Exponentes de Lyapunov

Ecuación Variacional del sistema de Lorenz

- Una **ecuación variacional** describe cómo **evolucionan las perturbaciones** (o generalmente, el **volumen del espacio de fase**) a lo largo de una trayectoria.
- Estas ecuaciones son cruciales para entender cómo las trayectorias cercanas se separan o se acercan en el espacio fase.

Consideramos el siguiente sistema de Lorenz (1963):

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\,(y - x) \\ r\,x - y - x\,z \\ -b\,z + x\,y \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

donde los parámteros $\sigma,\ b\ \ y\ \ r$ son reales positivos. Los valores adoptados por Lorenz, son $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}\ y\ r = 28.$

- Para un sistema de dimensión n, hace falta n^2 derivadas parciales para describir todas las variaciones del sistema.
- La matriz Jacobiana devuelve dichas variaciones:

$$D\ f\ = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_x & \frac{\partial}{\partial y} f_x & \frac{\partial}{\partial z} f_x \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y & \frac{\partial}{\partial y} f_y & \frac{\partial}{\partial z} f_y \\ \frac{\partial}{\partial x} f_z & \frac{\partial}{\partial y} f_z & \frac{\partial}{\partial z} f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

- El siguiente paso es decribir las variaciones.
- Utilizando la notación δ_{xy} **que hace referencia a la variación en la dirección** x **generada por una variación en la dirección** y, La matriz de todas las variaciones viene dada por:

$$[\delta\,] = \begin{bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{yx} & \delta_{zx} \\ \delta_{xy} & \delta_{yy} & \delta_{zy} \\ \delta_{xz} & \delta_{yz} & \delta_{zz} \end{bmatrix}$$

- **La ecuación variacional es entonces**:

$$\left[\dot{\delta}\right] = D\,f\,[\delta\,]$$

- Se trata entonces de resolver la ecuación variacional y el sistema de forma simultanea.
- Para ello, trabajamos con un vector de estado aumentado dado por:

$$(x, y, z, \delta_{xx}, \delta_{xy}, \delta_{xz}, \delta_{yx}, \delta_{yy}, \delta_{yz}, \delta_{zx}, \delta_{zy}, \delta_{zz}\,)$$

