



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024



Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales.*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsable de tutorización	Miguel Ortega Titos <i>Departamento de Geometría y Topología</i>	Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
	Julián Luengo Martín <i>Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial</i>	Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 1 de marzo de 2024

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Fundamento teórico	1
1. Preliminares algebraicos	3
1.1. Módulos	3
1.2. Sucesiones exactas	6
1.3. Categorías	8
1.4. Funttores	9
2. Simples y complejos simpliciales	11
2.1. Simples	11
2.2. Complejos simpliciales	13
2.3. Aplicaciones simpliciales	14
2.4. Complejos simpliciales abstractos	15
3. Homología	17
3.1. Grupos diferenciales	17
3.2. Complejos de cadenas	18
3.3. Subcomplejos y complejos cociente	21
4. Homología simplicial	23
4.1. Homología simplicial orientada	23
4.2. Algunos resultados de homología simplicial	26
4.3. Sucesión de Mayer-Vietoris	28
4.4. Computabilidad de la homología	31
5. Invarianza homotópica	33
5.1. Subdivisión baricéntrica	33
5.2. Teorema de aproximación simplicial	35
5.3. Operador subdivisión	36
5.4. Invarianza homotópica de la homología simplicial	37
Bibliografía	41

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Fundamento teórico

1. Preliminares algebraicos

La teoría de homología es una rama de la topología que trata de resolver problemas topológicos en el ámbito del álgebra. Por este motivo es importante conocer muy bien algunas herramientas algebraicas que iremos utilizando con frecuencia. En todo el capítulo usaremos como referencia principal [Mac12].

1.1. Módulos

La estructura de módulo surge con la idea de generalizar el concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo a un anillo. Nuestro interés en ellos radica en que la teoría de homología se construye sobre módulos y por ello es necesario hacer una introducción al campo. Esta sección fue complementada con los contenidos de [DFo4].

Definición 1.1. Sea R un anillo cuyo elemento identidad $1 \neq 0$. Un R -módulo izquierdo A es un grupo abeliano aditivo junto con una función $p : R \times A \rightarrow A$ con $(r, a) \rightarrow ra$ tal que dados $r, r' \in R, a, a' \in A$ se tiene

1. $(r + r')a = ra + r'a$
2. $(rr')a = r(r'a)$
3. $r(a + a') = ra + ra'$
4. $1a = a$

De la definición anterior se sigue que $0a = 0$ y $(-1)a = -a$.

De manera análoga, definimos R -módulo derecho donde el anillo actúa por la derecha en vez de por la izquierda de forma que $p : A \times R \rightarrow A$. Si R es un anillo conmutativo, los R -módulos izquierdos y derechos coinciden y les llamamos simplemente R -módulos. Como los resultados de R -módulos izquierdos y derechos son análogos, trabajaremos con los R -módulos izquierdos y nos referiremos a ellos como R -módulos o módulos a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Ejemplo 1.1. El interés de los R -módulos subyace en la cantidad de estructuras conocidas que engloba. Si por ejemplo consideramos el K -módulo donde K es un cuerpo, éste adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Ahora sea A un \mathbb{Z} -módulo. Definimos el producto p de forma que para $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$ con $n > 0$, $na = a + a + \cdots + a$ n veces, $0a = 0$ y $(-n)a = -(na)$. Entonces A tiene estructura de **grupo abeliano**. En particular, si R es un anillo entonces es también un R -módulo.

Definición 1.2. Sea A un R -módulo izquierdo y S un subconjunto de A . Diremos que S es un **submódulo** de A , esto es, $S \subset A$, si S es cerrado respecto a la suma y si $r \in R, s \in S$ entonces $rs \in S$.

1. Preliminares algebraicos

De la definición anterior se deduce que S es un R -módulo.

Definición 1.3. Sea R un R -módulo. Si un submódulo de R es un subconjunto $L \subset R$ cerrado respecto a la suma tal que $rL = \{rl : l \in L\} \subset L$ para todo $r \in R$, lo llamaremos **ideal** de R .

Tomando un ideal izquierdo L de R y un R -módulo izquierdo A , definimos el producto del ideal L por el módulo A

$$LA = \left\{ \sum_{i=0}^n l_i a_i : l_i \in L, a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde LA es un submódulo de A . En particular, el producto de dos ideales izquierdos LL' es también un ideal izquierdo y $(LL')A = L(L'A)$.

Definición 1.4. Sean A, B R -módulos. Definimos el **homomorfismo de R -módulos** de A a B como la aplicación $\alpha : A \rightarrow B$ tal que

1. $\alpha(a + a') = \alpha(a) + \alpha(a')$
2. $\alpha(ra) = r(\alpha a)$

para todo $a, a' \in A, r \in R$.

Cuando $\alpha : A \rightarrow B$ sea un homomorfismo de R -módulos, diremos que A es el **dominio** y B el **rango**. La **imagen** de α es el conjunto $\text{Im}(\alpha) = \{\alpha(a) : a \in A\}$. El **núcleo** será el conjunto de elementos que se anulan en su imagen, esto es, $\ker(\alpha) = \{a \in A : \alpha(a) = 0\}$. Diremos que α es un **epimorfismo** cuando α sea sobreyectiva, un **monomorfismo** cuando α sea inyectiva y un **isomorfismo** si α es un epimorfismo y un monomorfismo a la vez. Si existe un isomorfismo entre A y B diremos que son **isomorfos** y lo notaremos $A \cong B$. Un homomorfismo $\omega : A \rightarrow A$ lo llamaremos **endomorfismo**.

Dado que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de R -módulos coincide con el de los grupos abelianos subyacentes, la siguiente caracterización es inmediata de la ya conocida para grupos:

Proposición 1.1. Sea $\alpha : A \rightarrow B$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces

1. α es un monomorfismo si, y sólo si, $\ker(\alpha) = 0$.
2. α es un epimorfismo si, y sólo si, $\text{Im}(\alpha) = B$.

Es frecuente escribir el homomorfismo de R -módulos $\alpha : A \rightarrow B$ como $A \xrightarrow{\alpha} B$. Respecto a la notación de la imagen de un elemento $a \in A$ por α , pondremos $\alpha(a)$ o simplemente αa . En cuanto a la imagen de A por α , lo representaremos de manera análoga por $\alpha(A)$ o αA .

Dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha_1, \alpha_2 : A \rightarrow B$, su **suma** $\alpha_1 + \alpha_2$ la definimos como $(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$ para todo $a \in A$. Además, dados dos homomorfismos de R -módulos $\alpha : A \rightarrow B, \beta : B \rightarrow C$, su **composición** $\beta \circ \alpha : A \rightarrow C$ es también un homomorfismo de R -módulos. Nótese que para que la composición sea posible, el rango de α tiene que ser igual al dominio de β . En ocasiones usaremos la notación por yuxtaposición $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$. Llamaremos **inversa** (por ambos lados) de $\alpha : A \rightarrow B$ al homomorfismo $\alpha^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_A$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_B$. Una **inversa izquierda** de α es una función $\gamma : A \rightarrow A$ tal que $\gamma \circ \alpha = \text{id}_A$. No tiene por qué existir ni ser única.

Si $T \subseteq B$, el conjunto $\alpha^{-1}T = \{s \in A : \alpha(s) \in T\}$ es un submódulo de A , llamado la **imagen inversa** (completa) de T . En particular, $\ker \alpha = \alpha^{-1}0$, donde 0 denota el submódulo de B que consiste solo del elemento cero.

Sea $T \subseteq B$ donde B es un R -módulo, llamaremos **inclusión** o **inyección canónica** al homomorfismo $i : T \rightarrow B$ tal que $i(t) = t$ para todo $t \in T$. En particular, i es un monomorfismo. Las **clases laterales** de T en B son los conjuntos $b + T = \{b + t : t \in T\}$ donde $b \in B$. Dos clases laterales $b_1 + T, b_2 + T$ son iguales si $b_1 - b_2 \in T$. Como T es un submódulo, el grupo abeliano B/T se convierte en un R -módulo cuando $r(b + T) = rb + T$ para todo $r \in R$. A este R -módulo lo llamaremos el **módulo cociente** de B sobre T . El homomorfismo $\pi : B \rightarrow B/T$ tal que $\pi(b) = b + T$ es un epimorfismo que llamaremos **proyección canónica** de B .

Proposición 1.2 (Teorema de factorización). Sea $\beta : B \rightarrow B'$ un homomorfismo de módulos con $T \subseteq \ker \beta$. Existe entonces un único homomorfismo de módulos $\beta' : B/T \rightarrow B'$ con $\beta'\pi = \beta$; es decir, el siguiente diagrama con $\beta(T) = 0$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/T \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & B' \end{array}$$

es conmutativo. Al homomorfismo β' lo llamaremos **homomorfismo inducido por β** .

Demostración. Definamos $\beta'(b + T) = \beta(b)$. Por estar T contenida en el núcleo de β , la función está bien definida. En efecto, si $a, b \in B$ entonces $a + T = b + T \Rightarrow a - b \in T \subseteq \ker \beta \Rightarrow \beta(a - b) = 0 \Rightarrow \beta(a) = \beta(b)$. Como β es un homomorfismo, β' también lo es. \square

En particular, si $\beta : B \rightarrow B'$ es un epimorfismo con núcleo T , $\beta' : B/T \rightarrow B'$ es un isomorfismo. Esta afirmación puede expresarse de la siguiente manera: cada β con $\beta(T) = 0$ *factoriza de manera única* a través de la proyección π . Esta propiedad caracteriza a $\pi : B \rightarrow B/T$ hasta un isomorfismo de B/T , de la siguiente manera:

Teorema 1.1 (Primer teorema de isomorfía). Sea $\beta : B \rightarrow B'$ un homomorfismo de R -módulos. Entonces

$$\frac{B}{\ker \beta} \cong \text{Im } \beta$$

Demostración. La demostración es análoga a la ya vista para grupos. Construimos un homomorfismo de R -módulos $\beta : B \rightarrow \text{Im } \beta$ donde aplicando el **Teorema de factorización** con $T = \ker \beta$, obtenemos el homomorfismo inducido $\beta' : B/\ker \beta \rightarrow \text{Im } \beta$ tal que $\beta'(b + \ker \beta) = \beta(b)$. Veamos que está bien definida y que es biyectiva. Para ello, consideremos que existe otro $c \in B$ tal que $b + \ker B = c + \ker B$ lo cual se cumple si, y sólo si, $(b + \ker B) - (c + \ker B) = (b - c) + \ker \beta = 0$. Esto es, que $b - c \in \ker \beta$ y por tanto $\beta(b - c) = \beta(b) - \beta(c) = 0$. Es decir, $\beta(b) = \beta(c)$. En consecuencia, la aplicación β' está bien definida y además es inyectiva. Claramente $\beta : B \rightarrow \text{Im } \beta$ es sobreyectiva. \square

Definición 1.5. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos el **producto**

1. Preliminares algebraicos

directo o producto directo externo de $\{A_i\}_{i \in I}$ como el producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in A_i\}$$

donde las operaciones se definen componente a componente:

$$\begin{aligned}(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} &= (x_i + y_i)_{i \in I} \\ r(x_i)_{i \in I} &= (rx_i)_{i \in I}\end{aligned}$$

para todo $r \in R$, $x_i, y_i \in A_i$.

Definición 1.6. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos indexada por I . Definimos la **suma directa** o **suma directa interna** de $\{A_i\}_{i \in I}$ como el submódulo de $\prod_{i \in I} A_i$ tal que

$$\bigoplus_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i = 0 \text{ p.c.t. } i\}$$

Definición 1.7. Sea B un conjunto y sea $\mathcal{L}(B)$ un R -módulo tal que $\mathcal{L}(B) = \bigoplus_{b \in B} R_b$ donde $R_b = R$ para todo $b \in B$. Llamaremos a dicho R -módulo el **R -módulo libre de base B** . De esta forma cada $x \in \mathcal{L}(B)$ se representa por $x = \sum_{b \in B} \lambda_b \cdot b$ donde $\lambda_b \in R$ son coeficientes no nulos en un número finito de posiciones b .

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.8. Sea $\{A_i, \alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una familia de R -módulos A_i y homomorfismos entre ellos tal que $\alpha_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$. Diremos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

es **exacta** cuando $\text{Im } \alpha_i = \ker \alpha_{i+1}$.

Definición 1.9. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Diremos que la **sucesión exacta** es **corta** si

$$(\sigma, \gamma) : 0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$$

Es decir, una sucesión exacta de cinco R -módulos con los dos módulos exteriores siendo cero (y por lo tanto las dos funciones exteriores triviales).

