# Actividad 2: Optimización sin restricciones

**Grupo 2:** Jorge David Ávila Álvarez, Miguel Moreno Sánchez, Ainhoa Muñiz Quintana, Lorea Páramo Arana, Pablo Ruiz Molina

**Fecha:** 10.01.2025

**Table of Contents**



```
% Limpieza de la consola, variables y figuras
clc; clear; close all
```

## Introducción

En este laboratorio estudiaremos el siguiente problema de optimización sin restricciones. Encontrar la curva $u(x)$ que conecta los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$ tal que el área de la superficie de revolución alrededor del eje $x$ sea mínima.

El área de la superficie de revolución para una curva $u(x)$ se define como la integral $2\pi \int_0^1 u(x)\sqrt{1+[u'(x)]^2}\,dx$. Sin embargo, minimizar esta expresión es equivalente a minimizar $I(u) = \int_0^1 u(x)\sqrt{1+[u'(x)]^2}\,dx$, en dónde hemos normalizado la expresión anterior eliminando el factor $2\pi$ para facilitar los cálculos.

Para resolver este problema, vamos a realizar una aproximación del problema continuo mediante una discretización del intervalo $[0,1]$ en $n$ intervalos de la forma $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, para $0 \leq j \leq n-1$. De está forma el problema se reduce a encontrar los puntos $u_j = u\left(\frac{j}{n}\right)$ que minimicen a la expresión:

$$T(u) = \sum_{j=0}^{n-1} T_j(u) \text{ con } T_j(u) = \frac{(u_j + u_{j+1})\sqrt{1+n^2[u_{j+1}-u_j]^2}}{2n}$$

Donde $T(u)$ es la aproximación por el método de los trapecios de la integral $I(u)$.

Cabe destacar que, debido a que la curva $u(x)$ debe unir los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$, se debe imponer que $u_0 = u_n = 1$. De esta forma hemos aproximado el problema original por un problema de optimización sin

reestricciones de dimensión $n-1$. Para resolver este problema se hace uso del Método del Gradiante Descedente utilizando un paso variable.

En cuanto a la metodología, en primer lugar, se define el número de subintervalos de la partición, la tolerancia máxima permitida y el número máximo de iteraciones. A continuación, se implementa el algoritmo del Método del Gradiente Descendente con paso variable, el cual requiere un método de búsqueda unidimensional. Con el objetivo de realizar una comparación, en este trabajo se emplean tres métodos de búsqueda unidimensional diferentes: el Método de Búsqueda Dicotómica, el Método de Fibonacci y el Método de la Sección Áurea. Posteriormente, se realiza una comparativa de los resultados obtenidos con los tres métodos, presentando los datos en formato tabla y gráfico. Finalmente, se incluye una comparación con la solución teórica del problema y se muestra una gráfica de la superficie de revolución que minimiza el área.

El trabajo incluye como anexo al final del documento todas las funciones necesarias para la resolución del laboratorio.

## Definir el intervalo [0,1] y discretizarlo en *n* intervalos

Por claridad en las visualizaciones gráficas posteriores se utilizará $n = 35$ , es decir, partiremos el intervalo en 35 subintervalos. Sin embargo, se ha comprobado cómo la solución converje con cualquier número de n > 1. Lógicamente, cuanto mayor es n, más tiempo se requiere para obtener la solución, pero a la vez, mejor precisión se obtiene.

Además, como el método del gradiante requiere de un vector inicial, vamos a definir como véctor de arranque $u^1$ un vector de unos, pues cumple con la condición $u_0^1 = u_n^1 = 1$.

```
n = 35; % Número de intervalos
x = linspace(0, 1, n+1); % n+1 puntos discretos: incluyendo 0 y 1
u = ones(size(x)); % Inicialización de u(x) --> (u(0)=1, u(1)=1)
```

## Inicializar el algoritmo

En este apartado se inicializa la tolerancia máxima permitida, el número máximo de iteraciones y el número máximo de iteraciones que le permitimos al método de Búsqueda dicotómica para encontrar el tamaño de paso óptimo.

```
%% Paso 1: Inicialización de tolerancia y máximo número de iteraciones.

% Parámetros del algoritmo
delta = 1e-6; % Tolerancia para la convergencia
max_iter = 30000; % Número máximo de iteraciones para el gradiente
max_iter_bus = 1000; % Número máximo de iteraciones para el algoritmo de
Búsqueda Dicotómica

% Comparación entre los métodos de búsqueda
metodos = {'Búsqueda Dicotómica', 'Fibonacci', 'Sección Áurea'};
resultados = struct;
```

## Implementación del Método del Gradiente Descendente

En este apartado se implementa el algoritmo del Método del Gradiante Descendiente. Con el objetivo de afianzar los contenidos de la actividad 1 y comparar resultados, en el algoritmo se implementan tres métodos de búsqueda unidimensional para hallar el tamaño de paso: los métodos de Búsqueda Dicotómica, Fibonacci y Razón Áurea.

