Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Pablo Ajo Inglez
Tutor: Margarita Otero Domínguez

Curso 2019-2020

Resumen

El grupo lineal especial de orden 2, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, es el grupo de las matrices reales de orden 2 cuyo determinante es 1 con la multiplicación de matrices. Realizaremos un estudio de este grupo desde el punto de vista de los grupos de Lie. Algunos de los resultados que obtendremos serán generalizables a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El objetivo final del trabajo es estudiar los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Para poder definir y hallar estos subgrupos, antes realizaremos un estudio previo en el capítulo 2 de las estructuras de grupo topologico (de la que los grupos de Lie son un caso especial) y álgebra de Lie. En el capítulo 3 profundizaremos en el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Analizaremos diversas propiedades de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ desde el punto de vista de la teoría de grupos. Destaca la *Descomposición de Iwasawa*, una descomposición de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en tres subgrupos obtenida a partir de la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre el semiplano complejo superior. Veremos también propiedades de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ que nos permitirán hallar sus subgrupos de Cartan. Por último veremos que salvo conjugación, existen solo dos subgrupos de Cartan en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Se verá que la unión de estos subgrupos cubre casi todo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Estudiaremos las similitudes y diferencias de estas dos clases de subgrupos de Cartan. En concreto veremos que la unión de los elementos de una de las clases es sindética en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (un número finito de trasladados cubren todo el grupo) y la otra no lo es.

Abstract

The special linear group of order 2, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, is the group of real matrices of order 2 whose determinant is 1 with matrix multiplication as group operation. We will carry out a study of this group from the approach of Lie groups. Some of the results that we will obtain will be generalizable to $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ where $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. The main goal of the work is the study of the Cartan subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. In order to define and find these subgroups, we will do a previous study in chapter 2 of topological groups (of which Lie groups are a special case) and Lie algebras. In chapter 3 we will focus in the group $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ and its Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. We will look at the properties of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ from the point of view of group theory. As a main result, we have the *Iwasawa Decomposition*, a decomposition of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ into three subgroups obtained from the action of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ on the upper complex half-plane. We will also study the properties of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ that will allow us to find its Cartan subgroups. Finally, we will see that up to conjugation, there are only two Cartan subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. We will see that the union of these subgroups covers almost all $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. We will study the similarities and differences of these two classes of Cartan subgroups. In particular, we will see that one class is syndetic in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (i.e., finitely many translates cover the whole group) and the other class is not.

Índice general

1 Introducción **1**

2 Resultados preliminares **3**

2.1 Grupos topológicos 3

2.2 Álgebras de Lie 8

3 El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ **17**

3.1 Propiedades algebraicas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ 17

3.2 El grupo topológico $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 21

3.3 El álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 24

3.4 Subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 27

A Demostraciones de los resultados de 2.1 **37**

B Demostraciones de los resultados de 2.2 **43**

CAPÍTULO 1
Introducción

El grupo lineal especial de orden 2, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, es el grupo formado por las matrices de orden 2 con coeficientes reales cuyo determinante es 1, con la multiplicación de matrices como operación. Se trata de un subgrupo del grupo lineal general $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. En este trabajo realizaremos un estudio de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ como grupo de Lie, inmerso en el espacio $\mathbb{R}^4$. No se realiza por lo tanto un estudio de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ como grupo algebraico, es decir, como conjunto de puntos $\mathbb{R}$-racionales del grupo algebraico $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Algunos de los resultados recogidos en el trabajo se generalizan a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, siendo $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

El objetivo final del trabajo es realizar un estudio de los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Existe una definición de subgrupo de Cartan enunciada por Chevalley que utiliza exclusivamente conceptos de la teoría de grupos. Se dice que un subgrupo Q de un grupo G es un *subgrupo de Cartan (en el sentido de Chevalley)* si satisface las siguientes condiciones.

(1) El subgrupo Q es nilpotente y maximal entre los subgrupos nilpotentes de G.
(2) Si X es un subgrupo de Q normal en Q y con índice finito en Q, entonces su normalizador $N_G(X)$ en G contiene a X como subgrupo de índice finito.

Sin embargo, usaremos la definición siguiente que involucra la teoría de grupos de Lie. Sea el grupo de Lie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, un subgrupo Q de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es un *subgrupo de Cartan* si $Q = \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$, para alguna $\mathfrak{h}$ subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Al tratarse $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ de un grupo de Lie conexo y semisimple, es decir, con álgebra de Lie semisimple, estos requerimientos y los de la definición de Chevalley son equivalentes [3, Fact 53]. Siendo así definidos los subgrupos de Cartan, para estudiarlos, antes debemos adentrarnos en la teoría de grupos topólogicos, de la que los grupos de Lie son un caso especial. Tras esto analizaremos las álgebras de Lie. Estos resultados introductorios se encuentran en las secciones 2.1 y 2.2 del capítulo 2, respectivamente. Las demostraciones de los resultados de este capítulo (2), aparecen en los anexos A y B. La importancia de los subgrupos de Cartan queda demostrada con los comentarios de A. W. Knapp en [7, Pág. 488],

> "Although the union of the Cartan subgroups of G need not exhaust G, it turns out that the union exhausts almost all of G. This fact is the most important conclusion about Cartan subgroups to be derived [...]. When we treat integration in Chapter VIII, this fact will permit integration of functions on G by integrating over the

conjugates of a finite set of Cartan subgroups; the resulting formula, known as the 'Weyl Integration Formula,' is an important tool for harmonic analysis on G."

La materia central del trabajo, el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, es desarrollada en el capítulo 3. La primera sección contiene un estudio de las propiedades algebraicas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Un resultado a destacar de esta sección es el teorema 3.6, la *Descomposición de Iwasawa*, que nos da una descomposición de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en tres subgrupos. Para demostrar la existencia de esta descomposición utilizamos una acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre el semiplano complejo superior. Esta acción se analiza en la proposición 3.5. En la segunda sección se estudia el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ como grupo topológico y grupo de Lie. Entre otros resultados, en la proposición 3.11 se desmuestra que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es conexo, requisito necesario para que nuestra definición de subgrupo de Cartan sea válida. En la tercera sección hallamos $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, el álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, que es el conjunto de las matrices de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{K}$ cuya traza es nula. Tras esto examinamos algunas de las propiedades de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, por ejemplo, que es simple (y por lo tanto semisimple). Estas propiedades son necesarias para estudiar las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, y por lo tanto, los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Por útimo, en la cuarta sección nos centramos en el objetivo final del trabajo, los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Veremos que sólo existen dos subgrupos de Cartan, salvo conjugación, en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Analizaremos sus diferencias. La más destacada es la sindeticidad, que será estudiada en las proposiciones 3.30 y 3.31. En el teorema 3.28 demostraremos que la unión de los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es denso en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Esto ocurre en general para cualquier grupo de Lie (véase [3, Fact 56]). La demostración de este último resultado se sale fuera de los objetivos del trabajo.

La bibliografía que aparece al final (antes de los apéndices) recoge tanto las fuentes utilizadas para estudiar los conceptos, como las fuentes que son citadas en resultados cuya demostración queda fuera de los objetivos del trabajo. La mayor parte de los resultados de los capítulos introductorios han sido estudiados utilizando las referencias [8], [7] y [5]. La primera para grupos topológicos, y la segunda y tercera para la parte relativa a álgebras de Lie. Las referencias [4], [2], [3], [1] y [6] han sido usadas para realizar el estudio de resultados más concretos y para referenciar algunas demostraciones no incluidas en el trabajo.

CAPÍTULO 2

Resultados preliminares

En este capítulo se estudiarán los grupos topológicos finalizando con una introducción a los grupos de Lie y las álgebras de Lie. Estos resultados preliminares servirán para, en el siguiente capítulo, realizar un estudio de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ desde el punto de vista de estas áreas.

2.1. Grupos topológicos

En esta sección vamos a realizar un estudio de la interrelación entre dos tipos de estructuras matemáticas. Estas son la estructura de espacio topológico y la de grupo. Empezamos definiendo el concepto básico que usaremos en este capítulo. Llamaremos *grupo topológico* a la terna (G, m, τ) donde (G, m) es un grupo y (G, τ) es un espacio topológico que satisface:

(1) La operación de grupo m es continua con respecto a la topología producto $\tau \times \tau$ y a τ.
(2) La función de inversión del grupo es continua con respecto a τ y a τ.
(3) El conjunto $\{e\}$ que tiene como único elemento el neutro del grupo es cerrado.

Escribiremos G para referirnos al grupo topológico (G, m, τ). En lo que sigue denotaremos el elemento neutro de un grupo por e.

Ejemplo (Grupos topológicos)**.** Enumeramos algunos ejemplos de grupos topológicos. El grupo aditivo $\mathbb{R}$ con la topología usual. El grupo multiplicativo de los reales $\mathbb{R}^*$ con la topología relativa a la topología usual en $\mathbb{R}$. El grupo multiplicativo de los complejos $\mathbb{C}^*$ (viendo $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}^2$) con la topología relativa a la usual en $\mathbb{R}^2$. El grupo circular S^1 con la topología relativa como subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Al igual que en los grupos y los espacios topológicos, un subconjunto del grupo puede heredar la estructura de grupo topológico.

Teorema 2.1. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G, entonces H es un grupo topológico con la topología relativa como subespacio de G.*

Demostración. Véase A.1. □

Un espacio topológico T se dice que es *homogéneo* si para todo par de puntos $t, u \in T$ existe un homeomorfismo h tal que $h(t) = u$. La homogeneidad representa la idea intuitiva de que un espacio se vea igual independientemente del punto desde el que se mire.

Ejemplo. El espacio $\mathbb{R}^n$ es homogéneo para todo n. El intervalo $I = [0, 1]$ no es homogéneo ya que no se puede construir ningún homeomorfismo que mande el punto 0 a un punto $x \in (0, 1)$.

Para cada elemento $g \in G$ definimos la aplicación $L_g : G \to G$ que asigna a cada $h \in G$ el elemento gh. Llamamos a esta aplicación *multiplicación por g por la izquierda*. De manera análoga definimos la *multiplicación por g por la derecha* $R_g : G \to G$. Estas funciones son continuas debido a que la operación de grupo es continua. Sus inversas L_g^{-1} y R_g^{-1} son $L_{g^{-1}}$ y $R_{g^{-1}}$, respectivamente, y por lo tanto también son continuas, luego son homeomorfismos. Utilizaremos estas funciones en el estudio de propiedades de los grupos topológicos.

Proposición 2.2. *Sea G un grupo topológico, entonces G es homogéneo y todo subgrupo abierto H de G es también cerrado.*

Demostración. Véase A.2. □

Estudiaremos ahora la separabilidad de los grupos topológicos. Recordemos los axiomas de separación. Sea X un espacio topológico, se dice que es un *espacio* T_0 si para todo par de puntos distintos existe un abierto $U \in X$ conteniendo a uno de los puntos y no conteniendo al otro. Diremos que X es un *espacio* T_1 si todos los subconjuntos formados por un solo punto son cerrados. Por último, si el espacio X satisface que para todo par de puntos distintos $u, v \in X$ existen dos abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tales que $u \in U, v \in V$ y $U \cap V = \emptyset$ diremos que es un *espacio* T_2 o *espacio de Hausdorff*. Un espacio T_2 es T_1, y si es T_1, también es T_0. Demostraremos que todo grupo topológico es T_2. Antes veremos un resultado que nos servirá en esta demostración. Este resultado utiliza el concepto de *entorno simétrico*, que es aquel entorno V de la identidad e tal que $V = V^{-1}$ siendo $V^{-1} = \{a^{-1} \in G \mid a \in V\}$.

Lemma 2.3. *Sea G un grupo topológico y U un entorno abierto de e en G, entonces existe un entorno simétrico abierto V de e tal que $VV = VV^{-1} \subseteq U$.*

Demostración. Véase A.3. □

Podemos ya demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Todo grupo topológico G es un espacio T_2.*

Demostración. Véase A.4. □

Tal y como ocurre en teoría de grupos y topología, podemos dotar al espacio cociente de estructura de grupo topológico. Veremos cómo, pero antes, necesitamos el siguiente resultado.

