización geométrica de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{R}^{2N+1}$.*

Demostración. Consideremos un conjunto de puntos $p_i \in \mathbb{R}^{2N+1}$ de forma que sus componentes son potencias de su índice i. Veamos que cualquier conjunto de $2N+2$ de estos puntos es afínmente independiente. Es decir, que los vectores formados por las diferencias entre estos puntos son linealmente independientes.

Para demostrarlo, consideremos un subconjunto de puntos $\{p_{j_k} : 1 \leq k \leq 2N+2\}$ de esta forma y analicemos el determinante de la matriz formada por los vectores correspondientes,

$$\begin{vmatrix} j_2 - j_1 & j_3 - j_1 & \cdots & j_{2n+2} - j_1 \\ j_2^2 - j_1^2 & j_3^2 - j_1^2 & \cdots & j_{2n+2}^2 - j_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_2^{2n+1} - j_1^{2n+1} & j_3^{2n+1} - j_1^{2n+1} & \cdots & j_{2n+2}^{2n+1} - j_1^{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Simplificando mediante operaciones elementales de fila, este determinante se transforma en el determinante de Vandermonde, cuyo valor es conocido y se calcula como el producto de las diferencias entre los términos seleccionados,

$$\prod_{1 \leq k < l \leq 2N+2} (j_k - j_l).$$

Este resultado no es cero siempre que todos los j_k sean distintos, asegurando así la independencia lineal.

Respecto a la construcción del complejo simplicial, tomemos un símplice abstracto A en $\mathcal{S}$ con vértices $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}\}$ y consideremos el símplice geométrico $\sigma_A = [p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_m}]$ en $\mathbb{R}^{2N+1}$. Dado que $m+1 \leq 2N+2$, el símplice σ_A tiene dimensión m. Definimos K como el conjunto que contiene todos los símplices σ_A para cada $A \in \mathcal{S}$. Veamos que la intersección de dos símplices σ_A y σ_B en K es igual a $\sigma_{A\cap B}$ con $A, B \in \mathcal{S}$. Consideremos τ como el símplice en $\mathbb{R}^{2N+1}$ cuyos vértices son la unión de los vértices pertenecientes a σ_A y a σ_B, lo cual es posible ya que la suma de sus dimensiones no supera $2N$. De esta manera, la intersección $\sigma_A \cap \sigma_B$ resulta ser la cara de τ determinada por los vértices que σ_A y σ_B comparten, es decir, aquellos asociados a $A \cap B$. Concluimos entonces que $\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A\cap B}$. □

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior y del Lema 2.6, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) Todo complejo abstracto finito $\mathcal{S}$ es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K.

(b) Dos complejos simpliciales son afínmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.

3. Homología simplicial

Este capítulo se centra en la homología simplicial, una rama de estudio crucial de la topología algebraica que utiliza complejos simpliciales para analizar y comprender la estructura de espacios topológicos triangulables. Tras explorar los fundamentos del álgebra homológica y la teoría de complejos simpliciales, ahora profundizamos en las propiedades teóricas y aplicaciones prácticas de la homología simplicial siguiendo los contenidos de [RA03].

3.1. Homología simplicial orientada

Dado un símplice σ, podemos definir un orden sobre sus vértices. Dos órdenes de σ los consideraremos equivalentes si podemos pasar de uno a otro con un número par de permutaciones. Además, en el caso donde σ sea un 0-símplice, claramente existe una única orientación. Así, los ordenamientos posibles para los vértices de σ se pueden agrupar en dos clases de equivalencia distintas, que definimos como las **orientaciones del símplice** σ.

Definición 3.1. Decimos que un símplice $\sigma = [a_0, a_1, \ldots, a_p]$ está **orientado** si se le ha asignado una de estas orientaciones. Utilizaremos $[a_0 a_1 \ldots a_p]$ para denotar la clase de equivalencia dada por la orientación $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ del símplice generado por los vértices $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

Consideremos Σ_p el conjunto de todos los símplices de dimensión p de un complejo simplicial geométrico K y el conjunto de sus clases de equivalencia por la relación de orientación. Para cada $\sigma \in \Sigma_p$, definimos Σ_p^+ y Σ_p^- como los conjuntos que contienen, respectivamente, un símplice orientado σ^+ y el símplice con orientación opuesta σ^-. En lo que sigue, R siempre será un **anillo unitario conmutativo**, a menos que se indique de manera explícita lo contrario.

Definición 3.2. Sea K un complejo simplicial y sea R un anillo. Consideremos los conjuntos definidos anteriormente. Definimos el **R-módulo de las p-cadenas simpliciales orientadas** de K, $C_p(K; R)$, como el cociente del R-módulo libre generado por $\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-$ sobre el submódulo generado por el conjunto $\{\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\}$. Esto es,

$$C_p(K; R) = \frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle}.$$

Para $p < 0$ o $p > \dim(K)$, definimos $C_p(K; R)$ como el R-módulo trivial.

El interés de definir el R-módulo de p-cadenas simpliciales orientadas radica tanto en la identificación de los elementos que contiene como en las operaciones algebraicas aplicables sobre ellos. Esta construcción nos permite manejar un símplice orientado y su opuesto como opuestos algebraicos en un marco formal. Veámoslo.

Nuestro objetivo es demostrar que efectivamente

$$\frac{R\langle \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \rangle}{\langle \sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p \rangle} \cong R\langle \tilde{\Sigma}_p \rangle,$$

donde $\tilde{\Sigma}_p$ representa el conjunto de p-símplices en Σ_p con una orientación arbitrariamente fija para cada uno.

Para ello, definamos la aplicación $f : \Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^- \to R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$. Esta aplicación asigna a cada símplice orientado σ^+ en Σ_p^+, un representante σ en $R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$ con una orientación fija elegida arbitrariamente, y a cada σ^- en Σ_p^-, le asigna $-\sigma$ en $R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$, donde $-\sigma$ refleja el elemento opuesto de σ.

La aplicación f respeta las relaciones de orientación al asignar a símplices con orientaciones opuestas a elementos que son opuestos algebraicos en $R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$. Por la Propiedad universal de los módulos libres, esta aplicación induce un homomorfismo $\tilde{f} : R\langle\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-\rangle \to R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$ que resulta ser sobreyectivo, ya que cada elemento en $R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$ tiene al menos una preimagen en $R\langle\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-\rangle$.

Por definición de f, para cada elemento de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ en $\langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle$, tenemos que $\tilde{f}(\sigma^+ + \sigma^-) = f(\sigma^+) + f(\sigma^-) = \sigma - \sigma = 0$, demostrando que todo el submódulo $\langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle$ tiene imagen cero por $\tilde{f}$ y, por ende, está contenido en el núcleo de $\tilde{f}$.

Además, si consideramos un elemento x en $R\langle\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-\rangle$ tal que $\tilde{f}(x) = 0$, este elemento puede expresarse como una combinación lineal de elementos en Σ_p^+ y Σ_p^-. La condición $\tilde{f}(x) = 0$ implica que la suma de las imágenes bajo f de los términos en esta combinación lineal debe ser cero en $R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle$. Esto solo ocurre si para cada σ, la suma total de los coeficientes correspondientes a σ^+ y σ^- es cero, lo que significa que cada término en x que contribuye a esta suma cero debe ser de la forma $\sigma^+ + \sigma^-$ o un múltiplo de este, luego $\tilde{f}(x) = 0$ implica que $x \in \langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle$.

Por tanto, el núcleo de $\tilde{f}$ coincide precisamente con $\langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle$, y aplicando el Primer teorema de isomorfía, concluimos que

$$\frac{R\langle\Sigma_p^+ \cup \Sigma_p^-\rangle}{\langle\sigma^+ + \sigma^- : \sigma \in \Sigma_p\rangle} \cong R\langle\tilde{\Sigma}_p\rangle,$$

estableciendo la estructura algebraica deseada y completando la prueba.

Observación 3.1. En particular, la anterior construcción asigna a cada símplice orientado una cadena cuyo coeficiente del anillo es 1, 0 o -1. A estas cadenas las llamaremos **p-cadenas elementales**. En ocasiones abusaremos de la notación para designar por σ a la cadena elemental respectiva del símplice orientado σ.

Definición 3.3. Sea K un complejo simplicial y sean $C_p(K;R), C_{p-1}(K;R)$ R-módulos de p-cadenas. Definimos el **operador borde de p-cadenas** como el homomorfismo $\partial_p : C_p(K;R) \to C_{p-1}(K;R)$ tal que

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p([v_0, v_1, \ldots, v_p]) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p].$$

donde $\hat{v}_i$ denota el vértice a eliminar.

Lema 3.1. *El operador borde $\partial_p : C_p(K;R) \to C_{p-1}(K;R)$ está bien definido. En particular, si σ^+ y σ^- son las dos orientaciones del p-símplice σ, tenemos que*

$$\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$$

Demostración. Probaremos que la suma de la imagen por el operador borde de $\sigma^+ = [v_0 v_1 \ldots v_p]$

y $\sigma^- = [v_1 v_0 \dots v_p]$ es igual a 0. Para ello, observamos que

$$\partial_p \sigma^+ = [v_1 v_2 \dots] - [v_0 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_0 v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_p],$$
$$\partial_p \sigma^- = [v_0 v_2 \dots] - [v_1 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_1 v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p].$$

Al sumar ambas expresiones, los dos primeros términos de $\partial_p \sigma^+$ y $\partial_p \sigma^-$ se cancelan entre sí. Como consecuencia de la definición de $C_{p-1}(K;R)$, los términos restantes definen orientaciones opuestas del mismo símplice por lo que se cancelan y $\partial_p(\sigma^+ + \sigma^-) = 0$. □

Lema 3.2. *Sean $\partial_p : C_{p+1}(K;R) \to C_p(K;R)$, $\partial_p : C_p(K;R) \to C_{p-1}(K;R)$ operadores borde. Entonces $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.*

Demostración.

$$\partial_p \partial_{p+1} [v_0, \dots, v_{p+1}] = \partial_p \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left[\sum_{j>i}^{p+1} (-1)^j [v_0 \dots, \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_{p+1}] + \sum_{j=0}^{j<i} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_{p+1}] \right].$$

Es decir, el símplice $[v_0 \dots, \hat{v}_k \dots, \hat{v}_t \dots, v_{p+1}]$ aparece dos veces en la anterior expresión con signos opuestos, donde $k, t \in \{0, \dots, p+1\}$. Esto nos lleva a discutir los siguientes casos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < t$. En el primer caso, $i = k < j = t$ donde el coeficiente es $(-1)^k(-1)^{t-1}$. En el segundo caso, $i = t > j = k$ con coeficiente $(-1)^t(-1)^k$. Concluimos por tanto que todo símplice de la expresión se anula y al anularse sobre los generadores, $\partial_{p-1}\partial_p$ es el homomorfismo nulo. □

Definición 3.4. El complejo de cadenas positivo $C_\bullet(K;R) = \{C_p(K;R), \partial_p\}$ lo llamaremos **complejo de cadenas simpliciales** de K. La homología de dicho complejo la notaremos por $H_p(K;R)$ y lo llamaremos **p-ésimo R-módulo de homología** de K.

Si $R = \mathbb{Z}$, el módulo $H_p(K;\mathbb{Z})$ lo notaremos simplemente por $H_p(K)$ y diremos que es el **p-ésimo grupo de homología** de K.

Proposición 3.1. *Sea K un complejo simplicial no vacío. Entonces el complejo de cadenas positivo $\{C_p(K;R), \partial_p\}$ admite un aumento.*

Demostración. Sea $\varepsilon : C_0(K;R) \to R$ el homomorfismo que extiende linealmente $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice $v \in K$. Veamos que $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(K;R) \to R$ es nulo. Tomando $[v_0, v_1] \in C_1(K;R)$ obtenemos que $\varepsilon(\partial_1[v_0, v_1]) = \varepsilon(v_1 - v_0) = 1 - 1 = 0$, como queríamos ver. □

Definición 3.5. Sea $\widetilde{C}_\bullet(K;R)$ el complejo aumentado del complejo de cadenas simpliciales $C_\bullet(K;R)$. Denominaremos **p-ésimo módulo de homología reducida** de K al módulo de homología $H_p(\widetilde{C}_\bullet;R)$ y lo denotaremos por $\widetilde{H}(K;R)$.

Proposición 3.2. *Sean K y L dos complejos simpliciales junto con una aplicación simplicial $f : |K| \to |L|$. Esta aplicación induce un homomorfismo entre los complejos de cadenas, $C(f)$, el cual se define extendiendo linealmente la función*

$$C(f)([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [f(v_0) \dots f(v_p)] & \textit{si los vértices son distintos entre sí,} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, si f es la identidad, entonces $C(f)$ es simplemente la identidad también. Además, si $g : |L| \longrightarrow |M|$ es otra aplicación simplicial, se cumple que $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$.