Proposición 1.3. Sean A, B y C R -módulos y $\sigma : A \rightarrow B$, $\gamma : B \rightarrow C$ homomorfismos entre ellos. Entonces

1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B$ es exacta (en A) si, y sólo si, σ es inyectiva.
2. La sucesión $B \rightarrow C \xrightarrow{\gamma} 0$ es exacta (en C) si, y sólo si, γ es sobreyectiva.

Demostración. El único homomorfismo que cumple $0 \rightarrow A$ tiene imagen 0 en A y por tanto, el núcleo de σ será este si, y sólo si, σ es inyectiva. De manera similar, el único homomorfismo

$C \rightarrow 0$ es el homomorfismo nulo para todo elemento de C , que es la imagen de γ si, y sólo si, γ es sobreyectiva. \square

Corolario 1.1. La sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ es exacta si, y sólo si, σ es inyectiva, γ es sobreyectiva y $\text{Im } \sigma = \ker \gamma$.

Como acabamos de probar, la exactitud en A significa que σ es un monomorfismo, en B significa que $\sigma A = \ker \gamma$ y en C que γ es un epimorfismo. Así la sucesión exacta corta puede escribirse como $A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C$, con exactitud en B . Ahora σ induce un isomorfismo $\sigma' : A \rightarrow \sigma A$ y γ un isomorfismo $\gamma' : B/\sigma A \rightarrow C$; juntos estos proveen un isomorfismo de sucesiones exactas cortas, en la forma de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\gamma} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sigma' & & \parallel & & \downarrow (\gamma')^{-1} \\ 0 & \longrightarrow & \sigma A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & B/\sigma A \longrightarrow 0. \end{array}$$

En resumen, una sucesión exacta corta es simplemente otro nombre para un submódulo y su cociente.

Ejemplo 1.2. Respecto a la $??$, la inclusión i y la proyección π producen una sucesión exacta corta.

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/T \rightarrow 0.$$

Definición 1.10. Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Diremos que la sucesión es **escindible** si existe un homomorfismo $\rho : C \rightarrow B$ tal que $\gamma \circ \rho = \text{id}_C$.

Observación 1.1. En las condiciones anteriores, ρ tiene que ser inyectiva.

Lema 1.1 (Lema de escisión). Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

1. La sucesión es escindible.
2. $B = \text{Im } \sigma \oplus C'$ donde C' es un submódulo de B isomorfo a C . En particular, $B \cong A \oplus C$.
3. Existe $\eta : B \rightarrow A$ tal que $\eta \circ \sigma = \text{id}_A$.

Demostración. (a) \implies (b). Por ser la sucesión escindible el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\rho} & B & \xrightarrow{\gamma} & C \\ & \searrow & \uparrow & \swarrow & \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

implica que $B = \text{Im } \rho \oplus \ker \gamma$ ya que $x = \rho(\gamma(x)) + (x - \rho(\gamma(x)))$ para todo $x \in B$. En consecuencia, $B = C' \oplus \text{Im } \rho$. Además, por la exactitud de la sucesión deducimos que $\ker \gamma = \sigma(A)$.

(b) \implies (c). Es suficiente considerar $B \xrightarrow{\pi} \sigma(A) \xrightarrow{\sigma^{-1}}$ donde π es la proyección canónica. Por ser la sucesión exacta, σ es inyectiva.

1. Preliminares algebraicos

(c) \implies (a). Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B & \xrightarrow{\eta} & A \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

implica que $B = \sigma(A) \oplus \ker \eta$. Por el **Primer teorema de isomorfía** y como $\ker \gamma = \sigma(A)$, tenemos que $\ker \eta \cong B / \ker(\gamma) \xrightarrow{\bar{\gamma}} \text{Im } \gamma = C$ donde $\bar{\gamma}$ es el isomorfismo inducido por γ . Finalmente, $\rho = \bar{\gamma}^{-1}$. \square

1.3. Categorías

La teoría de categorías fue introducida por primera vez por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane en [EM45]. En particular, las categorías son estructuras algebraicas que capturan la noción de composición. Gracias a ellas podemos analizar y comparar estructuras algebraicas, permitiendo sacar conclusiones comunes y trasladar problemas complejos a otros espacios donde resolverlos es más sencillo. En esta sección haré una breve introducción de las categorías apoyándome en [ML13].

Definición 1.11. Una **categoría** \mathcal{C} es una tripleta $(\mathcal{O}, \text{hom}, \circ)$ formada por

1. Una clase \mathcal{O} , cuyos elementos denominamos **objetos** de \mathcal{C} y notamos por $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
2. Por cada par de objetos (A, B) de \mathcal{C} , un conjunto $\text{hom}(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos** de A a B . Si $f \in \text{hom}(A, B)$, normalmente escribiremos $f : A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
3. Una **ley de composición** que asocia a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ y a cada morfismo $g : B \rightarrow C$ un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$ que satisface
 - **Asociatividad.** Si $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$ son morfismos de \mathcal{C} , entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - **Identidad.** A cada objeto B le podemos asociar un morfismo identidad $\text{id}_B : B \rightarrow B$ tal que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ entonces $g \circ \text{id}_B = g$ y $\text{id}_B \circ f = f$.

Llamaremos a este morfismo la **composición** de f y g .

Ejemplo 1.3. Como veremos a continuación, la definición anterior nos va a permitir trabajar con un gran número de espacios matemáticos que ya conocemos en el contexto de la teoría de categorías. Algunos de ellos son:

- **La categoría de espacios topológicos**, donde los objetos son todos los espacios topológicos y los morfismos todas las aplicaciones continuas entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$.
- **La categoría de grupos**, donde los objetos son todos los grupos y los morfismos todos los homomorfismos de grupos.
- **La categoría de conjuntos**, cuyos objetos son todos los conjuntos y sus morfismos todas las aplicaciones entre conjuntos.
- **La categoría de sucesiones exactas de R -módulos de longitud n** . Los objetos son dichas

sucesiones $S : A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n$. Para dos sucesiones S y S' , los morfismos son de la forma $\Gamma : S \rightarrow S'$ tal que $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es una tupla donde los $\gamma_i : A_i \rightarrow A'_i$ son homomorfismos de R -módulos tal que

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A_n \\ \gamma_1 \downarrow & & \gamma_2 \downarrow & & & & \gamma_{n-1} \downarrow & & \gamma_n \downarrow \\ A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A'_n \end{array}$$

conmuta para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 1.12. Sea $f \in \text{hom}(A, B)$ un morfismo en la categoría \mathcal{C} . Diremos que f es una **equivalencia** en \mathcal{C} si existe en \mathcal{C} otro morfismo $g \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ g = \text{id}_B$.

Nótese que si $f \in \text{hom}(A, B)$ es una equivalencia en \mathcal{C} , $g \in \text{hom}(B, A)$ debe ser única. En efecto, si suponemos que existe $g' \in \text{hom}(B, A)$ tal que $g' \circ f = \text{id}_A$, entonces $g = g' \circ f \circ g = g' \circ \text{id}_B = g'$.

1.4. Funtores

Dentro de la teoría de categorías los funtores tienen un papel principal, pues nos va a permitir llevar objetos y morfismos de una categoría a otra preservando identidades y composiciones.

Definición 1.13. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} dos categorías. Un **funtor covariante** de \mathcal{C} a \mathcal{D} es una pareja de funciones *denotadas por la misma letra T* tal que:

1. Una **función objeto** que asigna a cada objeto $C \in \mathcal{C}$ un objeto $T(C) \in \mathcal{D}$.
2. Una **función de morfismos** que asigna a cada morfismo $\gamma : C \rightarrow C'$ de \mathcal{C} un morfismo $T(\gamma) : T(C) \rightarrow T(C')$ de \mathcal{D} . Este par de funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$T(1_C) = \text{id}_{T(C)}, \quad C \in \mathcal{C},$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)T(\gamma), \quad \beta\gamma \text{ definido en } \mathcal{C}.$$

Es decir, un funtor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación que preserva el rango, dominio, identidades y composiciones de \mathcal{C} en \mathcal{D} .

2. Símplices y complejos simpliciales

Los espacios topológicos pueden llegar a ser complicados de estudiar. Los complejos simpliciales tienen la ventaja de ser estructuras fáciles de estudiar y definiéndolos en cierta forma como espacios topológicos admiten homeomorfismos a un gran número de espacios topológicos. En este capítulo nos centraremos en la definición y el estudio de estos objetos en profundidad en la línea de [Mun18] y lo complementaremos con alguna aportación de [Lee10].

2.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplex. Su sencillez y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplex y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo. Comenzamos recordando algunos conceptos de la geometría afín.

Como tan sólo será necesario trabajar en el espacio afín usual N -dimensional, lo notaremos simplemente por \mathbb{R}^N .

Definición 2.1. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N . Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^p t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_p$.

Definición 2.2. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el **plano afín** P generado por $\{a_0, \dots, a_p\}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i (a_i - a_0)$$

para algunos $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Diremos entonces que P es el plano que pasa por a_0 paralelo a los vectores $a_i - a_0$, $i \in \{1, \dots, p\}$.

Nótese que la transformación afín T de \mathbb{R}^N tal que $T(x) = x - a_0$ es una traslación que lleva el plano P al subespacio vectorial de \mathbb{R}^N con base $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$. Si componemos dicha transformación con una aplicación lineal que lleve cada vector $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_p - a_0$ a los primeros N vectores de la base usual, obtenemos una transformación afín $S : P \rightarrow \mathbb{R}^N \times \{0\}$ tal que $S(a_i) = (0, \overset{i-1}{\cdot}, 0, 1, 0, \overset{i+1}{\cdot}, 0)$ con $i \in \{1, \dots, p\}$.

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.3. Sea $\{a_0, \dots, a_p\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en \mathbb{R}^N . Definimos el **p-símplice** o **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ generado por a_0, \dots, a_p como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^p t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^p t_i = 1$$

con $t_i \geq 0, i \in \{0, \dots, p\}$.

Definición 2.4. Sea σ un p -símplice. A los términos t_0, \dots, t_p los llamamos las **coordenadas baricéntricas** de σ con respecto a a_0, \dots, a_p .

Proposición 2.1. Sea $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_p]$ un p -símplice. Entonces las coordenadas baricéntricas de cualquier $x \in \sigma$ están determinadas de manera única.

Demostración. Sea $y \in \sigma$ un punto arbitrario del p -símplice en \mathbb{R}^N . Como hemos definido nuestro símplice como combinación convexa de los puntos a_0, a_1, \dots, a_p tenemos que dichas coordenadas existen (además de ser no negativas) y son solución de la siguiente ecuación

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0p} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Np} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

donde $a_i = (a_{0i}, \dots, a_{Ni})^T$ con $0 \leq i \leq p$, $x = (t_0, t_1, \dots, t_p)^T$ e $y = (y_0, y_1, \dots, y_p)^T$. El superíndice T indica la matriz traspuesta.

En cuanto a la unicidad, basta suponer la existencia de otro $x' = (t'_0, t'_1, \dots, t'_p)^T$ tal que $Ax = y = Ax'$. Sin embargo, dicha igualdad se cumple si, y sólo si, $A(x - x') = 0$. Como a_0, a_1, \dots, a_p son afínmente independientes, tenemos que el determinante de A no puede ser 0 y por tanto A no puede ser la matriz nula. Nos queda que $x - x' = 0$ debe cumplirse luego $x = x'$. \square

Los puntos a_0, \dots, a_p que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número p lo llamaremos la **dimensión** de σ .

Definición 2.5. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ un símplice. Una **cara de dimensión p** de σ será cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \dots, a_p\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i , $i \in \{0, \dots, p\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ y lo notaremos $\text{Bd } \sigma$. Finalmente, definimos el **interior** de σ , $\text{Int } \sigma$, como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

Dado un símplice σ podemos definir un orden sobre sus vértices. Dos órdenes de σ los consideraremos equivalentes si podemos pasar de uno a otro con un número par de permutaciones. Así, los ordenamientos posibles para los vértices de σ se pueden agrupar en dos clases de equivalencia distintas, que definimos como las **orientaciones del símplice σ** .

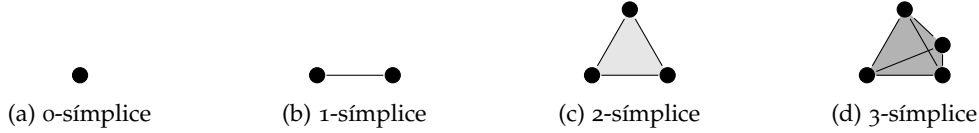


Figura 2.1.: Símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Definición 2.6. Decimos que un símplice $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_p]$ está **orientado** si se le ha asignado una de estas orientaciones. Utilizaremos $[a_0 a_1 \dots a_p]$ para denotar la clase de equivalencia dada por la orientación $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ del símplice generado por los vértices a_0, a_1, \dots, a_p .