Lemma 2.5. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y G/H el espacio cociente con la topología cociente. Entonces la aplicación cociente $q : G \to G/H$ es continua y abierta.*

Demostración. Véase A.5. $\square$

Teorema 2.6. *Sean G un grupo topológico y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal cerrado. Entonces G/H es un grupo topológico con la topología cociente.*

Demostración. Véase A.6. $\square$

Procederemos a dar una noción de morfismo entre grupos topológicos. Sean G_1 y G_2 grupos topológicos y $f : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos, si además f es continua diremos que es un *morfismo de grupos topológicos*. Si es biyectiva y además es un homeomorfismo entre los espacios G_1 y G_2, diremos que es un *isomorfismo de grupos topológicos*.

Proposición 2.7. *Sean G_1 y G_2 grupos topológicos y $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos. Si f es continuo en e_1, entonces es continuo en todo su dominio.*

Demostración. Véase A.7. $\square$

Estudiaremos a continuación dos resultados sobre factorización de morfismos topológicos.

Teorema 2.8 (Descomposición canónica de morfismos de grupos topológicos)**.** *Sea un morfismo de grupos topológicos $f : G_1 \to G_2$. Entonces f posee una única factorización $f = i \circ r \circ q$ en morfismos de grupos topológicos, en la que q es un cociente, r es un isomorfismo de grupos e i es una inclusión. Además, la inclusión i es abierta si y sólo si* $\mathrm{Im}(f)$ *es abierto en G_2, el cociente q es siempre abierto y r es un isomorfismo de grupos topológicos si y sólo si f es abierta como función sobre su imagen.*

Demostración. Véase A.8. $\square$

Corolario 2.9. *Sea $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos topológicos. Entonces f se factoriza a través de un cociente $q : G_1 \to G_1/K$ de su dominio,*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & G_2 \\ G_1/K \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

si y sólo si $K \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Demostración. Véase A.9. $\square$

Vamos a ilustrar los resultados vistos sobre morfismos de grupos topológicos con algunos ejemplos.

Ejemplo. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G, en las demostraciones anteriores hemos visto dos ejemplos de morfimos, la inclusión $i : H \to G$ y el cociente $q : G \to G/H$.

Otro ejemplo de morfismo es la función módulo $\mathrm{mod} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ que lleva cada $z \in \mathbb{C}^*$ a $|z| \in \mathbb{R}^*$. La descomposición canónica de morfismos de grupos topológicos para este morfismo es

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R}^* \\ \mathbb{C}^*/S^1 \arrow[r, "r"] & \mathbb{R}^{>0} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

De la misma manera que en grupos y espacio topológicos, podemos dotar al producto directo de dos grupos topológicos de estructura de grupo topológico.

Teorema 2.10. *Sean G y H grupos topológicos, entonces $G \times H$ es un grupo topológico con la estructura algebraica de grupo producto y la topología producto. Además, las proyecciones en sus factores son epimorfismos topológicos abiertos.*

Demostración. Véase A.10. □

Ejemplo (Construcción de grupos cocientes utilizando grupos producto)**.** Sean G y H grupos topológicos, se considera el grupo topológico $G \times H$. El núcleo de la proyección de $G \times H$ sobre H, es $G \times \{e_H\}$, que es un subgrupo normal y cerrado por ser la preimagen de un cerrado a través de un aplicación continua. Por lo tanto el cociente $(G \times H)/(G \times \{e_H\})$ es isomorfo a H por el teorema 2.8. De esta manera podemos construir grupos cociente. Por ejemplo el grupo circular S^1 es el toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ módulo S^1 y el grupo aditivo de los reales $\mathbb{R}$ es el grupo aditivo de los complejos (visto como $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{I}$) módulo el grupo aditivo de los imaginarios puros $\mathbb{I}$.

Los siguientes resultados tratan cuestiones relacionadas con la conexión de grupos topológicos.

Proposición 2.11. *Sea G un grupo topológico, C_g la componente conexa a la que pertenece el elemento $g \in G$, entonces*

(1) $L_g(C_e) = C_g$.
(2) *C_e es un subgrupo normal cerrado de G.*

Demostración. Véase A.11. □

Sea G un grupo topológico, el grupo cociente G/C_e recibe el nombre de *grupo de componentes* de G, y se denota por $\mathbf{C}(G)$. A partir de cada morfismo de grupos topológicos $f : G \to G_2$ podemos definir el morfismo de grupos $\mathbf{C}(f) : \mathbf{C}(G) \to \mathbf{C}(G_2)$ que asigna a cada $C_g \in \mathbf{C}(G)$ la componente $C_{f(g)} \in \mathbf{C}(G_2)$.

Proposición 2.12. *La componente arco-conexa G_e del elemento neutro e de un grupo topológico G es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Véase A.12. □

Para finalizar esta sección vamos a introducir un nuevo tipo de estructura. Llamaremos *grupo de Lie* a una variedad suave real G dotada de estructura de grupo tal que la operación de grupo y la inversión en el grupo son suaves. Los grupos de Lie son obviamente grupos topológicos ya que la estructura de variedad suave tiene una topología subyacente que satisface las tres condiciones de la definición de grupo topológico. Esto es debido a que al tratarse de una variedad esta topología es Hausdorff. Por otro lado, al ser las operaciones de grupo suaves, son continuas.

Ejemplo (Grupos de Lie)**.** A continuación citamos algunos ejemplos de grupos de Lie.

(1) El grupo aditivo de los reales $\mathbb{R}$ es un grupo de Lie ya que $\mathbb{R}$ es una variedad suave y la suma y la multiplicación por (-1) son suaves.

(2) El grupo de las transformaciones afines en $\mathbb{R}$ con la composición de funciones es un ejemplo de grupo de Lie bidimensional. Este es el grupo de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $x \mapsto ax+b$ con $a > 0$. Si representamos f por el par (a, b) y los vemos dentro de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual veamos que es un grupo de Lie. Se trata de una variedad suave (con la topología relativa en $\mathbb{R}^2$). Sean (a, b) y (c, d) dos elementos de este grupo de Lie tenemos que $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$, que es una transformación afín ya que $a, c > 0$. El elemento neutro es $(1, 0)$ y $(a, b)^{-1} = (1/a, -b/a)$ que pertenece al grupo. Tanto la inversión como la operación de grupo son suaves de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ ya que $a, c > 0$.

(3) El grupo $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ con la multiplicación de matrices se puede ver como $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto como una variedad suave. La operación de grupo asigna al par $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right)$ el elemento $\begin{pmatrix} a+d \\ e+af+b \\ f+c \end{pmatrix}$, así que es suave. El inverso de un elemento $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -a \\ ac-b \\ -c \end{pmatrix}$, por lo tanto la inversión también es suave y N es un grupo de Lie.

(4) El grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formado por las matrices $n \times n$ con coeficientes reales cuyo determinante es distinto de 0. Este grupo recibe el nombre de *grupo lineal general* de dimensión n. Podemos verlo como un subespacio de $\mathbb{R}^{n^2}$, por lo tanto es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ y se trata de una variedad suave. La multiplicación de matrices es cerrada en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Existe elemento neutro $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y para todo elemento $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tenemos que $g^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ya que $\det(g) \neq 0$, luego $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un grupo. La multiplicación y la inversión de matrices son operaciones suaves en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, luego es un grupo de Lie.

Procederemos ahora a dar una noción de morfismo entre grupos de Lie. Sean G_1 y G_2 grupos de Lie y $f : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos, diremos que f es un *morfismo de grupos de Lie* si es suave. Se puede demostrar que es condición necesaria y suficiente que el homomorfismo f sea continuo [5, Pág. 72]. Si f es biyectiva y su inversa es también suave, diremos que f es un *isomorfismos de grupos de Lie*. Por otro lado, dos grupos de Lie G_1 y G_2 son *localmente isomorfos* si existe un homeomorfismo $f : U_1 \to U_2$ entre entornos de la identidad de cada grupo tal que para todo $x, y \in U_1$ tales que $xy \in U_1$ se tiene que $f(xy) = f(x)f(y)$.

Ejemplo (Isomorfismo local de grupos de Lie)**.** Los grupos de Lie $(\mathbb{R}, +)$ y S^1 son localmente isomormos. La función

$$\begin{aligned} f : (-\pi/4, \pi/4) &\to \{e^{\alpha i} : \alpha \in (-\pi/4, \pi/4)\} \\ x &\mapsto e^{xi} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo que satisface que para todo $x, y \in (-\pi/4, \pi/4)$ tenemos que $f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = f(x)f(y)$.

2.2. Álgebras de Lie

Empezaremos definiendo el concepto matemático central de esta sección. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ junto con una operación binaria llamada *corchete de Lie*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

que satisface las siguientes condiciones:

(1) La operación es bilineal.
(2) $[X, X] = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.
(3) *La Identidad de Jacobi*, esto es: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Observamos que el corchete de Lie es anticonmutativo ya que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ se satisface $0 = [X+Y, X+Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = [X, Y] + [Y, X]$ por lo que $[Y, X] = -[X, Y]$.

Ejemplo. Sea $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de las matrices de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$, veamos que se trata de un álgebra de Lie con $[X, Y] = XY - YX$. Sean $X_1, X_2, Y_1.Y_2 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ y $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$ tenemos que

$$[a_1X_1+a_2X_2, b_1Y_1+b_2Y_2] = (a_1X_1+a_2X_2)(b_1Y_1+b_2Y_2)-(b_1Y_1+b_2Y_2)(a_1X_1+a_2X_2) =$$

$$a_1b_1[X_1, Y_1] + a_1b_2[X_1, Y_2] + a_2b_1[X_2, Y_1] + a_2b_2[X_2, Y_2],$$

luego es bilineal. Además, observamos que $[X, X] = XX - XX = 0, \forall X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. La identidad de Jacobi se satisface debido a que $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ = 0$.

En general el corchete de Lie no es asociativo. Sean

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, tenemos que $[[X,Y],Z] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $[X,[Y,Z]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, demostrando así la no asociatividad. El álgebra de Lie tratado en este ejemplo se denota por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Se trata del álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ en el sentido que veremos en en el teorema 2.13.

Las álgebras de Lie en las que estamos interesados van a estar asociadas al grupo lineal $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ y a sus subgrupos. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podemos ver $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ como subespacio de $\mathbb{R}^m$ con la topología usual para cierto $m \in \mathbb{N}$. En particular nos centraremos en los subgrupos cerrados de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bajo esta topología, a los que llamaremos *grupos lineales*. Algunos ejemplos de estos grupos son

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SO}_n = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid xx^t = I_n,\ \det(x) = 1\}.\\
&\mathrm{U}_n = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid xx^* = I_n\}.\\
&\mathrm{SU}_n = \{x \in \mathrm{U}_n \mid \det(x) = 1\}.\\
&\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(x) = 1\}.\\
&\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(x) = 1\}.
\end{aligned}$$

Los grupos anteriormente citados son grupos de Lie. Cada grupo de Lie tiene un álgebra de Lie asociada. Veremos como hallarla en el caso de los grupos lineales.

Teorema 2.13. *Sea G un grupo lineal sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$),*

$$\mathfrak{g} = \{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \to G \text{ es suave y } c(0) = I\} \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

es un álgebra de Lie, subespacio de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ con el corchete de Lie $[X,Y] = XY - YX$. Tal $\mathfrak{g}$ recibe el nombre de álgebra de Lie del grupo *G.*

Demostración. Véase B.1. □

A continuación citamos ejemplos de las álgebras de Lie asociadas a algunos grupos lineales en el sentido del teorema anterior.

