Máster en Ing. Matemática y Computación

Autor: Dr. Abdelmalik Moujahid

Mapas Discretos

Puntos fijos y estabilidad

- **Un mapa** es una función $f : \Re^n \to \Re^n$. Dada dicha función y un punto $x \in \Re^n$, se define la **órbita** de x como la **secuencia**:

$$(x,\ f(x), f(f(x)), \ldots, f^n(x), \ldots\ )$$

donde $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ es la iteración de orden n del mapa f.

- La órbita de un punto es equivalente a la trayectoria de un punto en el caso de ecuaciones diferenciales.
- La analogía entre **mapas** (**ecuaciones en diferencias**) y **flujos** (**ecuaciones diferenciales**) se aprecia mejor si escribimos un mapa como:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- La solución de este mapa se obtiene vía iteración: partiendo de un valor inicial x_0, generamos una secuencia de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
- Iterando un mapa es equivalente a integrar una ecuación diferencial.
- Se dice que x_* es un **punto fijo del mapa** si $x_* = f(x_*)$.
- **La estabilidad de un punto fijo** se puede obtener mediante perturbación, es decir, consideramos una pequeña perturbación del punto fijo y analizamos su evolución.

- Formalmente, sea $x_n = x_* + \epsilon_n$, entonces $x_{n+1} = x_* + \epsilon_{n+1}$.
- Usando una aproximación lineal, tenemos:

$$\begin{aligned} x_* + \epsilon_{n+1} &= f(x_* + \epsilon_n) = f(x_*) + \epsilon_n f'(x_*) + \ldots \\ &= x_* + \epsilon_n f'(x_*) + \ldots \end{aligned}$$

Eliminando x_*, obtenemos:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n f'(x_*)$$

Concluimos que el punto fijo es stable si $|f'(x_*)| < 1$, e inestable si $|f'(x_*)| > 1$

Ejemplo 1: El Mapa Logístico

Puntos Fijos

Dado el siguiente mapa unidimensional:

$x_{n+1} = f(x_n) = \mu\, x_n(1 - x_n)$

Para encontrar los puntos de equilibrio del mapa, x^*, primero igualamos x_{n+1} a x_n:

$\mu\, x^*(1 - x^*) = x^*$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$x_1{}^* = 0$ y $x_2{}^* = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$

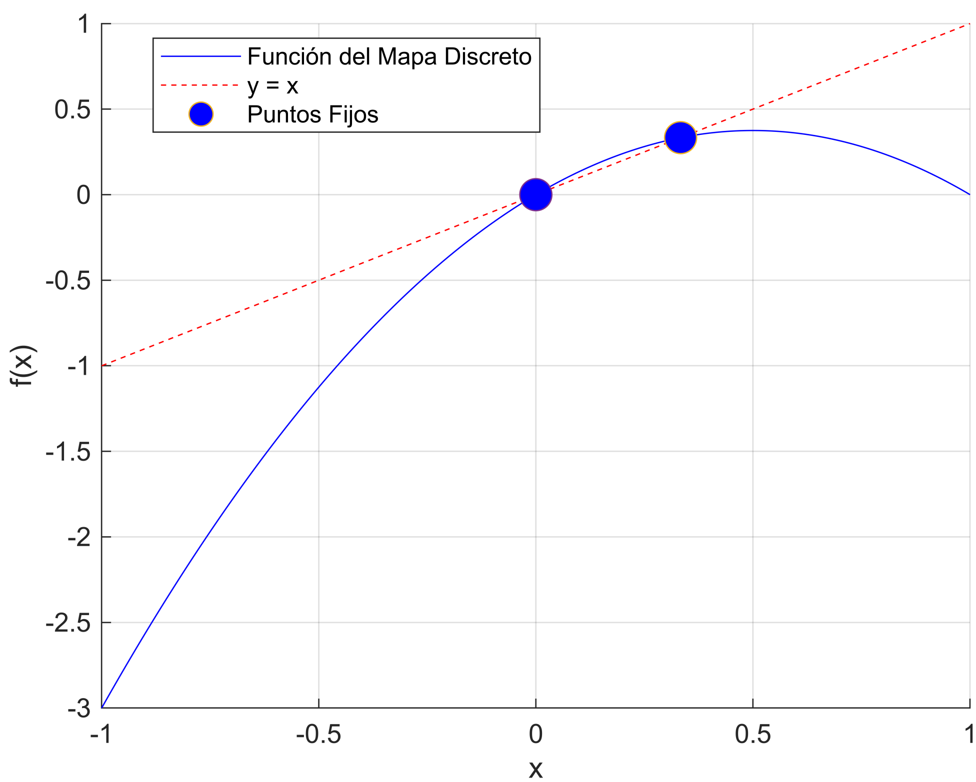
Estabilidad

Para determinar la estabilidad de estos puntos fijos, necesitamos evaluar la derivada del mapa discreto en cada punto fijo. La derivada del mapa es: $f'(x_n) = \mu - 2\mu\, x_n$

