

ANÁLISIS DE TAREAS SOBRE EL TEOREMA DE BAYES EN LIBROS DE TEXTO DEL NIVEL BACHILLERATO

Cristian Paredes-Cancino y Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
cristian.paredes@cinvestav.mx

El objetivo del estudio es determinar las características de las tareas sobre el Teorema de Bayes en los libros de texto. Para desarrollar la investigación se ha construido un marco conformado por elementos teóricos en relación con la representación y el formato de la información estadística, consideraciones epistemológicas y los contextos asociados a la estadística bayesiana. El estudio se realiza siguiendo la metodología del análisis de contenido en una muestra de libros de textos escolares del nivel bachillerato en México. El análisis evidencia una tendencia de las tareas al desarrollo de conocimiento procedimental, manejo del carácter estático, empleo de los principios de cuantificación clásico y frecuencial y la centralidad en el diagrama de árbol como representación para la resolución de problemas bayesianos.

INTRODUCCIÓN

La probabilidad y la estadística son áreas que han tomado mayor presencia en los diversos currículos desde la educación básica hasta el nivel superior debido, entre otras cosas, a la relevancia de la toma de decisiones racionales en escenarios de incertidumbre. Al respecto de la noción de probabilidad, Batanero (2005) destaca cinco significados: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Cada uno de estos significados es enseñado de manera progresiva a nivel escolar, sin embargo, hay un predominio en el tratamiento de los significados clásico y frecuencial en contraste con el significado subjetivo. Esto se pone de manifiesto en el análisis de tareas de los libros de texto en las investigaciones que reconocen en estos un recurso ampliamente utilizado por la comunidad docente para el desarrollo del currículo a enseñar. Resultando estos análisis en un referente del estatus de la probabilidad y su enfoque en la enseñanza.

Tal es el caso de los análisis que elaboran Barragués y Guisasola (2006), Carranza (2014), y Rodríguez y Díaz (2018) que dan cuenta de algunos de los enfoques dominantes en la enseñanza de la probabilidad en libros de texto, en el contexto internacional.

En el caso mexicano, la investigación de Inzunza y Rocha (2021) es uno de los trabajos que analiza de manera general la presencia de la estadística y la probabilidad en el currículo. Reconocen la presencia de las ideas fundamentales en los diversos niveles, sin embargo, en el bachillerato identifican la ausencia de la inferencia, lo cual es ampliamente recomendado en el currículo internacional. Por su parte, Leyva et al. (2021) dan evidencias de la presencia de la probabilidad en libros de texto mexicanos en el bachillerato, en particular, del significado frecuencial.

En esta dirección, del estudio de los significados y el análisis de los libros de texto, en la presente investigación nos interesamos por *determinar las características de las tareas sobre el significado subjetivo a través del Teorema de Bayes en libros de texto del nivel bachillerato en México* con el objetivo de explorar cómo abordan los libros de texto la enseñanza de este contenido matemático, lo que promueven hacer a los estudiantes y la naturaleza de las tareas.

ELEMENTOS TEÓRICOS

Entendemos el significado subjetivo de probabilidad a través del empleo del Teorema de Bayes como “un grado de creencia personal, un nivel de convicción acerca de una afirmación determinada, un juicio personal acerca de un fenómeno que es impredecible bajo el conjunto de hipótesis establecido” (Barragués y Guisasola, 2006, p. 244). En este sentido, con el fin de reconocer el significado de la probabilidad subjetiva y sus características, manifestados en el Teorema de Bayes, se ha configurado un marco de referencia a partir de resultados de investigación que dan cuenta de consideraciones didácticas, cognitivas y epistemológicas relativas a este contenido escolar.