Ejemplo (Álgebras de Lie de grupos lineales)**.** Sea $G = \mathrm{SO}_3$, veamos su álgebra de Lie. Las matrices $a(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) & 0 \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & \operatorname{sen}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$, $c(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ 0 & -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ están en G, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por definición de sus elementos las correspondientes curvas en G son suaves. Como además se satisface $a(0) = b(0) = c(0) = I_3$, tenemos que

$$a'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

pertenecen a $\mathfrak{g}$. Usando las operaciones del espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con estas tres matrices tenemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathfrak{g}$. Por otro lado, sea $X \in \mathfrak{g}$ tenemos que $X = d'(0)$ para alguna curva suave $d : \mathbb{R} \to G$ con $d(0) = I$. Como $d(t)$ está en G, satisface $d(t)d(t)^t = 1$. Derivando en 0 obtenemos $[d'(t)d(t)^t + d(t)(d(t)^t)']\Big|_{t=0} = 0$, luego $d'(0) + d'(0)^t = 0$ y por lo tanto $d'(0) = X$ es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Con esto concluimos que $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Para hallar el álgebra de Lie asociada a otros grupos lineales, necesitamos hacer uso del concepto de *exponencial de una matriz*. Sea X una matriz compleja definimos

$$\exp(X) = e^X = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} X^N.$$

Proposición 2.14. *Sean X, Y matrices complejas de orden n, y t una variable real. Entonces,*

(1) $e^X e^Y = e^{X+Y}$ *si X e Y conmutan.*
(2) e^X *es no singular.*
(3) $\det(e^X) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$ *siendo $\mathrm{Tr}(X)$ la traza de la matriz X.*
(4) $\frac{d}{dt}(e^{tX}) = Xe^{tX}$.
(5) $t \mapsto c(t) = e^{tX}$ *es una curva suave en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tal que $c(0) = I$.*
(6) $X \mapsto e^X$ *es una función suave de $\mathbb{R}^{2n^2}$ en sí mismo.*

Demostración. Véase B.2. □

Para hallar las álgebras de Lie asociadas a grupos lineales, además de la exponencial de una matriz, usaremos el siguiente resultado.

Lemma 2.15. *Sea $c(t)$ una curva suave de $\mathbb{R}$ en las matrices de orden n sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), tal que $c(0) = I_n$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}[\det(c(t))]\Big|_{t=0} = \mathrm{Tr}(c'(0)).$$

Demostración. Véase B.3. □

Una vez visto este último resultado ya estamos preparados para hallar el álgebra de Lie asociada a otros grupos lineales.

Ejemplo (Álgebras de Lie de grupos lineales)**.** (1) Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Veamos que el álgebra de Lie del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con el corchete $[X, Y] = XY - YX$. Como tenemos que $\{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es suave y $c(0) = I\} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, basta demostrar la otra inclusión. Sea $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, por la propiedad (5) de la proposición 2.14, tenemos que $t \mapsto c(t) = e^{tX}$ es una curva suave de $\mathbb{R}$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $c(0) = I$. Además, por la propiedad (4), $c'(0) = (e^{tX})'\Big|_{t=0} = Xe^{tX}\Big|_{t=0} = X$, quedando así comprobado que el álgebra de Lie del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

(2) Hallaremos ahora el álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n$ del grupo SU_n. Vamos a comprobar que $\mathfrak{su}_n = \{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \to \mathrm{SU}_n$ es suave y $c(0) = I\}$ es

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0 \text{ y } \mathrm{Tr}(X) = 0\}.$$

En primer lugar veamos que $\mathfrak{su}_n \subseteq \mathfrak{g}$. Sea $X \in \mathfrak{su}_n$ entonces $X = c'(0)$ con $c : \mathbb{R} \to \mathrm{SU}_n$ suave tal que $c(0) = I$. Como $c(t) \in \mathrm{SU}_n$ entonces $\det(c(t)) = 1$ y $c(t)c(t)^* = I$. Tenemos que $X + X^* = c'(0) + c'(0)^* = (c(t)c(t)^*)'\Big|_{t=0} = (I)'\Big|_{t=0} = 0$. Por otro lado $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(c'(0)) = \frac{d}{dt}[det(c(t))]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[I]\Big|_{t=0} = 0$. Por lo tanto $X \in \mathfrak{g}$. Ahora veremos que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{su}_n$. Sea $X \in \mathfrak{g}$ entonces $X + X^* = 0$ y $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Por la propiedad (3) de la proposición 2.14 tenemos que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\det(e^{tX}) = e^{\mathrm{Tr}(tX)} = e^{t\mathrm{Tr}(X)} = e^0 = 1 \text{ y } e^{tX}(e^{tX})^* = e^{tX+(tX)^*} = e^{t(X+X^*)} = e^0 = 1.$$

Donde hemos utilizado que $(e^{tX})^* = e^{(tX)^*}$. Tenemos entonces que $e^{tX} \in \mathrm{SU}_n$. Para finalizar, sea $c(t) = e^{tX}$, tenemos que $c(t)$ es una curva suave de $\mathbb{R}$ en SU_n tal que $c(0) = e^0 = 1$, por lo que $c'(0) \in \mathfrak{su}_n$. Usando la propiedad (4) de la proposición 2.14, $c'(0) = \frac{d}{dt}[e^{tX}]\Big|_{t=0} = [Xe^{tX}]\Big|_{t=0} = X \in \mathfrak{su}_n$. Concluimos que $\mathfrak{su}_n = \mathfrak{g}$.

Otro ejemplo de la utilización de la exponencial para hallar el álgebra de Lie asociada a un grupo lineal lo daremos en el siguiente capítulo, donde hallaremos el álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

En lo que sigue de esta sección estudiaremos conceptos básicos sobre álgebras de Lie análogos a los que se estudian en otras estructuras tales como grupos o anillos.

A continuación daremos una definición de morfismo para esta estructura. Un *morfismo de álgebras de Lie* (sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$) es una aplicación lineal $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ entre dos álgebras de Lie tal que $\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_1$. Siguiendo la nomenclatura usual, si un morfismo es biyectivo (lo cual implica que la inversa es también un morfismo de álgebras de Lie) se llama *isomorfismo de álgebras de Lie.*

Vamos a introducir un concepto que nos será útil en algunas de las definiciones y resultados siguientes. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{k}$ subespacios vectoriales de $\mathfrak{g}$, designaremos por $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ al subespacio generado por todos los corchetes $[X, Y]$ tales que $X \in \mathfrak{h}$ y $Y \in \mathfrak{k}$. Nos referiremos a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ como *corchete de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{k}$*. Un elemento $Z \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ es de la forma $\sum_{i,j} \lambda_{ij}[X_i, Y_j]$ con $X_i \in \mathfrak{h}$, $Y_j \in \mathfrak{k}$ y $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$. Como $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{k}$ son espacios vectoriales, el elemento Z puede ser escrito como una suma finita $Z = [X_1, Y_1] + ... + [X_r, Y_r]$ con $X_i \in \mathfrak{h}, Y_i \in \mathfrak{k}$. Además, el corchete de dos subespacios es conmutativo, es decir $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}]$. Esto es debido a que si $[X, Y] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ entonces $[X, Y] = -[Y, X] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ luego $[Y, X] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ lo que implica $[X, Y] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}]$.

Ahora podemos definir algunas subestructuras importantes en las álgebras de Lie. Una *subálgebra de Lie* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Un *ideal* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$. Diremos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *conmutativa* si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, es decir, $[X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *simple* si no es conmutativa y tiene como únicos ideales los triviales, es decir, $\mathfrak{g}$ y $\{0\}$. Diremos que es *semisimple* si su único ideal conmutativo es $\{0\}$.

Proposición 2.16. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Véase B.4. □

Llamamos *centro* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ al conjunto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\}$.

Proposición 2.17. *El centro de un álgebra de Lie es un ideal.*

Demostración. Véase B.5. □

Del mismo modo que en otras estructuras algebraicas, vamos a ver una manera de dotar de estructura de álgebra de Lie al cociente de un álgebra de Lie por un ideal. Recordemos que si $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial y $\mathfrak{h}$ un subespacio vectorial en $\mathfrak{g}$, el espacio vectorial de los coconjuntos $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es el formado por los elementos $\mathfrak{h} + X$ con $X \in \mathfrak{g}$. Cada clase de equivalencia $\mathfrak{h}+X$ es el conjunto formado por todos los elementos $Y+X$ con $Y \in \mathfrak{h}$.

Teorema 2.18. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces el espacio vectorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dotado del corchete de Lie,*

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) &\to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ (\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + Y) &\mapsto [\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + Y] = \mathfrak{h} + [X, Y] \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, es un álgebra de Lie.

Demostración. Véase B.6. □

Teorema 2.19. *Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie y $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ un morfismo de álgebras de Lie sobreyectivo, entonces $\mathrm{Ker}(\theta)$ es un ideal de $\mathfrak{g}_1$ y θ se puede factorizar como*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "q"'] & \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(\theta) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

donde q es un morfismo de álgebras de Lie y f es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Véase B.7. □

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, vamos a definir una secuencia de subespacios $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, ..., \mathfrak{g}^n$ de $\mathfrak{g}$ como sigue: $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}], \forall n > 1$. Por la proposición 2.16, los subespacios $\mathfrak{g}^m$ son ideales. Utilizando la definición de ideal se tiene que $\mathfrak{g}^{m+1} = [\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^m$. Por lo tanto estos subespacios forman una serie descendiente

$$... \subseteq \mathfrak{g}^m \subseteq ... \subseteq \mathfrak{g}^2 \subseteq \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}.$$

Diremos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *nilpotente* si $\mathfrak{g}^n = \{0\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Toda álgebra de Lie connmutativa es por tanto nilpontente.

Vamos a definir ahora una nueva cadena de subespacios de $\mathfrak{g}$ del siguiente modo, $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}], \forall n > 0$. De la misma manera que antes, $\mathfrak{g}^{(i)}$ es un ideal para todo i. Por ser los ideales subálgebras, $\mathfrak{g}^{(m+1)} = [\mathfrak{g}^{(m)}, \mathfrak{g}^{(m)}] \subseteq \mathfrak{g}^{(m)}$. Como pasaba con la cadena de subespacios anterior, se forma una serie descendente

$$... \subseteq \mathfrak{g}^{(m)} \subseteq ... \subseteq \mathfrak{g}^{(1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}.$$

Diremos que un álgebra de Lie es *resoluble* si $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.20. *Toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble.*

Demostración. Véase B.8. □

Ejemplo (Álgebras de Lie nilpotentes y resolubles)**.** Sean $\mathfrak{b}, \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ las álgebras de Lie formadas por las matrices triangulares superiores y las matrices triangulares estrictamente superiores de orden n, respectivamente. Se comprueba fácilmente que efectivamente son álgebras de Lie, es decir, subespacios de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ y cerradas respecto al corchete de Lie. Veamos que $\mathfrak{n}$ es nilpotente y $\mathfrak{b}$ es resoluble pero no nilpotente. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{K}^n$, definimos la cadena ascendente estricta de subespacios $\{0\} = V_0 \subset \langle e_1 \rangle = V_1 \subset \langle e_1, e_2 \rangle = V_2 \subset ... \subset \langle e_1, ..., e_n \rangle = V_n = \mathbb{K}^n$. Llamamos a esta cadena de subespacios *bandera estándar* de $\mathbb{K}^n$. Sea $\mathfrak{a}_k$ el subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{a}_k = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid XV_i \subseteq V_{i-k}, 0 \leq i \leq n\}$, veamos que $[\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l] \subseteq \mathfrak{a}_{k+l}$. Fijados $X \in \mathfrak{a}_k$, $Y \in \mathfrak{a}_l$ tenemos que $XV_j \subseteq V_{j-k}$ y $YV_i \subseteq V_{i-l}$ para todo i, j entre 0 y n. Tomando $j = i - l$ se tiene $XV_{i-l} \subseteq V_{i-l-k}$. Como $YV_i \subseteq V_{i-l}$ entonces $XYV_i \subseteq V_{i-l-k}$, luego $XY \in \mathfrak{a}_{k+l}$. Así $YX \in \mathfrak{a}_{k+l}$ y por tanto $[X, Y] \in \mathfrak{a}_{k+l}$. Como $[\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l]$ es el subespacio generado por los elementos $[X, Y]$ con $X \in \mathfrak{a}_k$ y $Y \in \mathfrak{a}_l$, se tiene que $[\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l] \subseteq \mathfrak{a}_{k+l}$. Veamos ahora que $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0$. Sea $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathfrak{n}$ si y sólo si X es una matriz triangular estrictamente superior. Para que esto ocurra es necesario y suficiente que las columnas 1 a j de X tengan todos los elementos nulos a partir de la fila j (incluida), para todo j de 1 a n. Como Xe_j es la columna j-ésima de X, este hecho formulado matemáticamente es $Xe_j \in V_{i-1}$ $\forall i = 1, ..., n$ $\forall j = 1, ..., i$. Esto a su vez ocure si y sólo si $XV_i \subseteq V_{i-1}$ para todo $i = 1, ..., n$, es decir, si y sólo si $X \in \mathfrak{a}_1$. Razonamos de manera análoga para demostrar que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0$. Sea $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathfrak{b}$ si y sólo si X es una matriz triangular superior. Esto ocurre si y sólo si las columnas 1 a j de X tienen todos los elementos nulos a partir de la fila $j+1$ (incluida), para todo j de 1 a n. Este hecho formulado matemáticamente es $Xe_j \in V_i$ para todo

$i=0,...,n$, $j=1,...,i$. Esto a su vez ocurre si y sólo si $XV_i \subseteq V_i$ para todo $i=0,...,n$, es decir, si y sólo si $X \in \mathfrak{a}_0$.