Demostración. Para demostrar esto, primero observamos que la definición de $C(f)$ es independiente de la orientación de los símplices. Luego, verificamos la igualdad $\partial_p \circ C(f) = C(f) \circ \partial_p$. Si no hay vértices repetidos, se tiene que:

$$C(f)\partial_p([v_0 \dots v_p]) = C(f)\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[f(v_0)\dots\widehat{f(v_i)}\dots f(v_p)] = \partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]).$$

Si hay vértices repetidos, digamos $f(v_i) = f(v_j)$, entonces $\partial_p C(f)([v_0 \dots v_p]) = 0$. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i C(f)([v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]) = 0$$

debido a que $C(f)([v_0 \dots \hat{v}_k \dots v_p]) = 0$ para $k \neq i, j$ y cuando $i < j$,

$$(-1)^i[f(v_0)\dots\widehat{f(v_i)}\dots f(v_j)\dots f(v_p)] + (-1)^j[f(v_0)\dots f(v_i)\dots\widehat{f(v_j)}\dots f(v_p)] = 0$$

también se anula. Esto se debe a que si no hay más vértices repetidos, como $f(v_i) = f(v_j)$, el número de trasposiciones necesarias para cambiar de un símplice orientado al otro es $j - i - 1$, dado que $f(v_j)$ ocupa el lugar $j - 1$ en el primer símplice. La fórmula $C(g \circ f) = C(g)C(f)$ se sigue directamente de la definición de $C(f)$. □

Observación 3.2. El resultado anterior nos garantiza que C : **Csim** $\to$ R-$\mathbf{Ch}_\bullet$ es un funtor covariante entre la categoría de complejos simpliciales y la categoría de complejos de cadenas.

Definición 3.6. Sea $f : |K| \to |L|$ una aplicación simplicial y sea $C(f) : C_\bullet(K;R) \to C_\bullet(L;R)$ una aplicación de cadenas definida como en la Proposición 3.2. Llamaremos a $C(f)$ la **aplicación de cadenas inducida por** f y la notaremos por $f_\#$.

Corolario 3.1. *Toda aplicación simplicial inducida $f : |K| \to |L|$ induce un homomorfismo de R-módulos*

$$H_p(f) : H_p(K;R) \to H_p(L;R)$$

que notaremos por f_* y que cumple que si $g : |L| \to |M|$ es otra aplicación simplicial, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

Observación 3.3. La última implicación del corolario se traduce en que tenemos un funtor covariante que va de la categoría de complejos simpliciales con los homeomorfismos simpliciales a la categoría de R-módulos con sus homomorfismos.

Lema 3.3. *La aplicación de cadenas $f_\# : C_\bullet(K;R) \to C_\bullet(L;R)$ preserva el homomorfismo de aumento y como resultado, induce un homomorfismo f_* de módulos de homología reducida.*

Demostración. Sea $f : |K| \to |L|$ una aplicación simplicial, $f_\#$ su aplicación de cadenas inducida y sean $\varepsilon : C_0(K;R) \to R$, $\varepsilon : C_0(L;R) \to R$ aumentos de $C_\bullet(K;R), C_\bullet(L;R)$ respectivamente. Llamemos indistintamente ε a ambos aumentos en función del dominio en el que nos encontremos. Ahora definamos $\varepsilon(f_\#(v)) = 1$ y $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice de K y extendamos por linealidad. Por consiguiente $\varepsilon \circ f_\# = \varepsilon$. Esta ecuación implica que $f_\#$ lleva el núcleo de $\varepsilon_K : C_0(K;R) \to R$ al núcleo de $\varepsilon_L : C_0(L;R) \to R$, lo que induce un homomorfismo $f_* : \widetilde{H}_0(K;R) \to \widetilde{H}_0(L;R)$. □

Teorema 3.1. *Sean f, g aplicaciones simpliciales de K a L; $f_\#, g_\#$ sus aplicaciones de cadenas inducidas y sea $s : f_\# \to g_\#$ una homotopía de cadenas entre ellas. Entonces los homomorfismos inducidos f_*, g_* para sus módulos de homología son iguales.*

Demostración. Sea z un p-ciclo de K. Entonces

$$g_*(z) - f_*(z) = \partial sz + s\partial z = \partial sz + 0$$

por lo que $f(z)$ y $g(z)$ tienen la misma clase de homología. Por tanto, $f_*([z]) = g_*([z])$ como se quería. □

3.2. Homología del complejo cono

A continuación, exploraremos un nuevo complejo simplicial que construiremos a partir de otro dado. El complejo cono nos facilitará la obtención de algunos resultados relevantes en homología.

Definición 3.7. Sea K un complejo simplicial de $\mathbb{R}^N$ y sea $w \in \mathbb{R}^N$ tal que cada semirrecta con origen w corta a $|K|$ a lo sumo en un punto. Definimos el **cono sobre** K **con vértice** w como el conjunto cuyos elementos son los símplices de K o símplices de la forma $[w, v_0, \ldots, v_p]$, donde $[v_0, \ldots, v_p] \in K$. Lo denotaremos por $w * K$.

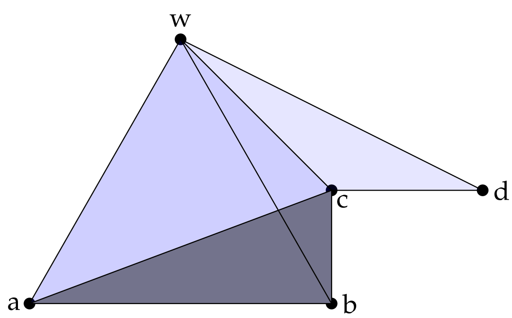


Figura 3.1.: Cono sobre el complejo formado por el 2-símplice $[a, b, c]$, el 1-símplice $[c, d]$ y todas sus caras con vértice w.

Lema 3.4. *El cono $w * K$ es un complejo simplicial.*

Demostración. Sea $\sigma = [v_0, \ldots, v_p]$ un símplice de K. Primero veamos que el conjunto $\{w, v_0, \ldots, v_p\}$ es afínmente independiente. Si w perteneciera al plano P generado por los puntos $v_0, \ldots, v_p$, podríamos considerar el segmento que une w con un punto de $x \in \operatorname{Int} \sigma$. Dicho conjunto, por ser abierto en P, contendría un intervalo de puntos en el segmento, contradiciendo la hipótesis de que las semirrectas que parten de w cortan a lo sumo en un punto a $|K|$.

Veamos ahora que $w * K$ es un complejo simplicial. Los símplices de $w * K$ pueden ser de tres tipos:

1. Símplices $[v_0, \dots, v_p]$ pertenecientes a K.
2. Símplices de la forma $[w, v_0, \dots, v_p]$.
3. El 0-símplice $[w]$.

Si σ, τ son símplices del primer tipo, entonces $\operatorname{Int}\sigma \cap \operatorname{Int}\tau = \emptyset$ puesto que K es un complejo simplicial. El símplice $\operatorname{Int}[w, v_0, \dots, v_p]$ es la unión de todos los segmentos abiertos que unen w con $v_0, \dots, v_p$, luego dos símplices de esta forma tienen intersección vacía pues las semirrectas que parten de w cortan a K a lo sumo en un punto. Finalmente, si σ es del primer tipo y τ del segundo, $\operatorname{Int}\sigma \cap \operatorname{Int}\tau = \emptyset$ por el mismo argumento recién dado. □

Proposición 3.3. *Sea K un complejo simplicial y sea $w * K$ el cono sobre K de vértice w. Entonces la homología orientada de $w * K$ es $H_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \neq 0$ y $H_0(w * K; R) \cong R$. En el caso de la homología reducida, $\widetilde{H}_0(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $D_\bullet = \{D_p, \partial_p\}$ un complejo de cadenas tal que $D_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $D_0 = R$. Definimos la aplicación de cadenas $f : D_\bullet \to C_\bullet(w * K; R)$ de forma que $f_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $f_0(r) = rw$. Por otro lado, por la Proposición 3.1 podemos definir el aumento $\varepsilon : C_\bullet(w * K; R) \to D_\bullet$ dado por $\varepsilon_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $\varepsilon_0(v) = 1$ para todo vértice v del cono. Nuestro objetivo es ver que efectivamente f es una equivalencia de cadenas junto a ε. De manera directa tenemos que $\varepsilon \circ f = \mathrm{id}_D$, luego $\varepsilon \circ f \simeq \mathrm{id}_D$. Veamos ahora que $f \circ \varepsilon$ es homotópica a la identidad. Para ello vamos a definir s como la familia $\{s_p\}$ de homomorfismos $s_p : C_p(w * K; R) \to C_{p+1}(w * K; R)$ tal que

$$s_p([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [wv_0 \dots v_p] & \text{si } v_i \neq w \quad 0 \leq i \leq p, \quad p \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

induce una extensión lineal. Dicha familia está bien definida para $C_p(w * K; R)$. Veamos que $\partial_{p+1} s_p + s_{p-1} \partial_p = \mathrm{id}_{C_p(w*K;R)} - f_p \varepsilon_p$ se cumple, por lo que s es una homotopía de cadenas. Para el caso en que $p \in \mathbb{Z}$ es menor que 0, se cumple de manera trivial. Si $p = 0$, distinguimos dos casos. Cuando $v \neq w$ tenemos que $(\partial_1 s_0 + s_{-1}\partial_0)(v) = \partial_1[w, v] = v - w = (\mathrm{id}_0 - f_0\varepsilon_0)(v)$. Por el contrario si $v = w$, $(\partial_1 s_0 + s_{-1}\partial_0)(v) = 0$ y también $(\mathrm{id}_0 - f_0\varepsilon_0)(v) = \mathrm{id}_0(w) - (f_0\varepsilon_0)(w) = w - w = 0$. Por último, veamos que sucede cuando $p > 0$. Supongamos primero que $w \neq v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1} s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= \partial_{p+1}[wv_0 \dots v_p] + s_{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]\right) \\ &= [v_0 \dots v_p] + \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+1} [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [wv_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \\ &= [v_0 \dots v_p] = (id_{C_p} - f_p\varepsilon_p)[v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Finalmente si $w = v_{i_0}$ para algún i_0 entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1} s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= s_{p-1}\partial_p[v_0 \dots v_p] = s_{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]\right) \\ &= (-1)^{i_0} s_{p-1}[v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = (-1)^{i_0}[wv_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] \\ &= (-1)^{i_0}[v_{i_0} v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = [v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Es decir, $f \circ \varepsilon \simeq \mathrm{id}_{C(w*K;R)}$ y por el Corolario 1.2 induce un isomorfismo $\varepsilon_* : H_p(w * K; R) \to H_p(D; R)$.

Para el caso reducido consideremos el complejo aumentado $D_\bullet$ dado por el aumento $\mathrm{id}_R : D_0 \to R$. Como consecuencia, la homología de $\widetilde{D}$ es trivial. Además, podemos extender los homomorfismos ε y f a homomorfismos $\widetilde{\varepsilon}$ y $\widetilde{f}$ para los complejos aumentados de forma que $\widetilde{\varepsilon}_{-1} = \widetilde{f}_{-1} = \mathrm{id}_R$. Por la misma homotopía s obtenemos que $\widetilde{\varepsilon}$ y $\widetilde{f}$ son equivalencias homotópicas entre los complejos aumentados y por tanto, $\widetilde{H}_p(w * K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. □

Corolario 3.2. *La homología simplicial reducida de cualquier símplice es nula.*

Corolario 3.3. *Sea σ un n-símplice y sea $\mathrm{Bd}\,\sigma$ su borde. Entonces $\widetilde{H}_p(\mathrm{Bd}\,\sigma; R) = 0$ es trivial si $p \neq n-1$ y $\widetilde{H}_{n-1}(\mathrm{Bd}\,\sigma; R) \cong R$. Además, para el caso no trivial, un generador es la clase de la cadena $\partial(\sigma)$.*

Demostración. Dado el símplice anterior, los complejos de cadenas aumentados de σ y su borde coinciden hasta dimensión $p \leq n-1$. Por el Corolario 3.2 deducimos que $\widetilde{H}_p(\mathrm{Bd}\,\sigma; R) = 0$ para $p \leq n-2$. Además, $C_p(\mathrm{Bd}\,\sigma; R) = 0$ para $p \geq n$. Por lo tanto, $\widetilde{H}_{n-1}(\mathrm{Bd}\,\sigma; R) = \ker \partial_{n-1}$. Aquí, ∂_{n-1} representa el operador borde en ambos complejos aumentados (es decir, $\partial_0 = \varepsilon$ indica el aumento). Dado que el complejo aumentado de σ tiene homología trivial, entonces $\ker \partial_{n-1} = \mathrm{Im}, \partial_n$, y además ∂_n es inyectivo donde el operador borde $\partial_n : C_n(\sigma; R) \to C_{n-1}(\sigma; R) = C_{n-1}(\mathrm{Bd}\,\sigma; R)$ aparece en el complejo de σ. Puesto que $C_n(\sigma; R)$ es isomorfo a R generado por σ, se sigue que $\mathrm{Im}\,\partial_n$, y por tanto $\widetilde{H}_{n-1}(\mathrm{Bd}\,\sigma; R)$, es isomorfo a R generado por $\partial(\sigma)$. □

3.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

Nombrada en honor a los matemáticos austriacos Walther Mayer y Leopold Vietoris, la sucesión de Mayer-Vietoris es una herramienta esencial en la topología algebraica y la teoría de homología. Esta sucesión permite analizar la homología de un complejo simplicial a partir de la homología de sus subcomplejos, de manera análoga a como el teorema de Seifert-van Kampen describe el grupo fundamental de un espacio topológico a partir de subespacios abiertos y conexos por arcos.