2.2. Complejos simpliciales

La importancia de los complejos simpliciales reside en su capacidad para descomponer espacios topológicos en componentes manejables, permitiendo un análisis detallado de su estructura. Al considerar la forma en que estos símplices se conectan y orientan entre sí, los complejos simpliciales facilitarán la definición de cadenas y ciclos simpliciales que serán indispensables en el estudio de la homología simplicial.

Definición 2.7. Un **complejo simplicial** K en \mathbb{R}^N es una colección de símplices en \mathbb{R}^N tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos símplices de K es una cara de ambos símplices.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplices, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 2.1. Una colección K de símplices es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. La intersección dos a dos del interior de los símplices de K es disjunta.

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. Dados dos símplices $\sigma, \tau \in K$ veamos que si el interior de ambos tiene un punto x en común, entonces $\sigma = \tau$. Sea $s = \sigma \cap \tau$ y considero $x \in s$. Si s fuera una cara propia de σ , entonces x pertenecería a la frontera de σ , lo cual no se cumple ya que x pertenece al interior de σ . Por tanto $s = \sigma$. De manera análoga, $s = \tau$, luego $\sigma = \tau$.

Asumamos ahora que se cumplen (1) y (2). Queremos ver que si el conjunto $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, dicha intersección es la cara σ' de σ generada por los vértices b_0, \dots, b_m de σ que están en τ . Primero, $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$ por ser $\sigma \cap \tau$ convexa y contener a b_0, \dots, b_m . Para la otra inclusión supongamos que $x \in \sigma \cap \tau$. Esto implica que $x \in \text{Int } s \cap \text{Int } t$ para alguna cara s de σ y alguna cara t de τ . Se sigue de (2) que $s = t$ por lo que los vértices de s están en τ y por definición, son elementos del conjunto $\{b_0, \dots, b_m\}$. Concluimos entonces que s es una cara de σ' , lo que implica que $x \in \sigma'$, como queríamos ver. \square

2. Símplices y complejos simpliciales

Definición 2.8. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K .

Entre los subcomplejos de un complejo simplicial, cabe destacar el siguiente. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p . Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ lo llamaremos el **conjunto de vértices** de K .

Definición 2.9. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $|K|$ el subconjunto de \mathbb{R}^N tal que $|K|$ es la unión de todos los símlices de K . Definimos el **politopo o espacio subyacente** de K como el espacio topológico $(|K|, \mathcal{T})$ donde los abiertos de \mathcal{T} son aquellos $O \subseteq |K|$ tal que $O \cap \sigma$ es abierto en σ con la topología inducida de \mathbb{R}^N para todo $\sigma \in K$.

Veamos que en efecto $(|K|, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. $\emptyset, |K| \in \mathcal{T}$ ya que son abiertos trivialmente en σ , pues $\emptyset \cap \sigma = \emptyset$ y $|K| \cap \sigma = \sigma$ para todo $\sigma \in K$. Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, entonces $O_1 \cap \sigma, O_2 \cap \sigma$ son abiertos en σ luego $(O_1 \cap O_2) \cap \sigma = (O_1 \cap \sigma) \cap (O_2 \cap \sigma)$ es abierto en σ para todo $\sigma \in K$. Por tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, consideremos una familia $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ donde I es un conjunto de índices. Para cada $\sigma \in K$, $(\cup_{i \in I} O_i) \cap \sigma = \cup_{i \in I} (O_i \cap \sigma)$ que efectivamente es una unión arbitraria de abiertos de σ . En consecuencia, $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

En general, la topología de $|K|$ es más fina que la inducida de la topología usual de \mathbb{R}^N . Si A es cerrado en $|K|$ con la topología inducida de la usual, $A = B \cap |K|$ para algún cerrado B de \mathbb{R}^N y por tanto $B \cap \sigma$ sería cerrado en σ para cada símlice σ de K . Como consecuencia, $B \cap |K| = A$ es cerrado en $|K|$ con la topología \mathcal{T} definida anteriormente.

Si no hay lugar a confusión, simplemente notaremos al politopo de K por $|K|$ y lo llamaremos el **poliedro** $|K|$.

Lema 2.2. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua si, y sólo si, $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$.

Demostración. Si f es continua, también lo es $f|_{\sigma}$ por ser σ un subespacio de K . Supongamos ahora que $f|_{\sigma}$ es continua para cada $\sigma \in K$. Si C es un cerrado de X , $f^{-1}(C) \cap \sigma = f|_{\sigma}^{-1}(C)$ es un cerrado en σ por la continuidad de $f|_{\sigma}$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $|K|$ por definición. \square

Definición 2.10. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente es homeomorfo a X . Diremos entonces que el homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$ es una **triangulación**.

2.3. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 2.3. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación entre los conjuntos de vértices de K y L . Supongamos que siempre que los vértices v_0, \dots, v_n de K generen

un símple en K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símple de L . Entonces podemos extender f a una aplicación continua $g : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$$

Llamaremos a g la **aplicación simplicial** (lineal) inducida por f .

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple τ en L . Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$ es un punto de τ . Podemos ver que g es una aplicación continua del símple σ generado por v_0, \dots, v_n al símple τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$.

Ahora tan solo nos queda ver que $g : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Bien, pues por ser $g : \sigma \rightarrow \tau$ continua, también lo es $g : \sigma \rightarrow |L|$. Finalmente por el **Lema 2.2**, $g : |K| \rightarrow |L|$ es continua. \square

Lema 2.4. Supongamos que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símple de K si, y sólo si, $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo. Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L .

Demostración. Por hipótesis, cada símple $\sigma \in K$ se identifica con otro símple $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i)\right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(v_i) = \sum_{i=0}^n t_i v_i = x$$

\square

2.4. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simple, nos serán de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

Definición 2.11. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$.

Al elemento A de \mathcal{S} lo llamaremos **símple** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A . En cuanto a la **dimensión** de \mathcal{S} , diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de \mathcal{S} es infinita. El **conjunto**

2. Símplices y complejos simpliciales

de vértices V de \mathcal{S} diremos que es la unión de elementos de \mathcal{S} que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de \mathcal{S} a cualquier subcolección de \mathcal{S} que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos \mathcal{S}, \mathcal{T} respectivamente. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \rightarrow V_T$ tal que $\{a_0, \dots, a_p\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \dots, f(a_p)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 2.12. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \dots, a_p\} \subset V$ tales que los vértices a_0, \dots, a_p generan un símplex de K . Entonces llamaremos a la colección \mathcal{K} el **esquema de vértices** de K .

Después de realizar todas las definiciones pertinentes, ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (a) *Todo complejo abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .*
- (b) *Dos complejos simpliciales son afínmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.*

Demostración. Para demostrar (a), empezaremos tomando un conjunto de índices J . Llamemos \mathbf{E}^J al subconjunto de funciones $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^J tales que $x(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in J$ excepto para un número finito de valores. Sea Δ^J la colección de todos los símplexes en \mathbf{E}^J generados por subconjuntos finitos de la base usual de \mathbf{E}^J . Δ^J es un complejo simplicial. Sean entonces σ, τ símplexes de Δ^J , la unión de sus conjuntos de vértices es afínmente independiente y genera un símplex en Δ^J . Diremos que Δ^J es un **símplex de dimensión infinita**.

Sea ahora \mathcal{S} un complejo abstracto con conjunto de vértices V . Tomamos un conjunto de índices J lo bastante grande para que podamos tomar una aplicación inyectiva $f : V \rightarrow J$. A continuación, vamos a tomar un subcomplejo de Δ^J tal que para cada símplex abstracto $\{a_0, \dots, a_p\} \in \mathcal{S}$, el símplex (geométrico) generado por $f(a_0), \dots, f(a_p)$ está en K . Por tanto K es un complejo simplicial y f es un isomorfismo entre \mathcal{S} y el esquema de vértices de K .

En cuanto a (b), es una consecuencia inmediata del **Lema 2.4**. □

Definición 2.13. Si el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K , diremos que K es una **realización geométrica** de \mathcal{S} .

3. Homología

Mediante el uso de estructuras algebraicas como grupos y complejos de cadenas, la homología asigna a cada espacio topológico una serie de grupos de homología, que reflejan características clave como agujeros y vacíos en diferentes dimensiones. Estos grupos permiten no sólo discernir la estructura interna de los espacios, sino también compararlos de manera abstracta. Usaremos de referencia [Mac12].

3.1. Grupos diferenciales

Comenzaremos definiendo lo que es un grupo de homología y estableceremos la terminología que emplearemos cuando trabajemos con ellos.

Definición 3.1. Sea C un grupo abeliano junto a un endomorfismo $d : C \rightarrow C$ tal que $d^2 = d \circ d = 0$. Diremos entonces que C es un **grupo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C .

Llamaremos a los elementos de C **cadenas**. El subgrupo de **ciclos** será $Z(C) = \ker d$, y el subgrupo de **bordes** $B(C) = \operatorname{Im} d$. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

Definición 3.2. Sea C un grupo diferencial. Definimos el **grupo de homología** de C como el grupo cociente $H(C)$ tal que

$$H(C) = \frac{Z(C)}{B(C)}$$

Por tanto, el grupo de homología de un grupo diferencial C está formado por las clases laterales $[c] = c + B(C)$ donde c es un ciclo de C . A los elementos de $H(C)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Definición 3.3. Sean C y C' dos grupos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \rightarrow C'$ es un **homomorfismo de grupos diferenciales** si f es un homomorfismo de grupos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del grupo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$ que sea un ciclo o un borde y $f : C \rightarrow C'$ es un homomorfismo de grupos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente.

Los grupos diferenciales definen una categoría donde los objetos son los grupos diferenciales y los morfismos son los homomorfismos de grupos diferenciales. Tomamos como ley de

3. Homología

composición interna la composición de dichos homomorfismos. Claramente es asociativa pues si $C, C', \bar{C}, \tilde{C} \in \text{Obj}()$ y $f : C \rightarrow C', g : C' \rightarrow \bar{C}, h : \bar{C} \rightarrow \tilde{C}$, entonces $h \circ (g \circ f)$ se cumple si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h \circ (g \circ f)) &= (\tilde{d}h) \circ (g \circ f) \\ &= (h\tilde{d}) \circ (g \circ f) = h \circ (\tilde{d}g) \circ f \\ &= h \circ (gd') \circ f = h \circ g \circ (d'f) \\ &= h \circ g \circ (fd) = (h \circ g) \circ fd \\ &= ((h \circ g) \circ f)d \end{aligned}$$

y por tanto $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. La propiedad de identidad se sigue de existir el homomorfismo identidad de grupos.

Definición 3.4. Sean C, C' grupos diferenciales y $f : C \rightarrow C'$ un homomorfismo de grupos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C) \rightarrow H(C')$ tal que

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f .

Proposición 3.1. En estas condiciones, H es un funtor covariante de la categoría de grupos diferenciales a la categoría de grupos.

Demostración. Por la definición dada del grupo de homología, es claro que la función objeto H asigna a cada grupo diferencial C un grupo de homología $H(C)$. En cuanto a la función de morfismos, la identidad de grupos diferenciales se preserva pues $H(\text{id})([c]) = \text{id}_*([c]) = [\text{id}(c)] = [c]$ para todo $c \in C$. Además, si $f, g \in \text{hom}(C)$, entonces $H(g \circ f)([c]) = (g \circ f)_*([c]) = [(g \circ f)(c)] = [g(f(c))] = g_*([f(c)]) = g_*(f_*([c])) = (H(g) \circ H(f))([c])$ para todo $c \in C$, manteniendo la ley de composición. \square

3.2. Complejos de cadenas

Definición 3.5. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** C_\bullet de R -módulos es una familia $\{C_n, \partial_n\}$ donde C_n son R -módulos y $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ homomorfismos de R -módulos tales que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nota. Usualmente notaremos directamente ∂ al homomorfismo ∂_n independientemente del valor de n siempre y cuando se sobreentienda por el contexto.

Observación 3.1. La última condición es equivalente a que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$.

Un complejo C_\bullet es por tanto una sucesión doblemente infinita

$$C_\bullet : \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow C_{-1} \rightarrow \cdots$$

donde toda composición de homomorfismos de dicha familia es el homomorfismo nulo. La

homología $H(C_\bullet)$ es la familia de R -módulos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

donde $H_n(C_\bullet)$ es el n -ésimo módulo de homología de C_\bullet .

