Cálculo

1ºB Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (I)

Curso 2012/2013

1. **(2.5 puntos)** Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

   a) $\left\{ \dfrac{1}{2n} \sqrt[n]{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \right\}$

   b) $\left\{ \dfrac{\log(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))}{n} - \dfrac{\log(n)}{2} \right\}$

   Solución:

   a) Introducimos dentro de la raíz n-sima el factor $\frac{1}{2n}$, con lo que la sucesión a estudiar es:
   $$\left\{ \sqrt[n]{\frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{2^n \, n^n}} \right\}$$
   Aplicamos el criterio de la raíz; esto es, si llamamos a_n a la sucesión radicando, tenemos que analizar el límite del siguiente cociente:
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)(3n+3)}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \, \frac{2^n \, n^n}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} =$$
   $$\frac{(3n+3)}{2(n+1)} \, \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(3n+3)}{(2n+2)} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$
   La primera fracción es una sucesión de tipo racional que converge a $\frac{3}{2}$ y la segunda fracción es de tipo exponencial: $\left(\dfrac{n}{n+1} \right)^n$. Esta última presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que, aplicando el criterio del número e, nos queda estudiar la sucesión siguiente:
   $$n \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) = \frac{-n}{n+1} \to -1 \;\Rightarrow\; \text{lím} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$
   Como consecuencia de todo lo anterior:
   $$\text{lím} \left\{ \frac{1}{2n} \sqrt[n]{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \right\} = \text{lím} \left\{ \sqrt[n]{\frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)}{2^n \, n^n}} \right\} = \frac{3}{2\,e}$$

b) Observamos que tenemos una diferencia de sucesiones donde, claramente, el segundo sumando tiende a $-\infty$, pero el primer sumando hay que estudiarlo. Podríamos aplicar el criterio de Stolz a este primer sumando, pero correríamos el riesgo de que finalmente tuviéramos indeterminación del tipo "$\infty - \infty$". Arreglamos entonces el término general para obtener una única fracción:

$$\frac{\log(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))}{n} - \frac{\log(n)}{2} = \frac{2\left[\log(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))\right] - n\log(n)}{2n}$$

y aplicamos el criterio de Stolz (el numerador no sabemos a dónde converge o diverge, pero el denominador diverge positivamente y es creciente). Si llamamos a_n al numerador y b_n al denominado, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \\
&\frac{2\left[\log(1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1))\right] - (n+1)\log(n+1) - 2\left[\log(1\cdot 3\cdots(2n-1))\right] + n\log(n)}{2n+2-2n} \\
&= \frac{2\log(2n+1) - (n+1)\log(n+1) + n\log(n)}{2} \\
&= \frac{\log((2n+1)^2) - \log(n+1) + n(\log(\frac{n}{n+1})}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{(2n+1)^2}{n+1}\right) + \log\left((\frac{n}{n+1})^n\right)}{2} = \frac{\log\left(\frac{(2n+1)^2}{n+1}\,(\frac{n}{n+1})^n\right)}{2}
\end{aligned}$$

y esta sucesión diverge a $+\infty$ ya que se trata del logaritmo de un producto de sucesiones, donde el primer factor tiende a infinito y el segundo factor converge a e^{-1}. Es decir, se trata del logaritmo de una sucesión que diverge a $+\infty$; por tanto, también diverge a $+\infty$.

Como $\lim \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = +\infty$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim\left\{\frac{\log(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))}{n} - \frac{\log(n)}{2}\right\} = \lim\left\{\frac{2\left[\log(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))\right] - n\log(n)}{2n}\right\} = +\infty$$

2. **(2.5 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2 \\ x_{n+1} &= \sqrt{2+x_n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

c) Calcula $\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2-3\right)^{\frac{1}{2x_n-4}}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2=\sqrt{2+1/2}=\sqrt{5/2}>x_1=1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n=1$, acabamos de ver que $x_1<x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n<x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1}<x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n<x_{n+1}\ \Rightarrow\ 2+x_n<2+x_{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ x_{n+1}<x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

b) Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1=1/2$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n\leq 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n=1$, es evidente que $x_1=1\leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n\leq 2$.
- Comprobamos que $x_{n+1}\leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n\leq 2\ \Rightarrow\ 2+x_n\leq 4\ \Rightarrow\ \sqrt{2+x_n}\leq\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow\ x_{n+1}\leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\}=x$ con lo que nos queda: $x=\sqrt{2+x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x=\sqrt{2+x}\ \Rightarrow\ x^2=2+x\ \Rightarrow\ x^2-x-2=0\ \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x=2$ y $x=-1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que $1/2$. El motivo es que $1/2\leq x_n\leq 2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\}=2$.

d) Observamos que en el cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2-3\right)^{\frac{1}{2x_n-4}}$ tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", ya que la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Entonces, aplicando el criterio del número e:

$$\frac{1}{2x_n-4}\left[x_n^2-3-1\right]=\frac{x_n^2-4}{2x_n-4}=\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{2(x_n-2)}=\frac{x_n+2}{2}\to\frac{4}{2}=2$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2-3\right)^{\frac{1}{2x_n-4}}=e^2$.

3. **(2.5 puntos)** Estudia el carácter de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4n+7}{4n+2}\right)^{-n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\log(\sqrt{n})}$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz (ya que el término general presenta una potencia n-sima). Por tanto, estudiamos el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n=\left(\frac{4n+7}{4n+2}\right)^{-n^2}$.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{4n+7}{4n+2}\right)^{-n^2}}=\left(\frac{4n+7}{4n+2}\right)^{-n^2/n}=\left(\frac{4n+7}{4n+2}\right)^{-n}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que aplicamos el criterio del número e:

$$(-n)\left[\frac{4n+7}{4n+2}-1\right]=(-n)\left[\frac{4n+7-4n-2}{4n+2}\right]=\frac{-5n}{4n+2}\to-\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt[n]{\left(\frac{4n+7}{4n+2}\right)^{-n^2}}\to e^{-5/4}=\frac{1}{e^{5/4}}<1$$

Por tanto, el criterio de la raíz nos asegura que la serie dada es convergente.

b) Arreglamos, en primer lugar, el término general de la serie, utilizando las propiedades del logaritmo:

$$a_n=\frac{1}{n\log(\sqrt{n})}=\frac{1}{n\log(n^{1/2})}=\frac{1}{\frac{n}{2}\log(n)}=\frac{2}{n\log(n)}$$

Así, la serie que nos queda, es la serie $\sum\frac{1}{n\log(n)}$ (que es divergente) multiplicada por el factor 2. Por tanto, la serie planteada es también divergente.

4. **(2.5 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series y calcula su suma cuando sea posible:

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^{n+1}+4^n}{6^n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n-2}{n!}$

   Solución:

   a) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

   $$\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^{n+1}+4^n}{6^n} = \sum_{n\geq 0}(-2)\left(\frac{-2}{6}\right)^n + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{4}{6}\right)^n = -2\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{3}| < 1$ y $|\frac{2}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}+4^n}{6^n} &= -2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= -2\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{3}}\right) + \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = -2\frac{3}{4}+3 = \frac{-3}{2}+3 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

   b) Aplicamos el criterio del cociente, ya que aparecen factoriales en la expresión del término general de la serie. Así, si llamamos $a_n = \frac{2n-2}{n!}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(2n-2)} = \frac{2n}{(n+1)(2n-2)} \to 0 < 1$$

   Por tanto, la serie dada es convergente. Vamos a sumarla utilizando que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$:

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2(e-1) \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2\end{aligned}$$

Granada, 28 de noviembre de 2012