Teoría de funciones de una variable real

Pablo Pallàs

26 de junio de 2023

Índice

1. Introducción

2. Conceptos previos

3. Sucesiones

4. Continuidad

4.1. Límites de funciones

Definición 4.1. *Dado un $a \in \mathbb{R}$, un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ es un* ***entorno*** *de a si contiene un intervalo de la forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Si V es un entorno de a, diremos que $V \setminus \{a\}$ es un* ***entorno reducido*** *de a.*

Notar que todo conjunto que contenga un entorno de un punto también será a su vez entorno de ese punto.

Definición 4.2. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces diremos que a es un* ***punto de acumulación*** *de D si todo entorno reducido de a contiene puntos de D. Dicho de otra forma, si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $y \in D$ tal que $y \neq a$, con $|y-a| < \varepsilon$, es decir, $0 < |y-a| < \varepsilon$.*

Definición 4.3. *El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto D suele denominarse* ***conjunto derivado*** *y se denota por D'.*

Así, podemos decir de forma intuitiva que $a \in D'$ si y sólo si hay puntos de D, distintos de a, arbitrariamente próximos al punto a.

Ejemplo 4.3.1. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *Si D es finito, entonces $D' = \emptyset$.*
2. $\mathbb{N}' = \mathbb{Z}' = \emptyset$, *y* $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
3. $(a,b)' = [a,b]' = [a,b]$.
4. *Si $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $0 \in D'$ a pesar de que $0 \notin D$ y $1 \notin D'$ a pesar de que $1 \in D$.*

Podemos probar que $a \in D'$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) de puntos de D distintos de a que converge al punto a.

Definición 4.4 (***Límite de una función en un punto***)**.** *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $b \in \mathbb{R}$. Escribiremos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

cuando se cumpla que para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D$ con $0 < |x-a| < \delta$ se tiene $|f(x) - b| < \varepsilon$.

*Entonces diremos que b es el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende al punto a.*

La condición de que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todo $x \in D$ con $0 < |x-a| < \delta$ se puede escribir de otra forma:

$$f(U) \subseteq (b-\varepsilon, b+\varepsilon), \quad U = [D \cap (a-\delta, a+\delta)] \setminus \{a\}.$$

Podemos decir de forma resumida que b será el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a si $f(x)$ se acerca a b cuando x se acerca al punto a, aunque sin tomar su valor, dentro del dominio de f. Esto último es muy importante.

Proposición 4.5 (***Unicidad del límite***)**.** *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \to a} f(x) = b_2,$$

entonces $b_1 = b_2$.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $b_1 < b_2$. Elijamos $\varepsilon = \dfrac{b_2 - b_1}{2}$. Deben existir entonces $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x-a| < \delta_1$ tenemos $f(x) < b_1 + \varepsilon = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$ y un $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x-a| < \delta_2$ se tiene que $\dfrac{b_1+b_2}{2} = b_2 - \varepsilon < f(x)$. Definiendo $\delta = \min \delta_1, \delta_2$, resulta que para todo $x \in D$ con $0 < |x-a| < \delta$ tenemos $\dfrac{b_1+b_2}{2} < f(x) < \dfrac{b_1+b_2}{2}$, esto es absurdo. Análogo si $b_2 < b_1$.

$\square$

Proposición 4.6. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $b \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = b$.
2. *Para cada sucesión (s_n) de puntos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$ se verifica $\lim_n f(s_n) = b$.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ se cumple $|f(x) - b| < \varepsilon$. Sea (s_n) una sucesión de puntos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$. Dado $\delta > 0$, existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se verifica $|s_n - a| < \delta$, y como $s_n \neq a$, deducimos que $|f(s_n) - b| < \varepsilon$, es decir, $\lim_n f(s_n) = b$.

Recíprocamente, probaremos que si 1. no se cumple entonces 2. tampoco. Que no se cumpla 1. quiere decir que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay al menos un $x_\delta \in D$ que cumple $0 < |x_\delta - a| < \delta$ y, sin embargo, $|f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $\delta = 1/n$. Hay algún punto $s_n \in D$ que cumple $0 < |s_n - a| < 1/n$ y, sin embargo, $|f(s_n) - b| \geq \varepsilon$. La sucesión (s_n) así obtenida tiene las siguientes propiedades:

1. Está contenida en $D \setminus \{a\}$, porque $s_n \in D$, pero $0 < |s_n - a|$.
2. $\lim_n s_n = a$ porque $0 < |s_n - a| < 1/n$ (basta aplicar la definición de límite).
3. La sucesión $f(s_n)$ no tiende a b porque para todos los $n \in \mathbb{N}$, $|f(s_n) - b| \geq \varepsilon$.

Por lo tanto, no se cumple 2. □

Igualmente, diremos que un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ es un **entorno reducido** de $+\infty$ ó de $-\infty$ si existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $(r, +\infty) \subseteq V$ ó respectivamente $(-\infty, r) \subseteq V$.

Definición 4.7. *Se dice que $+\infty$ es un punto de acumulación de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ si D no está acotado superiormente, y escribiremos $+\infty \in D'$. Igualmente, diremos que $-\infty$ es un punto de acumulación de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ si D no está acotado inferiormente, y escribiremos $-\infty \in D'$.*

Definición 4.8. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a \in D'$. Escribiremos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

si para cada entorno V de b existe un entorno reducido U de a tal que $f(U) \subseteq V$.