Lema 3.5 (Lema de la serpiente)**.** *Sean $A_\bullet = \{A_n, \partial_A\}, B_\bullet = \{B_n, \partial_A\}$ y $C_\bullet = \{C_n, \partial_C\}$ complejos de cadenas y sean f, g aplicaciones de cadenas tales que la sucesión*

$$0 \to A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \to 0$$

es exacta. Existe entonces una sucesión exacta de homología

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A_\bullet; R) \arrow[r, "f_*"] & H_p(B_\bullet; R) \arrow[r, "g_*"] & H_p(C_\bullet; R) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_*"] & \\
& H_{p-1}(A_\bullet; R) \arrow[r, "f_*"] & H_{p-1}(B_\bullet; R) \arrow[r, "g_*"] & H_{p-1}(C_\bullet; R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*donde ∂_* es el operador borde inducido en $B_\bullet$ que llamaremos **operador conector**.*

Demostración. Para realizar esta prueba usaremos una persecución de diagramas. Usaremos el siguiente diagrama como guía:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial_A"'] & B_{p+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial_B"'] & C_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial_A"'] & B_p \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial_B"'] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "\partial_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r, "f"] & B_{p-1} \arrow[r, "g"] & C_{p-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Paso 1. Para definir el operador conector ∂_*, primero tenemos que comprobar que si tenemos un ciclo de C_p, entonces podemos asignarle un único ciclo en A_{p-1}. Por tanto, sea c_p un ciclo de C_p (esto es, $c_p \in \ker \partial_C$) y escojamos $b_p \in B_p$ tal que $g(b_p) = c_p$ (recordemos que g es sobreyectiva por ser la sucesión exacta corta). El elemento $\partial_B b_p$ de B_{p-1} pertenece al núcleo de g pues $g(\partial_B b_p) = \partial_C g(b_p) = \partial_C c_p = 0$. Por tanto, existe un elemento $a_{p-1} \in A_{p-1}$ tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$, pues $\ker g = \operatorname{Im} f$. Tenemos que dicho elemento es único por ser f inyectiva. Además, a_{p-1} es un ciclo. Como $f(\partial_A a_{p-1}) = \partial_B f(a_{p-1}) = \partial_B \partial_B b_p = 0$, entonces $\partial_A a_{p-1} = 0$ por ser f inyectiva. Definimos $\partial_*[c_p] = [a_{p-1}]$ donde los corchetes denotan la clase de homología.

Paso 2. Queremos probar ahora que ∂_* es un homomorfismo de módulos bien definido. Sean c_p, c'_p dos elementos del núcleo de $\partial_C : C_p \to C_{p-1}$. Sean b_p, b'_p elementos de B_p tal que $g(b_p) = c_p$ y $g(b'_p) = c'_p$. Escojamos ahora a_{p-1} y a'_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ y $f(a'_{p-1}) = \partial_B b'_p$.

Para probar que ∂_* está bien definido, veamos que no depende del b_p y c_p escogido. Supongamos que $c_p \sim c'_p$ y veamos entonces que a_{p-1} y a'_{p-1} también lo son. Por tanto, supongamos que $c_p - c'_p = \partial_C c_{p+1}$. Escogemos b_{p+1} tal que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Esto implica que

$$f(b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C g(b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C c_{p+1} = 0.$$

En consecuencia, podemos tomar a_p tal que $f(a_p) = b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}$ luego

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B(b_p - b'_p) - 0 = f(a_{p-1} - a'_{p-1}).$$

Por ser f inyectiva, $\partial_A a_p = a_{p-1} - a'_{p-1}$, como buscábamos.

Ya sabemos que ∂_* está bien definido, veamos que es un homomorfismo de módulos. Para ello basta fijarnos en que $g(b_p + b'_p) = c_p + c'_p$ y que $f(a_{p-1} + a'_{p-1}) = \partial_B(b_p + b'_p)$. Por tanto $\partial_*[c_p + c'_p] = [a_{p-1} + a'_{p-1}]$ por definición y en consecuencia, $\partial_*[c_p + c'_p] = \partial_*[c_p] + \partial_*[c'_p]$. Ahora si $\lambda \in R$, de manera análoga obtenemos que $\lambda \partial_*[b_p] = \lambda[c_p] = [\lambda c_p] = \partial_*[\lambda b_p]$.

Paso 3. Probaremos la exactitud de $H_p(B_\bullet; R)$ por doble inclusión. Como $g \circ f = 0$ tenemos que $g_* \circ f_* = 0$. Esto implica que si $\gamma \in \operatorname{Im} f_*$, entonces $g_*(\gamma) = 0$.

Para probar la otra inclusión, consideremos $\gamma = [b_p]$ y supongamos que $g_*(\gamma) = 0$. Entonces $g(b_p) = \partial_C c_{p+1}$ para algún $c_{p+1} \in C_p$. Escojamos b_{p+1} de manera que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Entonces

$$g(b_p - \partial_B b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C g(b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C c_{p+1} = 0,$$

luego $b_p - \partial_B b_{p+1} = f(a_p)$ para algún a_p. Ahora, a_p es un ciclo pues

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B b_p - 0 = 0$$

y f es inyectiva. Es más, $f_*[a_p] = [f(a_p)] = [b_p - \partial_B b_{p+1}] = [b_p]$ y por tanto $[b_p] \in \operatorname{Im} f_*$ como queríamos.

Paso 4. Probemos la exactitud en $H_p(C_\bullet; R)$. Sea $\alpha = [c_p]$ un elemento de $H_p(C_\bullet; R)$. Escojamos b_p tal que $g(b_p) = c_p$ y ahora tomemos a_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial_* \alpha = [a_{p-1}]$ por definición.

Procederemos de nuevo por doble inclusión. Consideremos primero que $\alpha \in \operatorname{Im} g_*$. Entonces $\alpha = [g(b_p)]$ donde b_p es un ciclo en B. Esto implica que $f(a_{p-1}) = 0$ de donde $a_{p-1} = 0$ y por tanto $\partial_* \alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\partial_* \alpha = 0$. Entonces $a_{p-1} = \partial_A a_p$ para algún a_p. Deducimos entonces que $b_p - f(a_p)$ es un ciclo y que $\alpha = g_*[b_p - f(a_p)]$ luego $\alpha \in \operatorname{Im} g_*$. Realizando los cálculos obtenemos que

$$\partial_B(b_p - f(a_p)) = \partial_B(b_p) - \partial_B(f(a_p)) = \partial_B(b_p) - f(a_{p-1}) = 0,$$

$$g_*[b_p - f(a_p)] = [g(b_p) - 0] = [c_p] = \alpha.$$

Paso 5. Finalmente obtengamos la exactitud para $H_{p-1}(A_\bullet; R)$. Si $\beta \in \operatorname{Im} \partial_*$, entonces $\beta = [a_{p-1}]$ donde $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p por definición. En consecuencia,

$$f_*(\beta) = [f(a_{p-1})] = [\partial_B b_p] = 0.$$

Consideremos ahora el caso donde $f_*(\beta) = 0$. Sea $\beta = [a_{p-1}]$. Entonces $[f(a_{p-1})] = 0$ por lo que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p. Definimos $c_p = g(b_p)$. En consecuencia, c_p es un ciclo ya que $\partial_c c_p = g(\partial_B b_p) = g(f(a_{p-1})) = 0$ y $\beta = \partial_*[c_p]$ por definición. Esto es, $\beta \in \operatorname{Im} \partial_*$. $\square$

Definición 3.8. En las condiciones del anterior lema, llamaremos a la sucesión obtenida **sucesión exacta larga de homología**.

Una consecuencia importante del resultado anterior es su naturalidad, un concepto de gran interés en teoría de categorías.

Teorema 3.2. *Sean $\alpha : A_\bullet \to A'_\bullet$, $\beta : B_\bullet \to B'_\bullet$ y $\gamma : C_\bullet \to C'_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B_\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "f'"] & B'_\bullet \arrow[r, "g'"] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones horizontales son sucesiones exactas de complejos de cadenas. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_p(A_\bullet; R) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_p(B_\bullet; R) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_p(C_\bullet; R) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{p-1}(A_\bullet; R) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_p(A'_\bullet; R) \arrow[r, "f'_*"] & H_p(B'_\bullet; R) \arrow[r, "g'_*"] & H_p(C'_\bullet; R) \arrow[r, "\partial'_*"] & H_{p-1}(A'_\bullet; R) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Es claro que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_p(A_\bullet;R) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_p(B_\bullet;R) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_p(C_\bullet;R) \arrow[d, "\gamma_*"] \\
H_p(A'_\bullet;R) \arrow[r, "f'_*"] & H_p(B'_\bullet;R) \arrow[r, "g'_*"] & H_p(C'_\bullet;R)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, pues los homomorfismos inducidos de las aplicaciones de cadenas conservan la conmutatividad. Por tanto, basta estudiar la conmutatividad en

$$\begin{tikzcd}
H_p(C_\bullet;R) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{p-1}(A_\bullet;R) \arrow[d, "\alpha_*"] \\
H_p(C'_\bullet;R) \arrow[r, "\partial'_*"] & H_{p-1}(A'_\bullet;R)\ .
\end{tikzcd}$$

Sea $[a] \in H_p(A_\bullet;R)$ y tomemos b_p de manera que $g(b_p) = c_p$. Además tomemos $a_{p-1} \in A_p$ de forma que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial'_*[c_p] = [a_{p-1}]$ por definición. Consideremos ahora $c'_p = \gamma(c_p)$. Nuestro objetivo es ver que $\partial'_*[c'_p] = \alpha_*[a_{p-1}]$. Está claro que $\beta(b_p)$ es preimagen de c_p por g', pues $g'\beta(b_p) = \gamma g(b_p) = \gamma(c_p) = e'_p$. Así mismo, $\alpha(c_{p-1})$ lo es de $\partial'_D\beta(b_p)$, pues $f'\alpha(a_{p-1}) = \beta f(a_{p-1}) = \beta(\partial_B b_p) = \partial'_D\beta(b_p)$. Esto es, $\partial'_*[c_p] = [\alpha(a_{p-1})]$ por definición. $\square$

Proposición 3.4 (Sucesión de Mayer-Vietoris)**.** *Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 subcomplejos de K tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\cdots \to H_p(K_1 \cap K_2;R) \xrightarrow{f} H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R) \xrightarrow{g} H_p(K;R) \to H_{p-1}(K_1 \cap K_2;R) \to \cdots$$

tal que $f(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c))$, $g(d,e) = j_{1\#}(d) + j_{2\#}(e)$ donde $i_t : K_1 \cap K_2 \to K_t$ y $j_t : K_t \to K_1 \cup K_2$ para $t \in \{1,2\}$ son las respectivas inclusiones.

Demostración. La demostración consiste en construir la sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \to C_\bullet(K_1 \cap K_2;R) \xrightarrow{f} C_\bullet(K_1;R) \oplus C_\bullet(K_2;R) \xrightarrow{g} C_\bullet(K;R) \to 0$$

y aplicar el Lema de la serpiente.

Para ello comencemos describiendo el complejo de cadenas $C_\bullet(K_1;R) \oplus C_\bullet(K_2;R)$. Recordemos que la suma directa de un complejo de cadenas se definía como la suma directa de los R-módulos de dimensión p $C_p(K_1;R) \oplus C_p(K_2;R)$, cuyo operador borde $\partial'(d,e) = (\partial_1 d, \partial_2 e)$ donde ∂_1, ∂_2 corresponden a los operadores borde de K_1 y K_2 respectivamente.