Por otro lado, como criterio de parada utilizaremos dos errores. El algoritmo se detendrá cuándo $||\nabla T(u^k)|| < \delta = 10^{-6}$ o cuándo $||u^{k+1} - u^k|| < \delta = 10^{-6}$. Además, para evitar excesivas iteraciones, el algoritmo se detendrá cuándo se llegue al número máximo de iteraciones establecido, en este caso 30000.

```
% Bucle para realizar el algoritmo con los tres métodos de búsqueda
unidimensional.
for metodo = 1:size(metodos, 2)
iter = 0;

% Inicializar los errores
error_1 = delta + 1; % Error ||u_{k+1} - u_k||
error_2 = delta + 1; % Error ||grad_f(u_{k+1})||

% Inicialización de u_k y u_{k+1}
u_k = u;
u_k_plus = u_k;

% Inicializar tabla de resultados por iteración
tabla_it = zeros(max_iter, size(u_k_plus, 2) + 3);
tiempo1 = tic;

% Bucle del algritmo del Método del gradiante descendente
    while (error_1 > delta || error_2 > delta) && iter < max_iter
        iter = iter +1;

        %% Paso 2: gradiente en el punto actual y tasa de aprendizaje
        gradiente = calculo_gradiente(u_k,n);

        ft = @(t) F(u_k - t * gradiente, n); % función unidimensional

        % Búsqueda para encontrar el t óptimo con diferentes métodos
        if metodo == 1
            t_k = busqueda_dicotomica(ft, 0, 0.1, delta, max_iter_bus);

        elseif metodo == 2
            [t_k,~,~] = fibo(ft, [0, 0.1], delta);

        else
            [t_k,~,~] = SeccionAurea(ft,delta,0,0.1);

        end
```

```
        %% Paso 3: actualizar
        u_k_plus(2:n) = u_k(2:n) - t_k * gradiente(2:n); % Actualizar puntos
intermedios

        %% Calcular errores
        error_1 = norm(u_k_plus(2:n) - u_k(2:n)); % Diferencia entre puntos
sucesivos
        error_2 = norm(gradiente(2:n)); % Tamaño del gradiente

        %% Guardar resultados iteración en tabla
        tabla_it(iter, :) = [iter, error_1, error_2, u_k_plus];

        % Actualizar u
        u_k(2:n) = u_k_plus(2:n);

    end

    tiempo_transcurrido = toc(tiempo1); % Detiene el temporizador 1
    area = 2 * pi * F(u_k, n); % Cálculo del área de la superficie de revolución
    % Guardado de los resultados del método
    resultados(metodo).iteraciones = iter;
    resultados(metodo).tiempo = tiempo_transcurrido;
    resultados(metodo).area = area;
    resultados(metodo).u_k = u_k;
    resultados(metodo).tabla_it = tabla_it;
end
```

## Evaluación de resultados y comparación entre métodos

En este apartado se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo del Método del Gradiante Descendente. Se presentan 3 tablas en las que se recogen los resultados de la optimización utilizando los métodos de Búsqueda Dicotómica, Fibonacci y Sección Áurea. Además, acompañando a cada tabla, se muestra el tiempo requerido, el número de iteraciones y la aproximación del área por cada uno de los métodos.

```
% Generar dinámicamente los nombres de las columnas de la tabla
variable_names = [{'Iteración'}, {'Error_1', 'Error_2'}, strcat('u',
string(0:n))];

for metodo = 1:3
    fprintf('\nMétodo: %s\n', metodos{metodo});
    fprintf('Tiempo transcurrido: %.6f segundos\n', resultados(metodo).tiempo);
    fprintf('Número de iteraciones: %d\n', resultados(metodo).iteraciones);
    fprintf('Área obtenida: %.6f\n', resultados(metodo).area);
    T = array2table(resultados(metodo).tabla_it, 'VariableNames',
variable_names);
    iter = resultados(metodo).iteraciones;
```

```
    indices = [1:5, iter-9:iter];  % Crear los índices deseados
    disp(T(indices,:));
end
```

```
Método: Búsqueda Dicotómica
Tiempo transcurrido: 0.058310 segundos
Número de iteraciones: 3169
Área obtenida: 5.992049
```