Respecto a las consideraciones didácticas-cognitivas se identifica la representación de los datos, situación que implica la forma en que se trabaja visualmente la información estadística en problemas que involucran el empleo del Teorema de Bayes. Algunas de las *representaciones* que se han analizado en estos, denominados problemas bayesianos, son: *diagrama de árbol, tabla de doble entrada, cuadrado*

unitario (Eichler et al., 2020). Otro elemento es el *formato numérico de la información estadística*, el cual se ha explorado a partir de la resolución de problemas examinando tres formatos: la información como *frecuencias "naturales,"* como *probabilidad* y como *porcentaje* (Díaz y de la Fuente, 2006; Siegrist y Keller, 2011).

Sobre las consideraciones epistemológicas consideramos cuatro aspectos. El Teorema de Bayes como herramienta para la cuantificación de la incertidumbre articula dos *tipos o componentes de probabilidades* (Chernoff, 2008): la primera de *naturaleza subjetiva* que es relativa al individuo y es independiente de alguna experimentación, y la segunda, de *naturaleza objetiva* la cual se obtiene a partir de los datos que provee una muestra aleatoria. Así, de ambas probabilidades mediante el empleo del Teorema de Bayes subyace una nueva probabilidad del suceso de interés (a posteriori), la cual puede actualizarse con el conocimiento de nueva información relativa al suceso. En relación con esto, el *proceso* de cuantificación puede tener un doble *carácter*, uno puede describirse como *estático* (cuantificación de la probabilidad con base en los resultados de una muestra) y el otro como *dinámico* (actualización de la probabilidad con base en el análisis de diferentes muestras).

Otro aspecto a considerar son los *principios de cuantificación* movilizados por el significado subjetivo de probabilidad y los cuales dependen del tipo de conjunto de datos y la naturaleza del suceso a probabilizar. De acuerdo con Carranza (2009) son tres los principios que pueden considerarse desde la mirada subjetiva: *equiprobabilidad*, *frecuentista* y *razón insuficiente*. Para concluir, referente al tipo de situación que pueden enmarcar las tareas sobre el Teorema de Bayes, consideramos los *contextos* tomando en cuenta la intencionalidad de las situaciones que dieron origen a este saber desde una perspectiva histórica-epistemológica en los trabajos de Bayes y Laplace. Los contextos se denominan como: *estimación*, *hipótesis* y *predicción* (ver Carranza, 2009; Dale, 1999).

METODOLOGIA

La investigación es de tipo cualitativa, se orientó por el análisis de contenido (Fernández, 2002) y se desarrolló en tres etapas: la identificación de unidades de análisis, la construcción de un sistema de categorías de análisis y la codificación y resultados.

Se tomó una muestra de tipo intencional de tres libros de textos del nivel bachillerato: Introducción a la probabilidad y estadística (L1), Probabilidad y estadística para bachilleratos tecnológicos (L2), y Probabilidad y estadística: enfoque por competencias (L3). Los criterios para la selección de estos libros obedecen a su disponibilidad física, ser material de referencia por docentes y ser parte de la bibliografía en programas de estudio del nivel bachillerato de México.

Etapas 1. Identificación de Unidades de Análisis

Consistió en el reconocimiento de las lecciones en las que se aborda el Teorema de Bayes en los libros de textos y, en particular, de las tareas (ejemplos, problemas, y/o ejercicios). En total se identifican 29 tareas, 10 en el libro L1, 13 en el libro L2 y 6 en el libro L3. Cada tarea corresponde a nuestra unidad de análisis.

Etapas 2. Sistema de Categorías de Análisis

Para el análisis de cada una de las tareas, el sistema de categorías se conformó por las siguientes variables: representación de los datos, formato de la información estadística, tipo de contexto, naturaleza de las probabilidades, principios de cuantificación y carácter del proceso. Cabe destacar que la categoría *representación y formato numérico de la información estadística* se identifica a partir de la estructura y los datos de cada una de las tareas, la categoría *contexto* se reconoce en función de la intencionalidad de la tarea, es decir, para qué se solicita cuantificar la probabilidad, y las categorías *naturaleza de los componentes de probabilidad*, *principios de cuantificación* y *carácter del proceso* se infieren sobre la base de la resolución de las tareas y las características de las variables anteriores.