Para comprobar la exactitud de la sucesión, comencemos estudiando la exactitud en los extremos de ésta. Es claro que f es inyectiva por ser una inclusión. En cuanto a la sobreyectividad de g, tomemos $d \in C_p(K;R)$ donde d sea la suma de símplices orientados. Notemos por d_1 a los elementos de dicha suma provenientes de K_1. Entonces $d - d_1 \in K_2$ y $g(d_1, d - d_1) = d$.

Para estudiar la exactitud en $C_\bullet(K_1;R) \oplus C_\bullet(K_2;R)$, consideremos la inclusión $k : K_1 \cap K_2 \to K$ y la respectiva inclusión de cadenas inducida $k_\# : C_\bullet(K_1 \cap K_2;R) \to C_\bullet(K;R)$. Nótese que $g(f(c)) = k_\#(c) - k_\#(c) = 0$. Sea ahora $g(d,e) = 0$, entonces $d = -e$ si las consideramos como cadenas de K. Como d proviene de K_1 y e de K_2, ambas deben de provenir de $K_1 \cap K_2$ y en consecuencia, $(d,e) = (d,-d) = f(d)$, como queríamos.

La homología de $C_\bullet(K_1;R) \oplus C_\bullet(K_2;R)$ de dimensión p, que notaremos por $H_p(K_1 \oplus K_2;R)$, es entonces

$$H_p(K_1 \oplus K_2;R) \cong H_p(K_1;R) \oplus H_p(K_2;R)$$

por la Proposición 1.5. Finalmente aplicamos el Lema de la serpiente y en consecuencia tenemos la sucesión deseada.

Para obtener la sucesión de Mayer-Vietoris de homología reducida, reemplazaremos los complejos de cadenas anteriores por sus correspondientes complejos de cadenas aumentados. Consideremos para ello el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0(K_1 \cap K_2;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{K_1\cap K_2}"] & C_0(K_1;R) \oplus C_0(K_2;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2"] & C_0(K;R) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & R \oplus R \arrow[r, "\widetilde{g}"'] & R \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad y la exactitud se mantienen en la parte inferior del diagrama si definimos $\widetilde{f}(r) = (r,r)$ y $\widetilde{g}(r',r) = r' + r$. Las aplicaciones $\varepsilon_{K_1\cap K_2}, \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ y ε son sobreyectivas pues la intersección de K_1 y K_2 es no vacía. De este modo, la homología de sus respectivos complejos de cadenas es nula en dimensión -1 y en dimensión 0 es igual a la de sus respectivos módulos de homología reducida $\widetilde{H}_0(K_1 \cap K_2;R)$, $\widetilde{H}_0(K_1;R) \oplus \widetilde{H}_0(K_2;R)$ y $\widetilde{H}_0(K;R)$. Para finalizar, aplicamos de nuevo el Lema de la serpiente. □

3.4. Conexión y el módulo de homología $H_0(K;R)$

Uno de los resultados más destacados en la teoría de homología simplicial es su capacidad para identificar y clasificar las componentes conexas de un complejo simplicial. Utilizando el módulo de homología de dimensión cero, H_0, veremos que es posible determinar directamente el número de componentes conexas en el complejo.

Proposición 3.5. *Sea K un complejo simplicial. Entonces K se puede partir en subcomplejos disjuntos $K_1, K_2, \ldots, K_s$ cuyos poliedros son las componentes conexas del poliedro $|K|$.*

Demostración. Consideremos las componentes conexas $X_1, X_2, \ldots, X_s$ del politopo de K. Para cada j, consideremos K_j como la colección de todos los símplices σ de K tales que $\sigma \subset X_j$. Si un símplice pertenece a K_j para algún j, entonces todas sus caras también pertenecen a K_j. Por lo tanto, $K_1, K_2, \ldots, K_s$ son subcomplejos de K. Estos subcomplejos son disjuntos entre sí, debido a que las componentes conexas $X_1, X_2, \ldots, X_s$ del poliedro $|K|$ son disjuntos. Además, si $\sigma \in K$ entonces $\sigma \subset X_j$ para algún j, ya que σ es un subconjunto conexo del espacio topológico $|K|$, y todo subconjunto conexo de un espacio topológico se encuentra contenido en alguna componente conexa. Por consiguiente, σ pertenece a K_j. En consecuencia, $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_s$ y $|K| = |K_1| \cup |K_2| \cup \ldots \cup |K_s|$. □

Definición 3.9. Sea K un complejo simplicial y sean v, w dos vértices de K. Diremos que v, w pueden unirse por un **camino de aristas** si existen vértices $v_0, \ldots, v_k$ en K de forma que $v_0 = v$, $v_k = w$ y $[v_i, v_{i+1}]$ es un 1-símplice para todo $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Lema 3.6. *El poliedro $|K|$ de un complejo simplicial K es un espacio topológico conexo si, y sólo si, cualesquiera dos vértices de K pueden ser unidos por un camino de aristas.*

Demostración. Consideremos un par de vértices cualesquiera del camino de aristas v_{i_0}, v_{j_0} de K. Claramente si $i_0 = j_0$ entonces es trivialmente conexo. Supongamos entonces sin pérdida de generalidad $i_0 < j_0$. Entonces podemos definir una aplicación lineal y continua $\alpha_i : \left[\frac{i-i_0}{j_0-i_0}, \frac{i+1-i_0}{j_0-i_0}\right] \to [v_i, v_{i+1}]$ tal que

$$\alpha_i(\lambda) = (1-\lambda)v_{i_0} + \lambda v_{j_0+1}$$

para todo $i \in \{i_0, \ldots, j_0 - 1\}$. Por tanto, la función $\alpha : [0,1] \to [v_{i_0} v_{j_0}]$ tal que $\alpha(\lambda) = \alpha_i(\lambda)$ si $\lambda \in [i, i+1]$ es un arco que conecta ambos vértices. En consecuencia, $[v, w]$ es arco conexo. Por ser cada símplice convexo, y por tanto arco conexo, $|K|$ es arco conexo. Concluimos aplicando el Teorema 2.2. □

Teorema 3.3. *Sea K un complejo simplicial y R un anillo unitario conmutativo. Supongamos que el poliedro $|K|$ de K es conexo. Entonces $H_0(K;R) \cong R$.*

Demostración. Consideremos el complejo de cadenas aumentado $\widetilde{C}(K;R)$ y su respectiva homología reducida $\widetilde{H}(K;R)$. Es claro que el submódulo de bordes del complejo aumentado $B_0(K;R)$ está contenido en $\ker \widetilde{\partial}_0$, dado que $\widetilde{\partial}_0 \circ \widetilde{\partial}_1 = 0$.

Para la otra inclusión, consideremos $w_0, w_1, \ldots, w_m$ vértices de K que determinan un camino de aristas. Cada $w_j - w_{j-1}$ es una arista de K para $j = 1, 2, \ldots, m$, y se sigue que:

$$[w_m] - [w_0] = \sum_{j=1}^{m}([w_j] - [w_{j-1}]) = \widetilde{\partial}_1\left(\sum_{j=1}^{m}[w_j, w_{j-1}]\right) \in B_0(K;R).$$

Dado que $|K|$ es conexo, por el Lema 3.6 sabemos que cualquier par de vértices de K puede ser unido por un camino de aristas. Por lo tanto, $v - u \in B_0(K;R)$ para cualquier par de vértices u y v de K.

Escojamos un vértice $u \in K$. Entonces, para cualquier conjunto de coeficientes $r_1, r_2, \ldots, r_s \in R$ y vértices $v_1, v_2, \ldots, v_s$ de K, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{s} r_j[v_j] = \sum_{j=1}^{s} r_j([v_j] - [u]) + \left(\sum_{j=1}^{s} r_j\right)[u],$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{s} r_j([v_j] - [u]) \in B_0(K;R).$$

En consecuencia,

$$z - \widetilde{\partial}_0([u]) \in B_0(K;R)$$

para todo $z \in \widetilde{C}_0(K;R)$. Esto muestra que $\ker \widetilde{\partial}_0 \subseteq B_0(K;R)$. Finalmente, el homomorfismo $\widetilde{\partial}_0 : \widetilde{C}_0(K;R) \to R$ es sobreyectivo y su núcleo es $B_0(K;R)$. Además, sabemos que $Z_0(K;R) = C_0(K;R)$, pues $\widetilde{\partial}_0$ es el homomorfismo nulo. Entonces

$$H_0(K;R) = \frac{Z_0(K;R)}{B_0(K;R)} = \frac{C_0(K;R)}{B_0(K;R)}.$$

Por el Primer teorema de isomorfía, el homomorfismo $\widetilde{\partial_0}$ induce un isomorfismo de $H_0(K;R)$ a R, y por lo tanto $H_0(K;R) \cong R$, como se requería. $\square$

Corolario 3.4. *Sea K un complejo simplicial y sea R un anillo unitario conmutativo. Entonces $H_0(K;R) \cong R^s$, donde s es el número de componentes conexas del poliedro $|K|$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de componentes conexas de $|K|$. Si $|K|$ es conexo, entonces el resultado se sigue del Teorema 3.3. Supongamos ahora que podemos descomponer K en subcomplejos $K_1, \ldots, K_s$ disjuntos dos a dos. Por la Sucesión de Mayer-Vietoris, tenemos que la sucesión

$$\begin{aligned} \cdots \to H_0\left(K_1 \cap K \backslash K_1; R\right) \to H_0(K_1;R) \oplus H_0\left(K \backslash K_1; R\right) \to \\ \to H_0(K;R) \to H_{-1}\left(K_1 \cap K \backslash K_1; R\right) \to \cdots \end{aligned}$$

es exacta, donde $K \backslash K_1 = \bigcup_{i=2}^{n+1} K_i$. Sin embargo, la intersección $K_1 \cap K \backslash K_1$ es vacía luego su módulo de homología de dimensión 0 y -1 es el trivial. Por hipótesis de inducción, $H_0(K_1) \oplus H_0(K \backslash K_1; R) \cong R \oplus R^{s-1} = R^s$. Finalmente, por ser la secuencia exacta en $H_0(K;R)$ y ser $H_{-1}\left(K_1 \cap K \backslash K_1; R\right)$ el módulo trivial, el núcleo del operador conector es todo $H_0(K;R)$ y por tanto, $H_0(K;R) \cong H_0(K_1;R) \oplus H_0\left(K \backslash K_1; R\right)$. $\square$

4. Homología persistente

Este capítulo se dedica a la homología persistente, un concepto de gran relevancia en la topología computacional que proporciona herramientas poderosas para analizar y entender la estructura subyacente de los datos a través de múltiples escalas. Originada en los trabajos iniciales de matemáticos como Edelsbrunner, Letscher y Zomorodian [ELZ02], la homología persistente permite la identificación y el análisis de características topológicas que persisten a lo largo de variaciones en la escala en la que se observa.

Este capítulo se centrará en detallar los principios teóricos detrás de la homología persistente. En particular, estudiaremos en profundidad el Teorema de correspondencia, un resultado central en la teoría que muestra cómo transformar el nacimiento y muerte de las clases de homología en objetos matemáticos más sencillos de analizar y manipular computacionalmente. Seguiremos como esquema principal los resultados de [ZC04] y [DW22].

4.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips

La homología persistente es comúnmente empleada para analizar conjuntos de datos representados como nubes de puntos. Aunque la homología en sí de estos conjuntos puede no ser de gran interés debido a su simplicidad o falta de estructura topológica relevante, la homología persistente permite revelar información de interés mediante la construcción de estructuras topológicas construidas a partir de los datos.

En este contexto, los complejos de Čech y Vietoris-Rips se emplean frecuentemente para capturar la estructura topológica subyacente de las nubes de puntos. Estos complejos dotan de estructura de complejo simplicial a los datos, facilitando su representación, el estudio de su forma y sus características a múltiples escalas.

Definición 4.1. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_v\}_{v \in V}$ un recubrimiento de X por puntos $v \in V$. Llamaremos **nervio** de $\mathcal{U}$ al complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices V tal que la familia $v_0, \ldots, v_p \in V$ genera un p-símplice si, y sólo si, $U_{v_0} \cap \cdots \cap U_{v_p} \neq \emptyset$. Lo notaremos por $N(\mathcal{U})$.

Definición 4.2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos finito de X. Dado $\varepsilon > 0$, definimos el **complejo de Čech** $C(V, \varepsilon)$ como el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$, donde

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_\varepsilon(v) : v \in V\},$$

siendo $B_\varepsilon(v)$ la bola abierta de centro x y radio $\varepsilon > 0$.