| Iteración | Error_1 | Error_2 | u0 | u1 | u2 | u3 | u4 | u5 | u6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01666 | 0.1666 | 1 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 |
| 2 | 0.0066591 | 0.19006 | 1 | 0.99962 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 |
| 3 | 0.0037205 | 0.27998 | 1 | 0.99781 | 0.99736 | 0.99576 | 0.99576 | 0.99576 | 0.99576 |
| 4 | 0.0041579 | 0.18921 | 1 | 0.99851 | 0.99585 | 0.99636 | 0.99513 | 0.99513 | 0.99513 |
| 5 | 0.0030876 | 0.24541 | 1 | 0.99764 | 0.99688 | 0.99524 | 0.99531 | 0.99477 | 0.99477 |
| 3160 | 9.6418e-07 | 3.4222e-05 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3161 | 6.8467e-07 | 7.8352e-05 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3162 | 1.1457e-07 | 1.746e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3163 | 1.5009e-07 | 1.0661e-05 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3164 | 7.4404e-08 | 6.886e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3165 | 1.0789e-07 | 1.9232e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3166 | 1.8302e-07 | 9.9758e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3167 | 8.8113e-07 | 1.139e-05 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3168 | 7.8489e-07 | 9.1336e-05 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3169 | 1.2676e-08 | 7.4721e-07 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |

```
Método: Fibonacci
Tiempo transcurrido: 0.041960 segundos
Número de iteraciones: 3358
Área obtenida: 5.992049
```

| Iteración | Error_1 | Error_2 | u0 | u1 | u2 | u3 | u4 | u5 | u6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01666 | 0.1666 | 1 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 |
| 2 | 0.0066592 | 0.19006 | 1 | 0.99962 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 |
| 3 | 0.0037205 | 0.27998 | 1 | 0.99781 | 0.99736 | 0.99576 | 0.99576 | 0.99576 | 0.99576 |
| 4 | 0.004158 | 0.1892 | 1 | 0.99851 | 0.99585 | 0.99636 | 0.99513 | 0.99513 | 0.99513 |
| 5 | 0.0030876 | 0.24542 | 1 | 0.99764 | 0.99688 | 0.99524 | 0.99531 | 0.99477 | 0.99477 |
| 3349 | 2.3007e-08 | 2.0082e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3350 | 4.2152e-08 | 1.1852e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3351 | 2.1669e-08 | 2.1007e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3352 | 7.7627e-08 | 1.0914e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3353 | 2.7144e-08 | 2.9196e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3354 | 1.0308e-07 | 1.0381e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3355 | 2.5277e-08 | 2.6759e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3356 | 1.0195e-07 | 1.0254e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3357 | 2.5336e-08 | 2.8857e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3358 | 9.7587e-08 | 9.7745e-07 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |

```
Método: Sección Áurea
Tiempo transcurrido: 0.038899 segundos
Número de iteraciones: 3803
Área obtenida: 5.992049
```