Etapas 3. Codificación y Resultados

Se desarrolló un proceso inductivo de identificación de las categorías en cada una de las unidades de análisis, de modo que se especificara la ausencia o presencia de la categoría. A continuación, se detallan algunos resultados derivados de este proceso.

Sobre la representación de la información, en L1 todas las tareas promueven el empleo del diagrama de árbol con excepción de una que considera una tabla de doble entrada; en L2 una tarea

emplea tanto diagrama de árbol como una tabla de doble entrada y las demás se centran en el diagrama de árbol; en L3 todas las tareas solicitan elaborar un diagrama de árbol de probabilidades. Respecto a el formato de la información, en L1 la mayoría de los datos son proporcionados en el formato porcentaje, en particular, una tarea hace empleo del formato de frecuencia natural y dos tareas el formato probabilidad; en L2 hay una tarea particular que hace una mezcla de los datos en formato frecuencia y porcentaje, cuatro tareas manejan el formato frecuencia y el resto, en formato porcentaje; en L3 todas las tareas manejan porcentajes.

Referente a los contextos, las tareas suelen ser muy similares en estructura y entre los libros de texto, en algunos casos, lo único que varía son las cantidades dadas. En particular, todas las tareas en los libros considerados se enmarcan en el contexto de hipótesis. En cuanto a la naturaleza de los componentes de la probabilidad, los tres libros hacen solo énfasis en el componente de probabilidad objetivo, es decir, aquella relativa a la cuantificación a partir de un conjunto de referencia dado.

Acerca de los principios de cuantificación, dado el formato de los datos en frecuencia y porcentaje y que la información es proporcionada en las tareas, es natural que las formas que se promuevan para la cuantificación de la probabilidad sean mediante la consideración de la equiprobabilidad y la perspectiva frecuentista. En relación con el carácter del proceso, las tareas en los tres libros desarrollan una perspectiva estática que consiste en el cálculo de la probabilidad con base en los datos de un solo conjunto de referencia dado.

De acuerdo con estos resultados, es notable que no aparezca el contexto estimación, ya que en todas las tareas el conjunto de referencia siempre es explícito. Eso a su vez inhibe, por ejemplo, la emergencia del principio de cuantificación de la razón insuficiente. También, se identifica una priorización del formato de la información en porcentaje y el trabajo con diversidad de representaciones es limitado, ya que hay una focalización en el manejo del diagrama del árbol de probabilidades. En el marco de los componentes de probabilidad solo hay énfasis en el componente objetivo en las diversas tareas, de modo que el componente subjetivo, es decir, aquel que implica una ponderación del individuo no está siendo promovido. Por último, el carácter del proceso en el empleo del Teorema de Bayes está situado en lo estático, en consecuencia, la idea de actualización de la probabilidad (carácter dinámico) inherente al Teorema permanece relegado. Referente a la actividad matemática, las tareas de los libros tienen en común que están centradas en la determinación de una medida y no se promueve una comparación de las probabilidades solicitadas para la toma de decisiones.

En síntesis, los libros promueven de manera implícita un proceso de resolución que consiste en cuatro momentos: (a) la tipificación de los datos, es decir, el reconocimiento de los diferentes tipos de probabilidad ya sea simple, condicional y su inversa; (b) el empleo de una representación (comúnmente el diagrama de árbol); (c) el reconocimiento de la probabilidad condicional de interés y la cuantificación de la probabilidad total; (d) la realización de las operaciones aritméticas implicadas en el Teorema de Bayes para la determinación de la medida de probabilidad.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Con base en el estudio aquí reportado, se identifican algunos elementos que subyacen al tratamiento escolar del significado subjetivo, es decir, proporcionan una aproximación al qué se enseña y cómo se enseña dicho contenido matemático en las aulas. Si bien, la muestra del presente estudio es intencionada, los resultados brindan al campo de la Educación Estadística una mirada del estatus de la presencia de la estadística bayesiana en el nivel bachillerato en México.

