CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. EXAMEN FINAL

1. *a*) **(1 pto.)** Demuestra que, para todo natural n, se verifica que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

b) **(1.25 ptos.)** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Solución:

a) Vamos a demostrar la identidad planteada utilizando el método por inducción:

- Para $n=1$, se verifica que $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.
- Comprobamos que la identidad es cierta para $n+1$; es decir que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

En efecto, si partimos del primer miembro de la identidad y hacemos uso de la hipótesis de inducción nos queda:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Por tanto, la identidad es cierta para todos los números naturales.

b) Aplicamos el criterio de Stolz (el numerador no sabemos a dónde converge o diverge, pero el denominador diverge positivamente y es creciente). Si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que analizar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{(n+1)^2-n^2}=\frac{\frac{(n+2)^n\,(n+2)}{(n+1)^n}}{2n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\frac{n+2}{2n+1}$$

El primer factor es una potencia que presenta una indeterminación del tipo 1^∞ por lo que aplicamos la Regla de número e:

$$n\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)=n\,\frac{(n+2-n-1)}{n+1}=\frac{n}{n+1}\to 1\;\Rightarrow\;\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\to e^1=e$$

Y el segundo factor que teníamos es un cociente de polinomios del mismo grado, por lo que la sucesión converge al cociente de los coeficientes principales, que es $1/2$. Por tanto $\lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{e}{2}$, y aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim\frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}=\frac{e}{2}$$

2. *a*) **(1 pto.)** Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{2n}\sqrt{n}}{(n!)^2}$.

b) **(1.25 ptos.)** Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{4^{n+3}}$. En caso de que sea convergente calcula $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{4^{n+3}}$.

Solución:

a) Aplicamos el criterio del cociente. Llamamos $a_n = \frac{e^{2n}\sqrt{n}}{(n!)^2}$. Entonces tendremos que analizar el límite del cociente:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{e^{2n+2}\sqrt{n+1}}{((n+1)!)^2}\,\frac{(n!)^2}{e^{2n}\sqrt{n}}\\ &= \frac{e^2}{(n+1)^2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 0 < 1\end{aligned}$$

Por tanto, el criterio del cociente nos asegura que la serie dada es convergente.

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{4^{n+3}} = \sum_{n\geq 0} \frac{3}{4^3}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n\geq 0} \frac{2^2}{4^3}\left(\frac{2}{4}\right)^n = \frac{3}{4^3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2^2}{2^6}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{3}{4}| < 1$ y $|\frac{1}{2}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente.

Para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{4^{n+3}} &= \frac{3}{4^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{3}{4^3}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{3}{4^3}4 - \frac{1}{16}2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

3. Calcula los siguientes límites.

a) **(1.25 ptos.)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{(\log(1+x))^2}$.

b) **(1.25 ptos.)** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt}{2x}\right)^{1/x}$.

Solución:

a) Se trata de un cociente que claramente presenta una indeterminación del tipo "$0/0$". Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{2\frac{\log(1+x)}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\,(e^x - \cos(x) + \operatorname{sen}(x))}{2\log(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\log(1+x)}$$

Hemos descompuesto el límite en producto de dos: el primero es $1/2$ y el segundo vuelve a presentar la misma indeterminación que el inicial por lo que volvemos a aplicar la misma regla de L'Hôpital, pero únicamente al segundo factor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)\left(e^x+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\right)=2$$

Por tanto el límite que nos pedían es: $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{(\log(1+x))^2}=\dfrac{2}{2}=1$

b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión ($\frac{\int_x^x e^{-t^2}\,dt}{2x}$) que presenta una indeterminación del tipo"$0/0$". Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital. El límite del cociente de las derivadas es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}}{2}=1$$

Observemos que en el numerador hemos aplicado el teorema fundamental del Cálculo para derivar la función definida a través de una integral.

Estamos entonces antes una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}\,dt}{2x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}\,dt-2x}{2x^2}$$

Este último límite vuelve a presentar una indeterminación del tipo "$0/0$". Aplicamos nuevamente la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}-2}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}-2}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{2x}$$

Y una vez más la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}}{2}=0$$

Volviendo al límite inicial usando la regla del número e tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}\,dt}{2x}\right)^{1/x}=e^0=1$$

4. **(1.5 ptos.)** Demuestra que, para todo $x\in\mathbb{R}$, se verifica que

$$2x\arctan(x)\geq\log(1+x^2).$$

Solución: Para comprobar la desigualdad planteada vamos a analizar el signo de la función

$$f(x)=2x\arctan(x)-\log(1+x^2)\ \ ,\forall x\in\mathbb{R}$$

De hecho, tendremos que probar que $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Para ello, analizamos la derivada de f:

$$f'(x)=2\arctan(x)+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan(x)$$

El único punto crítico que se tiene es $x = 0$, ya que la función arco tangente sólo se anula en ese punto. Analizando el cambio de signo de la derivada antes y después del cero tenemos que:

- Si $x < 0$ entonces $\arctan(x) < 0$ y de ahí $f'(x) < 0$. Por tanto la función es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0[$.
- Si $x > 0$ entonces $\arctan(x) > 0$ y de ahí $f'(x) > 0$. Por tanto la función es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$.

Por tanto, en el punto $x = 0$ se alcanza un mínimo relativo que, al ser el único punto crítico de la función, es el punto donde se alcanza el mínimo absoluto de f y vale: $f(0) = 0$. Concluimos entonces que:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

y de ahí se tiene probada la desigualdad.

5. **(1.5 ptos.)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que verifica que $f'(x) = xe^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

    a) Encuentra los puntos críticos de f y decide si en ellos se alcanza extremo relativo.

    b) Calcula la expresión de f sabiendo que dicha función alcanza su mínimo absoluto en 0 y $f(0) = 0$.

Solución:

a) Como nos dan la expresión de la derivada ($f'(x) = x\,e^x$) calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = x\,e^x = 0 \iff x = 0$$

ya que la exponencial nunca se anula. Si derivamos una vez más: $f''(x) = e^x + xe^x$ y evaluamos en el punto crítico $x = 0$, tenemos que $f''(0) = 1 > 0$. Por tanto en el punto $x = 0$ se alcanza un mínimo relativo, pero por ser el único punto de extremo de la función, concluimos que es además su mínimo absoluto.

b) Para calcular $f(x)$ vamos a integrar la expresión de $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\,e^x\,dx$$

Aplicamos el método de integración por partes para calcular esta integral, donde vamos a considerar:

$$\begin{aligned} u = x \ &\Rightarrow \ du = dx \\ dv = e^x \ &\Rightarrow \ v = e^x \end{aligned}$$

Por tanto, la integral se resuelve así:

$$f(x) = \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$

Por hipótesis sabemos que $f(0) = 0$; por tanto,

$$f(0) = -1 + C = 0 \ \Rightarrow \ C = 1 \ \Rightarrow \ f(x) = x\,e^x - e^x + 1$$

Granada, 14 de febrero de 2013