Comprobemos que $\mathfrak{n}$ es nilpotente. Tenemos que $\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1$. Aplicando el resultado del párrafo anterior, es sencillo ver que $\mathfrak{a}_1^i \subseteq \mathfrak{a}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Debido a esto, $\mathfrak{n}^{i+1} = [\mathfrak{n}^i, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a}_1^i, \mathfrak{a}_1] \subseteq [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_1] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$. Teniendo en cuenta que $\mathfrak{a}_n = \{0\}$ y tomando $i = n-1$ se tiene $\mathfrak{n}^n \subseteq \mathfrak{a}_n = \{0\}$, luego $\mathfrak{n}$ es nilpotente.

Veamos que $\mathfrak{b}$ es resoluble. Demostraremos por inducción que $\mathfrak{b}^{(i+1)} \subseteq \mathfrak{a}_{2^i}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{b}$, debido a que XY y YX tienen la misma diagonal, $[X,Y] \in \mathfrak{n}$ y por lo tanto $\mathfrak{b}^{(1)} = [\mathfrak{b}^{(0)}, \mathfrak{b}^{(0)}] \subseteq \mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1$. Esto demuestra el caso base $i=0$. Supongamos que $\mathfrak{b}^{(i+1)} \subseteq \mathfrak{a}_{2^i}$. Aplicando la hipótesis y el resultado del primer párrafo,

$$\mathfrak{b}^{(i+1+1)} = [\mathfrak{b}^{(i+1)}, \mathfrak{b}^{(i+1)}] \subseteq [\mathfrak{a}_{2^i}, \mathfrak{a}_{2^i}] \subseteq \mathfrak{a}_{2^i+2^i} = \mathfrak{a}_{2^{i+1}},$$

completando así la demostración por inducción. Escogiendo un j tal que $2^j \geq n$ tenemos que $\mathfrak{b}^{(j+1)} \subseteq \mathfrak{a}_{2^j} = \{0\}$, luego $\mathfrak{b}$ es resoluble. Para ver que $\mathfrak{b}$ no es nilpotente, basta demostrar que $\mathfrak{b}^i = \mathfrak{n}$ para todo $i \geq 2$. Lo haremos por inducción. En primer lugar veamos que $\mathfrak{b}^2 = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$. Sean $(x)_{i,j} \in \mathfrak{b}$ una matriz diagonal y $E_{i,j} \in \mathfrak{b}$ la matriz cuyos elementos son todos nulos excepto el elemento (i,j) que es 1. Tenemos que $[(x)_{i,j}, E_{i,j}] = (x_{i,i} - x_{j,j})E_{i,j}$. De esta manera queda claro que todo elemento de $\mathfrak{n}$ puede ser expresado como suma de corchetes de elementos de $\mathfrak{b}$. La inclusión $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{n}$ ya hemos visto que es cierta, luego $\mathfrak{b}^2 = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$. El caso base para la induccion, $i=2$, queda por tanto comprobado. Supongamos $\mathfrak{b}^i = \mathfrak{n}$. Tenemos que $\mathfrak{b}^{i+1} = [\mathfrak{b}^i, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{n}, \mathfrak{b}]$. Razonando de la misma manera que antes, tenemos que cualquier elemento de $\mathfrak{n}$ puede ser expresado como suma de corchetes entre matrices diagonales de $\mathfrak{b}$ y matrices $E_{i,j}$ de $\mathfrak{n}$, luego $\mathfrak{b}^{i+1} = \mathfrak{n}$. Concluimos que $\mathfrak{b}^i = \mathfrak{n}$ para todo $i \geq 2$, luego $\mathfrak{b}$ no es nilpotente.

Para finalizar esta sección introduciremos un tipo especial de subálgebras. Para ello, antes necesitamos definir el *normalizador* de una subálgebra $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$, que es el conjunto

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Proposición 2.21. *Sea $\mathfrak{h}$ una súbalgebra de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ y si $\mathfrak{h}$ es un ideal en otra subálgebra $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Demostración. Véase B.9. □

Sea $\mathfrak{h}$ una súbalgebra de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, diremos que $\mathfrak{h}$ es una *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{g}$ si es nilpotente y $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Teorema 2.22. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica 0, entonces*

(1) *Existen subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$.*
(2) *Todas las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ tienen la misma dimensión (como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales).*

Demostración. (1) [4, Cap VII,§ 2, Cor. 1 al Tma. 1], (2) [4, Cap VII,§ 3, Tma. 2]. □

En la última sección del siguiente capítulo hallaremos las subálgebras de Cartan del álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ y estudiaremos algunas de sus propiedades.

CAPÍTULO 3

El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

En este capítulo analizaremos algunos de los conceptos estudiados sobre grupos topológicos y álgebras de Lie centrándonos en el *grupo lineal especial*,

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) = 1\}.$$

Los resultados en su mayoría aplican al grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. No obstante, generalizaremos a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) en algunas ocasiones.

3.1. Propiedades algebraicas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$

En el capítulo anterior hemos introducido el grupo lineal general

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) \neq 0\},$$

que tiene como operación de grupo la multiplicación de matrices. Comprobemos que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposición 3.1. *El grupo* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es un subgrupo normal de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *El grupo cociente* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es* $\mathbb{K}^*$.

Demostración. Consideramos la aplicación $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$. Como se tiene que $\det(gh) = \det(g)\det(h)$ para todo $g, h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, se trata de un morfismo de grupos entre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ y el grupo multiplicativo $\mathbb{K}^*$. Observamos que $\mathrm{Ker}(\det) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Sabemos que el núcleo de un morfismo de grupos es un subgrupo normal, por lo tanto $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo normal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Por la descomposición canónica de los morfismos de grupos, como det es sobreyectiva, el grupo cociente $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{Ker}(\det)$ es $\mathbb{K}^*$. $\square$

Veremos ahora un conjunto generador de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. En lo que sigue designaremos por $E_{(i,j)}(x)$ a la matriz identica a I excepto en el elemento (i, j), que es x.

Proposición 3.2. *El grupo* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *está generado por el conjunto de matrices elementales* $\{E_{(i,j)}(x) \mid x \in \mathbb{K}^* \text{ y } 1 \leq i \neq j \leq n\}$.

Demostración. En primer lugar debemos tener en cuenta que la inversa de una matriz $E_{(i,j)}(x)$ es $E_{(i,j)}(-x)$. Sea $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, g puede ser expresado como producto de matrices elementales $g = E_{(i_1,j_1)}(x_1) \cdot \ldots \cdot E_{(i_m,j_m)}(x_m)$ si y sólo si

$$E_{(a_1,b_1)}(y_1) \cdot \ldots \cdot E_{(a_{m_1},b_{m_1})}(y_{m_1}) g E_{(a_{m_1+1},b_{m_1+1})}(y_{m_1+1}) \cdot \ldots \cdot E_{(a_{m_2},b_{m_2})}(y_{m_2}) = I,$$

es decir, si podemos llegar a I a partir de g multiplicando a g por izquierda y derecha por matrices $E_{(i,j)}(x)$. Multiplicar por la izquierda por la matriz $E_{(i,j)}(x)$ corresponde a sumar a la fila i de g, la fila j multiplicada por x. Multiplicar por la derecha por la matriz $E_{(i,j)}(x)$ corresponde a sumar a la columna j de g, la columna i multiplicada por x. Veamos un método para llegar desde g a I mediante estas operaciones de filas y columnas. Multiplicando por el factor adecuado una columna cuyo elemento en la fila 1 no sea nulo (si todos los elementos de la fila 1 son nulos excepto el $(1,1)$ con un valor diferente de 1, antes de realizar esta paso sumamos la columna 1 a la columna 2) y sumándosela a la columna 1, podemos conseguir que el elemento $(1,1)$ valga 1. A partir de este 1, mediante las operaciones de filas y columnas adecuadas podemos conseguir que todos los elementos de la primera fila y de la primera columna sean nulos, excepto el $(1,1)$. Podemos repetir este proceso hasta la fila y columna $n-1$. Llamaremos g' a la matriz hasta aquí obtenida. Como $g, E_{(i,j)}(x) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ para todo i, j, x con $i \neq j$, entonces $\det(g') = 1$. Por lo tanto el elemento $g'_{n,n}$ valdrá necesariamente 1, ya que $\det(g') = g'_{n,n} = 1$. Expresando cada una de las operaciones de filas y columnas realizadas mediante multiplicaciones por matrices $E_{(i,j)}(x)$, hemos obtenido I a partir de g, tal y como se pedía. $\square$

En la siguiente proposición hallaremos el centro de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Para ello, veremos antes cuál es el centro de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposición 3.3. *El centro del grupo* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es*

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \mid \lambda \in \mathbb{K} \text{ y } \lambda^n = 1\}.$$

Demostración. Empezamos observando que como para todo elemento $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\frac{1}{\det(g)} g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, tenemos que $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Hallemos ahora $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$. Sea $E_{i,j}$ con $1 \leq i \neq j \leq n$ la matriz cuyos elementos son todos nulos excepto el elemento (i,j) que es 1. Calculando el determinante de $I + E_{i,j}$ por menores es fácil ver que $I + E_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Sea $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$, en particular, conmuta con todas las matrices $I + E_{i,j}$ con $1 \leq i \neq j \leq n$. Tenemos que $(I + E_{i,j})g = g(I + E_{i,j})$ si y sólo si $E_{i,j} g = g E_{i,j}$. Multiplicando ambos lados de la igualdad es fácil ver que esto a su vez ocure si y sólo si $g_{i,i} = g_{j,j}, g_{a,i} = 0, \forall a \neq i$ y $g_{j,b} = 0, \forall b \neq j$. Haciendo variar i, j obtenemos que g es una matriz escalar, es decir, $g = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$. En resumen, si $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ entonces $g = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$. El contenido en sentido contrario es obvio, luego $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$. Por último, veamos cuál es la intersección de $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ y $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Un elemento $\lambda I \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ si y sólo si $\det(\lambda I) = \lambda^n = 1$. Queda así demostrado que $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \mid \lambda \in \mathbb{K} \ y \ \lambda^n = 1\}$. $\square$

Vamos a ver en el siguiente teorema que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tiene tres tipos de elementos distintos aparte de su centro $\{\pm I\}$.