| Iteración | Error_1 | Error_2 | u0 | u1 | u2 | u3 | u4 | u5 | u6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.01666 | 0.1666 | 1 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 | 0.99714 |
| 2 | 0.0066591 | 0.19006 | 1 | 0.99962 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 | 0.99614 |
| 3 | 0.0037205 | 0.27998 | 1 | 0.99781 | 0.99736 | 0.99576 | 0.99576 | 0.99576 | 0.99576 |
| 4 | 0.0041579 | 0.18921 | 1 | 0.99851 | 0.99585 | 0.99636 | 0.99513 | 0.99513 | 0.99513 |
| 5 | 0.0030875 | 0.24542 | 1 | 0.99764 | 0.99688 | 0.99524 | 0.99531 | 0.99477 | 0.99477 |
| 3794 | 2.5233e-08 | 2.3623e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |
| 3795 | 3.823e-08 | 1.0749e-06 | 1 | 0.98273 | 0.96658 | 0.95153 | 0.93755 | 0.92464 | 0.91278 |

```
    3796       2.2556e-08    1.9289e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3797       3.2444e-08    1.1119e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3798       2.0944e-08    1.7499e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3799        3.385e-08     1.092e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3800       1.9842e-08    1.7995e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3801       4.4406e-08    1.0145e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3802       2.1124e-08    2.0445e-06     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
    3803       5.8434e-08    9.7921e-07     1      0.98273    0.96658    0.95153    0.93755    0.92464    0.91278
```

```
% Comparación de datos entre los 3 métodos
disp(table(string(metodos)', [resultados.iteraciones]', [resultados.tiempo]',
[resultados.area]', arrayfun(@(r) r.tabla_it(r.iteraciones, 2), resultados)',
arrayfun(@(r) r.tabla_it(r.iteraciones, 3), resultados)',...
    'VariableNames', {'Método', 'Iteraciones', 'Tiempo (s)', 'Área', 'Error 1',
'Error 2'}));
```

```
          Método             Iteraciones    Tiempo (s)    Área      Error 1       Error 2
    _____________________    ___________    __________    _____    _________    _________

    "Búsqueda Dicotómica"        3169          0.05831     5.992    1.2676e-08    7.4721e-07
    "Fibonacci"                  3358          0.04196     5.992    9.7587e-08    9.7745e-07
    "Sección Áurea"              3803         0.038899     5.992    5.8434e-08    9.7921e-07
```

Podemos observar que los tres métodos de búsqueda unidimensional permiten que el algoritmo del Método del Gradiente Descendente converja y alcance la misma solución en todos los casos. Sin embargo, el número de iteraciones necesarias no es el mismo para cada método. La Búsqueda Dicotómica resulta ser la más eficiente en términos de iteraciones, seguida del Método de Fibonacci, mientras que el Método de la Sección Áurea requiere más iteraciones.

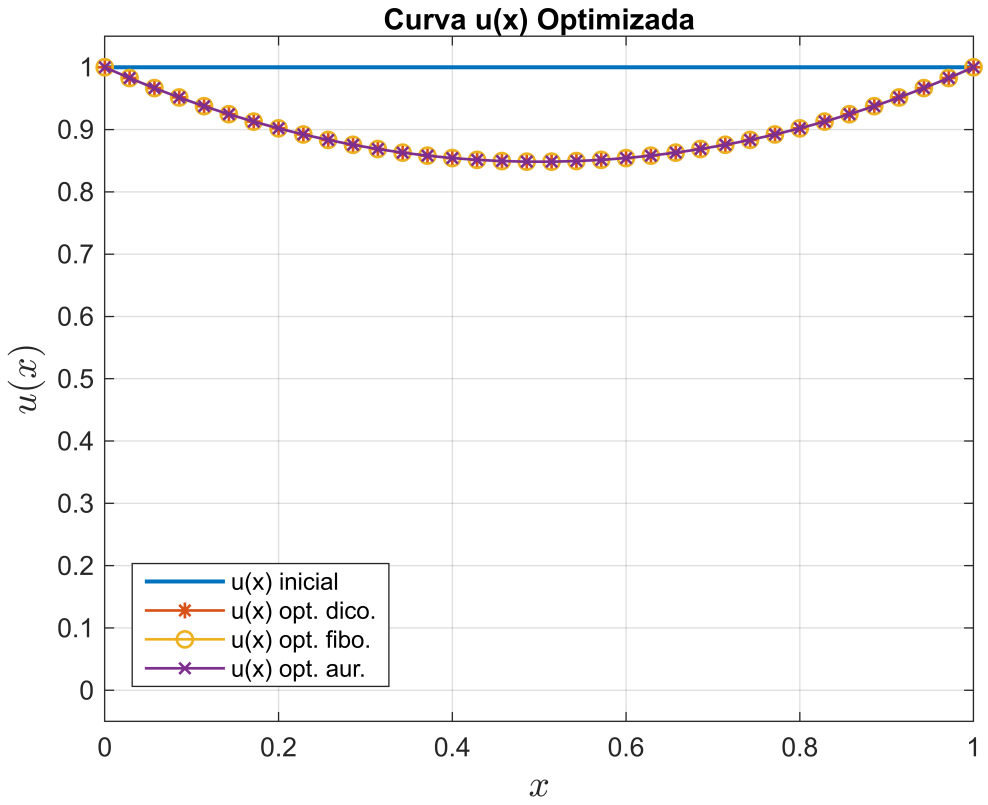
Por otro lado, al analizar el tiempo de convergencia, el orden se invierte: el Método de la Sección Áurea logra que el algoritmo del Gradiente Descendente converja en el menor tiempo, seguido del Método de Fibonacci, dejando en último lugar a la Búsqueda Dicotómica. Este comportamiento podría deberse, por un lado, al número de evaluaciones de la función a minimizar realizadas por cada método de búsqueda y, por otro, a las iteraciones internas necesarias para cada uno.