Proposición 4.1. *El complejo de Čech $C(V, \varepsilon)$ es un complejo simplicial abstracto.*

Demostración. Sea $V = \{v_i\}_{i=1}^{M}$ un subconjunto de puntos en el espacio métrico X. Fijado cierto $\varepsilon > 0$, definimos $\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_\varepsilon(v) : v \in V\}$ como un recubrimiento por abiertos por puntos de V del subespacio topológico $Y = \bigcup_{v \in V} B_\varepsilon(v)$. Veamos que el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$ de $\mathcal{B}_\varepsilon$ es el complejo abstracto cuyos vértices son los conjuntos $B_\varepsilon(x)$ y los símplices se forman por colecciones de estos conjuntos que tienen intersecciones no vacías.

Supongamos que tenemos un símplice $\sigma = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ en $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$. Esto implica que

$$\bigcap_{j=1}^{k} B_\varepsilon(v_{i_j}) \neq \emptyset.$$

Consideremos ahora cualquier subconjunto de bolas de la forma $\{B_\varepsilon(v_{i_j})\}_{j\in J}$ donde $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$. Es claro que por ser σ un símplice,

$$\bigcap_{j\in\{1,\ldots,k\}\setminus J} B_\varepsilon(v_{i_j}) \neq \emptyset,$$

por lo que el conjunto de vértices restantes también forma un símplice en $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$. Por lo tanto, todas las caras de cualquier símplice σ son también símplices en $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$. Es decir, el nervio $N(\mathcal{B}_\varepsilon)$ es cerrado bajo inclusiones.

Dado que V es finito y cada símplice se define como un subconjunto de V, entonces cada símplice sólo puede tener un número finito de subconjuntos. En consecuencia, el número de caras de cada símplice también es finito. □

El siguiente teorema será de utilidad para comprender y estudiar el espacio topológico que definen los complejos de Čech. Por motivos de espacio, no trataremos la prueba y simplemente enunciaremos el resultado. Una demostración del teorema enunciado de forma más general puede encontrarse en [Hat02].

Teorema 4.1 (Teorema del nervio). *Sea X un espacio métrico y sea $\mathcal{U} = \{U_v\}_{v\in V}$ un recubrimiento por abiertos finito de X. Supongamos además que para todo subconjunto no vacío de vértices $S \subseteq V$ tenemos que $\bigcap_{s\in S} U_s$ es contráctil o vacío. Entonces, el politopo de la realización geométrica del nervio de $\mathcal{U}$, $|N(\mathcal{U})|$, es homotópicamente equivalente a X.*

Claramente, la intersección de bolas abiertas es vacía o contráctil (pues es convexa). Por el Teorema del nervio, tenemos que el poliedro de la realización geométrica del complejo de Čech es homotópicamente equivalente al subespacio métrico formado por la unión de dichas bolas. En consecuencia, el estudio de la topología del complejo de Čech se resume al estudio de las bolas que recubren sus vértices. Sin embargo, el complejo de Čech es costoso de obtener mediante métodos computacionales. Por ello, se propone el complejo de Vietoris-Rips para resolver este problema.

Definición 4.3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X. Dado $\varepsilon > 0$, definimos el **complejo de Vietoris-Rips** $VR(V, \varepsilon)$ como el complejo abstracto cuyo conjunto de vértices es V, de forma que $\{v_0, v_1, \ldots v_p\} \subseteq V$ genera un p-símplice si, y solo si, $d(v_i, v_j) \leq \varepsilon$ para todo $0 \leq i, j \leq p$.

Proposición 4.2. *El complejo de Vietoris-Rips $VR(V, \varepsilon)$ es un complejo simplicial abstracto.*

Demostración. Primero veamos que el conjunto es cerrado bajo inclusiones. Supongamos que $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ es un p-símplice en $VR(V, \varepsilon)$. Por definición, esto significa que para todo i, j tal que $0 \leq i, j \leq p$, se cumple que $d(v_i, v_j) \leq \varepsilon$. Consideremos ahora un subconjunto no vacío $\tau = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\} \subseteq \sigma$. Para cualquier par de índices a, b con $1 \leq a, b \leq k$, los vértices v_{i_a} y v_{i_b} también cumplen que $d(v_{i_a}, v_{i_b}) \leq \varepsilon$, pues $\tau \subseteq \sigma$. Por lo tanto, τ es un $(k-1)$-símplice en $VR(V, \varepsilon)$.

Por otro lado, cada p-símplice σ en $VR(V, \varepsilon)$ es un subconjunto finito de V. El número de subconjuntos de cualquier conjunto finito es finito, y en particular, el número de subconjuntos

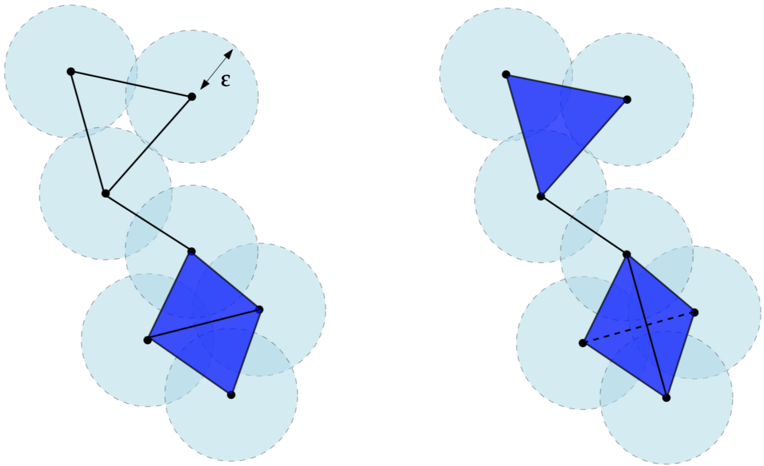


Figura 4.1.: Representación de complejos simpliciales Čech (izquierda) y Vietoris-Rips (derecha) para un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$. En el complejo de Čech, los símplices se forman por la intersección no vacía de círculos de radio ε centrados en los puntos. El complejo de Vietoris-Rips conecta puntos que distan hasta 2ε, independientemente de las intersecciones de los círculos. Los símplices de mayor dimensión están coloreados en azul, resaltando las diferencias en la estructura simplicial generada por cada método. Fuente [CM21].

de σ es $2^{|\sigma|}$, donde $|\sigma|$ es el número de vértices en σ. En consecuencia, cada símplice en $VR(V, \varepsilon)$ tiene un número finito de caras. $\square$

El complejo de Vietoris-Rips es interesante en el estudio de complejos de Čech. Este hecho se debe a que estos últimos pueden ser aproximados en cierto sentido por complejos de Vietoris-Rips:

Proposición 4.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea V un subconjunto de puntos de X. Entonces*

$$C(V, \varepsilon) \subseteq VR(V, 2\varepsilon) \subseteq C(V, 2\varepsilon).$$

Demostración. La primera inclusión es inmediata pues si un punto x pertenece a la intersección $\bigcap_{v \in V} B(v, \varepsilon)$, entonces la distancia para cada par de puntos de V es, a lo sumo, 2ε. En consecuencia, cualquier símplice de $C(V, \varepsilon)$ se encuentra en $VR(V, 2\varepsilon)$.

Para la segunda inclusión, consideremos ahora un símplice $\sigma = \{v_0, \ldots, v_p\}$ de $VR(V, 2\varepsilon)$. Por la definición de complejo de Vietoris-Rips, tenemos que $d(v_i, v_j) \leq 2\varepsilon$ para todo $i, j \in \{0, \ldots, p\}$. Considerando las bolas abiertas de radio 2ε centradas en v_i y en v_j, tenemos que su intersección es no vacía, pues $v_i \in \overline{B}_{2\varepsilon}(v_j)$ y $v_j \in \overline{B}_{2\varepsilon}(v_i)$. En el supuesto de que los puntos pertenecieran a la frontera de las bolas, la intersección de las bolas abiertas también sería no vacía pues $\varepsilon > 0$. En consecuencia, tenemos que $\sigma \in C(V, 2\varepsilon)$. $\square$

4.2. Módulos de homología persistente

El módulo de homología persistente es el objeto central de estudio en este capítulo. A partir de filtraciones de complejos simpliciales, esta estructura nos va a permitir realizar un estudio de la homología simplicial de dicha filtración.

Definición 4.4. Sea K un complejo simplicial. Una **filtración** $\mathcal{F}$ de K es una familia totalmente ordenada de subcomplejos $\{K^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\emptyset, K \in \mathcal{F}$ y si $i \leq j$, entonces $K^i \subseteq K^j$. En particular, llamaremos a dicho orden **filtro**.

A partir de la definición anterior, podemos construir los complejos de cadenas asociados $C(K^i; R)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así mismo, podemos obtener sus respectivos submódulos de ciclos $Z_p(K^i)$ y bordes $B_p(K^i)$ para cada R-módulo de cadenas orientadas $C_p(K^i; R)$.

Definición 4.5. Sea $\mathcal{F}$ una filtración, sea p un número natural y sean $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ tales que $i \leq j$. Definimos el **(i, j)-ésimo R-módulo de homología persistente de dimensión p** asociado a $\mathcal{F}$ como

$$H_p^{i\to j}(\mathcal{F}; R) := \operatorname{Im} f_p^{i\to j},$$

donde $f_p^{i\to j}$ es el homomorfismo inducido entre las clases de homología de la inclusión que va de K^i a K^j. El rango de $H_p^{i\to j}(\mathcal{F}; R)$ diremos que es el **(i, j)-ésimo número de Betti de persistencia de dimensión p** y lo notaremos por $\beta_p^{i\to j}$.

Proposición 4.4. *Sea $\mathcal{F}$ una filtración del complejo simplicial K. Entonces*

$$H_p^{i\to j}(\mathcal{F}; R) \cong \frac{Z_p(K^i)}{B_p(K^j) \cap Z_p(K^i)}$$

es un isomorfismo de R-módulos.

Demostración. Sabemos que el cociente anterior está bien definido, pues $Z_p(K^i) \cap B_p(K^j)$ es un submódulo de $Z_p(K^i)$. Para ver que en efecto existe un isomorfismo, consideraremos la proyección $\pi_i : Z_p(K^i) \to H_p(K^j; R)$. Aplicando el Primer teorema de isomorfía, tenemos que

$$\frac{Z_p(K^i)}{\ker \pi_i} \cong \operatorname{Im} \pi_i$$

es un isomorfismo. Sin embargo, nótese que

$$\begin{aligned}\ker \pi_i &= \{z \in Z_p(K^i) : \pi_i(z) = [0]\} = \{z \in Z_p(K^i) : [z] = [0]\} \\ &= \{z \in Z_p(K^i) : z \in B_p(K^j)\} = B_p(K^j) \cap Z_p(K^i).\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}H_p^{i\to j}(\mathcal{F}; R) &= \operatorname{Im} f_p^{i\to j} = \{f_p^{i\to j}([z]) : [z] \in H_p(K^i; R)\} \\ &= \{[(i_{i,j_*})_p(z)] : z \in Z_p(K^i)\} = \{\pi_i(z) : z \in Z_p(K^i)\} = \operatorname{Im} \pi_i.\end{aligned}$$

□

La homología persistente facilita la interpretación de la homología en los distintos niveles de la filtración, permitiendo un análisis cuantitativo de su evolución. Al observar el nacimiento y desaparición de las clases de homología mediante los módulos de homología persistente, se obtiene información detallada de la estructura topológica general de la filtración.

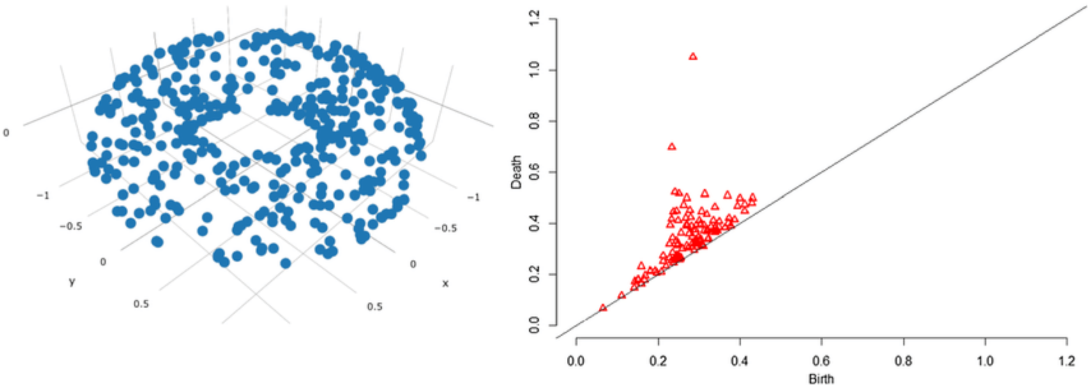


Figura 4.2.: Diagrama de persistencia para la homología de dimensión 1 de la filtración de Vietoris-Rips de 2000 puntos i.i.d. en un toro. El gráfico destaca dos puntos significativos que representan las clases de equivalencia de los ciclos unidimensionales del toro, destacando su persistencia topológica. Fuente [DP19].

