El Modelo de población

El modelo logístico de población se describe mediante una ecuación diferencial que captura el crecimiento poblacional en un entorno con recursos limitados. Este enfoque considera la **capacidad de carga** del entorno, es decir, el número máximo de individuos que el medio puede sostener de manera sostenible. A diferencia de modelos que asumen un crecimiento ilimitado, el modelo logístico integra explícitamente las restricciones impuestas por la disponibilidad finita de recursos, estableciendo un límite superior para la población alcanzable. De este modo, refleja de manera más realista la dinámica poblacional en ecosistemas finitos.

La formulación básica es la siguiente:

$$\dot{N} = \mathrm{rN}\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $\dot{N}$ es la tasa de cambio de la población con respecto al tiempo.
- N es el tamaño de la población al instante t.
- r es la tasa intrísica de crecimiento de la población
- K es la capacidad de carga del entorno, es decir, el número máximo de individuos que el entorno puede mantener.

Esta ecuación se puede resolver analíticamente, sin embargo, vamos a analizarla usando el enfoque geométrico que ofrece el espacio de fase $(\dot{N}, N)$.

Los puntos fijos ocurren en $N^* = 0$ y $N^* = K$.

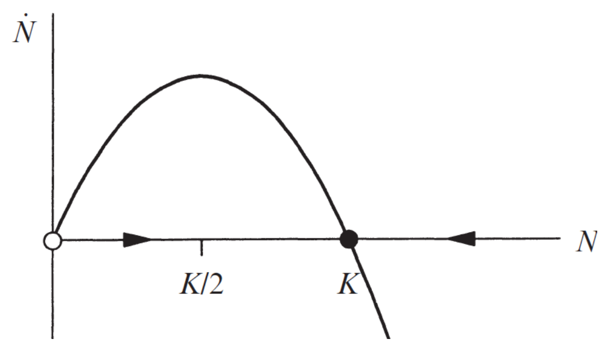


Figura 1: Espacio de fase $(\dot{N}, N)$ para $N > 0$.

Analizando el flujo de la Figura3, vemos que $N^* = 0$ es inestable, y $N^* = K$ es estable.

Tambien, podemos obtener información sobre el aspecto de la solución. En efecto, si $N_0 < \frac{K}{2}$, la población crece rápidamente hasta alcanzar $N = \frac{K}{2}$. A partir de ese punto, la población crece a un ritmo suave hasta alcanza la capcidad máxima.

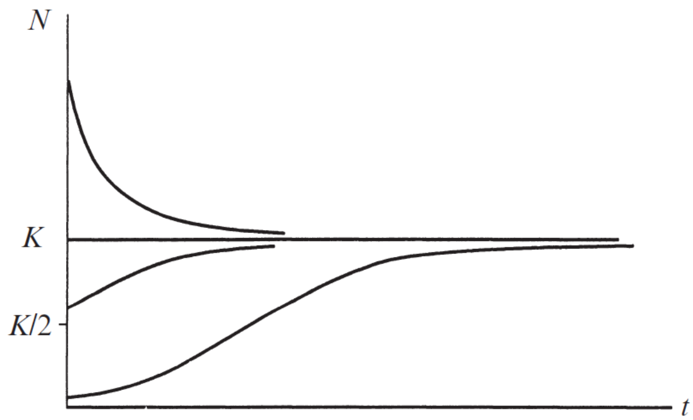


Figura 2: Evolución de la población en el tiempo.

```
% Limpia el espacio de trabajo
clear all; close all; clc;

% Define las variables simbólicas
syms N r K

% Define la ecuación diferencial
ode_rhs = r * N * (1 - N/K); % dN/dt

% Encuentra los puntos de equilibrio resolviendo dN/dt = 0
fixed_points = solve(ode_rhs == 0, N,'ReturnConditions',true);
disp('Puntos de equilibrio:');
```