Teorema 3.4. *Todo elemento de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *diferente de* $\pm I$ *es o bien conjugado en* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *a un elemento de la forma* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$, *o bien conjugado a un* $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$ *para algún* $\alpha \in \mathbb{R}$, *o bien conjugado a* $\pm \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *donde* $a = \pm 1$. *Los elementos de la primera clase (excepto* $\pm I$*) se llaman* hiperbólicos, *y el valor absoluto de su traza es mayor que* 2. *Los elementos de la segunda clase se llaman* elípticos, *y el valor absoluto de su traza es menor que* 2. *Los elementos de la última clase son llamados* parabólicos *y el valor absoluto de su traza es exactamente* 2.

Demostración. Dado un elemento $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, vemos que su polinomio característico es $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(g)\lambda + 1$. Por lo tanto los autovalores de g son $\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(g) \pm \sqrt{\mathrm{Tr}(g)^2 - 4}}{2}$. Si $|\mathrm{Tr}(g)| > 2$, los autovalores son dos reales λ_1, λ_2 distintos, luego g es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos entonces que $h^{-1}gh = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ para algún $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Como $\det(h^{-1}gh) = 1$, se tiene que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, luego $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$. Sea $h' = \frac{1}{\det(h)} h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, tenemos que $h'^{-1}gh' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}$, demostrándose así el resultado para los elementos hiperbólicos. Si $|\mathrm{Tr}(g)| < 2$ entonces los autovalores son dos complejos conjugados, luego g es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Tenemos que $h^{-1}gh = \begin{pmatrix} ae^{\alpha i} & 0 \\ 0 & ae^{-\alpha i} \end{pmatrix}$ para algún $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Por el mismo argumento que antes podemos tomar un h' en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Además, como $\det(h^{-1}gh) = 1$, tenemos que $a = \pm 1$, que cambiando α podemos suponer $a = 1$. Queda así demostrado el resultado para los elementos elípticos. Comprobemos por último el caso de los elementos parabólicos. Si $|\mathrm{Tr}(g)| = 2$, g tiene un autovalor real con multiplicidad 2. Si $\mathrm{Tr}(g) = 2$, el autovalor es $\lambda = 1$ y g es conjugada en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (obviando el caso $g = \pm I$). Si $\mathrm{Tr}(g) = -2$ entonces $\lambda = -1$ y g es conjugada a $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. □

Para finalizar esta sección veremos la descomposición de Iwasawa de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Para ello utilizaremos la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en el semiplano superior complejo cuyas propiedades establece el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Sea el semiplano superior complejo* $\mathbb{H} = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$, *la aplicación* $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *es una acción de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *sobre* $\mathbb{H}$ *con una única órbita. El estabilizador del elemento* i *es el subgrupo* $K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \right\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que esta aplicación está bien definida. Sean $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{H}$, tenemos que

$$\mathrm{Im}(\frac{az+b}{cz+d}) = \mathrm{Im}(\frac{((a\alpha+b)+(a\beta)i)((c\alpha+d)-(c\beta)i)}{(c\alpha+d)^2+(c\beta)^2}) = \frac{(ad-cb)\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}.$$

Como $ad - cb = 1$, $\mathrm{Im}(g(z))$ tiene el mismo signo que z, luego $g(z) \in \mathbb{H}$. Veamos ahora que efectivamente se trata de una acción. Sea $z \in \mathbb{H}$, $I(z) = \frac{z}{1} = z$. Por último debemos comprobar que sean $g_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, entonces $g_1(g_2(z)) = (g_1g_2)(z)$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Comprobamos que

$$g_1(g_2(z)) = g_1(\frac{ez+f}{gz+h}) = \frac{z(ae+bg)+af+bh}{z(ce+dg)+cf+dh} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}(z) = (g_1g_2)(z).$$

Para ver que esta acción sólo tiene una órbita, observamos que para todo elemento $z = x + yi \in \mathbb{H}$, existe un elemento $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tal que $g(i) = z$. Se comprueba con facilidad que este elemento es $\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$. Calcularemos $\mathrm{St}(i)$, el estabilizador de i, que será por tanto un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Sea $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $g(i) = i$ si y sólo si $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, lo cual implica $ai + b = di - c$. De esta igualdad obtenemos $d = a, b = -c$ y por lo tanto $g = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. Como g pertenece a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $a^2 + c^2 = 1$. Podemos entonces expresar g como $g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ con $a = \cos(\theta)$ y $c = \mathrm{sen}(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, y así $\mathrm{St}(i) \subseteq K$. El contenido en sentido contrario se satisface ya que $\frac{\cos(\theta)i-\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)i+\cos(\theta)} = \frac{(\cos(\theta)i-\mathrm{sen}(\theta))(\cos(\theta)-\mathrm{sen}(\theta)i)}{(\mathrm{sen}(\theta))^2+(\cos(\theta))^2} = i$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. $\square$

En la anterior proposición se ha introducido el subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Introduciremos ahora otros dos subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ que usaremos en la descomposición que veremos a continuación. Estos son

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}, r > 0 \right\},\ N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es fácil comprobar que A y N son subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.6 (Descomposición de Iwasawa)**.** *El grupo* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *se puede descomponer como* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = KAN$*, es decir, todo elemento* $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *se puede expresar como* $g = kan$ *con* $k \in K$*,* $a \in A$ *y* $n \in N$*. Esta descomposición es única, es decir, para cada* $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *existen unos únicos* $k \in K$*,* $a \in A$ *y* $n \in N$ *tales que* $g = kan$*.*

Demostración. Considerando la acción de la proposición anterior, sea $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, tenemos que $g(i) = x + yi \in \mathbb{H}$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Hemos visto que se puede llegar al elemento $x + yi$ mediante la acción del elemento $\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$, luego se tiene que $g(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}(i) = na(i)$ con $n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$. Tomando la raiz positiva de y tenemos $n \in N$, $a \in A$. Como $g(i) = na(i)$, $a^{-1}n^{-1}g(i) = I(i) = i$. Sabemos que el estabilizador de i es K, luego existe un $k \in K$ tal que $a^{-1}n^{-1}g = k$. Así obtenemos que $g = kan$. Por lo tanto todo $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ puede expresarse como un producto $g = kan$ tal que $k \in K, a \in A$ y $n \in N$.

Veamos la unicidad de esta descomposción. Sean

$$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n' = \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N, a = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}, a' = \begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & 1/r' \end{pmatrix} \in A$$

y $k, k' \in K$ tales que $nak = n'a'k'$, tenemos que $nak(i) = n'a'k'(i)$. Como k y k' pertenecen al estabilizador de i, $na(i) = n'a'(i)$ y por tanto existen $r, x \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ tales que $r^2 i + x = (r')^2 i + x'$. Como r y r' son positivos, $r = r'$ y $x = x'$, así $n = n'$ y $a = a'$. De esto se deduce $k = k'$, habiendo así probado la unicidad de la descomposición. □

3.2. El grupo topológico $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

En el capítulo anterior hemos visto que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dotado de la topología de subespacio de $\mathbb{R}^m$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $m = n$ y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $m = n^2$) se trata de un grupo topológico, ya que la multiplicación y la inversión de matrices son operaciones continuas en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En esta sección realizaremos un estudio del grupo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ visto como subgrupo topológico de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposición 3.7. *El grupo topológico* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es un subgrupo topológico cerrado de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Demostración. Por la proposición 3.1, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dotado de la topología de subespacio de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ se trata de un grupo topológico. La aplicación $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua. Al ser $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ la preimagen del conjunto cerrado $\{1\}$ a través de la aplicación continua det, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es un cerrado en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. □

Estudiaremos ahora algunas propiedades de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ como grupo topológico.

Proposición 3.8. *El grupo topológico* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es no compacto.*

Demostración. Sabemos que la topología usual en $\mathbb{R}^m$ es la misma que la topología como espacio métrico. Para ver que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ no es compacto basta demostrar que no está contenido en ninguna bola abierta $\mathrm{B}_r(g)$. Supongamos que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es compacto.

Entonces $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{B}_r(I)$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Esto significa que $||x - I||^2 < r^2$ para todo $x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Podemos escoger una x en $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ tal que $x_{1,1} = r+1$. Sin embargo, $||x - I||^2 = (r+1-1)^2 + \sum_{(i,j)\neq(1,1)}(x_{i,j} - \delta_{i,j})^2 = r^2 + \sum_{(i,j)\neq(1,1)}(x_{i,j} - \delta_{i,j})^2$, que no es menor que r^2 ($\delta_{i,j}$ denota la Delta de Kronecker). Por lo tanto hemos llegado a una contradiccion, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ no es compacto. Además, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, luego $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es no compacto para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. □

Corolario 3.9. *El grupo topológico* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *es no compacto.*

Demostración. Por la demostración de la proposición anterior, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ no está acotado. Como además $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ no es compacto. □

Proposición 3.10. *El grupo topológico* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es conexo por caminos.*

Demostración. Para demostrar que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es conexo por caminos veremos que todo elemento de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ está conectado con I mediante un camino. En primer lugar observamos que la matriz $E_{(i,j)}(x)$ está conectada con I mediante el camino $c : t \mapsto E_{(i,j)}(tx)$ ya que $c(1) = E_{(i,j)}(x)$ y $c(0) = I$. El producto de m matrices elementales de este tipo $E_1 \cdot \ldots \cdot E_m$ está conectado con I mediante el camino producto $c_1 \cdot \ldots \cdot c_m : t \mapsto c_1(t) \cdot \ldots \cdot c_m(t)$, siendo cada c_i el camino que conecta E_i con I definido como acabamos de mostrar. En efecto, tenemos que $c_1 \cdot \ldots \cdot c_m(0) = c_1(0) \cdot \ldots \cdot c_m(0) = I$ y $c_1 \cdot \ldots \cdot c_m(1) = c_1(1) \cdot \ldots \cdot c_m(1) = E_1 \cdot \ldots \cdot E_m$. Por la proposición 3.2, todo elemento g de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ puede ser expresado como producto finito de matrices $E_{(i,j)}(x)$, por lo tanto existe un camino que conecta g con I para todo $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Debido a esto, componiendo caminos, dados dos elementos $g, h \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, existe un camino que los conecta, luego $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es conexo por caminos. □

Corolario 3.11. *El grupo topológico* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *es conexo.*

Tal y como hemos visto en el capítulo anterior, basta ver que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es una variedad real suave y que las operaciones de grupo son suaves para comprobar que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es un grupo de Lie. Podemos ver $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ como variedad suave dentro de $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ como variedad suave dentro de $\mathbb{R}^{2n^2}$. Las operaciones de grupo son suaves por ser composición de sumas, productos y divisiones por elementos no nulos.