## Visualización gráfica de u(x) para cada método

A continución, para facilitar la interpretación de los resultados se presenta una representación gráfica de las 3 curvas generadas en el apartado anterior.

```
figure;
plot(x, u, 'LineWidth', 1.5); % u inicial
hold on;
plot(x, resultados(1).u_k, '-*', 'LineWidth', 1); % u optimizada
plot(x, resultados(2).u_k, '-o', 'LineWidth', 1); % u optimizada
plot(x, resultados(2).u_k, '-x', 'LineWidth', 1); % u optimizada
xlabel('$x$','Interpreter','latex','FontSize',14,'FontWeight','bold');
ylabel('$u(x)$','Interpreter','latex','FontSize',14,'FontWeight','bold');
ylim([-0.05, 1.05]);
title('Curva u(x) Optimizada');
legend(["u(x) inicial", "u(x) opt. dico.", "u(x) opt. fibo.", "u(x) opt. aur."],
"Position", [0.1690 0.1861 0.2000, 0.0774])
```

```
grid on;
```




De nuevo comprobamos que en todos los casos la curva obtenida es la misma.

## Comparación con la solución exacta (catenaria)

Para el problema original, es conocido que la solución exacta es la curva catenaria, $u(x) = a\cosh\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Las constantes se determinan imponiendo $u(0) = u(1) = 1$. Resulta inmediato comprobar que $b = 0.5$ por paridad del coseno hiperbólico. Para la constante $a$ se usa el Método de Newton:

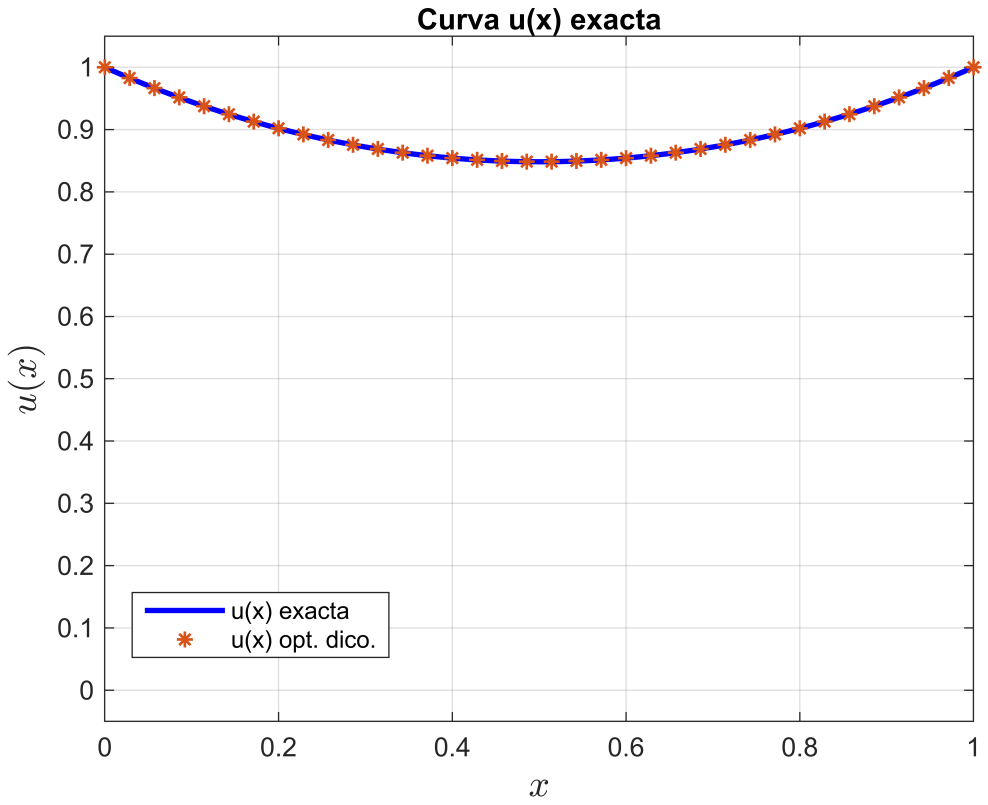
```
g = @(a)a*cosh(0.5/a)-1;
[a,~] = Newton(g,1e-10,0.7)
```

```
a = 0.8483
```

