



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Presentado por:
Pablo Olivares Martínez

Curso académico 2023-2024



Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales

Pablo Olivares Martínez

Pablo Olivares Martínez *Aplicación de la topología algebraica en redes neuronales.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

Responsable de tutorización	Miguel Ortega Titos <i>Departamento de Geometría y Topología</i>	Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
	Julián Luengo Martín <i>Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial</i>	Facultad de Ciencias Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Olivares Martínez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 25 de octubre de 2023

Fdo: Pablo Olivares Martínez

Dedicatoria (opcional)

Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Fundamento teórico	1
1. Símplices y complejos simpliciales	3
1.1. Símplices	3
1.2. Complejos simpliciales	4
1.3. Aplicaciones simpliciales	5
1.4. Complejos simpliciales abstractos	5
1.5. Triangulaciones	7
1.6. Algunos complejos simpliciales	7
2. Homología	9
2.1. Grupos de homología	9
II. Segunda parte	11
3. Ejemplo de capítulo	13
3.1. Primera sección	13
A. Ejemplo de apéndice	15
Glosario	17
Bibliografía	19

Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

Parte I.

Fundamento teórico

1. Símplices y complejos simpliciales

1.1. Símplices

Con la finalidad de generalizar estructuras como el triángulo y el tetraedro, a finales del siglo XIX nace un nuevo concepto: el símplex. Su simplicidad y propiedades lo convirtieron en una herramienta muy versátil en el estudio de la topología algebraica, dando lugar a lo que hoy conocemos como homología simplicial. En esta sección definiremos lo que es un símplex y algunos conceptos asociados a él que nos serán de gran utilidad en el estudio de dicho campo.

Definición 1.1. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N . Diremos que dicho conjunto es **afínmente independiente** si para cualesquiera $t_i \in \mathbb{R}$, las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implican que $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Definición 1.2. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos afínmente independiente en \mathbb{R}^N . Definimos el **símplice** $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ generado por a_0, \dots, a_n como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1$$

con $t_i \geq 0$, $i \in \{0, \dots, n\}$.

Los coeficientes t_i están determinados de manera única por el punto x . A los términos t_0, \dots, t_n los llamamos las **coordenadas baricéntricas** de σ con respecto a a_0, \dots, a_n .

Los puntos a_0, \dots, a_n que generan σ los llamaremos **vértices** de σ y al número n lo llamaremos la **dimensión** de σ .

Definición 1.3. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ un símplex. Una **cara** de σ será cualquier símplex generado por un subconjunto de $\{a_0, \dots, a_n\}$.

En particular, la cara de σ generada por $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ la llamamos la **cara opuesta** de a_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. Las caras de σ diferentes de σ diremos que son **caras propias** de σ y la unión de todas ellas la llamaremos el **borde** de σ . Finalmente, definimos el **interior** de σ como el conjunto de puntos de σ que no pertenecen a su borde.

Ejemplo 1.1.

1. Símplices y complejos simpliciales



Figura 1.1.: Símplices en columnas

1.2. Complejos simpliciales

Definición 1.4. Un **complejo simplicial** K en \mathbb{R}^N es una colección de símplexes en \mathbb{R}^N tal que:

1. Toda cara de un símplex de K está en K .
2. La intersección de cualesquiera dos símplexes de K es una cara de ambos símplexes.

En ciertas ocasiones puede ser interesante saber si dada una colección cualquiera de símplexes, esta es un complejo simplicial o no. Para ello, el siguiente lema nos puede ser de utilidad.

Lema 1.1. Una colección K de símplexes es un complejo simplicial si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Toda cara de un símplex de K está en K .
2. Los símplexes de K tienen interior disjunto dos a dos.

Demostración. Primero, asumamos que K es un complejo simplicial. MUNKRES □

Definición 1.5. Si L es una subcolección del complejo simplicial K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es un complejo simplicial que llamaremos **subcomplejo** de K .

Entre los subcomplejos de un complejo simplicial, cabe destacar el siguiente. Diremos **p-esqueleto** de K al subcomplejo formado por todas las caras de K cuya dimensión sea menor o igual que p . Lo denotaremos por $K^{(p)}$. En particular, $K^{(0)}$ es el conjunto de vértices de K .

Definición 1.6. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^N . Definimos el **politopo** de K como el subconjunto $|K| \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|K|$ es la unión de todos los símplexes de K .

Dotando a cada símplex de la topología inducida por la topología usual de \mathbb{R}^N , vamos a dotar ahora a $|K|$ de una topología. Diremos que un subconjunto $A \subset |K|$ es cerrado en $|K|$ si, y sólo si, $A \cap \sigma$ es cerrado en σ para todo $\sigma \in K$. Si llamamos T a la topología definida de esta forma, podemos ver fácilmente que $(|K|, T)$ es un espacio topológico. Claramente, $\emptyset, |K| \in T$. SEGUIR DEMOSTRANDO

Llamaremos **poliedro** a cualquier espacio topológico que sea el politopo de un complejo simplicial.