Definición 4.6. Dada una filtración $\mathcal{F}$, decimos que un elemento $\alpha \neq 0$ en $H_p(K^i; R)$ **nace** en K^i si $\alpha \notin H_p^{i-1\to i}(\mathcal{F}; R)$. Además, decimos que α **muere** en K^j si se fusiona con una clase proveniente de una dimensión anterior cuando se desplaza de K^{j-1} a K^j. Esto es, si $f_p^{i\to j-1}(\alpha) \notin H_p^{i-1\to j-1}(\mathcal{F}; R)$ pero $f_p^{i\to j}(\alpha) \in H_p^{i-1\to j}(\mathcal{F}; R)$.

Ejemplo 4.1. Consideremos un conjunto de vértices $\{0, e_1, e_2, e_3\} = V$ formado por los vectores de la base usual y el vector nulo en $\mathbb{R}^3$ con la topología usual. Definamos el complejo simplicial K a partir del 2-símplice formado por dichos vectores y todas sus caras. A continuación, vamos a estudiar la filtración inducida por inclusiones $\mathcal{K}$:

$$\emptyset = K^0 \to K^1 \to K^2 \to K^3 \to K^4 = K,$$

donde

$$\begin{aligned} K^1 &= \{[0], [e_1], [e_2], [e_3]\}, \\ K^2 &= K^1 \cup \{[0, e_1], [0, e_2], [0, e_3]\}, \\ K^3 &= K^2 \cup \{[0, e_1, e_2], [0, e_1, e_3], [0, e_2, e_3]\}. \end{aligned}$$

Consideremos además las cadenas de $\mathbb{R}$-módulos asociadas, donde cada $C_p(K^j; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial con cuerpo $\mathbb{R}$ para cada dimensión $p \in \mathbb{Z}$.

En K^1, el módulo de cadenas $C_0(K^1; \mathbb{R})$ es generado por los 0-símplices $\{[0], [e_1], [e_2], [e_3]\}$, lo que resulta en un espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, mientras que los módulos $C_1(K^1; \mathbb{R})$ y $C_2(K^1; \mathbb{R})$ son ambos cero, debido a la ausencia de 1-símplices y 2-símplices.

En cuanto a K^2, el módulo $C_0(K^2; \mathbb{R})$ conserva la misma estructura que $C_0(K^1; \mathbb{R})$, pues no se añaden nuevos 0-símplices. Sin embargo, $C_1(K^2; \mathbb{R})$ se genera ahora a partir de las aristas $\{[0, e_1], [0, e_2], [0, e_3]\}$, formando un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^3$. El módulo $C_2(K^2; \mathbb{R})$ sigue siendo nulo debido a la falta de 2-símplices.

Llegando a K^3, observamos que $C_2(K^3; \mathbb{R})$ ahora se genera por $\{[0, e_1, e_2], [0, e_1, e_3], [0, e_2, e_3]\}$, generando otro espacio isomorfo a $\mathbb{R}^3$. Los módulos $C_0(K^3; \mathbb{R})$ y $C_1(K^3; \mathbb{R})$ son idénticos a sus pares en K^2, pues tienen los mismos símplices de dimensión 1 y 2.

Finalmente, en $K^4 = K$, todos los módulos $C_p(K^4; \mathbb{R})$ para $p \in \{0, 1, 2\}$ son idénticos a los de K^3. Sin embargo, K^4 tiene un 3-símplice formado por todos sus vértices, de forma que $C_3(K^4; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

En K^2, todos los 1-símplices son ciclos porque no existen 2-símplices que puedan generar bordes, de modo que $Z_1(K^2) = C_1(K^2)$ y $B_1(K^2) = 0$. En K^3, todos los 2-símplices son ciclos, ya que no hay 3-símplices en esta etapa; así, $Z_2(K^3) = C_2(K^3)$ y los bordes de $C_1(K^3)$ son generados por las aristas de los 2-símplices, indicando cierta interacción entre ellos.

En K^4, el único 3-símplice forma un ciclo por sí mismo, puesto que $C_4(K^4) = 0$ y, por lo tanto, $Z_3(K^4) = C_3(K^4)$. Los bordes de los 2-símplices en $C_2(K^4)$ resultan de aplicar ∂_3 al 3-símplice, produciendo una combinación de todos los 2-símplices, por lo tanto, $B_2(K^4)$ se compone de estos bordes.

Para K^1, tenemos $H_0(K^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$, mostrando cuatro componentes conexas. En K^2, la homología se simplifica a $H_0(K^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, indicando que todos los vértices forman una única componente conexa, mientras que $H_1(K^2; \mathbb{R}) = 0$ y $H_2(K^2; \mathbb{R}) = 0$ dado que no hay 2-símplices. En K^3, la homología permanece sin cambios para H_0 y H_2, pero todos los posibles 1-ciclos se convierten en bordes de los 2-símplices, lo que resulta en $H_1(K^3; \mathbb{R}) = 0$.

Finalmente, en K^4, observamos que $H_0(K^4; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H_1(K^4; \mathbb{R}) = 0$, $H_2(K^4; \mathbb{R}) = 0$ y $H_3(K^4; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, indicando la presencia de una cavidad tridimensional que no es el borde de ningún símplice de mayor dimensión.

Tras este exhaustivo estudio de la homología de la filtración, por fin estamos en condiciones de estudiar el nacimiento o muerte de las clases de homología. Por ejemplo, podemos observar que en el instante 1 de la filtración nacen cuatro clases de homología de dimensión 0, pues $H_0(K^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$. Sin embargo, en el segundo instante de la filtración, $H_0(K^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, lo que implica la muerte de tres clases de homología de dimensión 0. De esta forma, tendríamos que el módulo de homología persistente $H_0^{1\to 2}(\mathcal{K}; \mathbb{R}) = \operatorname{Im} {i_*}^{1\to 2} = \mathbb{R}$, siendo $i_*^{1\to 2} : H_0(K^1; \mathbb{R}) \to H_0(K^2; \mathbb{R})$ el homomorfismo de inclusión inducido. En consecuencia, es claro que $(1, 2)$-ésimo número de Betti de persistencia de dimensión 0 es 1.

Como hemos visto en el E.j. 4.1, el estudio de la homología persistente requiere de un amplio estudio de la homología de la filtración a todos sus niveles. Esta información a menudo es numerosa y difícil de interpretar, por lo que en la siguiente sección mostraremos una representación de la homología persistente que facilite su estudio e interpretación.

4.3. Representación de la homología persistente

Nuestro objetivo ahora es obtener una representación de la homología persistente que nos permita interpretarla. Originalmente, esta representación se ha realizado mediante los **diagramas de persistencia**. En estos diagramas, cada clase de homología que nace en un complejo simplicial K^i y muere en K^j se representa por un punto (i, j) en el plano cartesiano, para cada dimensión p.

Aunque intuitivos, los diagramas de persistencia presentan ciertas limitaciones. El principal problema radica en que no logran capturar de manera efectiva la multiplicidad de la persistencia; es decir, múltiples clases que nacen y mueren simultáneamente se representan mediante un mismo punto, lo que puede conducir a ambigüedades en la interpretación de los datos.

Para abordar estos problemas, Zomorodian y Carlsson introdujeron un enfoque innovador mediante el uso del **código de barras** [ZC04]. Este método no solo ofrece una visualización clara y detallada de la vida de cada clase de homología, sino que también facilita la interpretación de su multiplicidad y relevancia en el contexto de los datos analizados. Esta interpretación fue posible ya que demostraron que todo módulo de persistencia puede identificarse de manera biyectiva con una estructura algebraica más general, conocida como **módulos graduados**, bajo ciertas hipótesis.

A continuación profundizaremos en la aplicación y las implicaciones de estos métodos, explorando en detalle el Teorema de correspondencia como se discute en [CK18].

Definición 4.7. Sea $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}\}$ una familia de R-módulos. Diremos que dicha familia es un **módulo de persistencia discreto** sobre R si para cada $i \leq j$ existe un homomorfismo de R-módulos $f_{i,j} : M_i \to M_j$ tal que:

1. El homomorfismo $f_i = f_{i,i} = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. La composición $f_{i,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Observación 4.1. Nótese que con esta definición, todo módulo de homología persistente es de hecho un módulo de persistencia discreto. Dada una dimensión $p \in \mathbb{Z}$ fija, los R-módulos los componen los módulos de homología y sus homomorfismos inducidos por la inclusión cumplen dichas propiedades.

Definición 4.8. Sean $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}\}, \mathcal{N} = \{\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{g_{i,j}\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}\}$ dos módulos de persistencia discretos. Diremos que la familia de homomorfismos $\varphi_\bullet = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\varphi_i : M_i \to N_i$ es un **homomorfismo de módulos de persistencia discreto** si $g_{i,j} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ f_{i,j}$.

La anterior definición es equivalente a decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \cdots \arrow[r, "f_{i-1}"] & M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & M_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] & \cdots \\
N_0 \arrow[r, "g_0"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & \cdots \arrow[r, "g_{i-1}"] & N_i \arrow[r, "g_i"] & N_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

conmuta. En las condiciones anteriores, los módulos de persistencia discretos junto a sus homomorfismos forman una categoría que notaremos por R-**PersMod**. Claramente se tiene que existe el homomorfismo identidad $\mathrm{id}_\mathcal{M} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, donde a cada módulo y homomorfismo de módulos se le asocia él mismo. Además, la identidad conmuta con la familia de homomorfismos de módulos, pues es la composición con la identidad de homomorfismos de módulos componente a componente. Veamos ahora la asociatividad en la composición de los homomorfismos de módulos de persistencia discretos. Consideremos cuatro módulos de persistencia discretos $\mathcal{M} = \{\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_{i,j}\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}\}$, $\mathcal{N} = \{\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{g_{i,j}\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}\}$, $\mathcal{P} = \{\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{h_{i,j}\}_{i\leq j\in\mathbb{N}}\}$ y $\mathcal{Q} = \{\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{p_{i,j}\}_{ileqj\in\mathbb{N}}\}$; y tres homomorfismos $\varphi_\bullet : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $\psi_\bullet : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$, y $\theta_\bullet : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$. Para demostrar la asociatividad, necesitamos verificar que

$$(\theta \circ (\psi \circ \varphi))_i = ((\theta \circ \psi) \circ \varphi)_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, dicha composición es la asociatividad de la composición de homomorfismos de módulos componente a componente, por lo que tenemos que:

$$\theta_i \circ (\psi_i \circ \varphi_i) = (\theta_i \circ \psi_i) \circ \varphi_i.$$

Además, para cualquier $i \leq j$ en $\mathbb{N}$, necesitamos mostrar que:

$$h_{i,j} \circ (\theta \circ (\psi \circ \varphi))_i = (\theta \circ (\psi \circ \varphi))_j \circ f_{i,j}.$$

Sustituyendo la definición de composición, esto se reduce a verificar que

$$h_{i,j} \circ (\theta_i \circ (\psi_i \circ \varphi_i)) = (\theta_j \circ (\psi_j \circ \varphi_j)) \circ f_{i,j} \quad i \leq j \text{ en } \mathbb{N}.$$

O equivalentemente, que $((h_{i,j} \circ \theta_i) \circ \psi_i) \circ \varphi_i = \theta_j \circ (\psi_j \circ (\varphi_j \circ f_{i,j}))$. Debido a que cada homomorfismo respeta las estructuras de los módulos de persistencia, tenemos:

$$h_{i,j} \circ \theta_i = \theta_j \circ p_{i,j},$$

$$p_{i,j} \circ \psi_i = \psi_j \circ g_{i,j},$$

$$g_{i,j} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ f_{i,j}.$$

Aplicando estas igualdades y la asociatividad de homomorfismos de módulos, concluimos que:

$$\begin{aligned} h_{i,j} \circ (\theta_i \circ (\psi_i \circ \varphi_i)) &= ((h_{i,j} \circ \theta_i) \circ \psi_i) \circ \varphi_i = ((\theta_j \circ p_{i,j}) \circ \psi_i) \circ \varphi_i \\ &= (\theta_j \circ (p_{i,j} \circ \psi_i)) \circ \varphi_i = (\theta_j \circ (\psi_j \circ g_{i,j})) \circ \varphi_i \\ &= \theta_j \circ ((\psi_j \circ g_{i,j}) \circ \varphi_i) = \theta_j \circ (\psi_j \circ (g_{i,j} \circ \varphi_i)) = \theta_j \circ (\psi_j \circ (\varphi_j \circ f_{i,j})). \end{aligned}$$

Definición 4.9. Sea R un anillo. Diremos que R es un **anillo graduado** si puede descomponerse como una suma directa

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n,$$

donde $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, siendo el anillo $R_m R_n = \{r_m r_n : r_m \in R_m, r_n \in R_n\}$. Los elementos de R_n distintos de cero se denominan **homogéneos de grado** n.