- Para $x_1 = 0$, $f'(x_1) = \mu$. Como el valor absoluto de f' es mayor que 1, **el punto fijo es inestable**.
- Para $x_2 = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, $f'(x_2) = 2 - \mu$. En este caso, la estabilidad del punto fijo depende del valor de μ.
- Para $1 < \mu < 3$, el punto fijo es estable.

```
clear all
close all

% Definición de parámetros
mu = 1.5; % Parámetro de crecimiento de la población

xstar = (mu-1)/mu;
```

```
f = @(x) mu * x.*(1 - x);

% Definir el rango de valores para x y el número de iteraciones
x_range = linspace(0, 1, 1000);

num_iterations = 200;

% Visualizar el diagrama de telaraña
figure;
hold on;
% Dibujar la función del mapa discreto
plot(x_range, f(x_range), 'b');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
% Plotear la línea diagonal y=x
plot(x_range, x_range, 'r--');
plot(xstar, f(xstar),'o','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor','b')
plot(0, f(0),'o','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor','b')

legend('Función del Mapa Discreto', 'y = x', 'Puntos Fijos','Location',
'southwest');

legend("Position", [0.1756,0.79563,0.34583,0.1119])
grid on
```



```
% Visualizar el diagrama de telaraña
figure;
hold on;
grid on;

% Dibujar la función del mapa discreto
plot(x_range, f(x_range), 'b');

% Plotear la línea diagonal y=x
plot(x_range, x_range, 'r--');
plot(xstar,f(xstar),'o','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor','b')
plot(0, f(0),'o','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor','b')

% Realizar las iteraciones del mapa discreto
x_init = .7; % Punto inicial arbitrario

xlabel('x');
ylabel('f(x)');
title('Diagrama de Telaraña (Mapa Discreto Unidimensional)');

for i = 1:num_iterations
    x_next = f(x_init);
    % Trazar la línea que conecta los puntos (x, f(x)) y (f(x), f(x))
    plot([x_init, x_init], [x_init, x_next], 'k');
    plot([x_init, x_next], [x_next, x_next], 'k');
    x_init = x_next;
    drawnow;
end
legend('Función del Mapa Discreto', 'y = x', 'Iteraciones','Location',
'southwest');
legend("Position", [0.15133,0.74997,0.34107,0.11476])
```

Ejemplo 2:

Puntos Fijos

Dado el siguiente mapa unidimensional:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu - x_n^2$$

Para encontrar los puntos de equilibrio del mapa, x^*, primero igualamos x_{n+1} a x_n:

$$\mu - {x^*}^2 = x^*$$

Resolviendo esta ecuación de segundo orden, obtenemos:

$$x^* = -\frac{1 \pm \sqrt{1+4\mu}}{2}$$

Para $\mu = 0.75$, los puntos fijos son: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Estabilidad

Para determinar la estabilidad de estos puntos fijos, necesitamos evaluar la derivada del mapa discreto en cada punto fijo. La derivada del mapa es: $f'(x_n) = -2x_n$

- Para $x_1 = -\frac{3}{2}$, $f'(x_1) = 3$. Como el valor de f' es mayor que 1, **el punto fijo es inestable**.
- Para $x_2 = \frac{1}{2}$, $f'(x_2) = 1$. Como el valor de f' es igual que 1, no es posible determinar la estabilidad del punto fijo utilizando únicamente la derivada.