Definición 1.7. Un espacio topológico X es **triangulable** si existe un complejo simplicial K cuyo espacio subyacente (DEFINIR ESPACIO SUBYACENTE) es homeomorfo a X . Diremos entonces que $h : |K| \rightarrow X$ es una **triangulación**. BUSCAR BIBLIOGRAFIA PARA ESTO

TAL VEZ ALGUNAS PROPIEDADES LOCALMENTE COMPACTO Y EJEMPLO

1.3. Aplicaciones simpliciales

Cuando trabajemos con complejos simpliciales, será interesante tener en cuenta cuándo las transformaciones entre ellos pueden ser continuas o incluso homeomorfismos.

Lema 1.2. Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación. Supongamos que siempre que los vértices v_0, \dots, v_n de K generen un símple en K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símple de L . Entonces podemos extender f a una aplicación continua $g : |K| \rightarrow |L|$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$$

Llamaremos a g la **aplicación simplicial** (lineal) inducida por f .

Demostración. Por hipótesis, los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple τ en L . Por ser K un complejo simplicial, la suma de sus coeficientes t_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$, es igual a uno, luego $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$ es un punto de τ . Podemos ver que g es una aplicación continua del símple σ generado por v_0, \dots, v_n al símple τ generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$.

Ahora tan solo nos queda ver que $g : |K| \rightarrow |L|$ es continua. Bien, pues por ser $g : \sigma \rightarrow \tau$ continua, también lo es $g : \sigma \rightarrow |L|$. Finalmente por el lema METER LEMA ANTERIOR 2.3 DE MUNKRES, $g : |K| \rightarrow |L|$ es continua. \square

Lema 1.3. Supongamos que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación biyectiva tal que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símple de K si, y sólo si, $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símple de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo.

Diremos entonces que g es un **homeomorfismo simplicial** de K con L .

Demostración. Por hipótesis, cada símple $\sigma \in K$ se identifica con otro símple $\tau \in L$. Por tanto, debemos comprobar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducida por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si consideramos $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$, entonces por definición $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Luego

$$h(g(x)) = h\left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i)\right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(f(v_i)) = \sum_{i=0}^n t_i v_i = x$$

\square

1.4. Complejos simpliciales abstractos

Si bien la definición actual de los complejos simpliciales puede llegar a ser de gran utilidad, en la práctica muchas veces no es necesario usar las herramientas que nos proporciona la geometría afín. Es por ello que vamos a introducir una descripción puramente combinatoria de los complejos simpliciales que, aun siendo más simples, son de gran utilidad a la hora de trabajar con espacios topológicos.

1. Símplices y complejos simpliciales

Definición 1.8. Un **complejo simplicial abstracto** (o simplemente complejo abstracto) es una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces para todo $B \subset A$ con B no vacío, $B \in \mathcal{S}$.

Al elemento A de \mathcal{S} lo llamaremos **símplice** de $A \in \mathcal{S}$. La **dimensión** de A es una menos que el número de elementos que le pertenecen. Todo subconjunto de A lo llamaremos **cara** de A . En cuanto a la **dimensión** de \mathcal{S} , diremos que es igual al máximo de las dimensiones de sus elementos o en caso de no haberlo, diremos que la dimensión de \mathcal{S} es infinita. El **conjunto de vértices** V de \mathcal{S} diremos que es la unión de elementos de \mathcal{S} que contienen un único punto. Llamaremos **subcomplejo** de \mathcal{S} a cualquier subcolección de \mathcal{S} que sea un complejo simplicial abstracto en sí.

Sean V_S, V_T los conjuntos de vértices de los complejos abstractos \mathcal{S}, \mathcal{T} respectivamente. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : V_S \rightarrow V_T$ tal que $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$.

Definición 1.9. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_0, \dots, a_n\} \subset V$ tales que los vértices a_0, \dots, a_n generan un símplex de K . Entonces llamaremos a la colección \mathcal{K} el **esquema de vértices** de K .

Después de realizar todas las definiciones pertinentes, ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.1. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (a) Todo complejo abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .
- (b) Dos complejos simpliciales son linealmente isomorfos si, y sólo si, sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.

Demostración. Para demostrar (a), empezaremos tomando un conjunto de índices J . Llamemos \mathbf{E}^J al subconjunto de funciones $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^J tales que $x(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in J$ excepto para un número finito de valores. Sea Δ^J la colección de todos los símplexes en \mathbf{E}^J generados por subconjuntos finitos de la base usual de \mathbf{E}^J . Δ^J es un complejo simplicial. Sean entonces σ, τ símplexes de Δ^J , la unión de sus conjuntos de vértices es afínmente independiente y genera un símplex en Δ^J . Diremos que Δ^J es un *símplex de dimensión infinita*.

Sea ahora \mathcal{S} un complejo abstracto con conjunto de vértices V . Tomamos un conjunto de índices J lo bastante grande para que podamos tomar una aplicación inyectiva $f : V \rightarrow J$. A continuación, vamos a tomar un subcomplejo de Δ^J tal que para cada símplex abstracto $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$, el símplex (geométrico) generado por $f(a_0), \dots, f(a_n)$ está en K . Por tanto K es un complejo simplicial y f es un isomorfismo entre \mathcal{S} y el esquema de vértices de K .