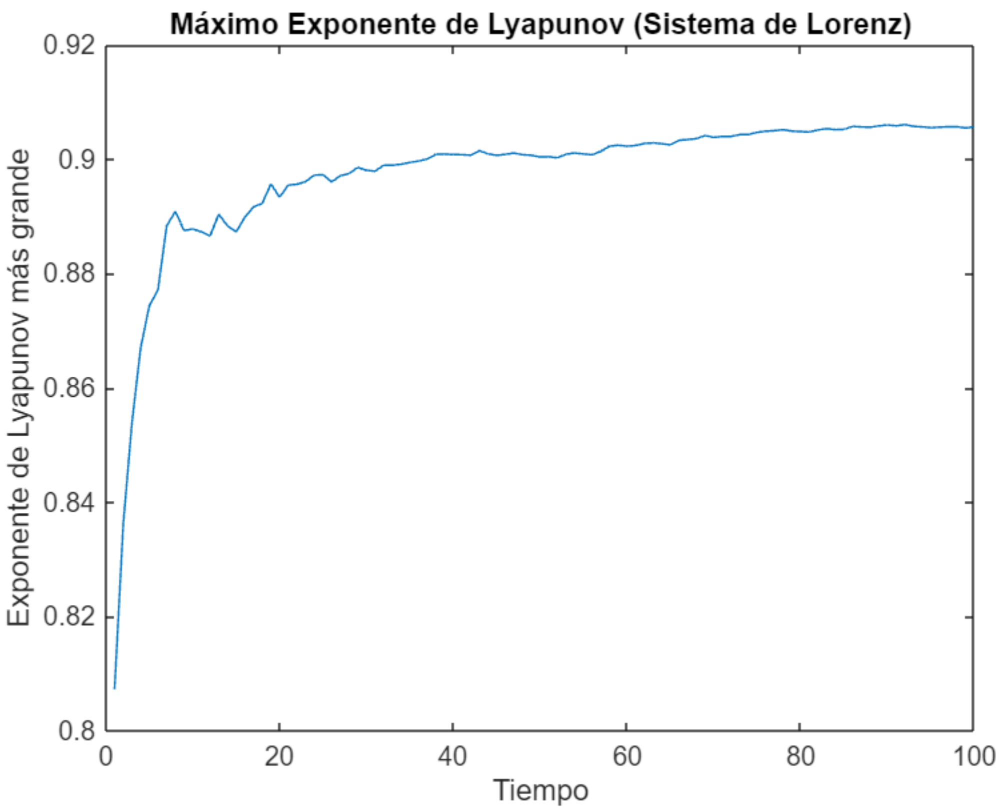
- Las ecuaciones diferenciales que describen este sistema aumentado son:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \sigma\,(y - x) \\
&\dot{y} = r\,x - y - x\,z \\
&\dot{z} = -b\,z + x\,y \\
&\dot{\delta}_{xx} = -\sigma\,\delta_{xx} + \sigma\,\delta_{xy} \\
&\dot{\delta}_{xy} = (r - z)\,\delta_{xx} - \delta_{xy} - x\delta_{xz} \\
&\dot{\delta}_{xz} = y\delta_{xx} + x\delta_{xy} - b\delta_{xz} \\
&\dot{\delta}_{yx} = -\sigma\,\delta_{yx} + \sigma\,\delta_{yy} \\
&\dot{\delta}_{yy} = (r - z)\,\delta_{yx} - \delta_{yy} - x\delta_{yz} \\
&\dot{\delta}_{yz} = y\delta_{yx} + x\delta_{yy} - b\delta_{yz} \\
&\dot{\delta}_{zx} = -\sigma\,\delta_{zx} + \sigma\,\delta_{zy} \\
&\dot{\delta}_{zy} = (r - z)\,\delta_{zx} - \delta_{zy} - x\delta_{zz} \\
&\dot{\delta}_{zz} = y\delta_{zx} + x\delta_{zy} - b\delta_{zz}
\end{aligned}$$

```
% Limpiar el espacio de trabajo y cerrar todas las figuras previas
clc;
clear all;
close all;

% Definir el número de iteraciones y el tiempo de simulación
n = 100;  % Número de iteraciones para calcular el exponente de Lyapunov
T = 100; % Tiempo de simulación

% Parámetros del modelo de Lorenz
sigma = 10;
```

```
b = 8/3;
r = 28;

% Calcular el exponente de Liapunov
L = lle_Lorenz(n, sigma, r, b, T); % Función definida más adelante
L = log(L) / T; % Promedio temporal de los exponentes de Lyapunov
t = (1:n)'; % Vector de tiempo para graficar
```

```
% Graficar el exponente de Lyapunov promediado en el tiempo
plot(t, cumsum(L) ./ t);
xlabel('Tiempo');
ylabel('Exponente de Lyapunov más grande');
title('Máximo Exponente de Lyapunov (Sistema de Lorenz)');
```




```
function F = LorenzPerturbado(t, X, sigma, r, b)
    % LORENZPERTURBADO Ecuaciones del sistema de Lorenz perturbado
    % Esta función calcula las derivadas del sistema de Lorenz y sus
perturbaciones
    % Entrada:
    %   t - tiempo (no utilizado, pero necesario para funciones ODE en MATLAB)
```

```
    %   X - vector de estado (contiene las variables del sistema y las
perturbaciones)
    %   sigma - parámetro sigma del sistema de Lorenz
    %   r - parámetro r del sistema de Lorenz
    %   b - parámetro b del sistema de Lorenz
    % Salida:
    %   F - vector de derivadas
    % Desempaquetar las variables del estado y las perturbaciones
    x = X(1);
    y = X(2);
    z = X(3);
    deltaxy = [X(4), X(7), X(10);
               X(5), X(8), X(11);
               X(6), X(9), X(12)];

    % Inicializar el vector de salida
    F = zeros(12, 1);

    % Ecuaciones del sistema de Lorenz
    F(1) = sigma * (y - x);
    F(2) = -x * z + r * x - y;
    F(3) = x * y - b * z;

    % Matriz Jacobiana
    J = [-sigma, sigma, 0;
         r - z, -1, -x;
         y, x, -b];

    % Ecuaciones diferenciales para las perturbaciones
    F(4:12) = J * deltaxy;
end


% Función para calcular el exponente de Liapunov del sistema de Lorenz
function L = lle_Lorenz(n, sigma, r, b, T)
    % Inicialización del vector para almacenar las normas de las perturbaciones
    L = zeros(n, 1);

    % Configuración de las opciones de la función de integración
    options = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', 1e-8);
    % Generar una condición inicial aleatoria para el sistema perturbado
    y0 = rand(12, 1);
    % Normalizar el vector de desviación
    y0(4:end) = y0(4:end) / norm(y0(4:end));

    % Iteración para calcular las normas de las perturbaciones
    for k = 1:n
        % Resolver las ecuaciones diferenciales del sistema perturbado
```

```
        [~, y] = ode45(@(t, y) LorenzPerturbado(t, y, sigma, r, b), [0, T], y0, 
options);
        y0=y(end,:)';
        % Almacenar la norma del vector de desviación en cada iteración
        L(k) = norm(y0(4:end));
        % Normalizar el vector de desviación para la siguiente iteración
        y0(4:end) = y0(4:end) / L(k);
    end
end
```