Definición 4.10. Sea R un anillo graduado y sea M un R-módulo. Diremos que M es un **módulo graduado** si puede escribirse como

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n,$$

donde M_n son grupos abelianos y $R_m M_n \subseteq M_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, siendo $R_m M_n$ el R_m-módulo con grupo abeliano M_n. Un elemento de M_n distinto de cero se llama **homogéneo de grado** n.

Los módulos graduados no son más que un tipo particular de módulos. Para cada módulo graduado M, el morfismo identidad $\mathrm{id}_M : M \to M$ es simplemente el morfismo identidad de R-módulos. Este morfismo es claramente un homomorfismo de módulos graduados que preserva la graduación. Consideremos ahora dos módulos graduados M, N y un homomorfismo de módulos graduados $f : M \to N$. Si tenemos otro módulo graduado P y un homomorfismo $g : N \to P$, su composición $g \circ f$ es la composición de homomorfismos de R-módulos. Por lo tanto, la asociatividad de la composición se sigue directamente de la asociatividad de la composición de homomorfismos de R-módulos. En consecuencia, los módulos graduados sobre R junto con los homomorfismos de módulos graduados forman una categoría, que denotaremos por R-**GrMod**.

Los módulos de persistencia discretos sobre un anillo R y los $R[t]$-módulos graduados son conceptos íntimamente relacionados. Si $\mathcal{M}$ es un módulo de persistencia discreto, podemos definir un $R[t]$-módulo graduado $\alpha(\mathcal{M})$ como

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i,$$

donde el producto por t lo definimos como $t\cdot m_i = f_{i,i+1}(m_i)$ para todo $m_i \in M_i$. Análogamente, podemos definir un módulo de persistencia discreto a partir de un $R[t]$-módulo $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$, de forma que

$$\beta\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i\right) = \mathcal{M}.$$

Aquí, los morfismos los obtenemos a partir del producto por t, esto es, $f_{i,i+1}(m_i) = t\cdot m_i$ para todo $m_i \in M_i$. El siguiente resultado nos proporciona formalmente cómo de íntima es esta relación.

Lema 4.1. *Las aplicaciones α y β definidas anteriormente forman una pareja isomorfa de funtores covariantes entre R-**PersMod** y $R[t]$-**GrMod**. En particular, ambas categorías son isomorfas.*

Demostración. Sea $\varphi_\bullet : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morfismo de módulos de persistencia discretos. Definamos

$$\alpha(\varphi_\bullet) : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} N_i$$

donde a cada $m_i \in M_i$ le asignamos $\varphi_i(m_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Veamos que $\alpha : R$-**PersMod** $\to$ $R[t]$-**GrMod** es un funtor covariante. Primero veamos que $\alpha(\varphi_\bullet)$ es un morfismo de módulos graduados. Tenemos que $\alpha(\varphi_\bullet)$ es un homomorfismo de grupos pues cada φ_i lo es, cumple que $\alpha(\varphi_i)(M_i) \subseteq N_i$ y además, si $m = (m_0, m_1, \dots)$ es un elemento de $\mathcal{M}$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi_\bullet)(tm) &= \alpha(\varphi_\bullet)(0, tm_0, tm_1, \dots) = (0, \varphi_0(tm_0), \varphi_1(tm_1), \dots)\\ &= (0, t\varphi_0(m_0), t\varphi_1(m_1), \dots) = t\alpha(\varphi_\bullet)(m),\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la segunda propiedad de los morfismos de módulos de persistencia discretos. En cuanto a las propiedades funtoriales, es evidente que α lleva identidades en identidades. Además, si $\psi_\bullet$ es otro morfismo de módulos de persistencia discretos, tenemos que

$$(\alpha(\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet))(m) = (\psi_i(\varphi_i(m_i)))_{i\in\mathbb{N}} = \alpha(\psi_\bullet)(\varphi_i(m_i))_{i\in\mathbb{N}} = (\alpha(\psi_\bullet) \circ \alpha(\varphi_\bullet))(m).$$

Consideremos ahora el homomorfismo de $R[t]$-módulos graduados

$$\eta : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} N_i,$$

que para cada $i \in \mathbb{N}$ induce un homomorfismo $\eta_i : M_i \to N_i$ compatible con el producto por t. En consecuencia, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta_0"] & M_1 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta_1"] & \cdots \arrow[r, "t"] & M_i \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta_i"] & M_{i+1} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\eta_{i+1}"] & \cdots \\
N_0 \arrow[r, "t"] & N_1 \arrow[r, "t"] & \cdots \arrow[r, "t"] & N_i \arrow[r, "t"] & N_{i+1} \arrow[r, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Definamos ahora $\beta(\eta) = (\eta_0, \eta_1, \ldots)$ y veamos que es un homomorfismo de módulos de persistencia discretos entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. En consecuencia, β nos da homomorfismos de grupos $\eta_i : M_i \to N_i$ que, a su vez, son homomorfismos de R-módulos. Para comprobarlo, basta tomar cualquier $r \in R$ y $m_i \in M_i$ y vemos que $\eta_i(rm_i) = \eta(rm_i) = r\eta(m_i) = r\eta_i(m_i)$. Como los homomorfismos de R-módulos de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ se obtienen mediante la multiplicación por t, entonces para todo $m_i \in M_i$ tenemos que

$$\eta_{i+1}(tm_i) = \eta(tm_i) = t\eta(m_i) = t\eta_i(m_i),$$

por lo que $\beta(\eta)$ es un homomorfismo de módulos de persistencia discretos. Claramente β conserva la identidad. Luego para otro $\theta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y cualquier $m = (m_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$,

$$(\beta(\theta \circ \eta))(m) = (\theta(\eta(m_i)))_{i \in \mathbb{N}} = \beta(\theta)(\eta(m_i))_{i \in \mathbb{N}} = (\beta(\theta) \circ \beta(\eta))(m).$$

Esto es, β es un funtor covariante. Finalmente, por la construcción de α y β tenemos que $\beta \circ \alpha$ es el funtor identidad en $R[t]$-**GrMod** y que $\alpha \circ \beta$ es el funtor identidad en R-**PersMod**. □

En la práctica generalmente trabajaremos con módulos de persistencia que cumplen ciertas condiciones de finitud. Por ello, resulta de gran interés conocer si la correspondencia recién realizada se sigue cumpliendo bajo estos casos.

Definición 4.11. Diremos que un módulo de persistencia discreto $\mathcal{M}$ es de **tipo finito** si existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $N \leq i \leq j$ el homomorfismo $f_{i,j}$ es un isomorfismo.

Definición 4.12. Diremos que un módulo de persistencia discreto $\mathcal{M}$ es de **tipo finitamente presentado (generado)** si es de tipo finito y además, M_i es finitamente presentado (generado) para todo $i \in \mathbb{N}$.

Nuestro objetivo será probar que el Lema 4.1 sigue siendo cierto para los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados.

Lema 4.2. *Sea $\mathcal{M}$ un módulo de persistencia discreto. Si $\mathcal{M}$ es de tipo finitamente presentado, entonces $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado.*

Demostración. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ de forma que $f_{i,j} : M_i \to M_j$ es un isomorfismo para todo $N \leq i \leq j$. Sea G un conjunto de generadores de M_i. Queremos ver que $G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$ es un sistema de generadores también para $\alpha(\mathcal{M})$. Para ello, veamos que todo elemento homogéneo de $\alpha(\mathcal{M})$ está generado por la unión de los G_i. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $m_k \in \alpha(\mathcal{M})$ un elemento homogéneo de grado k. Si $k \leq N$, entonces m_k está generado por los elementos de G_k por construcción. Si $k > N$, veamos que m_k está generado por G_N. Por ser $f_{N,k}$ un isomorfismo, podemos tomar $m_N = f_{N,k}^{-1}(m_k)$. Pero como m_D está generado por G_N, entonces m_k está generado por $f_{N,k}(G_N)$. Por como hemos construido α, $f_{N,k}(G_N) = t^{k-N} G_N$ y como $t^{k-N} \in R[t]$, entonces m_k está generado por G_N. En consecuencia, $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente generado.

Para ver que $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado, consideremos el epimorfismo $\mu_i : R^{n_i} \to M_i$ que genera M_i por extensión lineal sobre G_i. Considerando $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$, existe una aplicación $\mu : R[t]^N \to \alpha(\mathcal{M})$ que corresponde al sistema de generadores G. Para cada $g_i \in G$, denotemos por e_i a su correspondiente elemento en el sistema de generadores de $R[t]^N$.

A continuación definamos un conjunto finito de elementos del núcleo de μ. sea H_i el sistema de generadores de $\ker \mu_i$ para cada $0 \leq i \leq N$. Es claro que $H_i \subseteq \ker \mu_i$. Es más, para cualquier $0 \leq i < j \leq N$ y cualquier $g_i \in G_i$ tal que $f_{i,j}(g_i) \neq 0$, tenemos que

$$f_{i,j}(g_i) = \sum_{k=0}^{n_j} \lambda_k g_{j_k}$$

donde $\lambda_k \in R$ y $G_i = \{g_{j_0}, g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}\}$. Por tanto, el correspondiente elemento

$$t^{j-i} e_i - \sum_{k=0}^{n_j} \lambda_k e_{j_k}$$

pertenece al $\ker \mu$. Denotemos ahora por $H_{i,j}$ al conjunto finito obtenido tomando los elementos de la forma de la expresión anterior para cada $g_i \in G_i$ tal que $f_{i,j}(g_i) \neq 0$. Sea $H = \bigcup_{i=0}^{N} H_i \cup \bigcup_{0<i\leq j\leq N} H_{i,j}$.

A continuación, fijemos un elemento x del núcleo de μ de la forma

$$x = \sum_l \lambda_l e_l$$

de forma que $\lambda_l \in R[t]$ y e_l es un generador de $R[t]^n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x es homogéneo de algún grado k. Veamos por casos que x es finitamente generado por los elementos de H_k.

Supongamos que $k \leq N$ y que todos los escalares λ_l son de grado 0. Entonces, todos los e_l que aparecen en x son del mismo grado y por tanto, sus imágenes por μ son generadores de M_k. Es decir, x está generado por H_k.

Supongamos ahora qe $k \leq N$ y que algún λ_l es de grado positivo. Por ser x homogéneo, entonces λ_l es de la forma $r_l t^{d_l}$, donde $r_l \in R$ y $d_l > 0$. Como el grado de e_l es $k - d_l$, entonces existe un elemento $h_l \in H_{k-d_l,k}$ de la forma

$$h_l = t^{d_l} e_l - \sum_{m=0}^{n_l} \tilde{\lambda}_m e_{l_m},$$

donde todos los e_{l_m} son de grado k y $\tilde{\lambda}_m \in R$. Por consiguiente, en $x - r_l h_l$ el coeficiente de e_l en x es 0 en t y por tanto, sólo estamos introduciendo sumandos de grado 0 en t.

Iterando esta construcción para cada sumando de con coeficiente de grado positivo, obtenemos un elemento $x' = x - \sum_w r_w h_w$, donde $r_w \in R$, $h_w \in H$ y x' tiene solamente coeficientes de grado 0 en t. Esto es, $x = x' \sum_w r_w h_w$. Finalmente, aplicando la primera parte de la demostración tenemos que x es generado por H.

Para concluir, consideremos $k > N$. En dicho caso, cada λ_l es de grado al menos $k - N$, pues el grado maximal de e_l es N. Luego $x = t^{k-N} x'$, donde x' es homogéneo de grado N. Como $0 = \mu(x) = t^{k-N} \mu(x')$, entonces $x' \in \ker \mu$. Por la segunda parte de la demostración, concluimos que x' es generado por H y por tanto, x también. □

Para los siguientes dos lemas, fijaremos el $R[t]$-módulo graduado finitamente presentado $\mathbf{M} = \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$ junto con la aplicación $\mu : R[t]^n \to \mathbf{M}$ cuyo núcleo es finitamente generado. Consideremos además el sistema de generadores $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ de $\mathbf{M}$ y sea $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ un sistema de generadores de $\ker \mu$. Además, consideremos que tanto los elementos de G como de H son homogéneos del grado del respectivo módulo. Finalmente, vamos a asumir que dichos elementos están ordenados por grado en orden no decreciente.