Luego $H_n(C_\bullet) = 0$ implica que la sucesión C_\bullet es exacta en C_n . A los elementos de C_n los llamaremos **n-cadenas** o **cadenas de dimensión n**. Un **n-ciclo** o **ciclo de dimensión n** de C_\bullet es un elemento del submódulo $Z_n(C_\bullet) = \ker \partial_n$. Un **n-borde** o **borde de dimensión n** es un elemento de $B_n(C_\bullet) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. Si la dimensión se sobrentiende en estos casos, no es necesario indicarla de manera explícita. La clase lateral de un ciclo c la notaremos por $[c] = c + \partial C_{n+1}$. Dos n -ciclos $c, c' \in C_n$ pertenecientes a la misma clase lateral $[c]$ decimos que son **homólogos**, es decir, $c \sim c'$.

Definición 3.6. HACER BIEN Sea $\{C_\bullet^i, \partial_i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Su **suma directa** $\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i$ la definimos como el complejo de cadenas $\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i$ cuyos operadores borde vienen dados por $\bigoplus_{i \in I} \partial_n^i : \bigoplus_{i \in I} C_n^i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_{n-1}^i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.2. Sea $\{C_\bullet^i, \partial_i\}_{i \in I}$ una familia de complejos de cadenas. Entonces su homología conmuta con la suma directa, esto es, $H_n(\bigoplus_{i \in I} C_\bullet^i) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(C_\bullet^i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para demostrar que el homomorfismo log conmuta con sumas directas, queremos mostrar que para una colección de complejos de cadenas $\{(C_i, d_i)\}_{i \in I}$, el isomorfismo

$$\phi : H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(C_i) : [(c_i)] \mapsto ([c_i]),$$

y su inverso

$$\psi : \bigoplus_{i \in I} H_n(C_i) \rightarrow H_n \left(\bigoplus_{i \in I} C_i \right) : ([c_i]) \mapsto [(c_i)],$$

están bien definidos y son inversos mutuos.

En primer lugar, para establecer la bien definición, observamos que $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si y solo si $[0] = [(c_i - c'_i)]$. Esto ocurre si y solo si existe un $b_i \in C_i$ tal que $d_i(b_i) = (c_i - c'_i)$, lo cual es equivalente a $c_i + d_i(b_i) = c'_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si y solo si $\phi([(c_i)]) = \phi([(c'_i)]) = [(c'_i + d_i(b_i))] = [(c'_i)]$. De manera similar, $[(c_i)] = [(c'_i)]$ si y solo si $\psi([(c_i)]) = \psi([(c'_i)])$. Por lo tanto, tanto ϕ como ψ están bien definidos.

En segundo lugar, es evidente que tanto ϕ como ψ son homomorfismos de grupos abelianos. Además, ϕ mapea $[(c_i)]$ a $[(c_i)]$, y ψ mapea $[(c_i)]$ a $[(c_i)]$, lo que demuestra que son inversos entre sí.

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo con ψ como su inverso, estableciendo que $\bigoplus_{i \in I} H_n(C_i) \cong H_n(\bigoplus_{i \in I} C_i)$. \square

Definición 3.7. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas. Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas** $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una familia de homomorfismos de R -módulos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ tal que $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. Homología

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & C_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & C_{n+1} \longleftarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\
 \cdots & \longleftarrow & C'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & C'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & C'_{n+1} \longleftarrow \cdots
 \end{array}$$

Cuando se sobreentienda del contexto, notaremos simplemente por ∂ a los correspondientes ∂_n y ∂'_n .

La función $H_n(f) = f_*$ definida por $f_*([c]) = f_*(c + \partial C_{n+1}) = fc + \partial C'_{n+1}$ es un homomorfismo $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$. Así mismo, cada H_n es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas y morfismos de cadenas a la categoría de módulos.

Definición 3.8. Sean C_\bullet, C'_\bullet complejos de cadenas y $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ dos aplicaciones de cadenas entre ellos. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** s es una familia de homomorfismos de módulos $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$$

Diremos entonces que f y g son **algebraicamente homotópicas** y escribiremos $f \simeq g$.

Teorema 3.1. Si s es una homotopía de cadenas entre $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, entonces

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$$

Demostración. Si c es un ciclo de C_n , tenemos que $\partial_n c = 0$. Por la Def. 3.8 se cumple que $f_n c - g_n c = \partial s_n c$. Como consecuencia $f_n c$ y $g_n c$ son homólogos lo que implica que $[f_n c] = [g_n c]$ en $H_n(C'_\bullet)$, como queríamos demostrar. \square

Definición 3.9. Una aplicación de cadenas $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una **equivalencia de cadenas** si existe otra aplicación $h : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ y homotopías $s : h \circ f \rightarrow \text{id}_{C_\bullet}$, $t : f \circ h \rightarrow \text{id}_{C'_\bullet}$ tales que $h \circ f \simeq \text{id}_{C_\bullet}$, $f \circ h \simeq \text{id}_{C'_\bullet}$.

Como $H_n(\text{id}_{C_\bullet}) = \text{id}_{H_n(C_\bullet)}$, del anterior teorema se deduce lo siguiente.

Corolario 3.1. Si $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ es una equivalencia de cadenas, la aplicación inducida $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ es un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.3. Sean $f, g : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ y $f', g' : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. Sean $s : f \rightarrow g$, $s' : f' \rightarrow g'$ homotopías de cadenas entre ellas tales que $f \simeq g$, $f' \simeq g'$. Entonces la composición

$$f's + s'g : f' \circ f \rightarrow g' \circ g \quad g' \circ g : C_\bullet \rightarrow C''_\bullet$$

es una homotopía de cadenas.

Demostración. Por ser s, s' homotopías de cadenas tenemos que $\partial s + s\partial = f - g$ y $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Aplicando f' a la izquierda de la primera expresión y g a la derecha de la segunda

nos queda

$$\begin{cases} f'\partial s + f's\partial = f' \circ f - f' \circ g \\ \partial s'g + s'\partial g = f' \circ g - g' \circ g \end{cases}$$

Sumando ambas igualdades

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - f' \circ g + f' \circ g - g' \circ g$$

$$f'\partial s + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - g' \circ g$$

$$\partial f's + f's\partial + \partial s'g + s'\partial g = f' \circ f - g' \circ g$$

$$\partial(f's + s'g) + (f's + s'g)\partial = f' \circ f - g' \circ g$$

□

3.3. Subcomplejos y complejos cociente

Definición 3.10. Un **subcomplejo** S_\bullet de C_\bullet es una familia de submódulos $S_n \subset C_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial S_n \subset S_{n-1}$.

Por tanto, S_\bullet es un complejo en sí con el operador borde ∂ inducido de C_\bullet y la inclusión $i : S_\bullet \rightarrow C_\bullet$ es una aplicación de cadenas.

Definición 3.11. Sea S_\bullet un subcomplejo de C_\bullet . El **complejo cociente** C_\bullet/S_\bullet es la familia $(C_\bullet/S_\bullet)_n = C_n/S_n$ de módulos cocientes con operador borde $\partial'_n : C_n/S_n \rightarrow C_{n-1}/S_{n-1}$ inducido por ∂_{C_\bullet} .

Definición 3.12. Sean $f : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, $g : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ aplicaciones de cadenas. La sucesión de complejos

$$C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$$

es **exacta** en C'_\bullet si $\text{Im}(f) = \ker(g)$; es decir, si cada sucesión $C_n \xrightarrow{f_n} C'_n \xrightarrow{g_n} C''_n$ de módulos es exacta en C'_n .

Definición 3.13. Un complejo C_\bullet es **positivo** si $C_n = 0$ para todo $n < 0$ con $n \in \mathbb{Z}$. Su n -ésimo módulo de homología es entonces positivo ya que $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo $n < 0$. De manera análoga, un complejo C_\bullet es **negativo** si $C_n = 0$ para todo $n > 0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Los complejos negativos suelen notarse con índices superiores positivos donde C_{-n} se sustituye por C^n y $\partial_{-n} : C_{-n} \rightarrow C_{-n-1}$ por $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ quedando así

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \rightarrow \dots, \quad \delta \circ \delta = 0$$

donde el n -ésimo módulo de homología $H^n(C_\bullet) = \ker(\delta^n)/\text{Im}(\delta^{n-1})$ es positivo en los índices superiores. A dicho complejo lo llamaremos **complejo de cocadenas**.

Definición 3.14. Sea C_\bullet un complejo positivo de R -módulos. Denominaremos **aumento de** C_\bullet al homomorfismo sobreyectivo $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ de forma que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

3. Homología

Definición 3.15. Sea C_\bullet un complejo de cadenas positivo, $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$ un aumento de C_\bullet y sea $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el complejo positivo \tilde{C}_\bullet tal que $\tilde{C}_n = C_n$ para todo $n \geq 0$, $\tilde{C}_n = 0$ para todo $n < -1$ y $\tilde{C}_{-1} = R$. Consideremos también $\tilde{\partial}_n = \partial_n$ para todo $n \geq 1$ y $\tilde{\partial}_0 = \varepsilon$. Llamaremos a este complejo **complejo aumentado** de C_\bullet .

Definición 3.16. Sean f y g aplicaciones de cadenas de C_\bullet a C'_\bullet y sea s una homotopía de cadenas entre ellas. Diremos que s es una **homotopía de cocadenas** si está escrita con índices superiores. Esto es, $s^n : C^n \rightarrow C'^{n-1}$ con $\delta s + s\delta = f - g$.

Definición 3.17. Sea A un módulo. Definimos el siguiente complejo positivo donde $A_0 = A$, $A_n = 0$ para $n \neq 0$ y $\partial = 0$. Un **complejo sobre** A es un complejo positivo C_\bullet junto con una aplicación de cadenas $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ donde ε es un homomorfismo de módulos $\varepsilon : C_0 \rightarrow A$ tal que $\varepsilon\partial = 0 : C_1 \rightarrow A$.

Definición 3.18. Una **homotopía contráctil** para $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ es una aplicación de cadenas $f : A \rightarrow C_\bullet$ tal que $\varepsilon f = \text{id}_A$ junto con una homotopía $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow f\varepsilon$ donde $\text{id}_{C_\bullet} \simeq f\varepsilon$. En otras palabras, una homotopía contráctil consiste en homomorfismos de módulos $f : A \rightarrow C_0$ y $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$, tal que

$$\varepsilon f = \text{id}_A, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = \text{id}_{C_0}, \quad \partial_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = \text{id}_{C_n} \quad n > 0$$

Podemos extender el complejo estableciendo $C_{-1} = A$, $\partial_0 = \varepsilon : C_0 \rightarrow C_{-1}$ y $s_{-1} = f$. Aplicando la Def. 3.18, $s : \text{id}_{C_\bullet} \rightarrow 0$ es una homotopía de cadenas. Si $\varepsilon : C_\bullet \rightarrow A$ tiene una homotopía contráctil, sus grupos de homología son isomorfos por $\varepsilon_* : H_0(C_\bullet) \rightarrow A$ para $n = 0$ y $H_n(C_\bullet) = 0$ para $n > 0$.

Los complejos C_\bullet de \mathbb{Z} -módulos libres surgen en topología. Si cada C_n es finitamente generado, entonces cada $H_n(C_\bullet)$ es un grupo abeliano finitamente generado. El teorema de estructura para tales grupos presenta $H_n(C_\bullet)$ como una suma directa

$$\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

donde el número β_n de sumandos cíclicos infinitos y los enteros m_1, \dots, m_k (cada uno divisor del siguiente) dependen solo de $H_n(C_\bullet)$. El entero β_n lo llamaremos el **n-ésimo número de Betti** de C_\bullet y a los $\{m_i\}$ los **n-ésimos coeficientes de torsión**.

4. Homología simplicial

4.1. Homología simplicial orientada

Definición 4.1. Sea K un complejo simplicial y R un anillo conmutativo. Una p -cadena en K sobre R es una función c del conjunto de p -símplices orientados de K al anillo R tal que:

1. $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' representan al mismo símplice con orientaciones opuestas.
2. $c(\sigma) = 0$ para casi todo símplice orientado σ .

Dado un p -símplice $\sigma^p \in K$ donde K es un complejo simplicial y sean σ_1^p y σ_2^p las dos posibles orientaciones de σ^p . Dado un anillo R , denotaremos por $C_p(K; R)$ al cociente del R -módulo libre con base todos los p -símplices orientados de K por el submódulo generado por los elementos $\sigma_1^p + \sigma_2^p$. Si $p < 0$ o $p > \dim K$, $C_p(K, R)$ será el R -módulo trivial. Llamaremos a $C_p(K; R)$ el R -módulo de las p -cadenas simpliciales orientadas de K .

Observación 4.1. La definición anterior nos permite trabajar con los símplices y las orientaciones de una forma algebraica. Así, si tomamos un símplice σ de K con una orientación $\sigma_1 \in C_p(K, R)$ y $\sigma_2 \in C_p(K, R)$ es su orientación opuesta, éste último es simplemente $\sigma_2 = -\sigma_1$. A2.16

Definición 4.2. Sea K un complejo simplicial y sean $C_p(K; R), C_{p-1}(K; R)$ R -módulos de p -cadenas. Definimos el **operador borde de p -cadenas** como el homomorfismo $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$ tal que

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p([v_0, v_1, \dots, v_p]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p].$$

donde \hat{v}_i denota el vértice a eliminar.