Puntos Fijos y su Estabilidad

```
clear all

syms x

mu_value = 0.75;

% Encontrar los puntos fijos del mapa en función de mu
puntos_fijos = solve(mu_value - x^2 - x, x);

% Mostrar los puntos fijos en función de mu
disp('Puntos fijos del mapa en función de mu:');
```

```
Puntos fijos del mapa en función de mu:
```

```
disp(puntos_fijos)
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
% Derivar el mapa discreto con respecto a x
df_dx = diff(mu_value - x^2, x);

% Evaluar las derivadas en los puntos fijos
```

```
stability = zeros(size(puntos_fijos));
for i = 1:length(puntos_fijos)
    stability(i) = subs(df_dx, x, puntos_fijos(i));
end

% Mostrar los puntos fijos y su estabilidad
disp('Puntos fijos y su estabilidad en mu = 0.75:');
```

```
Puntos fijos y su estabilidad en mu = 0.75:
```

```
for i = 1:length(puntos_fijos)
    fprintf('Punto fijo: x = %.4f, es: ', double(puntos_fijos(i)));
    if abs(stability(i)) < 1
        disp('Estable');
    elseif abs(stability(i)) > 1
        disp('Inestable');
    else
        disp('Indeterminada');
    end
end
```

```
Punto fijo: x = -1.5000, es: 
Inestable
Punto fijo: x = 0.5000, es: 
Indeterminada
```

Diagrama de Fase

```
clear all

% Parámetro mu
mu = 0.75;

% Condición inicial
x0 = .1;  % Condición inicial específica

% Número de iteraciones
num_iterations = 5000;

% Inicializar vector para almacenar los puntos del espacio de fase
phase_space = zeros(1, num_iterations);

% Iterar el mapa discreto para la condición inicial específica
x = x0;
phase_space(1) = x0;
for n = 2:num_iterations
    x_next = mu - x^2;  % Mapa discreto
    phase_space(n) = x_next;
    x = x_next;
end
```

```
% Visualizar el espacio de fase
figure;
plot(phase_space(1:end-1), phase_space(2:end), '.');
hold on;
plot(x0, x0,'-or')
xlabel('x_n');
ylabel('x_{n+1}');
title('Espacio de Fase del Mapa Discreto para x_0 = 0.1');
```