Proposición 3.12. *El grupo de Lie* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *es isomorfo al grupo de Lie*

$$\mathrm{SU}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^8.$$

Demostración. Sea $t = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, veamos que $f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SU}_{1,1}$ definida por $g \mapsto t^{-1}gt$ es un isomorfismo de grupos de Lie. Observamos que $t^{-1}gt$ está en $\mathrm{SU}_{1,1}$, luego f está bien definida. Comprobamos que f es un morfismo de grupos, sean $g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, se tiene $f(gh) = t^{-1}ght = t^{-1}gtt^{-1}ht = f(g)f(h)$. El núcleo de f es trivial, luego f es inyectiva. Sea $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_{1,1}$ con $\alpha = m + ni$ y $\beta = p + qi$, comprobemos que $g = \begin{pmatrix} m+q & p+n \\ p-n & m-q \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es su preimagen a través de f. Como

$$\det(g) = (m+q)(m-q) - (p+n)(p-n) = (m^2+n^2) - (p^2+q^2) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,$$

efectivamente $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Procedemos al cálculo

$$f(g) = t^{-1}gt = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+q & p+n \\ p-n & m-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2m+2ni & 2p+2q \\ 2p-2qi & 2m-2ni \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto f es sobreyectiva y un isomorfismo de grupos. Como la multiplicación de matrices es suave, f es suave. Su inversa $f^{-1} : \mathrm{SU}_{1,1} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tal que $y \mapsto tyt^{-1}$ es también suave, luego f es un isomorfismo de grupos de Lie. □

Corolario 3.13. *El espacio* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *es homeomorfo a* $S^1 \times D$*, el interior del toro sólido.*

Demostración. Como $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es isomorfo como grupo de Lie a $\mathrm{SU}_{1,1}$, también es homeomorfo a este. Por lo tanto basta demostrar que $\mathrm{SU}_{1,1}$ es homeomorfo a $S^1 \times D$. Veamos que $f : \mathrm{SU}_{1,1} \to S^1 \times D$ tal que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mapsto (\frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{\beta}{\alpha})$ es un homeomorfismo. Comprobemos que es inyectiva,

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} c & d \\ \overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix}) \implies (\frac{a}{|a|}, \frac{b}{a}) = (\frac{c}{|c|}, \frac{d}{c}) \implies$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{a}{|a|} = \frac{c}{|c|} \\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} d = \frac{cb}{a} \\ c = \frac{|c|a}{|a|} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} d = \frac{|c|}{|a|}b \\ c = \frac{|c|}{|a|}a \end{matrix}\right\}$$

Como $|c|^2 - |d|^2 = (\frac{|c|}{|a|})^2(|a|^2 - |b|^2) = (\frac{|c|}{|a|})^2 = 1$, entonces $\frac{|c|}{|a|} = 1$ y por lo tanto $c = a$ y $d = b$, luego f es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva veamos que un elemento $(s, d) \in S^1 \times D$ tiene como preimagen a través de f el elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ tal que $a = s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}$ y $b = ds\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}$. Veamos que así definida esta matriz pertenece a $\mathrm{SU}_{1,1}$. Tenemos que $|a|^2 - |b|^2 = (1 - |d|^2)|s|^2(\frac{1}{1-|d|^2}) = |s|^2 = 1$, debido a que $s \in S^1$. Ahora comprobamos que $(s, d) \in S^1 \times D$ se trata de su preimagen. Efectivamente $f(\begin{pmatrix} s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}} & ds\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}} \\ \overline{ds\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}} & \overline{s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}} \end{pmatrix}) = (\frac{s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}}{|s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}|}, \frac{ds\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}}{s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}}) = (s, d)$. Queda demostrado que f es biyectiva. Veamos que f y f^{-1} son continuas. Fijado $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_{1,1}$, tenemos $|a|, a \neq 0$, luego f es continua. Sean $(s, d) \in S^1 \times D$,

$f^{-1}((s,d)) = \begin{pmatrix} \dfrac{s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}}{ds\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}} & \dfrac{ds\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}}{s\sqrt{\frac{1}{1-|d|^2}}} \end{pmatrix}$. Como $d \in D$, $1-|d|^2 > 0$, luego f^{-1} es continua. Queda así demostrado que $S^1 \times D$ es homeomorfo a $\mathrm{SU}_{1,1}$ y por lo tanto a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. □

3.3. El álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

En esta sección estudiaremos el álgebra de Lie del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, generalizando resultados a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ cuando sea posible.

Proposición 3.14. *Sea el grupo de Lie* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) = 1\}$ *y* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ es suave y $c(0) = I\} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ *su álgebra de Lie. Entonces* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ *es*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\}.$$

Demostración. Queremos demostrar $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Comprobemos que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ entonces $X = c'(0)$ para algún $c : \mathbb{R} \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ suave tal que $c(0) = 1$. Por el lemma 2.15 tenemos que $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(c'(0)) = \frac{d}{dt}[\det(c(t))]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[1]\Big|_{t=0} = 0$, luego $X \in \mathfrak{g}$. Comprobemos ahora que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Sea $X \in \mathfrak{g}$ tenemos que $\mathrm{Tr}(X) = 0$. Por la propiedad (3) del teorema 2.14, $\det(e^{tX}) = e^{\mathrm{Tr}(tX)} = e^{t\mathrm{Tr}(X)} = e^0 = 1$, luego $e^{tX} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $c : t \mapsto e^{tX}$ es una curva suave de $\mathbb{R}$ a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ y $c(0) = e^0 = I$, tenemos que $c'(0) \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Por la propiedad (4) del teorema 2.14, $c'(0) = \frac{d}{dt}[e^{tX}]\Big|_{t=0} = [Xe^{tX}]\Big|_{t=0} = X$, quedando así demostrado que $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ y por lo tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. □

En los siguientes desarrollos, viendo $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, utilizaremos la base

$$\left\{X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Veremos ahora un resultado que nos servirá para hallar el centro de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Proposición 3.15. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ *es simple. En particular,* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ *es semisimple y su centro es trivial.*

Demostración. Comprobaremos que si $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ es un ideal de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, entonces se tiene $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Sabemos que $\mathfrak{h}$ posee un elemento $Z = aX_3 + bX_2 + cX_1 \neq 0$ con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Como $\mathfrak{h}$ es un ideal, $[X_3, -Z] = -b[X_3, X_2] - c[X_3, X_1] = 2bX_2 - 2cX_1$ pertenece a $\mathfrak{h}$. Del mismo modo, $[X_3, 2bX_2 - 2cX_1] = 2bX_2 + 2cX_1 + 2bX_2 + 2cX_1 = 4bX_2 + 4cX_1 \in \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ es un espacio vectorial, $Z - \frac{1}{4}(4bX_2 + 4cX_1) = aX_3 \in \mathfrak{h}$. Si $a \neq 0$ entonces $[X_3, X_2] = 2X_2 \in \mathfrak{h}$ y $[X_3, X_1] = 2X_1 \in \mathfrak{h}$, luego $X_3, X_2, X_1 \in \mathfrak{h}$ y por lo tanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Si $a = 0$, $[X_2, bX_2 - cX_1] = -cX_3 \in \mathfrak{h}$ y si $c \neq 0$ por el argumento anterior $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Si $c = 0$ entonces $Z = bX_2$, por lo que $[X_2, X_1] = X_3 \in \mathfrak{h}$, de lo que se deduce que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Además $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ es no conmutativa ya que $[X_2, X_1] = X_3 \neq 0$, y así $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ es simple (por lo tanto semisimple y con centro trivial por ser el centro un ideal). □

En los siguientes resultados nos centraremos en las matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, que como veremos forman una subálgebra.

Proposición 3.16. *Sea $\mathfrak{h}$ el conjunto de las matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ de dimensión $n-1$.*

Demostración. Sabemos que $0 \in \mathfrak{h}$. Como las matrices diagonales conmutan tenemos que $[X,Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] = \{0\} \subseteq \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie conmutativa. Como $\mathrm{Tr}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$ y X es diagonal, la dimensión de $\mathfrak{h}$ es el número de elementos de la diagonal menos 1, es decir, $\dim(\mathfrak{h}) = n-1$. □

Una *representación unidimensional* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un morfismo de álgebras de Lie $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_1(\mathbb{K})$. Veamos una forma de obtener una representación unidimensional de la subálgebra $\mathfrak{h}$ de la proposición anterior. Sea $\theta_{i,j} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}_1(\mathbb{K})$ tal que $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_i - \lambda_j$, vamos a ver que se trata de una representación unidimensional de $\mathfrak{h}$. Se ve con facilidad que se trata de una aplicación lineal. Además, como $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{K})$ son conmutativas, $\theta_{i,j}$ es trivialmente un morfismo de álgebras de Lie, luego efectivamente $\theta_{i,j}$ es una representación unidimensional de $\mathfrak{h}$. Las representaciones $\theta_{i,j}$ reciben el nombre de *raices de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ respecto de $\mathfrak{h}$* y denotaremos el conjunto de ellas por Φ. Observamos que Φ vive dentro de $\mathfrak{h}^*$, el espacio dual de $\mathfrak{h}$. No todas las raices $\theta_{i,j}$ son linealmente independientes, ya que $\theta_{i,j} = -\theta_{j,i}$ para todo $1 \leq i \neq j \leq n$. Definimos $\alpha_i \in \Phi$ como $\alpha_i = \theta_{i,i+1}$. Veamos que $\alpha_i, ..., \alpha_{n-1}$ son linealmente independientes. Tenemos que $a_i\alpha_i + ... + a_{n-1}\alpha_{n-1} = 0$ si y sólo si $a_i\alpha_i(X) + ... + a_{n-1}\alpha_{n-1}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$, $a_i\alpha_i(X) + ... + a_{n-1}\alpha_{n-1}(X) = a_i(x_1 - x_2) + ... + a_{n-1}(x_{n-1} - x_n) = x_1a_1 + x_2(a_2 - a_1) + ... + x_{n-1}(a_{n-1} - a_{n-1}) - x_na_{n-1} = x_1a_1 + x_2(a_2 - a_1) + ... + x_{n-1}(a_{n-1} - a_{n-2}) + (x_1 + ... + x_{n-1})a_{n-1} = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Escogiendo X tal que $x_1 = 1$, $x_i = 0, \forall i \neq 1, n$ obtenemos $a_1 + a_{n-1} = 0$. En general, eligiendo $x_j = 1$, $x_i = 0$, para todo $i \neq j, n$ se obtiene $a_j - a_{j-1} + a_{n-1} = 0$. Obtenemos así un sistema de ecuaciones cuya única solución es $a_j = 0$ para todo $j = 1, ..., n-1$. Concluimos que $\alpha_i, ..., \alpha_{n-1}$ son linealmente independientes. Este conjunto de raices $\alpha_i, ..., \alpha_{n-1}$ forma una base de $\mathfrak{h}^*$, ya que $\dim(\mathfrak{h}^*) = \dim(\mathfrak{h}) = n-1$. Recibe el nombre de *raices fundamentales de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ respecto de $\mathfrak{h}$* y se denota por Π. Cualquier raiz $\theta_{i,j}$ puede ser expresada como $\theta_{i,j} = \alpha_i + ... + \alpha_{j-1}$ si $i < j$.

Veremos ahora algunos resultados sobre $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ que nos servirán para estudiar los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en la siguiente sección.

Proposición 3.17. *Para cada $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ y cada $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, definimos $\mathrm{Ad}(g)(X)$ como $\mathrm{Ad}(g)(X) := gXg^{-1}$. Entonces $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}))$. Además, sea $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}))$*

el grupo de automorfismos del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}))\\ g &\mapsto \mathrm{Ad}(g)\end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos y en el caso $n = 2$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{\pm I_2\}$.

Demostración. Primero comprobamos que la aplicación está bien definida. Para cada $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ y cada $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ se tiene que $Tr(\mathrm{Ad}(g)(X)) = 0$ ya que la traza es invariante por conjugación, luego $\mathrm{Ad}(g)(X) \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Tenemos que

$$\mathrm{Ad}(g)(\alpha X+\beta Y)=g(\alpha X+\beta Y)g^{-1}=g(\alpha X)g^{-1}+g(\beta Y)g^{-1}=\alpha\mathrm{Ad}(g)(X)+\beta\mathrm{Ad}(g)(Y),$$

por lo tanto la aplicación es $\mathbb{K}$-Lineal y se trata de un endomorfismo de espacios vectoriales. Comprobamos que se trata de un endomorfismo de álgebras de Lie ya que $[\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)(Y)] = \mathrm{Ad}(g)(X)\mathrm{Ad}(g)(Y) - \mathrm{Ad}(g)(Y)\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}gYg^{-1} - gYg^{-1}gXg^{-1} = gXYg^{-1} - gYXg^{-1} = g(XY - YX)g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)([X, Y])$. Para ver que es un automorfismo, basta ver que $\mathrm{Ad}(g)$ es inyectiva. El núcleo de $\mathrm{Ad}(g)$ es trivial debido a que $\mathrm{Ad}(g)(X) = 0$ si y sólo si $X = 0$ con lo que queda probada la inyectividad. Observamos que $\mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g^{-1})$.