Debemos verificar que ∂_p esté bien definido y que $\partial_p(-\sigma) = -\partial_p\sigma$. Para este propósito, basta con mostrar que el lado derecho de (*) cambia de signo si intercambiamos dos vértices adyacentes en el arreglo $[v_0, \dots, v_p]$. Así que comparemos las expresiones para

$$\partial_p[v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p]$$

y

$$\partial_p[v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_p].$$

Para $i \neq j, j+1$, los términos i -ésimos en estas dos expresiones difieren precisamente por un signo; los términos son idénticos excepto que v_j y v_{j+1} han sido intercambiados.

¿Qué pasa con los términos i -ésimos para $i = j$ y $i = j+1$? En la primera expresión, uno tiene

$$(-1)^j [\dots, v_j, \hat{v}_j, v_{j+1}, \dots] + (-1)^{j+1} [\dots, v_j, v_{j+1}, \hat{v}_{j+1}, \dots].$$

4. Homología simplicial

En la segunda expresión, uno tiene

$$(-1)^j[\dots, v_{j+1}, \hat{v}_{j+1}, v_j, \dots] + (-1)^{j+1}[\dots, v_{j+1}, v_j, \hat{v}_j, \dots].$$

Comparando, se ve que estas dos expresiones difieren por un signo.

Lema 4.1. *La definición de ∂_p no depende de la permutación que define $[v_0 \dots v_p]$. De hecho, si σ_1^p y σ_2^p son las dos orientaciones de σ^p tenemos que*

$$\partial_p(\sigma_1^p + \sigma_2^p) = 0$$

Demostración. Para ello probaremos que la suma de la imagen por el operador borde de $\sigma_1 = [v_0 v_1 \dots v_p]$ y $\sigma_2 = [v_1 v_0 \dots v_p]$ es igual a 0. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned}\partial_p \sigma_1 &= [v_1 v_2 \dots] - [v_0 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_0 v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_n] \\ \partial_p \sigma_2 &= [v_0 v_2 \dots] - [v_1 v_2 \dots] + \sum_{i \neq 0,1} (-1)^i [v_1 v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]\end{aligned}$$

Al sumar ambas expresiones, los dos primeros términos de $\partial_p \sigma_1$ y $\partial_p \sigma_2$ se cancelan entre sí. Como consecuencia de la definición de $C_{p-1}(K; R)$, los términos restantes definen orientaciones opuestas del mismo simple por lo que se cancelan y $\partial_p(\sigma_1^p + \sigma_2^p) = 0$. \square

Lema 4.2. *Sean $\partial_p : C_p(K, R) \rightarrow C_{p-1}(K, R)$, $\partial_{p-1} : C_{p-1}(K, R) \rightarrow C_{p-2}(K, R)$ operadores borde. Entonces $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\partial_{p-1} \partial_p [v_0, \dots, v_p] &= \partial_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left[\sum_{j>i}^p (-1)^{j-1} [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_p] + \sum_{j=0}^{j<i} (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right].\end{aligned}$$

Es decir, el simple $[v_0 \dots, \hat{v}_k \dots, \hat{v}_t \dots, v_p]$ aparece dos veces en la anterior expresión con signos opuestos, donde $k, t \in \{0, \dots, p\}$. Esto nos lleva a discutir los siguientes casos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < t$. En el primer caso, $i = k < j = t$ donde el coeficiente es $(-1)^k (-1)^{t-1}$. En el segundo caso, $i = t > j = k$ con coeficiente $(-1)^t (-1)^k$. Concluimos por tanto que todo simple de la expresión se anula y al anularse sobre los generadores, $\partial_{p-1} \partial_p$ es el homomorfismo nulo. \square

Definición 4.3. El complejo de cadenas positivo $C_*(K; R) = \{C_p(K; R), \partial_p\}$ lo llamaremos **complejo de cadenas simpliciales** de K . La homología de dicho complejo la notaremos por $H_p(K; R)$ y la llamaremos **p -ésimo R -módulo de homología** de K .

Si $R = \mathbb{Z}$, $H_p(K; \mathbb{Z})$ lo notaremos simplemente por $H_p(K)$ y diremos que es el **p -ésimo grupo de homología** de K .

Proposición 4.1. Sea K un complejo simplicial no vacío. Entonces el complejo de cadenas positivo $\{C_p(K; R), \partial_p\}$ admite un aumento.

Demostración. Sea $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$ el homomorfismo que extiende linealmente $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice $v \in K$. Veamos que $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1(K; R) \rightarrow R$ es nulo. Tomando $[v_0, v_1] \in C_1(K; R)$ obtenemos que $\varepsilon \partial_1[v_0, v_1] = \varepsilon(v_1 - v_0) = 1 - 1 = 0$, como queríamos ver. \square

Definición 4.4. Sea $\tilde{C}(K; R)$ el complejo aumentado del complejo de cadenas simpliciales $C(K; R)$. Denominaremos **p -ésimo homología reducida** de C al módulo de homología $H_p(\tilde{C})$ y lo denotaremos por $\tilde{H}(C)$.

Esta aplicación está claramente bien definida; intercambiar dos vértices en la expresión $[v_0, \dots, v_k]$ cambia el signo del lado derecho de la ecuación. La familia de homomorfismos $\{\hat{f}\}$, uno en cada dimensión, se denomina mapa de cadena inducido por la aplicación simplicial f .

Proposición 4.2. Sean K y L dos complejos simpliciales junto con una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$. Esta aplicación induce un homomorfismo entre los complejos de cadenas, $C(\varphi)$, el cual se define extendiendo linealmente la función de la siguiente manera:

$$C(\varphi)[v_0, \dots, v_p] = \begin{cases} [\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)] & \text{si los vértices son distintos entre sí,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, si φ es la identidad, entonces $C(\varphi)$ es simplemente la identidad también. Además, si $\psi : L \rightarrow M$ es otra aplicación simplicial, se cumple que $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi) \circ C(\varphi)$.

Demostración. Para demostrar esto, primero observamos que la definición de $C(\varphi)$ es independiente de la orientación de los símlices. Luego, verificamos la igualdad $\partial_p \circ C(\varphi) = C(\varphi) \circ \partial_p$. Si no hay vértices repetidos, se tiene que:

$$\begin{aligned} C(\varphi)\partial_p([v_0 \dots v_p]) &= C(\varphi) \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i [\varphi(v_0) \dots \widehat{\varphi(v_i)} \dots \varphi(v_p)] = \partial_p C(\varphi)([v_0 \dots v_p]). \end{aligned}$$

Si hay vértices repetidos, digamos $\varphi(v_i) = \varphi(v_j)$, entonces $\partial_p C(\varphi)([v_0 \dots v_p]) = 0$. Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i C(\varphi)([v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]) = 0$$

debido a que $C(\varphi)([v_0 \dots \hat{v}_k \dots v_p]) = 0$ para $k \neq i, j$ y cuando $i < j$,

$$(-1)^i [\varphi(v_0) \dots \widehat{\varphi(v_i)} \dots \varphi(v_j) \dots \varphi(v_p)] + (-1)^j [\varphi(v_0) \dots \varphi(v_i) \dots \widehat{\varphi(v_j)} \dots \varphi(v_p)] = 0$$

también se anula. Esto se debe a que si no hay más vértices repetidos, como $\varphi(v_i) = \varphi(v_j)$, el número de trasposiciones necesarias para cambiar de un símplex orientado al otro es $j - i - 1$, dado que $\varphi(v_j)$ ocupa el lugar $j - 1$ en el primer símplex. La fórmula $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi)C(\varphi)$ se sigue directamente de la definición de $C(\varphi)$. \square

4. Homología simplicial

Definición 4.5. Sea $\varphi : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial y sea $C(\varphi) : C(K; R) \rightarrow C(L; R)$ una aplicación de cadenas definida como en la **Proposición 4.2**. Llamaremos a $C(\varphi)$ la **aplicación de cadenas inducida por φ** y la notaremos por $\varphi_{\#}$.

Corolario 4.1. Toda aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ induce un homomorfismo de R -módulos

$$\varphi_* : H_p(K; R) \rightarrow H_p(L; R)$$

que cumple que si $\psi : L \rightarrow M$ es otra aplicación simplicial, entonces $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ e $\text{id}_* = \text{id}$.

Observación 4.2. La última implicación del corolario se traduce en que tenemos un funtor covariante que va de la categoría de complejos simpliciales con los homeomorfismos simpliciales a la categoría de grupos abelianos con los homomorfismos.

Lema 4.3. La aplicación de cadenas $f_{\#} : C(K; R) \rightarrow C(L; R)$ preserva el homomorfismo de aumento y como resultado, induce un homomorfismo $f_{\#}$ de módulos de homología reducida.

Demostración. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial, $f_{\#}$ su aplicación de cadenas inducida y sean $\varepsilon : C_0(K; R) \rightarrow R$, $\varepsilon : C_0(L; R) \rightarrow R$ aumentos de $C(K; R), C(L; R)$ respectivamente. Llamemos indistintamente ε a ambos aumentos en función del dominio en el que nos encontremos. Ahora definamos $\varepsilon f_{\#}(v) = 1$ y $\varepsilon(v) = 1$ para todo vértice de K y extendamos por linealidad. Por consiguiente $\varepsilon \circ f_{\#} = \varepsilon$. Esta ecuación implica que $f_{\#}$ lleva el núcleo de $\varepsilon_K : C_0(K; R) \rightarrow R$ al núcleo de $\varepsilon_L : C_0(L; R) \rightarrow R$, lo que induce un homomorfismo $f_* : \tilde{H}_0(K; R) \rightarrow \tilde{H}_0(L; R)$. \square

Teorema 4.1. Sean φ, ψ aplicaciones simpliciales de K a L ; $\varphi_{\#}, \psi_{\#}$ sus aplicaciones de cadenas inducidas y sea $s : \varphi_{\#} \rightarrow \psi_{\#}$ una homotopía de cadenas entre ellas. Entonces los homomorfismos inducidos φ_*, ψ_* para sus módulos de homología son iguales.

Demostración. Sea z un p -ciclo de K . Entonces

$$\psi_*(z) - \varphi_*(z) = \partial sz + s\partial z = \partial sz + 0$$

por lo que $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ tienen la misma clase de homología. Por tanto, $\varphi_*([z]) = \psi_*([z])$ como se quería. \square

4.2. Algunos resultados de homología simplicial

Definición 4.6. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N y sea $w \in \mathbb{R}^N$ tal que cada semirrecta con origen w corta a $|K|$ a lo sumo en un punto. Definimos el **cono sobre K con vértice w** como la colección de vértices w, v_0, v_1, \dots, v_p donde v_0, v_1, \dots, v_p forman un símplex en K junto a todas las caras de dichos símplexes. Lo denotaremos por $w \star K$.

Lema 4.4. El cono $w \star K$ es un complejo simplicial.

Demostración. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un símplex de K . Primero veamos que el conjunto $\{w, v_0, \dots, v_p\}$ es afínmente independiente. Si w perteneciera al plano P generado por los

puntos v_0, \dots, v_p , podríamos considerar el segmento que une w con un punto de $x \in \text{Int } \sigma$. Dicho conjunto, por ser abierto en P , contendría un intervalo de puntos en el segmento, contradiciendo la hipótesis de que las semirrectas que parten de w cortan a lo sumo en un punto a $|K|$.

