Cálculo
1ºB Grado en Ingeniería Informática
Curso 2012/2013

1. Calcula los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/\operatorname{sen}(x)} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2} t^2\, e^{-t^2}\, dt}{x^4}$$

Solución.

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo"$0/0$". Parta resolver dicha indetermincación aplicamos la regla de L'Hôpital. El límite del cociente de las derivadas es

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{\operatorname{sen}(x)}}{2\cancel{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)}\lim_{x\to 0}\frac{2}{2\cos(x)} = 1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".
Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} = \left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/\operatorname{sen}(x)} = e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}-1\right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital. Nos queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\operatorname{sen}(x)}\,(2-2\cos(x))}{3\cancel{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)}{3\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

que vuelve a presentar la misma indeterminación anterior, por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)}{3\cos^2(x)-3\operatorname{sen}^2(x)} = 0$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\right)^{1/\operatorname{sen}(x)} = e^0 = 1$$

b) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función numerador, $f(x)=\int_0^{x^2} t^2\,e^{-t^2}\,dt$ es continua y derivable ya que el integrando, $f(f)=e^{-t^2}$, es una función continua. Además,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\int_0^0 t^2\,e^{-t^2}\,dt=0 \quad \text{y} \quad , \quad f'(x)=x^4\,e^{-(x^2)^2}\,2x=2x^5e^{-x^4}$$

Estamos ante una indeterminación del tipo "$0/0$" . Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5\,e^{-x^4}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^3}\,x^2\,e^{-x^4}}{4\cancel{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,e^{-x^4}}{2}=0$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2} t^2\,e^{-t^2}\,dt}{x^4}=0$$

2. Se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=3x^4-4x^3$.

   a) Calcula el conjunto imagen de f.

   b) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x)+1=0$.

Solución.

a) Se trata de una función derivable y, por tanto, continua en todo el dominio. Sabemos entonces que su imagen tiene que ser un intervalo. Estudiamos la monotonía de la función usando el signo de la derivada. Para ello calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)=0 \iff x=0 \text{ ó } x=1.$$

Analizando el signo de la derivada, obtenemos que:

- En el intervalo $]-\infty,0[$ se tiene que $f'(x)<0$, por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo $]0,1[$ se tiene que $f'(x)<0$, por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo $]1,+\infty[$ se tiene que $f'(x)>0$, por lo que la función es estrictamente creciente.

Por tanto, la función presenta un mínimo relativo en el punto de abcisa $x=1$ que, por ser el único punto de extremo se convierte en mínimo absoluto. Para terminar de calcular $f(\mathbb{R})$, analizamos los límites en los extremos del dominio, así como el valor de mínimo absoluto:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+-\infty} f(x)=+\infty \text{ , y } f(1)=-1$$

El conjunto imagen es entonces $f(\mathbb{R})=[-1,+\infty[$.

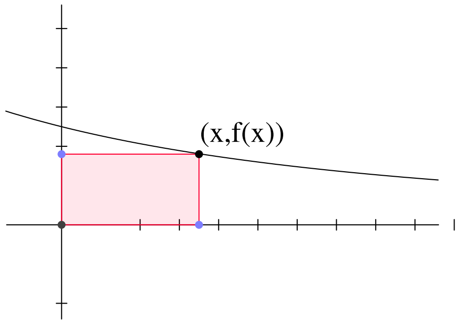

Figura 1: Gráfica del ejercicio 2

b) Para determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x)+1=0$, definimos la función $g(x)=f(x)+1$ que tiene las mismas propiedades que f y, por tanto, también alcanza el mínimo absoluto en $x=1$ y vale $g(1)=f(1)+1=-1+1=0$. Deducimos, entonces, que la ecuación planteada tiene una única solución y vale $x=1$.

3. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $\forall x\geq 0$. Se construye un rectángulo apoyado sobre los ejes, y con vértices opuestos en el origen y en un punto de la gráfica de f. Determina las dimensiones del rectángulo de máxima área así construido.

   Solución. Como $f'(x)=\dfrac{-2}{(x+2)^3}<0$, $\forall x>0$, se trata de una función decreciente en todo el dominio y como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, la gráfica presenta una asíntota horizontal en el eje OX ($y=0$) cuando la variable tiende a $+\infty$.

   Si llamamos $(x,f(x))$ al vértice opuesto al origen del rectángulo que construimos (ver la figura 1), la función área es: $g(x)=x\,f(x)=\frac{x}{(x+2)^2}$. Vamos a calcular el máximo de esta función:

$$g'(x)=\frac{(x+2)^2-2x(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{\cancel{(x+2)}\,(x+2-2x)}{\cancel{(x+2)}(x+2)^3}=\frac{2-x}{(x+2)^3}$$

   La derivada sólo se anula en el punto $x=2$. Si analizamos el cambio de signo de la derivada, llegamos a la conclusión de que g alcanza en el punto de abcisa 2 su único máximo relativo y, por lo tanto, su máximo absoluto.

   Las dimensiones del rectángulo que maximiza el área son: base igual a 2 y altura igual a $f(2)=1/16$.

4. Calcula $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$.

Solución. Se trata de una integral que vamos a calcular aplicando el método de integración por partes. En primer lugar, calculamos una primitiva del integrando:

$$\begin{aligned}
\int x \arctan(x)\,dx &= \begin{bmatrix} u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)\right)
\end{aligned}$$

Calculamos entonces la integral planteada:

$$\int_0^1 x \arctan(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)\right)\Big]_0^1 = \frac{\pi - 2}{4}$$

Granada, 23 de enero de 2013