Lema 4.3. *Cada M_i de $\mathbf{M}$ es finitamente presentado como un R-módulo.*

Demostración. Veamos primero que M_i es finitamente generado. Sea d_j el grado de g_j para $1 \leq j \leq n$. Sea n_i el número de elementos de G con grado menor o igual que i. Definamos $\mu_i : R^{n_i} \to M_i$ de forma que μ_i asigne al j-ésimo generador $e_{i_j} \in R^{n_i}$ el elemento $t^{i-d_j} g_j$. Cada elemento $x \in M_i$ es un componente homogéneo de grado i de una combinación lineal de los generadores de $\mathbf{M}$. Dado que solo los generadores g_j cuyo grado d_j es menor o igual que i pueden contribuir a esta combinación para formar un elemento de grado i, x puede expresarse como:

$$x = \sum_{d_j=1}^{i} r_j t^{i-d_j} g_j,$$

donde $r_j \in R$. Considerando el generador en R^{n_i} cuyas entradas son los coeficientes r_j, entonces

$$\mu_i((r_1, \ldots, r_{n_i})) = \sum_{d_j=1}^{i} r_j t^{i-d_j} g_j = x$$

y en consecuencia, μ_i es sobreyectivo. Esto es, M_i es finitamente generado.

A continuación veamos que $\ker \mu_i$ también es finitamente generado. Sean $e_1, \ldots, e_n$ los generadores de $R[t]^n$ con imagen $g_1, \ldots, g_n$ por μ respectivamente. Sea m_i el número de elementos h_j de H cuyo grado d'_j es menor o igual que i. Para cada h_j tal que $1 \leq j \leq m_i$, consideremos $t^{i-d'_j} h_j$ que podemos reescribir como

$$t^{i-d'_j} h_j = \sum_{k=1}^{m_i} r_k t^{i-d_k} e_k$$

para ciertos $r_k \in R$. Definamos ahora

$$h_{j_i} = \sum_{k=1}^{n_i} r_k e_{k\,i}$$

y definamos $H_i = \{h_{j_i} : 1 \leq i \leq m_i\}$. Veamos que H_i genera el núcleo de μ. Es claro que $\mu_i(h_{j_i}) = \mu(h_j) = 0$. Fijemos ahora un elemento arbitrario x de $\ker \mu_i$. Tenemos entonces que x es combinación lineal de $\{e_{1\,i}, \ldots, e_{n_i\,i}\}$ con coeficientes en R. Reemplazando e_{j_i} por $t^{i-d_j} e_j$, obtenemos un elemento homogéneo $x' \in R[t]^n$ de grado i. Por hipótesis, podemos escribir x' como combinación de elementos de H de forma que

$$x' = \sum_{k=1}^{m_i} r'_k t^{i-d'_k} h_{k\,i}$$

donde $r'_k \in R$. En consecuencia, veamos que

$$x = \sum_{k=1}^{m_i} r'_k h_{k\,i}.$$

Para ello, procederemos comparando coeficientes. Consideremos $j \in \{1, \dots, n_i\}$ y sea $c_j \in R$ el coeficiente de e_{j_i} en x. Sea c'_j el coeficiente de e_{j_i} en la suma de la expresión anterior, escribiendo cada h_{ki} como combinación lineal de los e_{j_i}. Por la construcción realizada, c_j es el coeficiente de $t^{i-d_j}e_j$ en x' y c'_j es el coeficiente de $t^{i-d_j}e_j$ en la suma $\sum_{k=1}^{m_i} r'_k t^{i-d'_k} h_{ki}$. Esto es, $c_j = c'_j$. Como x se escogió de manera arbitraria de $\ker \mu_i$, entonces H_i lo genera. $\square$

Lema 4.4. $\beta(\mathbf{M})$ *es de tipo finito. En particular, es de tipo finitamente presentado.*

Demostración. Sea N el grado máximo de los $g_j \in G_j$, $h_k \in H_k$ de forma que $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Veamos que la multiplicación por t induce un isomorfismo entre M_i y M_{i+1} para todo $i \geq N$.

Si $y \in M_{i+1}$, entonces existen $\lambda_j \in R[t]$ de grado al menos 1 de forma que $y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j$. Por tanto, $y = ty'$ donde $y' \in M_i$ mostrando que la multiplicación por t es sobreyectiva.

Para ver que es inyectiva, consideremos $y \in M_i$ de forma que $ty = 0$. Sea $x \in R[t]^n$ tal que $\mu(x) = y$. Entonces $\mu(tx) = ty = 0$ y por tanto, veamos tx se puede escribir como

$$tx = \sum_{j=0}^{m} \tilde{\lambda}_j h_j,$$

donde cada λ_j no trivial es un polinomio de grado al menos 1. Es inmediato, pues cada h_j es de grado menor o igual que N y tx es de grado mayor o igual que $N+1$. En consecuencia, también podemos descomponer tx como

$$tx = \sum_{j=0}^{m} t\lambda_j h_j = t\sum_{j=0}^{m} \lambda_j h_j.$$

Por ser $R[t]^n$ un módulo libre, tenemos que $x = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j h_j$ y por tanto, $x \in \ker \mu$ lo que implica que $y = 0$. $\square$

Teorema 4.2 (Teorema de correspondencia)**.** *Sea R un anillo unitario. Entonces, existe un isomorfismo entre la categoría de $R[t]$-módulos graduados finitamente presentados y la categoría de módulos de persistencia discretos.*

Demostración. Estas categorías son subcategorías de $R[t]$-**GrMod** y R-**PersMod** respectivamente. Restringiendo α y β a dichas subcategorías, por el Lema 4.2 tenemos que α es un funtor covariante de los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados a los $R[t]$-módulos graduados finitamente presentados. Así mismo, por los lemas 4.3 y 4.4, β es un funtor covariante de los $R[t]$-módulos graduados finitamente presentados a los módulos de persistencia discretos de tipo finitamente presentados. En consecuencia, estas subcategorías son isomorfas. $\square$

El Teorema de descomposición de módulos graduados nos dará la clave para representar los módulos de persistencia. La idea general de la prueba consiste en aplicar el Descomposición cíclica primaria y ajustar la graduación mediante las potencias de t para garantizar el isomorfismo. Dicha demostración hace uso de algunos resultados que, por motivo de extensión, no trataremos en el presente trabajo. Para el lector interesado en los detalles de la prueba véase [Web85].

Teorema 4.3 (Teorema de descomposición de módulos graduados)**.** *Sea F un cuerpo y sea M un $F[t]$-módulo graduado finitamente generado. Entonces M se descompone de manera única, salvo isomorfismos, como*

$$M \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{a_i} \cdot R[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} t^{b_j} \cdot \frac{R[t]}{\langle t^{c_j} \rangle} \right),$$

donde $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{N}$, y para cada j, t^{c_j} es un elemento homogéneo tal que divide a $t^{c_{j+1}}$.

De manera intuitiva, primero hemos construido una única estructura algebraica que contiene todos los complejos de la filtración. Después, hemos seguido calculando una suma directa a partir de los complejos, llegando así a un espacio mucho más grande que está graduado según el orden inducido de la filtración. A continuación, recordamos el momento en que cada símplice entra utilizando un coeficiente polinomial, codificando así el orden de filtración en el anillo de coeficientes polinomiales. A partir de aquí, el Teorema de descomposición de módulos graduados nos proporciona una factorización simple cuando el anillo base es un cuerpo F. Aquí, el anillo graduado $F[t]$ es un DIP y sus únicos ideales graduados son homogéneos de la forma $\langle t^n \rangle = t^n \cdot R[t]$, donde $n \geq 0$. Ahora que hemos transformado los módulos de persistencia discretos en objetos más manejables, queremos parametrizar las clases de isomorfismo de los $F[t]$-módulos por objetos más sencillos de interpretar.

Definición 4.13. Definimos un **$\mathcal{P}$-intervalo** como un par ordenado (i, j) tal que $0 \leq i \leq j$ donde $i, j \in \mathbb{Z}^\infty = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Nuestro objetivo ahora es asociar un $F[t]$-módulo graduado a un conjunto S de $\mathcal{P}$-intervalos mediante una biyección Q. Para ello, definimos $Q(i, j) = t^i F[t] / \langle t^{j-i} \rangle$ para el $\mathcal{P}$-intervalo (i, j). Es claro que $Q(i, +\infty) = t^i F[t]$. Además, para un conjunto de $\mathcal{P}$-intervalos $S = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)\}$, definimos

$$Q(S) = \bigoplus_{l=1}^{n} Q(i_l, j_l).$$

Nuestra correspondencia puede ahora redefinirse como sigue.

Corolario 4.1. *La correspondencia $S \mapsto Q(S)$ define una biyección entre los conjuntos finitos de $\mathcal{P}$-intervalos y los módulos graduados finitamente generados sobre el anillo graduado $F[t]$. Consecuentemente, las clases de isomorfismo de los módulos de persistencia de tipo finito sobre F están en correspondencia biyectiva con los conjuntos finitos de $\mathcal{P}$-intervalos.*

En el contexto de filtraciones de complejos simpliciales, este resultado da lugar a la descripción de la homología persistente conocida como **código de barras**: cada $\mathcal{P}$-intervalo (i, j) describe un ciclo que nace en la filtración i y especifica su clase de homología hasta que se convierte en borde (es decir, hasta que muere) en el instante j.

Los diagramas de código de barras derivados de la homología persistente han demostrado ser herramientas muy útiles para la extracción de información relevante en campos como el análisis de datos. Este hecho es debido a ciertas propiedades de la homología persistente que la hacen relevante para un uso práctico. Además de las ya comentadas, también destaca su **estabilidad**, lo que significa que pequeñas perturbaciones en los datos no producen grandes cambios en los diagramas de código de barras. Esto es fundamental porque asegura que las características topológicas que se detectan son inherentes a la estructura de los datos y no consecuencia del ruido o de variaciones menores [CSEH05, CDSGO16]. Dicha propiedad contrasta con la homología simplicial, pues dos complejos de Čech o Vietoris-Rips con distinto radio pueden tener invariantes topológicos completamente diferentes. Estos métodos no solo ofrecen una representación visual intuitiva de las características de los datos, sino que también proporcionan un marco robusto para la cuantificación y comparación de estructuras topológicas.

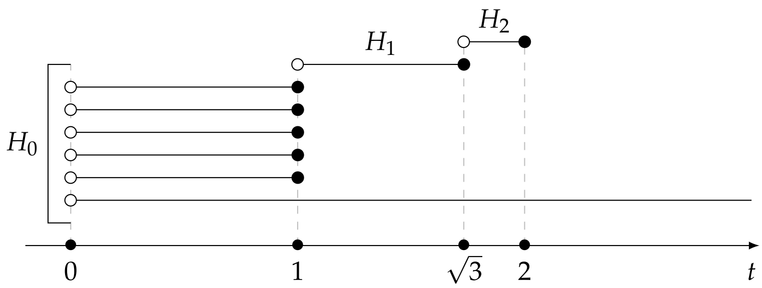


Figura 4.3.: Ejemplo de código de barras mostrando la persistencia de clases de homología a través del tiempo. Cada línea horizontal representa una clase de homología que persiste a través de un intervalo específico, indicando la escala a la que dichas características topológicas son detectables.

Bibliografía

[CDSGO16] Frédéric Chazal, Vin De Silva, Marc Glisse, y Steve Oudot. *The structure and stability of persistence modules*, volumen 10. Springer, 2016.

[CK18] René Corbet y Michael Kerber. The representation theorem of persistence revisited and generalized. *Journal of Applied and Computational Topology*, 2(1–2):1–31, July 2018.

[CM21] Frédéric Chazal y Bertrand Michel. An introduction to topological data analysis: fundamental and practical aspects for data scientists. *Frontiers in artificial intelligence*, 4:108, 2021.

[CSEH05] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, y John Harer. Stability of persistence diagrams. En *Proceedings of the twenty-first annual symposium on Computational geometry*, páginas 263–271, 2005.

[DF04] David Steven Dummit y Richard M Foote. *Abstract algebra*, volumen 3. Wiley Hoboken, 2004.

[DLK20] Yongbo Deng, Zhenyu Liu, y Jan G Korvink. Topology optimization on two-dimensional manifolds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 364:112937, 2020.

[DP19] Vincent Divol y Wolfgang Polonik. On the choice of weight functions for linear representations of persistence diagrams. *Journal of Applied and Computational Topology*, 3, 09 2019.

[DW22] Tamal Krishna Dey y Yusu Wang. *Computational topology for data analysis*. Cambridge University Press, 2022.

[ELZ02] Edelsbrunner, Letscher, y Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete & computational geometry*, 28:511–533, 2002.

[EM45] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.

[Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[Lee10] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volumen 202. Springer Science & Business Media, 2010.

[Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.

[ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[Mun18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.

[RA03] A.Q.T.A.Q.E.D. Rafael Ayala. *Elementos de la teoría de homología clásica*. Serie Ciencias / Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla, 2003.

[Web85] Cary Webb. Decomposition of graded modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(4):565–571, 1985.

[Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:213–245, 1949.

[ZC04] Afra Zomorodian y Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. En *Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry*, páginas 347–356, 2004.