La solución exacta es, por lo tanto, $u(x) = 0.84833\cosh\left(\frac{x-0.5}{0.84833}\right)$. Para comprobar si los resultados obtenidos anteriormente son correctos, a continuación se muestra su representación gráfica junto a la solución numérica obtenida empleando el Método de Búsqueda Dicotómica.

```
figure;
x_teo = linspace(0,1,1000);
y_teo = a*cosh((x_teo-0.5)/a);
plot(x_teo,y_teo,'b','LineWidth',2)
hold on;
```

```
plot(x, resultados(1).u_k, '*', 'LineWidth', 1); % u optimizada
xlabel('$x$','Interpreter','latex','FontSize',14,'FontWeight','bold');
ylabel('$u(x)$','Interpreter','latex','FontSize',14,'FontWeight','bold');
ylim([-0.05, 1.05]);
title('Curva u(x) exacta');
legend(["u(x) exacta", "u(x) opt. dico."], "Position", [0.1690 0.1861 0.2000,
0.0774])
grid on
```




Vemos como la solución numérica se aproxima perfectamente a la teórica.

## Visualización de la solución final (superficie de revolución con el área mínima)

A continuación se muestra una figura de la superficie de revolución con respecto al eje x, resultante de girar la curva obtenida por las aproximaciones numéricas. O, lo que es lo mismo, la superficie que minimiza el área del problema original.

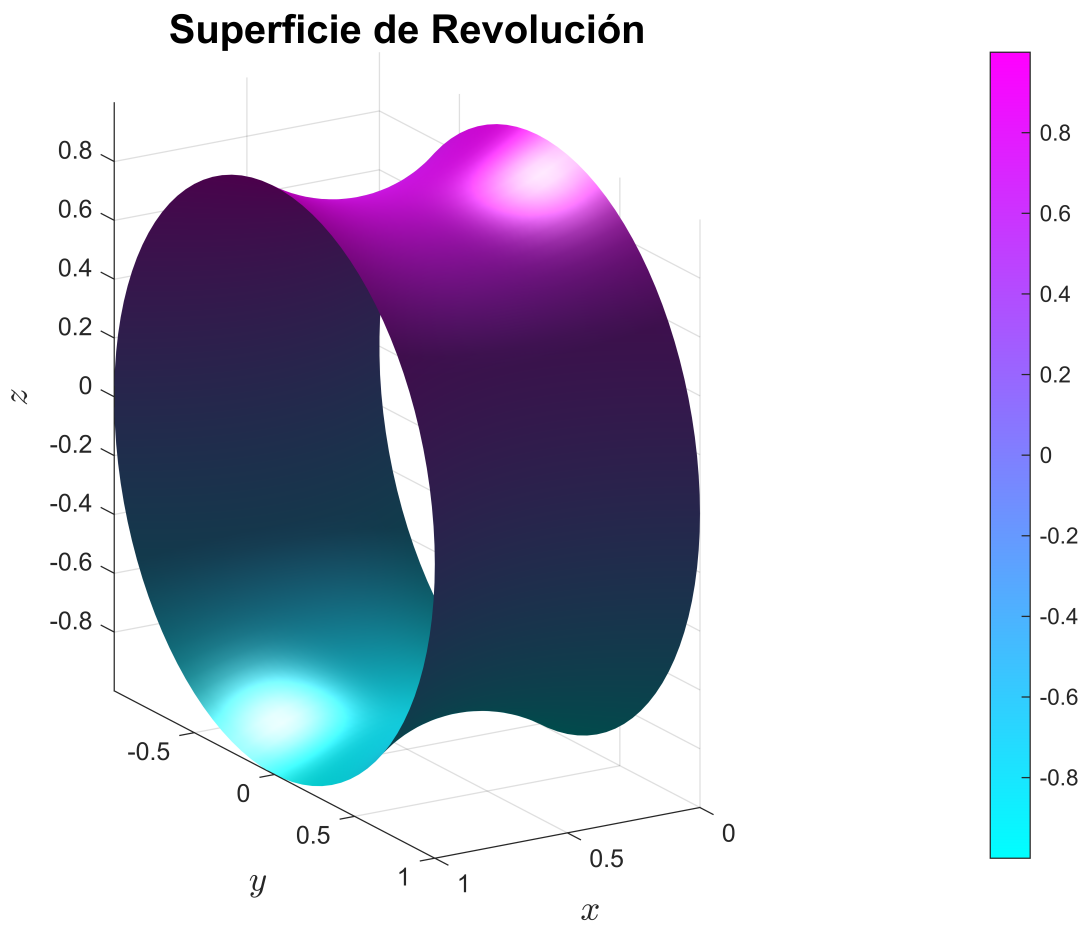
```
% Crear malla para la superficie de revolución (con el último resultado)
theta = linspace(0, 2*pi, 100); % Ángulo para el giro
[X, Theta] = meshgrid(x, theta); % Malla para x y theta
U = interp1(x, u_k, X(1, :)); % Valores de u(x) optimizados

% Coordenadas cartesianas para la superficie
Y = U .* cos(Theta); % Coordenada Y
Z = U .* sin(Theta); % Coordenada Z
```

```
% Graficar la superficie de revolución
figure('Position', [100, 100, 1200, 800]); % Tamaño ampliado de la figura
surf(X, Y, Z, 'EdgeColor', 'none'); % Superficie suave
% Añadir detalles
shading interp; % Interpolación de colores para suavizar la superficie
colormap("cool");
colorbar; % Mostrar barra de colores
lighting phong; % Mejorar iluminación de la superficie
camlight right; % Añadir luz de cámara

xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('$y$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
zlabel('$z$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
title('Superficie de Revolución', 'FontSize', 16, 'FontWeight', 'bold');
axis equal; % Igualar las escalas de los ejes
grid on;

% Rotar la vista para apreciar mejor la figura
view([-211.16 18.39])
```