Los resultados dan evidencia de una tendencia de las tareas a la numerización de la probabilidad, es decir, tareas enfocadas en la cuantificación de la probabilidad mediante el Teorema de Bayes sin un rol de dicha medida para la toma de decisiones. En este sentido, se promueve escolarmente en mayor grado un desarrollo de conocimiento procedimental dejando de lado el aspecto del significado asociado con el contexto.

Bajo este panorama, se considera importante que las tareas de los libros al ser abordadas en el aula no queden limitadas a las características identificadas, sino que se amplíe a elementos como la doble naturaleza de la probabilidad que precisa el empleo de la herramienta del Teorema de Bayes, puesto que esta categoría es uno de los elementos donde reside el significado subjetivo de la probabilidad. Si bien estas experiencias subjetivas se promueven en los grados de la educación primaria, conforme el estudiante avanza curricularmente dicha mirada de la probabilidad, como grado de creencia, queda

desvanecida y su inclusión como medio para el desarrollo del significado subjetivo es olvidado, es decir, hay una omisión de la asignación de probabilidad subjetiva.

Por otra parte, la idea de inferencia que subyace a las ideas germinales del Teorema de Bayes queda desapercibida en la actividad matemática que favorecen las tareas. Por lo tanto, resulta esencial reflexionar sobre esta idea como un eje para el rediseño de las tareas y como marco de referencia para la reflexión con los colectivos docentes con el fin de apuntalar de manera más integral los elementos de la alfabetización probabilista y avanzar hacia el desarrollo del razonamiento y el pensamiento probabilístico a nivel escolar (Borovcnik, 2016; Gal, 2005) desde una mirada de la estadística bayesiana.

REFERENCIAS

- Barragués, J. I. y Guisasola, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de textos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 24(2), 241–256. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1998083>
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(3), 247–263. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302>
- Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1491–1516. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31495>
- Carranza, P. (2009). *La dualité de la probabilité dans l'enseignement de la statistique. Une expérience en classe de BTS* (Tesis de doctorado no publicada). Université Paris-Diderot–Paris VII.
- Carranza, P. (2014). Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la probabilidad en libros de estudio en Francia. *Educação Matemática Pesquisa*, 16(3), 1071–1087. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21597>
- Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: a first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 23, 1–23.
- Dale, A. (1999). *A history of inverse probability. From Thomas Bayes to Karl Pearson*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8652-8>
- Díaz, C., y de la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. *Educación Matemática*, 18(2), 75–94. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40558507004.pdf>
- Eichler, A., Böcherer–Linder, K., y Vogel, M. (2020). Different visualizations cause different strategies when dealing with Bayesian situations. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 1897. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01897>
- Fernández Chaves, F. (2002). El análisis de contenido como ayuda metodológica para la investigación. *Revista de Ciencias Sociales*, 2(96), 35–53. <https://www.redalyc.org/pdf/153/15309604.pdf>
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3
- Inzunza Cazares, S., y Rocha Ruiz, E. (2021). Los datos y el azar en el currículo de educación básica y bachillerato en México: reflexiones desde la perspectiva internacional. *Diálogos sobre Educación. Temáticas actuales en Investigación Educativa*, 12(23), Article 00028. <https://doi.org/10.32870/dse.vi23.717>
- Leyva Zazueta, I. J., Urrea Bernal, M. A., y Silvestre Castro, E. (2021). Análisis del significado institucional sobre los enfoques probabilísticos en el nivel medio superior, un caso de estudio. *Revemop*, 3, Article e202131. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202031>
- Rodríguez Muñiz, L. J., y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 65–81. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.218>
- Siegrist, M., y Keller, C. (2011). Natural frequencies and Bayesian reasoning: The impact of formal education and problem context. *Journal of Risk Research*, 14(9), 1039–1055. <https://doi.org/10.1080/13669877.2011.571786>