Puntos de equilibrio:

```
disp(fixed_points.N);
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$$

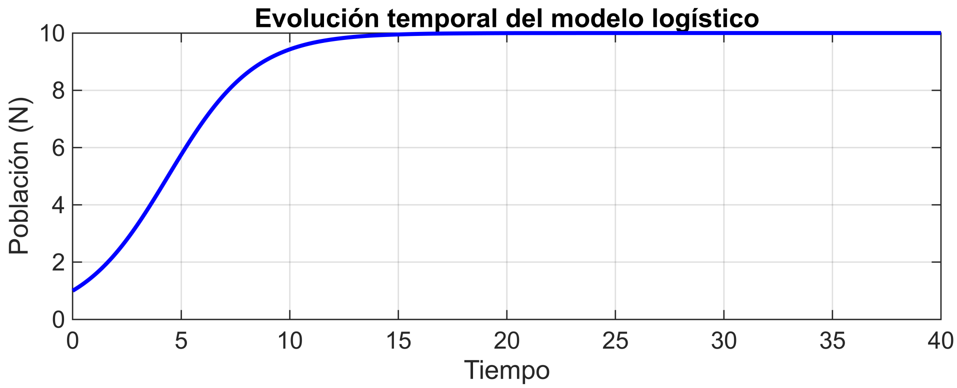
```
% Calcula la derivada de la ecuación diferencial para evaluar la estabilidad
ode_rhs_deriv = diff(ode_rhs, N);
stabilities_0 = subs(ode_rhs_deriv, N, fixed_points.N(1))
```

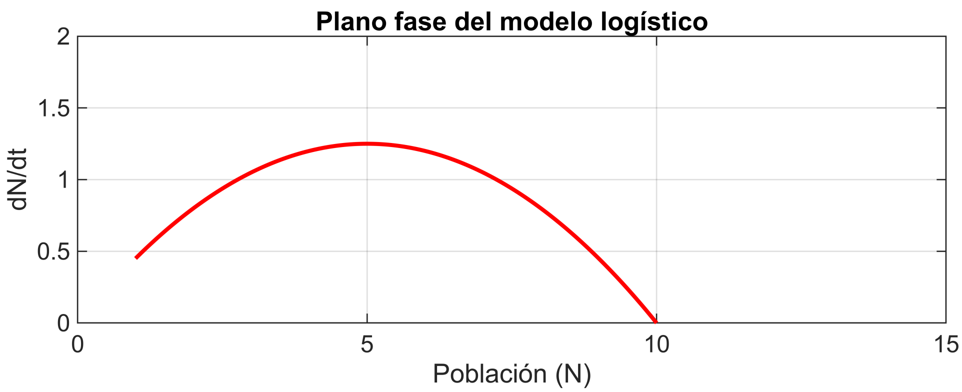
stabilities_0 = r

```
stabilities_K = subs(ode_rhs_deriv, N, fixed_points.N(2))
```

stabilities_K = $-r$

```
% --- Simulación numérica ---
% Define los parámetros del modelo
r = 0.5;  % Tasa de crecimiento
K = 10;   % Capacidad de carga

% Define el sistema como una función anónima para ode45
logistic_model = @(t, N) r * N .* (1 - N/K);

% Define las condiciones iniciales
N0 = 1; % Población inicial

% Define el intervalo de tiempo
tspan = 0:.01:40; % Simulación de 0 a 50 unidades de tiempo

% Simula la dinámica del sistema utilizando ode45
[t, N] = ode45(logistic_model, tspan, N0);

% --- Visualización de resultados ---
figure;
% Evolución temporal de la población
subplot(2, 1, 1);
plot(t, N, 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('Población (N)');
title('Evolución temporal del modelo logístico');
grid on;

% Plano fase
subplot(2, 1, 2);
plot(N, logistic_model(t, N), 'r', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Población (N)');
ylabel('dN/dt');
title('Plano fase del modelo logístico');
grid on;
axis([0 15 0 2])
```


Evolución temporal del modelo logístico
Población (N)
Tiempo
0
2
4
6
8
10
0
5
10
15
20
25
30
35
40


Plano fase del modelo logístico
dN/dt
Población (N)
0
0.5
1
1.5
2
0
5
10
15