## Anexo: Funciones Necesarias

La siguiente función calcula el gradiente de un vector u en los puntos discretizados interiores:

```
function gk = calculo_gradiente(u, n)
    % gk: Vector con los gradientes calculados, donde gk(k) contiene el valor
del gradiente para el índice k de u
    % u: Vector de valores u(x) en los puntos discretizados
    % n: Número de intervalos

    gk = zeros(size(u)); % Inicializar el gradiente

    % Para k = 1, ..., n-1 (índices interiores)
    for k = 2:n
        gk(k) = (1 / (2 * n)) * ( n^2 * (u(k) - u(k-1)) * (u(k-1) + u(k)) /
sqrt(1 + n^2 * (u(k) - u(k-1))^2) + ...
            sqrt(1 + n^2 * (u(k) - u(k-1))^2) + ...
            sqrt(1 + n^2 * (u(k+1) - u(k))^2) - ...
            n^2 * (u(k+1) - u(k)) * (u(k) + u(k+1)) / sqrt(1 + n^2 * (u(k+1) -
u(k))^2));
    end
    % Mantener gk(1) y gk(n+1) en cero (sin optimización), ya que u_0=1, u_n=1
    gk(1) = 0;
    gk(n+1) = 0;
end
```

La siguiente función calcula la función objetivo para calcular el área de la superficie de revolución:

```
function F = F(u, n)
    % F(u): Función objetivo para calcular el área de la superficie de revolución
    % u: Vector de valores u(x) en los puntos discretizados
    % n: Número de intervalos

    F = 0; % Inicializar el valor de F

    % Sumar cada término de la función objetivo
    for j = 1:n
        F = F + ((u(j) + u(j+1)) * sqrt(1 + n^2 * (u(j+1) - u(j))^2)) / (2 * n);
    end
end
```

La siguiente función implementa el algoritmo de Búsqueda Dicotómica:

```
function [x_min, f_min, iter_bus] = busqueda_dicotomica(f, a, b, delta, it_max)
% Método de Búsqueda Dicotómica
    eps = delta/10; % Distancia entre los puntos (epsilon < delta)
    iter_bus = 0; % Contador de iteraciones
    %Algoritmo
```

```
    while abs(b - a) > delta && iter_bus < it_max
        iter_bus = iter_bus + 1;
        % Calcular los dos puntos cercanos al punto medio
        x1 = (a + b) / 2 - eps / 2;
        x2 = (a + b) / 2 + eps / 2;
        % Evaluar la función en los puntos x1, x2 y actualizar intervalo
        if f(x1) < f(x2)
            b = x2;  % Reducir el límite superior
        else
            a = x1;  % Reducir el límite inferior
        end
    end
    % Resultado final
    x_min = (a + b) / 2;
    f_min = f(x_min);
end
```

