Capítulo 5: Aplicaciones de vectores en R^2 y R^3

5.2 Rectas y planos

Rectas en R^2

Dos puntos distintos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y$P_2(x_2, y_2)$ en R^2 determinan una linea recta cuya ecuación es

$$ax + by + c = 0$$

donde a, b y c son reales, y a y b no simultaneamente cero. Esta se denomina **ecuación cartesiana** de la recta.

Todo punto $P(x, y)$ que satisface la ecuación pertenece a la recta y viceversa.

Como $P_1(x_1, y_1)$ y$P_2(x_2, y_2)$ pertenecen a la recta, satisfacen

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$$

Los valores de a, b y c se obtienen resolviendo el sistema homogeneo. La ecuación cartesiana se obtiene dandole un valor particular a la variable libre c.

Rectas en R^3

Una recta queda determinada si se especifican su dirección y un punto. Sea $\vec{u} = (a, b, c)$ un vector no nulo en R^3, y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en R^3. Sea $\vec{w}_0$ el vector asociado al punto P_0 y $\vec{x}$ el vector asociado a un punto cualquiera de la recta $P(x, y, z)$. La recta L que pasa por el punto P_0 y es paralela a u consta de los puntos $P(x, y, z)$ tales que:

$$\vec{x} = \vec{w}_0 + t\vec{u}$$

La ecuación anterior se denomina **ecuacion paramétrica** o **vectorial** de la recta L. Puede escribirse en termino de sus componentes, como

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \quad -\infty < t < +\infty \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

que son las **ecuaciones paramétricas** de la recta L.

Podemos despejar t de cada ecuación e igualar. Obtenermos las ecuaciones en **forma simetrica** de la recta.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Planos en R^3

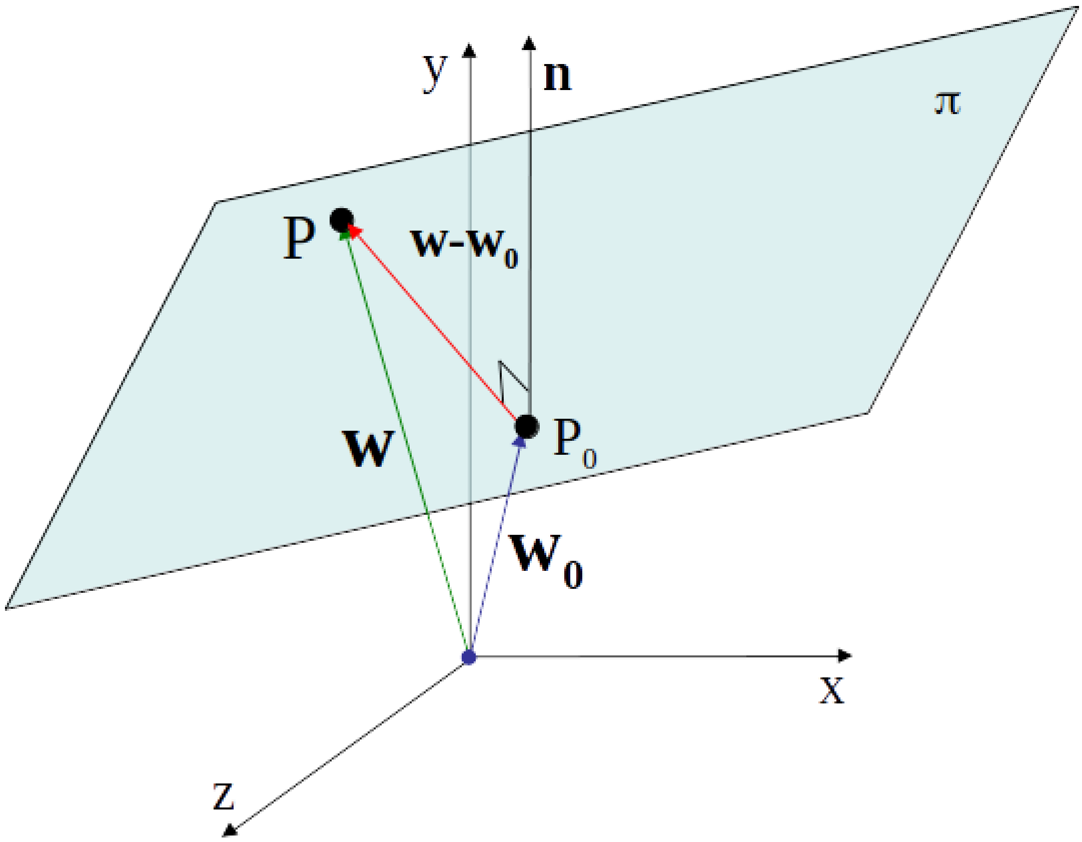
Un plano en R^3 queda determinado especificando tres de sus puntos no alineados. La ecuación cartesiana de un plano en R^3 esta dada por

$$ax + by + cz + d = 0$$

Si, P_1,P_2 y P_3 son puntos del plano, deben satisfacer la ecuación anterior, es decir

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases}$$

Un plano en R^3 puede determinarse tambien especificando un **punto** del plano y un **vector** perpendicular al mismo. Sean $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P(x, y, z)$ puntos el plano y $\vec{w}$ y $\vec{w}_0$ sus vectores asociados, y sea $\vec{n} = (a, b, c)$ un vector distinto de cero normal al plano. El vector $P_0P = \vec{w} - \vec{w}_0$ es un vector del plano y por lo tanto perpendicular a $\vec{n}$



Si el vector $\vec{w} - \vec{w}_0$ es perpendicular a $\vec{n}$ entonces:

$$\vec{n}.\vec{P_0P} = \vec{n} - .(\vec{w} - \vec{w}_0) = 0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

distribuyendo

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

Posiciones relativas de rectas y planos

Dos planos π_1 y π_2 en R^3 son paralelos o se intersecan en una linea recta.

1. Son paralelos si sus vectores normales son paralelos.
   Sean $\vec{n}_1$ el vector normal al plano π_1 y $\vec{n}_2$ el vector normal al plano π_2, entonces son paralelos si

$$\vec{n}_2 = \alpha\vec{n}_1, \alpha \in R$$

2. Para determinar la recta intersección de los planos π_1 y π_2, resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones cartesianas. La solución sera la ecuación parametrica(vectorial) de la recta.

Las ecuaciones en forma simetrica, de una recta pueden utilizarse para determinar los dos planos cuya intersección es la recta dada.

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

La recta es la intersección de los planos

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b} \text{ y } \frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$$

cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\pi_1 : bx-ay-bx_0+ay_0=0$$

$$\pi_2 : cx-az-cx_0+az_0=0$$

Tres planos en R^3 pueden intersecarse en un plano, una recta o un punto. La forma de la solucion del sistema formado por sus ecuaciones cartesianas dira de que manera se intersecan.