Veamos ahora que $w \star K$ es un complejo simplicial. Los símlices de $w \star K$ pueden ser de tres tipos:

1. Símlices v_0, \dots, v_p pertenecientes a K .
2. Símlices de la forma wv_0, \dots, v_p .
3. El 0-símplex w .

Si σ, τ son símlices del primer tipo, entonces $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ puesto que K es un complejo simplicial. El símplex $\text{Int } wv_0, \dots, v_p$ es la unión de todos los segmentos abiertos que unen w con v_0, \dots, v_p , luego dos símlices de esta forma tienen intersección vacía pues las semirrectas que parten de w cortan a K a lo sumo en un punto. Finalmente, si σ es del primer tipo y τ del segundo, $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau = \emptyset$ por el mismo argumento recién dado. \square

Proposición 4.3. Sea K un complejo simplicial y sea $w \star K$ el cono sobre K de vértice w . Entonces la homología orientada de $w \star K$ es $H_p(w \star K; R) = 0$ para todo $p \neq 0$ y $H_0(w \star K; R) \cong R$. En el caso de la homología reducida, $\tilde{H}_0(w \star K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $D = \{D_p, \partial_p\}$ un complejo de cadenas tal que $D_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $D_0 = R$. Definimos la aplicación de cadenas $f : D \rightarrow C(w \star K; R)$ de forma que $f_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $f_0(r) = rw$. Por otro lado, por la **Proposición 4.1** podemos definir el aumento $\varepsilon : C(w \star K; R) \rightarrow D$ dado por $\varepsilon_p = 0$ para todo $p \neq 0$ y $\varepsilon_0(v) = 1$ para todo vértice v del cono. Nuestro objetivo es ver que efectivamente f es una equivalencia de cadenas junto a ε . De manera directa tenemos que $\varepsilon \circ f = \text{id}_D$, luego $\varepsilon \circ f \simeq \text{id}_D$. Veamos ahora que $f \circ \varepsilon$ es homotópica a la identidad. Para ello vamos a definir s como la familia $\{s_p\}$ de homomorfismos $s_p : C_p(w \star K; R) \rightarrow C_{p+1}(w \star K; R)$ tal que

$$s_p([v_0 \dots v_p]) = \begin{cases} [w, v_0 \dots v_p] & \text{si } v_i \neq w \quad 0 \leq i \leq p, \quad p \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

induce una extensión lineal. Dicha familia está bien definida para $C_p(w \star K; R)$. Veamos que $\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p = \text{id}_{C_p(w \star K; R)} - f_p\varepsilon_p$ se cumple por lo que s es una homotopía de cadenas. Para el caso en que $p \in \mathbb{Z}$ es menor que 0 se cumple de manera trivial. Si $p = 0$ distinguimos dos casos. Cuando $v \neq w$ tenemos que $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = \partial_1 [w, v] = v - w = (\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v)$. Por el contrario si $v = w$, $(\partial_1 s_0 + s_{-1} \partial_0)(v) = 0$ y también $(\text{id}_0 - f_0 \varepsilon_0)(v) = \text{id}_0(w) - (f_0 \varepsilon_0)(w) = w - w = 0$. Por último, veamos que sucede cuando $p > 0$. Supongamos primero que $w \neq v_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= \partial_{p+1}[w, v_0 \dots v_p] + s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= [v_0 \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} [w, v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] + \sum_{i=0}^p (-1)^i [w, v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \\ &= [v_0 \dots v_p] = (\text{id}_{C_p} - f_p \varepsilon_p)[v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

4. Homología simplicial

Finalmente si $w = v_{i_0}$ para algún i_0 entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p)[v_0 \dots v_p] &= s_{p-1}\partial_p[v_0 \dots v_p] = s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p] \right) \\ &= (-1)^{i_0} s_{p-1}[v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = (-1)^{i_0} [w, v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] \\ &= (-1)^{i_0} [v_{i_0}, v_0 \dots \hat{v}_{i_0} \dots v_p] = [v_0 \dots v_p]. \end{aligned}$$

Es decir, $f \circ \varepsilon \simeq \text{id}_{C(w \star K; R)}$ y por el **Corolario 3.1** induce un isomorfismo $\varepsilon_* : H_p(w \star K; R) \rightarrow H_p(D)$.

Para el caso reducido consideremos el complejo aumentado D dado por el aumento $\text{id}_R : D_0 \rightarrow R$. Como consecuencia, la homología de \tilde{D} es trivial. Además, podemos extender los homomorfismos ε y f a homomorfismos $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} para los complejos aumentados de forma que $\tilde{\varepsilon}_{-1} = \tilde{f}_{-1} = \text{id}_R$. Por la misma homotopía s obtenemos que $\tilde{\varepsilon}$ y \tilde{f} son equivalencias homotópicas entre los complejos aumentados y por tanto, $\tilde{H}_p(w \star K; R) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. \square

Corolario 4.2. *La homología simplicial reducida de cualquier símplice es nula.*

Corolario 4.3. *Sea σ un n -símplice y sea $\text{Bd } \sigma$ su borde. Entonces $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ es trivial si $p = n - 1$ y $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) \cong R$. Además, para el caso no trivial un generador es la clase de la cadena $\partial(\sigma)$.*

Demostración. Dado el símplice anterior, los complejos de cadenas aumentados de σ y su borde coinciden hasta dimensión $p \leq n - 1$. Por el **Corolario 4.2** deducimos que $\tilde{H}_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \leq n - 2$. Además, $C_p(\text{Bd } \sigma; R) = 0$ para $p \geq n$. Por lo tanto, $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R) = \ker \partial_{n-1}$. Aquí, ∂_{n-1} representa el operador borde en ambos complejos aumentados (es decir, $\partial_0 = \varepsilon$ indica el aumento). Dado que el complejo aumentado de σ tiene homología trivial, entonces $\ker \partial_{n-1} = \text{Im } \partial_n$, y además ∂_n es inyectivo donde el operador borde $\partial_n : C_n(\sigma; R) \rightarrow C_{n-1}(\sigma; R) = C_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$ aparece en el complejo de σ . Puesto que $C_n(\sigma; R)$ es isomorfo a R generado por σ , se sigue que $\text{Im } \partial_n$, y por tanto $\tilde{H}_{n-1}(\text{Bd } \sigma; R)$, es isomorfo a R generado por $\partial(\sigma)$. \square

4.3. Sucesión de Mayer-Vietoris

Lema 4.5 (Lema zig-zag). *Sean $A = \{A_n, \partial_A\}$, $B = \{B_n, \partial_B\}$ y $C = \{C_n, \partial_C\}$ complejos de cadena y sean f, g aplicaciones de cadenas tal que la sucesión*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

es exacta. Existe entonces una sucesión exacta de homología

$$\dots \rightarrow H_p(A) \xrightarrow{f_*} H_p(B) \xrightarrow{g_*} H_p(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{p-1}(B) \rightarrow \dots$$

donde ∂_ es el operador borde inducido en B .*

Demostración. Para realizar esta prueba usaremos una estrategia típica en álgebra conmutativa conocida como persecución de diagramas. Usaremos el siguiente diagrama como guía:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{f} & B_{p+1} & \xrightarrow{g} & C_{p+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_A & & \downarrow \partial_B & & \downarrow \partial_C \\
 0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{f} & B_p & \xrightarrow{g} & C_p \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_A & & \downarrow \partial_B & & \downarrow \partial_C \\
 0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{f} & B_{p-1} & \xrightarrow{g} & C_{p-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Paso 1. Primero definamos ∂_* . Dado un ciclo c_p de C_p (esto es, $c_p \in \ker \partial_C$), escogemos $b_p \in B_p$ tal que $g(b_p) = c_p$ (recordemos que g es sobreyectiva por ser una sucesión exacta corta). El elemento $\partial_B b_p$ de B_{p-1} pertenece al núcleo de g pues $g(\partial_B b_p) = \partial_C g(b_p) = \partial_C c_p = 0$. Por tanto, existe un elemento $a_{p-1} \in A_{p-1}$ tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$, pues $\ker g = \text{Im } f$. Tenemos que dicho elemento es único por ser f inyectiva. Además, c_{p-1} es un ciclo. Como $f(\partial_A a_{p-1}) = \partial_B f(a_{p-1}) = \partial_B \partial_B b_p = 0$, entonces $\partial_A a_{p-1} = 0$ por ser f inyectiva. Definimos $\partial_*[c_p] = [a_{p-1}]$ donde los corchetes denotan la clase de homología.

Paso 2. Queremos probar ahora que ∂_* es un homomorfismo de módulos bien definido. Antes de continuar, fijaremos cierta notación para facilitar el desarrollo de la prueba. Sean c_p, c'_p dos elementos del núcleo de $\partial_C : C_p \rightarrow C_{p-1}$. Sean b_p, b'_p elementos de B_p tal que $g(b_p) = c_p$ y $g(b'_p) = c'_p$. Escojamos ahora a'_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ y $f(a'_p) = \partial_B b'_p$.

Para probar que ∂_* está bien definido, veamos que no depende del b_p y c_p escogido. Supongamos que $c_p \sim c'_p$ y veamos que entonces a_{p-1} y a'_{p-1} también lo son. Por tanto supongamos que $c_p - c'_p = \partial_C c_{p+1}$. Escogemos b_{p+1} tal que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Esto implica que

$$f(b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C g(b_{p+1}) = c_p - c'_p - \partial_C c_{p+1} = 0$$

En consecuencia, podemos tomar a_p tal que $f(a_p) = b_p - b'_p - \partial_B b_{p+1}$ luego

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B(b_p - b'_p) - 0 = f(a_{p-1} - a'_{p-1})$$

Por ser f inyectiva, $\partial_A a_p = a_{p-1} - a'_{p-1}$, como buscábamos.

Ya sabemos que ∂_* está bien definido, veamos que es un homomorfismo de módulos. Para ello basta fijarnos en que $g(b_p + b'_p) = c_p + c'_p$ y que $f(a_{p-1} + a'_{p-1}) = \partial_B(b_p + b'_p)$. Por tanto $\partial_*[c_p + c'_p] = [a_{p-1} + a'_{p-1}]$ por definición y en consecuencia, $\partial_*[c_p + c'_p] = \partial_*[c_p] + \partial_*[c'_p]$. Ahora si $\lambda \in R$, de manera similar obtenemos que $\lambda \partial_*[b_p] = \lambda[c_p] = [\lambda c_p] = \partial_*[\lambda b_p]$.

Paso 3. Probaremos la exactitud de $H_p(B)$ por doble inclusión. Como $g \circ f = 0$ tenemos que $g_* \circ f_* = 0$ lo que implica que si $\gamma \in \text{Im } f_*$, entonces $g_*(\gamma) = 0$.

Para probar la otra inclusión, consideremos $\gamma = [b_p]$ y supongamos que $g_*(\gamma) = 0$. Entonces $g(b_p) = \partial_C c_{p+1}$ para algún $c_{p+1} \in C_p$. Escogemos b_{p+1} de manera que $g(b_{p+1}) = c_{p+1}$. Entonces

$$g(b_p - \partial_B b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C g(b_{p+1}) = g(b_p) - \partial_C c_{p+1} = 0$$

4. Homología simplicial

luego $b_p - \partial_B b_{p+1} = f(a_p)$ para algún a_p . Ahora, a_p es un ciclo pues

$$f(\partial_A a_p) = \partial_B f(a_p) = \partial_B b_p - 0 = 0$$

y f es inyectiva. Es más, $f_*[a_p] = [f(a_p)] = [b_p - \partial_B b_{p+1}] = [b_p]$ y por tanto $[b_p] \in \text{Im } f_*$ como queríamos.

Paso 4. Probemos la exactitud en $H_p(C)$. Fijemos notación de nuevo para este paso. Sea $\alpha = [c_p]$ un elemento de $H_p(C)$. Escojamos b_p tal que $g(b_p) = c_p$ y ahora tomemos a_{p-1} tal que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$. En consecuencia, $\partial_* \alpha = [a_{p-1}]$ por definición.

Procederemos de nuevo por doble inclusión. Consideremos primero que $\alpha \in \text{Im } g_*$. Entonces $\alpha = [g(b_p)]$ donde b_p es un ciclo en B . Esto implica que $f(a_{p-1}) = 0$ de donde $a_{p-1} = 0$ y por tanto $\partial_* \alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\partial_* \alpha = 0$. Entonces $a_{p-1} = \partial_A a_p$ para algún a_p . Deducimos entonces que $b_p - f(a_p)$ es un ciclo y que $\alpha = g_*[b_p - f(a_p)]$ luego $\alpha \in \text{Im } g_*$. Realizando los cálculos obtenemos que

$$\partial_B(b_p - f(a_p)) = \partial_B(b_p) - \partial_B(f(a_p)) = \partial_B(b_p) - f(a_{p-1}) = 0$$

$$g_*[b_p - f(a_p)] = [g(b_p) - 0] = [c_p] = \alpha$$

Paso 5. Finalmente obtengamos la exactitud para $H_{p-1}(A)$. Si $\beta \in \text{Im } \partial_*$, entonces $\beta = [a_{p-1}]$ donde $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p por definición. En consecuencia,

$$f_*(\beta) = [f(a_{p-1})] = [\partial_B b_p] = 0$$

Consideremos ahora el caso donde $f_*(\beta) = 0$. Sea $\beta = [a_{p-1}]$. Entonces $[f(a_{p-1})] = 0$ por lo que $f(a_{p-1}) = \partial_B b_p$ para algún b_p . Definimos $c_p = g(b_p)$. En consecuencia, c_p es un ciclo ya que $\partial_c c_p = g(\partial_B b_p) = g(f(a_{p-1})) = 0$ y $\beta = \partial_*[c_p]$ por definición. Esto es, $\beta \in \text{Im } \partial_*$. \square

Definición 4.7. En las condiciones del anterior lema, llamaremos a la sucesión obtenida **sucesión exacta larga de homología**.