Pueden darse definiciones en términos de desigualdades, desglosando los diferentes casos posibles. Concretamente, sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ cumplen $f(x) > M$.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ cumplen $f(x) < M$.
3. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in D$ con $x > K$ cumplen $|f(x) - b| < \varepsilon$.

4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in D$ con $x > K$ cumplen $f(x) > M$.

5. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in D$ con $x > K$ cumplen $f(x) < M$.

6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in D$ con $x < K$ cumplen $|f(x) - b| < \varepsilon$.

7. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in D$ con $x < K$ cumplen $f(x) > M$.

8. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in D$ con $x < K$ cumplen $f(x) > M$.

Con todo esto, sigue habiendo unicidad de límite e igualmente se mantiene la caracterización mediante sucesiones:

Proposición 4.9. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a \in D'$. Son equivalentes:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

2. *Para cada sucesión (s_n) de puntos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$ se verifica $\lim_n f(s_n) = b$.*

Demostración. Basta adaptar a cada caso la demostración de 4.6. □

Proposición 4.10 (***Operaciones algebraicas con límites***)**.** *Sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de D, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se tiene entonces:*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, *si estos últimos límites existen y su suma está definida en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

2. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$, *si este último límite existe y su producto por c está definido en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$, *si estos últimos existen y su producto está definido en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *si estos últimos límites existen y su cociente está definido en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior y el análogo para sucesiones.

□

Proposición 4.11 (***Acotación y límite cero***)**.** *Sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de D, y $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que*

1. *La función f está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D$.*

2. $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Entonces, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Demostración. Igual que antes, aplicar 4.9 y el resultado análogo para sucesiones.

□

Proposición 4.12 (***Cambios de variable***)**.** *Sean* D, E *subconjuntos de* $\mathbb{R}$*, a un punto de acumulación de* D*, b un punto de acumulación de* E*,* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$*, y* $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que* $f(D) \subseteq E$ *y supongamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Si $b \notin f(D)$*, entonces existe* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{y\to b} g(y) = c$, existe algún $r > 0$ tal que para todo $y \in E$ con $0 < |y - b| < r$, se tiene que $|g(y) - c| < \varepsilon$.

Ahora, como $\lim_{x\to a} f(x) = b$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - b| < r$.

Sea $x \in D$, con $0 < |x - a| < \delta$. No sólo es $|f(x) - b| < r$, sino que como $b \notin f(D)$ y $f(D) \subseteq E$, resulta

$$0 < |f(x) - b| < r, \quad f(x) \in E.$$

Por lo tanto, $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$.

□

A veces es útil en el cálculo de límites tener en cuenta las siguientes consecuencias inmediatas de la definición de límite:

Proposición 4.13. *Si* $D \subseteq \mathbb{R}$*, a es un punto de acumulación de* D *y* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$*,*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \iff \lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0$.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$*. El recíproco, en general, sólo es cierto cuando* $b = 0$.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{t\to 0} f(a + t) = b$.

Si en las definiciones de límites añadimos una de las dos condiciones, $x > a$, $x < a$, entonces se habla de límites laterales (por la derecha y por la izquierda). Emplearemos la notación $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Definición 4.14 (***Límites laterales: por la derecha y por la izquierda***)**.** *Sean* $D \subseteq \mathbb{R}$*,* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $a \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* D *y* $b \in \mathbb{R}$*.*

1. *Se dice que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que todos los* $x \in D$ *con* $0 < x - a < \delta$ *cumplen* $|f(x) - b| < \varepsilon$.
2. *Se dice que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ *si para cada* $M \in \mathbb{R}$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que todos los* $x \in D$ *con* $0 < x - a < \delta$ *cumplen* $f(x) > M$.

3. *Se dice que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ *si para cada* $M \in \mathbb{R}$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que todos los* $x \in D$ *con* $0 < x - a < \delta$ *cumplen* $f(x) < M$.
4. *Se dice que* $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que todos los* $x \in D$ *con* $0 < a - x < \delta$ *cumplen* $|f(x) - b| < \varepsilon$.
5. *Se dice que* $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ *si para cada* $M \in \mathbb{R}$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que todos los* $x \in D$ *con* $0 < a - x < \delta$ *cumplen* $f(x) > M$.
6. *Se dice que* $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *si para cada* $M \in \mathbb{R}$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que todos los* $x \in D$ *con* $0 < a - x < \delta$ *cumplen* $f(x) < M$.

Como consecuencia inmediata de las definiciones tenemos:

Proposición 4.15. *Sean* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *de modo que* $(a-\delta, a+\delta) \subseteq D$ *para algún* $\delta > 0$. *Sea* $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Entonces,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Proposición 4.16. *Sean* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *monótona no decreciente,* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. *Si* $a \in [D \cap (-\infty, a)]'$, *entonces* f *tiene* ***límite por la izquierda*** *en* a *(finito o infinito) y es*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D \cap (-\infty, a)\}$$

(entendindo que, si el conjunto no está acotado superiormente, su supremo es $+\infty$*).*

2. *Si* $a \in [D \cap (-\infty, a)]'$, *entonces* f *tiene* ***límite por la derecha*** *en* a *(finito o infinito) y es*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D \cap (a, +\infty)\}$$

(entendindo que, si el conjunto no está acotado inferiormente, su ínfimo es $-\infty$*).*