La siguiente función implementa el algoritmo de Búsqueda de Fibonacci:

```
function [xa, fa, n_2] = fibo(f, intervalo, tol)
    % Está función aplica el Método de la Búsqueda de Fibonacci a una función
para hayar un mínimo en un intervalo.
    % f: función unimodal en el intervalo, debe introducirse como función anónima
    % intervalo: vector de dos componentes con los extremos del intervalo.
    % tol: tolerancia o error permitido, debe ser positivo

    % Salidas: El método devuelve un vector [min, fval, iterados]
    % min: punto donde se alcanza el mínimo local de la función en el intervalo
    % fval: valor de la función en ese punto
    % iterados: número de iteraciones utilizadas para converger.
    % Calculamos los valores de la sucesión de Finonacci necesarios.
    fi = [1,1];
    b = intervalo(2);
    a = intervalo(1);
    w1 = b-a;
    n = 2;
    while w1 >= tol*fi(n)
        fi(n+1) = fi(n)+fi(n-1);
        n = n+1;
    end

    % Realizamos el primer paso a parte pues es el único con dos evaluaciones de
f
    % y así después solo realizar una evaluación de f en cada paso.
    w1 = w1/fi(n)*fi(n-1);
    xa = b - w1;
    xb = a + w1;
    fa = f(xa);
    fb = f(xb);
```

```
    k = 2; % Número de pasos

    while and(k<= n-2, xa < xb) %La segunda condición es para evitar errores en
caso de muchas iteraciones

        w1 = w1/fi(n-k+1)*fi(n-k);

        if fa > fb % Actualizamos los valores según el valor de la función
            a = xa;
            xa = xb;
            fa = fb;
            xb = a + w1;
            fb = f(xb);
        else
            b = xb;
            xb = xa;
            fb = fa;
            xa = b-w1;
            fa = f(xa);
        end
        k = k+1;
    end
    n_2 = n-2;
end
```

La siguiente función implementa el Método de Búsqueda de la Sección Áurea:

```
function [opt,k,min] = SeccionAurea(f,delta,x1,x2)
    % Función que halla el mínimo de una función unimodal implementando el
Método de la Sección Áurea. Los parámetros son
    % la función objetivo 'f' introducida como función anónima, la tolerancia
'delta' del método
    % y el intervalo [x1,x2] inicial. Se devuelve el valor del óptimo,
    % 'opt', de acuerdo con la tolerancia, el número de iteraciones 'k' y el
    % mínimo valor de la función encontrado, 'min'.

    % Número áureo menos uno
    r = (sqrt(5)-1)/2;

    % Paso inicial del método
    a = x1;
    b = x2;
    y = a + (1-r)*(b-a);
    z = a + r*(b-a);
    k = 0;
    f1 = f(y);
    f2 = f(z);

    % Implementación del método (100 es el máximo número de iteraciones)
```

```
    while b-a > delta && k < 100
        if f1>=f2
            a = y;
            y = z;
            z = a + r*(b-a);
            f1 = f2;
            f2 = f(z);
        else
            b = z;
            z = y;
            y = a + (1-r)*(b-a);
            f2 = f1;
            f1 = f(y);
        end
        k = k + 1;
    end
    opt = (a+b)/2;
    min = f(opt);
end
```

La siguiente función implementa el Método de Newton para hallar el cero simple de una función:

```
function [x,k]=Newton(f,delta,x0)
    % Función que implementa el método iterativo de Newton-Raphson para calcular
el cero simple de una función continuamente diferenciable
    % en un entorno de este. Toma por argumentos la función objetivo 'f' como
función anónima, la tolerancia 'delta' con la que se encuentra
    % la solución y el punto inicial 'x0' por el que se comienza a buscar. La
función devuelve la aproximación del valor donde ocurre el cero
    % 'x', y el número de iteraciones empleadas 'k'.
    x = x0;
    k = 1;
    % Se crea una variable auxiliar simbólica, 'y', para calcular la derivada
    % de la función 'f'.
    syms y
    g(y) = f(y);
    dev_f = diff(g,y,1);
    % Proceso iterativo
    while abs(f(x)) > delta && k < 100
        x = x - f(x)/double(dev_f(x));
        k = k + 1;
    end

end
```