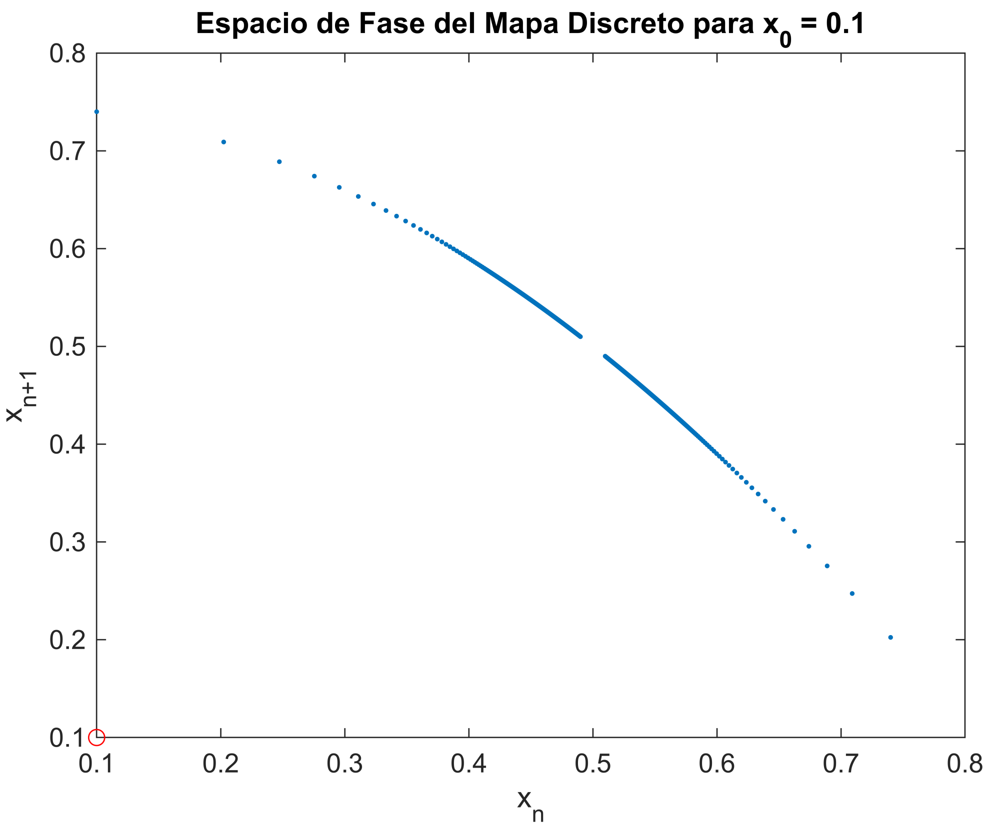


Diagrama de telaraña

```
clear all

mu = 0.75;
% Definir la función del mapa discreto unidimensional
f = @(x) mu-x.^2;

% Definir el rango de valores para x y el número de iteraciones
x_range = linspace(-2, 2, 1000);
num_iterations = 50;

% Visualizar el diagrama de telaraña
figure;
hold on;
```

```
% Plotear la función del mapa discreto
plot(x_range, f(x_range), 'b');

% Plotear la línea diagonal y=x
plot(x_range, x_range, 'r--');
syms x_
% Encontrar los puntos fijos del mapa en función de mu
puntos_fijos = solve(mu - x_^2 - x_, x_);
plot(puntos_fijos(1), f(puntos_fijos(1)), 'o',
'MarkerSize',12,'MarkerFaceColor','b')
plot(puntos_fijos(2), f(puntos_fijos(2)), 'o',
'MarkerSize',12,'MarkerFaceColor','r')

% Realizar las iteraciones del mapa discreto
x_init = 1.4; % Punto inicial arbitrario
for i = 1:num_iterations
    x_next = f(x_init);
    % Trazar la línea que conecta los puntos (x, f(x)) y (f(x), f(x))
    plot([x_init, x_init], [x_init, x_next], 'k');
    plot([x_init, x_next], [x_next, x_next], 'k');
    x_init = x_next;
    drawnow;
end

xlabel('x');
ylabel('f(x)');
title('Diagrama de Telaraña (Mapa Discreto Unidimensional)');
legend('Función del Mapa Discreto', 'y = x', 'Punto fijo 1', 'Punto fijo 2');
grid on;
```

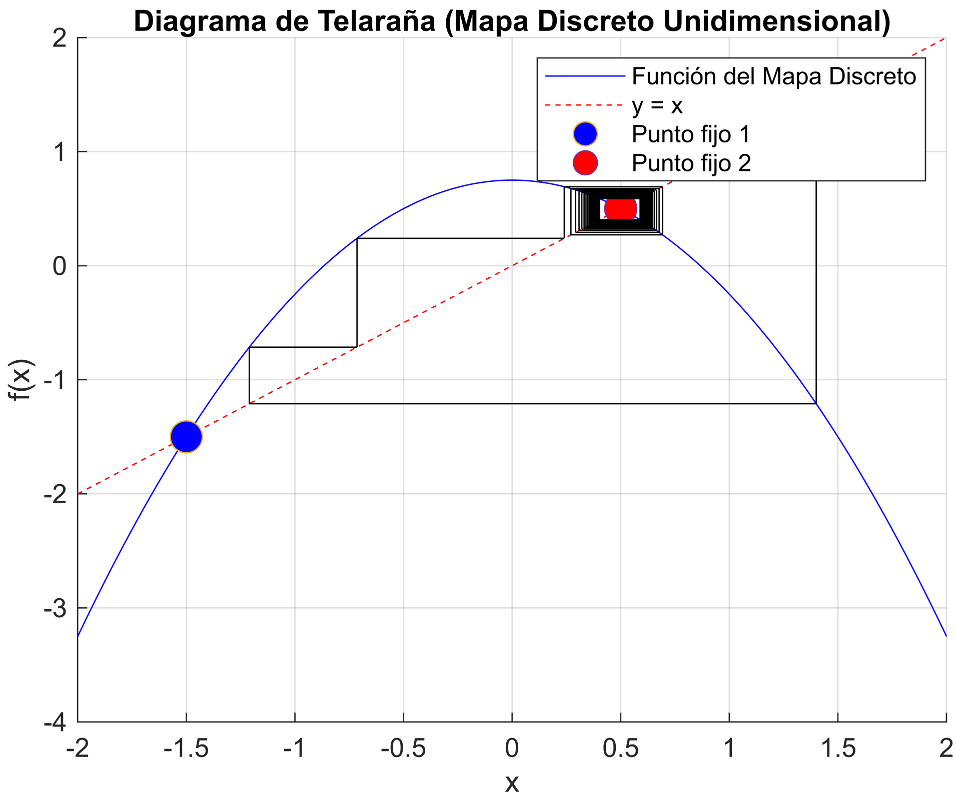


Diagrama de Telaraña (Mapa Discreto Unidimensional)
Función del Mapa Discreto
y = x
Punto fijo 1
Punto fijo 2
f(x)
x
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2