Topología general

Pablo Pallàs

13 de febrero de 2023

Índice

1. Espacios topológicos

1.1. Espacios topológicos

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ el conjunto de sus partes, entonces:

Definición 1.1. *Una* ***topología*** *sobre un conjunto X es un subconjunto $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

i. *El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total X pertenecen a τ.*

ii. *La unión arbitraria de elementos de τ también pertenece a τ.*

iii. *La intersección finita de elementos de τ también pertenece a τ.*

El par (X, τ) lo denominaremos ***espacio topológico*** *y a los elementos de τ los llamaremos* ***abiertos****.*

Es decir, podríamos decir que una topología es una colección de subconjuntos que contiene al vacío y al total, y que es cerrada para las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas.

Ejemplo 1.1.1. *Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_D = \mathcal{P}(X)$. Entonces, τ_D es una topología en X ya que contiene a todos los subconjuntos de X, en particular al vacío y al total, es cerrada para las uniones arbitrarias y para las intersecciones finitas. A esta topología la denominaremos **topología discreta**, y al conjunto X dotada de esta topología **espacio discreto**.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_I = \{\emptyset, X\}$. Entonces la colección τ_I es una topología sobre X: contiene al vacío y al total, la unión de ambos es $X \in \tau_I$ y la intersección es $\emptyset \in \tau_I$. Esta topología la denominaremos **topología indiscreta**, y es la topología más simple que puede tener un conjunto. A un conjunto X dotado con esta topología lo denominaremos **espacio indiscreto**.*

Definición 1.2. *Dos topologías τ_1, τ_2 sobre un conjunto X se dicen **comparables** si $\tau_1 \subset \tau_2$ ó $\tau_2 \subset \tau_1$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ diremos que τ_2 es más **fina** (tiene más abiertos) que τ_1.*

2. Aplicaciones continuas y homeomorfismos

3. Separación y numerabilidad

4. Espacios métricos

5. Compacidad

6. Conexión