En cuanto a (b), es una consecuencia inmediata del **Lema 1.3** □

Definición 1.10. Si el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices del complejo simplicial K , diremos que K es una **realización geométrica** de \mathcal{S} .

Lema 1.4. Sea \mathcal{S} un complejo simplicial abstracto de dimensión d . Entonces \mathcal{S} tiene una realización geométrica en \mathbb{R}^{2d+1} .

Demostración. TENGO LA DEMOSTRACION EN TDA PERO HAY QUE BUSCAR OTRA FUENTE. \square

Ejemplo 1.2. ALGUN EJEMPLO QUE MUESTRE SU UTILIDAD.

1.5. Triangulaciones

1.6. Algunos complejos simpliciales

2. Homología

2.1. Grupos de homología

Definición 2.1. Sea C un grupo abeliano junto a un endomorfismo $d : C \rightarrow C$ tal que $d^2 = 0$. Diremos entonces que C es un **grupo diferencial** y llamaremos a d **operador borde** de C .

Llamaremos a los elementos de C **cadena**s, a los de $\ker d$, **ciclos** y a los de $\operatorname{Im} d$, **bordes**. Si nos fijamos, el requisito $d^2 = 0$ es equivalente a exigir que $\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

Definición 2.2. Sea C un grupo diferencial. Definimos el **grupo de homología** de C como el grupo cociente $H(C)$ tal que

$$H(C) = \frac{\ker d}{\operatorname{Im} d}$$

Por tanto, el grupo de homología de un grupo diferencial C está formado por las clases de equivalencia $[c] = c + \operatorname{Im} d$ donde c es un ciclo de C . A los elementos de $H(C)$ los llamaremos **clases de homología**. Dos ciclos c y c' diremos que son **homólogos** si ambos pertenecen a la misma clase de homología, esto es, $c \sim c'$.

Ejemplo 2.1. contenidos...

Definición 2.3. Sean C y C' dos grupos diferenciales y d, d' sus respectivos operadores borde. Diremos que $f : C \rightarrow C'$ es un **homomorfismo de grupos diferenciales** si f es un homomorfismo de grupos y además $d'f = fd$.

La anterior definición nos permite preservar la estructura algebraica del grupo diferencial. De esta forma, si tomamos una cadena $c \in C$ que sea un ciclo o un borde y $f : C \rightarrow C'$ es un homomorfismo de grupos diferenciales, $f(c) \in C'$ seguirá siendo un ciclo o un borde de manera correspondiente.

Definición 2.4. Sean C, C' grupos diferenciales y $f : C \rightarrow C'$ un homomorfismo de grupos diferenciales. Definimos la función $f_* = H(f) : H(C) \rightarrow H(C')$ satisfaciendo

$$f_*([c]) = [f(c)]$$

Diremos que $H(f)$ es el **homomorfismo inducido** por f .

??? H FUNCTOR COVARIANTE

Ejemplo 2.2. contenidos...

Parte II.

Segunda parte

3. Ejemplo de capítulo

3.1. Primera sección

Este fichero `capitulo-ejemplo.tex` es una plantilla para añadir capítulos al TFG. Para ello, es necesario:

- Crear una copia de este fichero `capitulo-ejemplo.tex` en la carpeta `capitulos` con un nombre apropiado (p.e. `capitulo01.tex`).
- Añadir el comando `\input{capitulos/capitulo01}` en el fichero principal `tfg.tex` donde queremos que aparezca dicho capítulo.

A. Ejemplo de apéndice

Los apéndices son opcionales.

Este fichero `apendice-ejemplo.tex` es una plantilla para añadir apéndices al TFG. Para ello, es necesario:

- Crear una copia de este fichero `apendice-ejemplo.tex` en la carpeta `apendices` con un nombre apropiado (p.e. `apendice01.tex`).
- Añadir el comando `\input{apendices/apendice01}` en el fichero principal `tfg.tex` donde queremos que aparezca dicho apéndice (debe de ser después del comando `\appendix`).

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: glosario.tex

\mathbb{R} Conjunto de números reales.

\mathbb{C} Conjunto de números complejos.

\mathbb{Z} Conjunto de números enteros.

Bibliografía

- [AZ14] Martin Aigner y Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edición, 2014. Including illustrations by Karl H. Hofmann.
- [CMT22] Jesús Castro-Infantes, José M. Manzano, y Francisco Torralbo. Conjugate plateau constructions in product spaces, 2022. Preprint. arXiv: 2203.13162 [math.DG].
- [Doe03] John Doe. Are we living in a simulation?, July 2003. Bachelor's Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [Eul85] Leonhard Euler. An essay on continued fractions. *Math. Systems Theory*, 18(4):295–328, 1985. Translated from the Latin by B. F. Wyman and M. F. Wyman.
- [Rem56] Robert Charles Rempel. *Relaxation Effects for Coupled Nuclear Spins*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, June 1956.
- [Tan96] Jian Tang. Spin structure of the nucleon in the asymptotic limit. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, September 1996.
- [Wik23] Wikipedia. Leonhard Euler — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler, 2023. [Recurso online, accedido el 27 de julio de 2023].