Sea $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ comprobamos que

$$\mathrm{Ad}(gh)(X) = (gh)X(gh)^{-1} = ghXh^{-1}g^{-1} = g\mathrm{Ad}(h)(X)g^{-1} = (\mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h))(X)$$

y por lo tanto Ad es un homomorfismo de grupos.

Para hallar $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Ad}(g) = id_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})}\}$ buscamos los elementos $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ tales que $gXg^{-1} = X$, o lo que es lo mismo, $gX = Xg$, para todo $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Como $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ esta generado por X_1, X_2 y X_3, basta ver qué condiciones tiene que cumplir g para conmutar con estas tres matrices. Para X_1 se obtiene que $gX_1 = X_1g$ si y sólo si $b = 0$ y $d = a$. Para X_2 se obtiene que $gX_2 = X_2g$ si y sólo si $c = 0$. Para X_3 tenemos que $gX_2 = X_2g$ si y sólo si $d = a^{-1}$, lo cual implica $a = a^{-1}$ y por lo tanto $a = d = \pm 1$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{\pm I_2\}$, que es precisamente el centro de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. □

En la proposición anterior hemos visto que considerando Ad como una aplicación de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ se tiene que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Z}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}))$. Este resultado se puede generalizar a matrices de orden n mediante una demostración similar a la que hemos usado para el caso $n = 2$. Sea $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}))$ entonces se tiene que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$.

Teorema 3.18. *Sea* $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ *y* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *y* $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ *son subálgebras de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *entonces existe un* $g \in G$ *tal que* $\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$.

Demostración. Véase [4, Cap VII, § 3, Tma. 1]. □

Definido Ad podemos dar la definición de centralizador de una álgebra de Lie en un grupo. El *centralizador* de una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ del álgebra de Lie de un grupo de Lie G es

$$\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}) := \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)(X) = X, \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\}.$$

Proposición 3.19. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ y $\mathfrak{h}$ subálgebra de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$ es un subgrupo de G y si $\mathfrak{h}' = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ con $g \in G$ entonces los centralizadores de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ en G son subgrupos conjugados.*

Demostración. Primero veamos que $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$ efectivamente se trata de un subgrupo de G. Debido a que $\mathrm{Ad}(I)(X) = IXI^{-1} = X$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, el elemento neutro I pertenece a $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$. Como fijados $a, b \in \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$ y dado un $X \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{Ad}(ab^{-1})(X) = (ab^{-1})X(ab^{-1})^{-1} = (ab^{-1})X(ba^{-1}) =$$

$$(ab^{-1})bXb^{-1}(ba^{-1}) = \mathrm{Ad}(a)(X) = X,$$

tenemos que $ab^{-1} \in \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$, luego $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$ es un subgrupo de G.

Ahora veamos que si $\mathfrak{h}' = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ entonces $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}') = g\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})g^{-1}$. Tenemos el contenido $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}') \subseteq g\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})g^{-1}$ debido a que dado $a \in \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}')$ y $X = g^{-1}Yg \in \mathfrak{h}$ con $Y \in \mathfrak{h}'$, tenemos que $\mathrm{Ad}(g^{-1}ag)(X) = g^{-1}agXg^{-1}a^{-1}g = g^{-1}aYa^{-1}g = g^{-1}Yg = X$ y por lo tanto $g^{-1}ag \in \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$. Para demostrar el contenido $g\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})g^{-1} \subseteq \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}')$ vemos que como $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}') = \mathrm{Z}_G(g\mathfrak{h}g^{-1}) \subseteq g\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})g^{-1}$ entonces

$$\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{Z}_G(g^{-1}(g\mathfrak{h}g^{-1})g) \subseteq g^{-1}\mathrm{Z}_G(g\mathfrak{h}g^{-1})g,$$

y por lo tanto, $g\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})g^{-1} \subseteq \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}')$. □

3.4. Subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Empezaremos esta sección dando una definición de subgrupo de Cartan en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Tras esto estudiaremos dichos subgrupos en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ generalizando a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) en algunas ocasiones.

Sea $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, un subgrupo H de G es un *subgrupo de Cartan* si $H = \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h})$, para alguna $\mathfrak{h}$ subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Veamos a continuación que todos los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ son conjugados.

Teorema 3.20. *Todos los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ son conjugados entre sí.*

Demostración. Sean H_1 y H_2 dos subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ cualesquiera y $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ sus álgebras de Lie, por el teorema 3.18 $\mathfrak{h}_1 = g\mathfrak{h}_2g^{-1}$ para algún $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Por la proposición 3.19 los centralizadores de $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son conjugados por el mismo elemento, y estos centralizadores, precisamente, son H_1 y H_2, respectivamente. □

Para encontrar los subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ debemos estudiar las subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Proposición 3.21. *Las súbalgebras*

$$\mathfrak{h}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{K}} \subseteq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \quad y \quad \mathfrak{h}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{K}} \subseteq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$$

son subálgebras de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se tiene que $\mathfrak{h}_2 = g\mathfrak{h}_1 g^{-1}$ con $g = \begin{pmatrix} 1 & -i/2 \\ -i & 1/2 \end{pmatrix}$.

Demostración. En primer lugar comprobamos que $\mathfrak{h}_1$ es una subálgebra. Es un subespacio de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ y como es un subespacio de dimensión 1, $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = 0$. Por lo tanto $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subseteq \mathfrak{h}_1$. Como $\mathfrak{h}_1$ es conmutativa, es nilpotente. Queda comprobar que $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$. Recordemos que $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \mathfrak{h}_1, \forall Y \in \mathfrak{h}_1\}$. Fijado el elemento $X = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ siendo X_1, X_2, X_3 las matrices de la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ introducida en la sección 3.3 e $Y = X_3 \in \mathfrak{h}_1$, tenemos que $[X, Y] = 2\begin{pmatrix} 0 & -k_2 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_1$, lo cual implica $k_1 = k_2 = 0$. Por lo tanto $X = k_3X_3$, luego $X \in \mathfrak{h}_1$. Como $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$.

Ahora comprobaremos que $\mathfrak{h}_2$ es una subálgebra de Cartan. Como en el caso anterior, se trata de una subálgebra conmutativa y por lo tanto nilpotente. Fijado el elemento $X = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_2)$, $Y = X_2 - X_1 \in \mathfrak{h}_2$, tenemos que $[X, Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 & 2k_3 \\ 2k_3 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_2$, lo cual implica $k_3 = 0, k_1 = -k_2$. Por lo tanto $X = k_2(X_2 - X_1)$, luego $X \in \mathfrak{h}_2$. Como $\mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_2)$, $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_2)$.

Por el teorema 3.18 sabemos que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tenemos que $\mathfrak{h}_2 = g\mathfrak{h}_1 g^{-1}$ para algún elemento $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Este g es $\begin{pmatrix} 1 & -i/2 \\ -i & 1/2 \end{pmatrix}$, ya que para $X_2 - X_1 \in \mathfrak{h}_2$, se tiene $X_2 - X_1 = g(-iX_3)g^{-1} \in g\mathfrak{h}_1 g^{-1}$, así $\mathfrak{h}_2 \subseteq g\mathfrak{h}_1 g^{-1}$ y al tener la misma dimensión $\mathfrak{h}_2 = g\mathfrak{h}_1 g^{-1}$. $\square$

Hallaremos los subgrupos de Cartan correspondientes a estas dos subálgebras de Cartan.

Teorema 3.22. *Los subgrupos*

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^* \right\}, \ H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

son subgrupos de Cartan de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

Demostración. Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ y sean $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ las subálgebras de Cartan de la proposición anterior, veremos que $H_1 = \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}_1)$ y $H_2 = \mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}_2)$. Para hallar el centralizador $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}_1) = \{g \in G \mid gXg^{-1} = X, \forall X \in \mathfrak{h}_1\}$ fijamos $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ y $X = X_3 \in \mathfrak{h}_1$. Para que $gX = Xg$ se tiene que cumplir $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, por lo que $b = 0, c = 0$. Además, $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, así que debe cumplir $ad = 1$ por lo que

$d = a^{-1}$ y $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Concluimos que $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^* \right\}$.

Para hallar $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}_2)$ procedemos de manera análoga. Fijado $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ y $X = X_2 - X_1 \in \mathfrak{h}_2$ tenemos que $gX = Xg$ implica $\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$, por lo que $d = a, c = -b$. Como $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ se satisface $a^2 + b^2 = 1$ y $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, $\mathrm{Z}_G(\mathfrak{h}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{K} \right\}$. $\square$

Nos centraremos ahora en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En lo que sigue, H_1, H_2, $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ denotan los subgrupos de Cartan y subálgebras de Cartan correspondientes a los resultados anteriores. Vamos a estudiar la conexión y la compacidad de H_1 y H_2.

Proposición 3.23. *Se considera el grupo topológico* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. *El subgrupo H_1 no es compacto ni conexo. El subgrupo H_2 es compacto y conexo.*

Demostración. Para el estudio de H_1 definimos $f : H_1 \to \mathbb{R}^*$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a$. Esta función es continua (H_1 con la topología de subespacio de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^*$ con la topología de subespacio en $\mathbb{R}$) por lo tanto preserva la compacidad y la conexión. Como $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$ no es compacto ni conexo concluimos que H_1 tampoco lo es. Estudiamos ahora H_2. Definimos la función $g : H_2 \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$. Se ve de manera sencilla que esta función es biyectiva, continua (H_2 con la topología de subespacio de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y S^1 con la topología de subespacio en $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) y con inversa también continua. Por lo tanto g es un homeomorfismo. Debido a esto, como $S^1 = g(H_2)$ compacto y conexo, tenemos que H_2 también lo es. $\square$

El resultado visto en el teorema 3.20 no es aplicable a H_1 y H_2 en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Vamos a ver que H_1 y H_2 no son subgrupos conjugados en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Proposición 3.24. *Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, H_1 y H_2 no son subgrupos conjugados en G.*

Demostración. Basta observar que los elementos de $H_2 \setminus \{\pm I\}$ no son diagonalizables en $\mathbb{R}$ y por lo tanto no son conjugados a un elemento de H_1 por elementos de G. Sea $h = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H_2 \setminus \{\pm I\}$, $|\mathrm{Tr}(h)| = |2a| < 2$, ya que $|a| < 1$. Por el teorema 3.4 se trata de un elemento elíptico de G, luego no diagonalizable en $\mathbb{R}$. $\square$

A pesar de H_1 y H_2 no ser conjugados entre sí, vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.25. *Sea $G = SL_2(\mathbb{R})$, todo subgrupo de Cartan de G es o bien conjugado a H_1 o bien conjugado a H_2.*

Demostración. Para demostrar este resultado vamos a ver que toda subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es o bien conjugada a $\mathfrak{h}_1$ o bien conjugada a $\mathfrak{h}_2$. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ sabemos por el teorema 2.22 que $\mathfrak{h}$ tiene dimensión 1, ya que $\mathfrak{h}_1$ tiene dimensión 1. Por lo tanto $\mathfrak{h} = \langle Z\rangle_{\mathbb{R}}$ para cierto $Z \in \mathfrak{g}$. Consideramos ahora $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \langle Z\rangle_{\mathbb{C}}$. Tenemos que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ es conmutativa, luego nilpotente y por linealidad del corchete $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ implica $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, donde $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ es $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Por lo tanto $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y por el teorema 3.18 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = g\mathfrak{h}_{1_{\mathbb{C}}}g^{-1}$ para cierto $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Como $Z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, $Z = gYg^{-1}$ con $Y \in \mathfrak{h}_{1_{\mathbb{C}}}$, luego Z es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Como $\mathrm{Tr}(Z) = 0$, Z es conjugada a una matriz cuya traza es nula. Si Y tiene coeficientes reales, Z es conjugada mediante un $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ a una matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Si Y tiene coeficientes con parte imaginaria no nula, Z es conjugada mediante un $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ a una matriz $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, su forma de Jordan real. Así, $\mathfrak{h}$ será conjugada a $\mathfrak{h}_1$ o $\mathfrak{h}_2$, respectivamente.