Un resultado de interés puede ser la NATURALIDAD del resultado anterior.

Proposición 4.4 (Sucesión de Mayer-Vietoris). *Sea K un complejo simplicial y sean K_1, K_2 sub-complejos de K tales que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_p(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R) \xrightarrow{g} H_p(K; R) \rightarrow H_{p-1}(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow \cdots$$

tal que $f(c) = (i_{1\#}(c), -i_{2\#}(c))$, $g(d, e) = j_{1\#}(d) + j_{2\#}(e)$ donde $i_t : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_t$ y $j_t : K_t \rightarrow K_1 \cup K_2$ para $t \in \{1, 2\}$ son las respectivas inclusiones.

Demostración. La demostración consiste en construir la sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \rightarrow C(K_1 \cap K_2; R) \xrightarrow{f} C(K_1; R) \oplus C(K_2; R) \xrightarrow{g} C(K; R) \rightarrow 0$$

y aplicar el **Lema zig-zag**.

Para ello comencemos describiendo el complejo de cadenas $C(K_1; R) \oplus C(K_2; R)$. Recordemos que la suma directa de un complejo de cadenas se definía como la suma directa de los R -módulos de dimensión p $C_p(K_1; R) \oplus C_p(K_2; R)$, cuyo operador borde $\partial'(d, e) = (\partial_1 d, \partial_2 e)$ donde ∂_1, ∂_2 corresponden a los operadores borde de K_1 y K_2 respectivamente.

Para comprobar la exactitud de la sucesión, comencemos estudiando la exactitud en los extremos de la sucesión. Es claro que f es inyectiva por ser una inclusión. En cuanto a la sobreyectividad de g , tomemos $d \in C_p(K; R)$ donde d sea la suma de simplices orientados. Notemos por d_1 a los elementos de dicha suma provenientes de K_1 . Entonces $d - d_1 \in K_2$ y $g(d_1, d - d_1) = d$.

Para estudiar la exactitud en $C(K_1; R) \oplus C(K_2; R)$, consideremos la inclusión $k : K_1 \cap K_2 \rightarrow K$ y la respectiva inclusión de cadenas inducida $k_\# : C(K_1 \cap K_2; R) \rightarrow C(K; R)$. Nótese que $g(f(c)) = k_\#(c) - k_\#(c) = 0$. Sea ahora $g(d, e) = 0$, entonces $d = -e$ si las consideramos como cadenas de K . Como d proviene de K_1 y e de K_2 , ambas deben de provenir de $K_1 \cap K_2$ y en consecuencia, $(d, e) = (d, -d) = f(d)$, como queríamos.

La homología de $K_1 \oplus K_2$ en dimensión p es entonces

$$H_p(K_1 \oplus K_2; R) = \frac{\ker \partial'}{\text{Im } \partial'} = \frac{\ker \partial_1 \oplus \ker \partial_2}{\text{Im } \partial_1 \oplus \text{Im } \partial_2} \cong H_p(K_1; R) \oplus H_p(K_2; R)$$

por la **Proposición 3.2**. Finalmente aplicamos el **Lema zig-zag** y en consecuencia tenemos la sucesión deseada.

Para obtener la sucesión de Mayer-Vietoris de homología reducida reemplazaremos los complejos de cadenas anteriores por sus correspondientes complejos de cadenas aumentados. Consideremos para ello el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & C_0(K_1) \oplus C_0(K_2) & \longrightarrow & C_0(K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{K_1 \cap K_2} & & \downarrow \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \oplus R & \xrightarrow{\tilde{g}} & R \longrightarrow 0 \end{array}$$

La conmutatividad y la exactitud se mantienen en la parte inferior del diagrama si definimos $\tilde{f}(r) = (r, r)$ y $\tilde{g}(r', r) = r' + r$. Las aplicaciones $\varepsilon_{K_1 \cap K_2}$, $\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ y ε son sobreyectivas pues la intersección de K_1 y K_2 es no vacía. De este modo, la homología de sus respectivos complejos de cadenas es nula en dimensión -1 y en dimensión 0 es igual a la de sus respectivos módulos de homología reducida $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2)$, $\tilde{H}_0(K_1) \oplus \tilde{H}_0(K_2)$ y $\tilde{H}_0(K)$. Para finalizar, aplicamos de nuevo el **Lema zig-zag**. \square

Antes de proceder con un ejemplo para ilustrar la utilidad de la sucesión de Mayer-Vietoris, introduzcamos un nuevo concepto que nos será de gran ayuda.

Definición 4.8. contenidos...

Ejemplo 4.1. contenidos...

4. *Homología simplicial*

4.4. Computabilidad de la homología

5. Invarianza homotópica

5.1. Subdivisión baricéntrica

Definición 5.1. Sea K un complejo simplicial geométrico en \mathbb{R}^N ESPACIO HE PUESTO FINITO PERO PUEDE SER NO. Un complejo simplicial K' diremos que es una **subdivisión** de K si:

1. Cada símplice de K' está contenido en K .
2. Cada símplice de K es igual a la unión finita de símplices de K' .

Lema 5.1. Si K es un complejo, entonces la intersección de cualquier colección de subcomplejos de K es un subcomplejo de K . Por otro lado, si $\{K_\alpha\}$ es una colección de complejos en \mathbb{R}^N DE NUEVO \mathbb{R}^N y todas las intersecciones $|K_\alpha| \cap |K_{\beta}|$ es el politopo de un complejo que es subcomplejo de ambos, entonces la unión es un complejo.

Demostración. contenidos...

□

Para construir una subdivisión seguiremos el siguiente procedimiento:

Sea K un complejo. Supongamos que L_p es una subdivisión del p -esqueleto de K . Sea σ un símplice de dimensión $p+1$ de K . El conjunto $\text{Bd } \sigma$ es el politopo de un subcomplejo del p -esqueleto de L_p . Si w_σ es un punto del interior de σ , entonces el cono $w_\sigma \star L_p$ es un complejo cuyo espacio subyacente es σ . Definimos L_{p+1} como la unión de L_p con los complejos $w_\sigma \star L_p$ para todo símplice de dimensión $p+1$ de K .

Veamos que L_{p+1} es un complejo. Notemos que $|w_\sigma \star L_p| \cap |L_p| = \text{Bd } \sigma$, que es el politopo del subcomplejo L_p de $|w_\sigma \star L_p|$ y $|L_p|$. De manera similar, si τ es otro símplice de dimensión $p+1$, entonces los espacios $|w_\sigma \star L_p|$ y $|w_\tau \star L_p|$ intersecan en el símplice $\sigma \cap \tau$ de K . Esto es, el politopo del subcomplejo de L_p y en consecuencia, también de L_p y L_τ . Por el **Lema 5.1**, L_{p+1} es un complejo.

Definición 5.2. Siguiendo el anterior procedimiento, llamaremos a L_{p+1} la **subdivisión de K^{p+1} obtenida por STARRING L_p de los puntos w_σ .**

Puesto que el complejo L_{p+1} depende de la elección de los puntos w_σ , los escogeremos de la siguiente forma.

Definición 5.3. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un p -símplice. Definimos el **baricentro** de σ como el punto

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} v_i.$$

5. Invarianza homotópica

Esto es, el punto del interior de σ cuyas coordenadas baricéntricas con respecto a los vértices de σ son iguales.

Definición 5.4. Sea K un complejo. Definimos la secuencia de subdivisiones de esqueletos de K de la siguiente forma. Sea $L_0 = K^{(0)}$ el 0-esqueleto de K . En general, si L_p es una subdivisión del p -esqueleto de K , entonces definimos L_{p+1} como la subdivisión del esqueleto $p+1$ obtenido STARRING L_p de los baricentros de los $p+1$ símlices de K . Por el **Lema 5.1**, la unión de los complejos L_p es una subdivisión de K que llamaremos **subdivisión baricéntrica** de K y la denotaremos por $\text{sd } K$.

Lema 5.2. Sea K un complejo simplicial. Entonces el complejo $\text{sd } K$ es igual a la colección de todos los símlices de la forma

$$[\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n]$$

donde $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n$.

Demostración. Procederemos por inducción. Es inmediato que los símlices de $\text{sd } K$ de la subdivisión de $K^{(0)}$ son de esta forma, pues cada símplex es un vértice de K y sus baricentros coinciden con dicho vértice.

Supongamos ahora que cada símplex de $\text{sd } K$ perteneciente a $|K^{(p)}|$ es de esta forma. Sea τ un símplex de $\text{sd } K$ perteneciente a K^{p+1} pero no a $|K^{(p)}|$. Entonces τ pertenece a uno de los complejos $\bar{\sigma} \star L_\sigma$, donde σ es un símplex de dimensión $p+1$ de K y L_σ es la primera subdivisión baricéntrica del complejo formado por las caras propias de σ . Por hipótesis de inducción, cada símplex de L_σ es de la forma $[\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n]$, donde $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n$ y σ_0 es una cara propia de σ . Concluimos que τ debe ser de la forma $[\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n]$, como buscábamos. \square

Definición 5.5. Sea σ un símplex. Definimos el **diámetro** de σ como la mayor distancia entre dos puntos de σ . Formalmente,

$$\text{diam } \sigma = \max \{ \|x - y\| : x, y \in \sigma \}$$

donde en nuestro caso trabajamos con la norma euclídea.

Lema 5.3. Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ un n -símplex. Entonces

$$\text{diam } \sigma = \max \{ \|v_i - v_j\| : 0 \leq i, j \leq n \}.$$

Demostración. Sean $p, q \in \sigma$. En particular, si $p = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$, entonces

$$\|p - q\| = \left\| \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i - q \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n (\lambda_i v_i - \lambda_i q) \right\| \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i \|v_i - q\| \leq \max_{i=0 \leq i \leq n} \|v_i - q\|.$$

De manera análoga, si $q = \sum_{j=0}^n \mu_j v_j$, $\|v_i - q\| \leq \max_{0 \leq j \leq n} \|v_i - v_j\|$. Por consiguiente tenemos que

$$\|p - q\| \leq \max_{0 \leq i, j \leq n} \|v_i - v_j\|$$

para cualesquiera $p, q \in \sigma$ y por tanto, $\text{diam } \sigma \leq \max_{0 \leq i, j \leq n} \|v_i - v_j\|$. \square

Teorema 5.1. Dado un complejo simplicial finito K , una métrica para $|K|$ y $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que cada símplice de $\text{sd}^N K$ tiene un diámetro menor que ε .

Demostración. Vamos a demostrar el caso para la primera subdivisión y procedamos por inducción. Sea $\mu \in \text{sd } K$ y sean $\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_k$ los vértices de μ donde $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$. Por el **Lema 5.3**, podemos suponer que $\text{diam } \mu = \|\bar{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_1\|$ por simplicidad, donde $\sigma_0 = [v_0, \dots, v_n]$ y $\sigma_2 = [v_0, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_s]$. Entonces,

$$\left\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} p_i - b(\sigma_2) \right\| = \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{i=0}^n (p_i - b(\sigma_2)) \right\| \leq \max\{\|p_i - b(\sigma_2)\|; i \leq n\}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \|p_i - b(\sigma_2)\| &= \left\| p_i - \sum_{j=0}^s \frac{1}{s+1} p_j \right\| = \frac{1}{s+1} \left\| \sum_{j=0}^s p_i - p_j \right\| \leq \\ &\leq \frac{s}{s+1} \max\{\|p_i - p_j\|\} \leq \frac{s}{s+1} \delta(\sigma_2). \end{aligned}$$

Finalmente, como $\dim \sigma_1 = s \leq r = \dim K$

$$\delta(\mu) \leq \frac{s}{s+1} \delta(\sigma_2) \leq \frac{s}{s+1} m(K) \leq \frac{r}{r+1} m(K).$$

□

5.2. Teorema de aproximación simplicial

Definición 5.6. Sean K, L complejos simpliciales y sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Diremos que la aplicación simplicial $\phi : K \rightarrow L$ es una **aproximación simplicial** de f si para todo $x \in |K|$ se tiene que $\phi(x)$ pertenece al símplice SOPORTE de $f(x)$ en L . AMPLIAR DEF?

Proposición 5.1. Sean K, L complejos simpliciales y sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Si $\phi : K \rightarrow L$ es una aproximación simplicial de f entonces $d(f, \phi) \leq m(L)$ donde $d(f, \phi) = \sup \|f(x) - \phi(x)\| : x \in |K|\|$.

Demostración. contenidos...

□

Proposición 5.2. Sean K, L complejos simpliciales y sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Sea $\phi : K \rightarrow L$ es una aproximación entre los vértices de K y L . Entonces ϕ es una aproximación simplicial de f si, y sólo si, para todo vértice $v \in K$ tenemos que $f(\int \text{st}(v; K)) \subseteq \int \text{st}(\phi(v); L)$.

Demostración. contenidos...

□

Corolario 5.1. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Entonces f admite una aproximación simplicial $\phi : K \rightarrow L$ si, y sólo si, para cada vértice v de K existe algún vértice w de L tal que $\int \text{st}(v; K) \subseteq f^{-1}(\int \text{st}(w; L))$.

5. Invarianza homotópica

Demostración. contenidos...

□

Teorema 5.2 (Teorema de aproximación simplicial). Sean K, L complejos simpliciales y $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Entonces existe una subdivisión baricéntrica sd^n y una aplicación $\phi : |\text{sd}^n K| \rightarrow |L|$ tal que ϕ es una aproximación simplicial de f .

Demostración. contenidos...

□

Corolario 5.2. Sean K, L complejos simpliciales y $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Para todo $\varepsilon > 0$ existen subdivisiones baricéntricas de K y L y una aproximación simplicial $\phi : \text{sd}^n K \rightarrow \text{sd}^m L$ tal que $d(f, \phi) < \varepsilon$.

Demostración. contenidos...

□

5.3. Operador subdivisión

Definición 5.7. Sea $\{C_n(K; R), \partial_n\}$ un complejo de cadenas simpliciales. Llamaremos **operador subdivisión** al homomorfismo $\text{sd}_{*n} : C_n(K; R) \rightarrow C_n(\text{sd} K; R)$ tal que

$$\text{sd}_{*n}(\sigma) = ?$$

Lema 5.4. Sea $\{C_n(K; R), \partial_n\}$ un complejo de cadenas simpliciales y sean $\text{sd}_{*n} : C_n(K; R) \rightarrow C_n(\text{sd} K; R)$ sus respectivos operadores subdivisión para todo $n \geq 0$. Entonces la familia $\{\text{sd}_{*n}\}$ es un homomorfismo de complejos de cadenas.

Demostración. contenidos...

□

Lema 5.5. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial y sea $f : |\text{sd} K| \rightarrow |\text{sd} L|$ la misma aplicación para sus subdivisiones baricéntricas. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo

DIAGRAMA

donde f_* denota $C_n(f)$.

Demostración. contenidos...

□

Proposición 5.3. Sea $\{C_n(K; R), \partial_n\}$ un complejo de cadenas simpliciales y sean $\{\text{sd}_{*n}\}$ sus respectivos operadores subdivisión para todo $n \geq 0$. Entonces dicha familia induce un homomorfismo $\text{sd}_* : H_n(K; R) \rightarrow H_n(\text{sd} K; R)$ que de la misma forma llamaremos **operador subdivisión**. Si $f : |K| \rightarrow |L|$ es una aplicación simplicial, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

DIAGRAMA

Demostración. Es consecuencia inmediata de **Lema 5.5**.

□

Definición 5.8. Sea $sd_* : H_n(K; R) \rightarrow H_n(sd K; R)$ el operador subdivisión asociado al módulo de homología $H_n(sd K; R)$. Entonces diremos que

$$sd_*^m = sd_* \circ sd_* \circ \cdots \circ sd_* : H_n(K; R) \rightarrow H_n(sd K; R)$$

es el m -ésimo operador subdivisión del complejo K .

Proposición 5.4. Sea K un complejo simplicial finito. Se tiene que su m -ésimo operador subdivisión es un isomorfismo.

Demostración. contenidos... IMPORTANTE: CONOS, MAYER-VIETORIS, LEMA DE LOS CINCO (III*1.7) □

Proposición 5.5. Sea K un complejo simplicial. Por tanto existe una aproximación simplicial $\lambda : sd^n K \rightarrow K$ de la identidad $id : |K| \rightarrow |K|$ tal que $\lambda_* \circ sd_* = id_*$.

Demostración. contenidos... □

5.4. Invarianza homotópica de la homología simplicial

Definición 5.9. Sean $f, g : |K| \rightarrow |L|$ aplicaciones simpliciales. Diremos que f y g son **contiguas** si para todo p -símplice de K se tiene que $f(\sigma)$ y $g(\sigma)$ son caras de un símplice común en L .

Lema 5.6. Si $\phi, g : |K| \rightarrow |L|$ son aproximaciones simpliciales de f , entonces son contiguas.

Demostración. Sea $\sigma = v_0, \dots, v_p$ un símplice de K y sea $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$ un punto del interior de σ , donde λ_i es la i -ésima coordenada baricéntrica de x respecto a los vértices de σ . Esto implica que $t(x) = \sum_{i=0}^p \lambda_i t(v_i)$ y por tanto, $t(x)$ pertenece al interior de $t(\sigma)$. Por hipótesis, $t(x) \in \text{sop}(f(x))$. Por el ?? LEMA 2.1b??? concluimos que $t(\sigma) < \text{sop}(f(x))$ y análogamente, $s(\sigma) < \text{sop}(f(x))$. □

Lema 5.7. Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son aplicaciones simpliciales contiguas, entonces sus APLICACIONES de cadenas inducidas son algebraicamente homotópicas.

Demostración. Por ser s, t contiguas podemos definir. MAS □

Corolario 5.3. Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ son aplicaciones simpliciales contiguas, entonces f_*, g_* son iguales.

Demostración. Es consecuencia inmediata del ?? y del Teorema 3.1. □

Teorema 5.3. Toda aplicación continua $f : |K| \rightarrow |L|$ induce un homomorfismo f_* en H .

5. Invarianza homotópica

Demostración. Tomemos una aproximación simplicial $s : |sd^m K| \rightarrow |L|$ de $f : |K| \rightarrow |L|$. Sea ahora $sd_{\#}^m : C(K; R) \rightarrow C(sd^m K; R)$ el operador subdivisión. Definimos ahora el homomorfismo $f_* : H_p(K; R) \rightarrow H_p(L; R)$ como la composición $s_* \circ sd_{\#}$.

Puesto que la definición de f_* depende de la aproximación simplicial escogida, veamos que realmente dicha elección es indiferente. Para ello, supongamos que $s : |sd^n K| \rightarrow |L|$ es otra aproximación simplicial de f tal que $m \leq n$ y consideremos ahora el operador subdivisión $sd_{\#}^{n-m} : C(sd^m K; R) \rightarrow C(sd^n K; R)$. Por tanto, tenemos el siguiente diagrama

DIAGRAMA

y queremos ver que es conmutativo. Esto es, que $s_* \circ sd_{\#} = t_* \circ sd_{\#}^{n-m} \circ sd_{\#}^m$. Por tanto, bastará considerar una aplicación simplicial CUALQUIERA $\varphi : |sd^n K| \rightarrow |sd^m K|$ y ver que efectivamente $s \circ \varphi$ es una aproximación simplicial de f . Sea $x \in |sd^n K|$ y sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ el símplice soporte de x . Sea ahora $\tau = [w_0, \dots, w_p]$ el símplice de $sd^m K$ que al subdividirse $m - n$ veces contiene a σ . Es claro entonces que $x \in \text{Int } \tau$. Por ser s una aplicación simplicial, también es claro que $s(x) \in \text{Int}[s(w_0), \dots, s(w_p)]$ y por ser una aproximación simplicial de f , $f(x)$ pertenece al soporte de $f(x)$ y en consecuencia, $[s(w_0), \dots, s(w_p)]$ es una cara del soporte de $f(x)$. Por otro lado, $\varphi(x)$ pertenece al interior de $[\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_p)]$ que es una cara propia de τ y por tanto,

$$s \circ \varphi(x) \in \text{Int}[s \circ \varphi(v_0), \dots, s \circ \varphi(v_p)] < [s(w_0), \dots, s(w_p)] < \text{sop}(f(x)).$$

Es decir, para cualquier $x \in |sd^n K|$, $s \circ \varphi(x) \in \text{sop}(f(x))$ y por consiguiente, $s \circ \varphi$ y t son aproximaciones simpliciales de f . **De acuerdo a los resultados anteriores de esta sección**, se establece que $s_* \varphi_* = t_* : H_p(sd^n K; R) \rightarrow H_p(L; R)$. Además, se sabe que φ_* y $sd_{\#}^{n-m}$ son inversas una de otra, por lo que $t_* sd_{\#}^{n-m} sd_{\#}^m = s_* \varphi_* sd_{\#}^{n-m} sd_{\#}^m = s_* sd_{\#}^m$. Por tanto, $f_* : H_p(K; R) \rightarrow H_p(L; R)$ es un homomorfismo bien definido para cada $p \in \mathbb{Z}$. \square

Teorema 5.4. Si $f : |K| \rightarrow |L|$, $g : |L| \rightarrow |M|$ son aplicaciones continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* f_*$. Además, $H(\text{id}) = \text{id}_*$.

Demostración. Dadas las aplicaciones continuas f y g , consideremos las aproximaciones simpliciales $s : |sd^m K| \rightarrow |sd^n L|$ de f y $t : |sd^n L| \rightarrow |M|$ de g . A continuación consideremos los operadores subdivisión $sd_{\#}^n : |K| \rightarrow |sd^n K|$, $sd_{\#}^m : |L| \rightarrow |sd^m L|$ y una aplicación simplicial $\varphi : |sd^n L| \rightarrow |L|$.

DIAGRAMA

Primero comprobemos que φs es una aproximación simplicial de f . COMPROBAR. Además, ts es una aproximación simplicial de gf . Para comprobarlo, sea $x \in |sd^m K|$ y sea $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ el p -símplice tal que $x \in \text{Int } \sigma$. Por ser s una aproximación simplicial de f , tenemos que $[s(v_0), \dots, s(v_p)]$ pertenece al soporte de $f(x)$ en $|sd^n L|$ y por tanto

$$[ts(v_0), \dots, ts(v_p)] < t(\text{sop}(f(x))).$$

En particular, $f(x)$ pertenece al soporte de $f(x)$ en $|sd^n L|$ y por ser t una aproximación simplicial de g ,

$$t(\text{sop}(f(x))) < \text{sop}(g(f(x)))$$

Es decir, $t(s(x)) \in \text{sop}(g(f(x)))$. En consecuencia,

$$g_* f_* = (t_* \text{sd}_*^n)(\varphi_* s_* \text{sd}_*^m) = t_* s_* \text{sd}_*^m = (ts)_* \text{sd}_*^m = (gf)_*$$

A continuación verifiquemos que la identidad topológica induce la identidad de módulos de homología. Consideremos el operador subdivisión $\text{sd}_\#^n : C(K; R) \rightarrow C(\text{sd}^n K; R)$ y sea $\varphi : |\text{sd}^n K| \rightarrow |K|$ una aplicación simplicial. Veamos que φ es una aproximación simplicial de $\text{id} : |K| \rightarrow |K|$. Notemos por σ' al soporte de $f(x)$ en $|\text{sd} K|$ y σ al soporte de x en $|K|$. Por la definición de φ , $\varphi(\sigma)$ es una cara propia de σ' y por ser simplicial, si $x \in \sigma'$, entonces $\varphi(x) \in \varphi(\sigma') < \sigma$. Es decir, $\varphi(x) \in \sigma$. Concluimos entonces que $\text{id}_* = \varphi_* \text{sd}_\#$ es la identidad. \square

Lema 5.8. Algo de lebesgue.

Demostración. contenidos... \square

Teorema 5.5. Si f, g son aplicaciones homotópicas, entonces $f_* = g_*$.

Demostración. contenidos... \square

Corolario 5.4. Sean K, L complejos simpliciales y sean $|K|, |L|$ sus espacios subyacentes. Si $|K|, |L|$ son espacios HOMOTOPICOS, entonces sus módulos de homología son isomorfos.

Demostración. Consideremos dos aplicaciones continuas $f : |K| \rightarrow |L|$ y $g : |K| \rightarrow |L|$ tales que $g \circ f \simeq \text{id}_{|K|}$ y $f \circ g \simeq \text{id}_{|L|}$. Por tanto, la composición de los homomorfismos inducidos

$$\begin{aligned} H_p(K; R) &\xrightarrow{f_*} H_p(L; R) \xrightarrow{g_*} H_p(K; R), \\ H_p(L; R) &\xrightarrow{g_*} H_p(K; R) \xrightarrow{f_*} H_p(L; R) \end{aligned}$$

son la identidad para todo $p \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, f_* es un isomorfismo. \square

ULTIMO COROLARIO

Bibliografía

- [DF04] David Steven Dummit y Richard M Foote. *Abstract algebra*, volumen 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [EM45] Samuel Eilenberg y Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.
- [Lee10] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volumen 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Mac12] Saunders MacLane. *Homology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [ML13] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volumen 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Mun18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.