Por lo tanto toda subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es o bien conjugada de $\mathfrak{h}_1$ o bien conjugada de $\mathfrak{h}_2$. Por la proposición 3.19, esto implica que todo subgrupo de Cartan de G es o bien conjugado de H_1 o bien conjugado de H_2. □

Estudiaremos ahora algunas propiedades de H_1 y H_2. Recordemos que el *normalizador* de un subgrupo H en un grupo G es

$$N_G(H) = \{g \in G \mid H^g = H\},$$

donde $H^g = gHg^{-1}$ es el conjugado de H mediante g.

Por la definición de Chevalley de subgrupo de Cartan, comentada en la introducción, sabemos que los subgrupos de Cartan de un grupo G tienen índice finito en su normalizador en G. Veamos el caso de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Proposición 3.26. *Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, H_2 tiene un normalizador trivial en G.*

Demostración. Todo subgrupo está contenido en su normalizador, por lo tanto tenemos $H_2 \subseteq N_G(H_2)$. Veamos que $N_G(H_2) \subseteq H_2$. Fijamos $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N_G(H_2)$ y $h = a_1 I_2 + a_2 A \in H_2$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtenemos

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} -a_2(bd+ca) + a_1 & a_2(a^2+b^2) \\ -a_2(c^2+d^2) & a_2(bd+ca)+a_1 \end{pmatrix}.$$

Como $ghg^{-1} \in H_2$, $bd + ca = 0$ y se debe cumplir $a_1^2 + (a_2(a^2+b^2))^2 = 1$. Sabemos que $a_1^2 + a_2^2 = 1$ ya que $h \in H_2$. Tomando $a_2 \neq 0$ deducimos $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Por lo tanto $ghg^{-1} = h, \forall h \in H_2$. De esto se deduce que $gA = Ag$. Tenemos entonces que $b = -c$ y $a = d$, luego $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cumpliendo $a^2 + b^2 = 1$ (por pertenecer a G) y por lo tanto $g \in H_2$. □

Proposición 3.27. *Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, H_1 tiene índice 2 en su normalizador $N_G(H_1)$.*

Demostración. Primero veamos por qué elementos está formado $N_G(H_1)$. Tenemos que $H_1 \subseteq N_G(H_1)$. Fijado $h = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix} \neq I$ en H_1, para que un $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ no diagonal cumpla $ghg^{-1} \in H_1$, debe satisfacer

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ada_1 - cba_1^{-1} & ab(a_1^{-1} - a_1) \\ cd(-a_1^{-1} + a_1) & -bca_1 + ada_1^{-1} \end{pmatrix} \in H_1.$$

Esto implica $ab(a_1^{-1} - a_1) = cd(-a_1^{-1} + a_1) = 0$, por lo tanto $ab = cd = 0$. Como g no es diagonal, tenemos $a = 0$ y por lo tanto $d = 0$ y $g = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Fijamos $g_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, todo elemento $h = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix} \in H_1$ es el conjugado de $h^{-1} \in H_1$ mediante g_1. Por lo tanto $g_1 H_1 g_1^{-1} = H_1$ y

$$N_G(H_1) = H_1 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}^* \right\} = H_1 \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} H_1.$$

Concluimos que $|N_G(H_1) : H_1| = 2$. $\square$

Finalizaremos la sección con un estudio de los conjuntos H_1^G y H_2^G, siendo G el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Vamos a comprobar que estos conjuntos son

$$H_1^G = \{g \in G \mid |\mathrm{Tr}(g)| > 2\} \cup \mathrm{Z}(G) \quad \text{y} \quad H_2^G = \{g \in G \mid |\mathrm{Tr}(g)| < 2\} \cup \mathrm{Z}(G).$$

Como $\mathrm{Z}(G) = \{\pm I\}$, es trivial que $\mathrm{Z}(G) \subseteq H_1^G$ y que $\mathrm{Z}(G) \subseteq H_2^G$. Por el teorema 3.4, vemos que $g \in \{h \in G \mid |\mathrm{Tr}(h)| > 2\}$ si y sólo si g es conjugada en G a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_1^{-1} \neq 0$, y esto es condición necesaria y suficiente para que $g \in H_1^G \setminus \mathrm{Z}(G)$. En el caso de H_2^G tenemos que un elemento $g \in \{h \in G \mid |\mathrm{Tr}(h)| < 2\}$ si y sólo si g es conjugada en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} e^{\alpha i} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha i} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^*$ y por lo tanto g tiene una forma de Jordan real $J = hgh^{-1}$ con $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, b \neq 0, J \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Esto ocurre si y sólo si $g \in H_2^G \setminus \mathrm{Z}(G)$.

Teorema 3.28. *Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. La unión de todos los subgrupos de Cartan de G, $H_1^G \cup H_2^G$, es denso en G.*

Demostración. Vamos a comprobar que $X = \{g \in G \mid |\mathrm{Tr}(g)| \neq 2\} \subseteq H_1^G \cup H_2^G$ es denso en G y por lo tanto también lo es $H_1^G \cup H_2^G$. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que X no es denso, entonces existe un abierto U en G cuya intersección con X es vacía. Es decir, $U \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus X = \{g \in G \mid |\mathrm{Tr}(g)| = 2\}$. Fijado $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $W = \{g \in G \mid \mathrm{d}(g,h) < \epsilon\} \subseteq U$. Sea $\delta \in \mathbb{R}$, existen infinitos $g_\delta = \begin{pmatrix} a+\delta & b \\ c & ad/(a+\delta) \end{pmatrix}$ que satisfacen $g_\delta \in W$. Esto es debido a que $f_1(\delta) = \mathrm{d}(g_\delta, h)$ es una función continua y $f_1(0) = 0 < \epsilon$, por lo tanto siempre podemos encontrar un intervalo abierto $(-\delta', \delta')$ con δ' lo suficientemente pequeño satifaciendo $f_1(\delta) < \epsilon$ para todo $\delta \in (-\delta', \delta')$. Sin embargo, el número de g_δ en el intervalo $(-\delta', \delta')$ tales que $|f_2(\delta)| = |\mathrm{Tr}(g_\delta)| = 2$ es a lo sumo 4, ya que $f_2(\delta)$ es un polinomio de segundo grado. Hemos llegado a una contradicción, por lo tanto X es denso. $\square$

Sea G un grupo y $X \subseteq G$, X es *sindético por la izquierda* en G si existe un $F \subseteq G$ finito tal que $FX = G$, es decir, si un número finito de trasladados por la izquierda de X cubren G. Existe el concepto análogo de *sindético por la derecha.*

Proposición 3.29. *Sea G un grupo y $X \subseteq G$ simétrico, es decir, $X = X^{-1}$. Entonces X es sindético por la izquierda si y sólo si X es sindético por la derecha.*

Demostración. Sea $X \subseteq G$ sindético por izquierda, entonces existe un F finito tal que $FX = G$. Por lo tanto $(FX)^{-1} = G^{-1}$, luego $X^{-1}F^{-1} = G$. Si X es simétrico entonces $XF^{-1} = G$ y así X es sindético por la derecha. Los recíprocos de las implicaciones utilizadas también se satisfacen, luego queda demostrada la proposición. $\square$

Proposición 3.30. *Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, H_2^G no es sindético en G ni por la izquierda ni por la derecha.*

Demostración. En primer lugar debemos fijarnos en que H_2^G es simétrico, ya que $h \in H_2^g$ si y sólo si $h^{-1} \in H_2^g$. Por la proposicion anterior basta entonces demostrar que H_2^G no es sindético por la izquierda en G. Vamos a ver que el conjunto

$$M = \{m_x = \begin{pmatrix} x^2 & x-1 \\ 1 & x^{-1} \end{pmatrix} \in G \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

no puede ser cubierto por un número finito de trasladados por la izquierda de H_2^G. Sea $F = \{a_1, ..., a_m\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ con m finito veamos que $\{x \in \mathbb{R} \mid m_x \in a_j H_2^G\}$ es un conjunto acotado para cada $j = 1, .., m$. Como $\{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid m_x \in M\}$ no es acotado, esto demostraría que FH_2^G no cubre G. Para demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid m_x \in a_j H_2^G\}$ es acotado, bastará ver que para un $x' \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, $(x', +\infty) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid m_x \notin a_j H_2^G\}$. Esto último lo comprobaremos viendo que el intervalo $(x', +\infty) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid \mathrm{Tr}(a_j^{-1} m_x)| > 2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid m_x \notin a_j H_2^G\}$ para cierto $x' \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Observamos primero que efectivamente si $|\mathrm{Tr}(a_j^{-1} m_x)| > 2$, entonces $a_j^{-1} m_x$ $(\neq \pm I)$ es hiperbólico, luego $a_j^{-1} m_x \notin H_2^G$ y por lo tanto $m_x \notin a_j H_2^G$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|\mathrm{Tr}(a_j^{-1} m_x)| > 2$ con $a_j = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, como x es positivo esto ocurre si y sólo si $dx^3 - cx^2 - (b - c + 2)x + a > 0$ o si $dx^3 - cx^2 - (b - c - 2)x + a < 0$. Si $d \neq 0$, al menos una de las condiciones anteriores se satisface cuando $x \to \infty$(dependiendo de si d es positiva o negativa). Si $d = 0$ entonces $c \neq 0$, y del mismo modo que antes, una de las conficiones se satisface cuando $x \to \infty$. Queda demostrado que $\{x \in \mathbb{R}^{>0} \mid m_x \in a_j H_2^G\}$ es acotado y por lo tanto H_2^G no es sindético en G. $\square$

Definiremos ahora un tipo de elementos que nos servirán para demostrar que $H_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ es sindético en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. De acuerdo con [1, § 6, Pág. 28], diremos que un elemento de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ es un *elemento* $\mathbb{R}$*-regular* si es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y sus autovalores son distintos.

Proposición 3.31. *Sea* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*,* H_1^G *es sindético en* G *por izquierda y derecha.*

Demostración. Denotaremos por R al conjunto de los elementos $\mathbb{R}$-regulares de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Aplicamos [1, Tma. 6.8], que nos asegura la existencia de un subconjunto finito F de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tal que para todo elemento $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, al menos uno de los elementos $\gamma g, \gamma \in F$, es $\mathbb{R}$-regular. Por lo tanto $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = F^{-1}R$. Observamos que los elementos de R son elementos hiperbólicos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, y por lo tanto R está contenido en H_1^G. Por lo tanto $F^{-1}H_1^G$ cubre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Como H_1^G es simétrico, es también sindético por la derecha. $\square$

Finalmente observamos que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ se puede cubrir mediante cuatro trasladados de $H_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ (véase [3, Remark 57]). Se tiene que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^4 (a_i H_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})})$, siendo $a_1 = I$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $a_4 = \begin{pmatrix} 0 & -b^{-1} \\ b & 0 \end{pmatrix}$ para cualesquiera $a, b \in (0, \frac{1}{12})$.

Bibliografía

[1] Abels, H.; Margulis, G. A.; Soifer, G. A.: Semigroups containing proximal linear maps. *Israel Journal of Mathematics* 91 (1995), 27-28.

[2] Alexander Kirillov, Jr.: An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras. *Cambridge studies in advanced mathematics* (2008), 91-94.

[3] Baro, E.; Jaligot, E.; Otero, M.: Cartan subgroups of groups definable in o-minimal structures. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* (2014), 13(4), 849-893.

[4] Bourbaki, N.: Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 7-9. *Elements of Mathematics* (2004).

[5] Carter, Roger; Segal, Graeme; Macdonald, Ian.: Lectures on Lie groups and Lie algebras. *LMS Student Texts* (1995).

[6] Conrad, K.: Decomposing $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL(2,R).pdf, (9 p.p.).

[7] Knapp, Anthony W.: Lie groups beyond an introduction. *Progress in Mathematics* (2002).

[8] McCarty, G.: Topology: An Introduction with Application to Topological Groups. *Dover Books on Mathematics* (2003).

APÉNDICE A

Demostraciones de los resultados de 2.1

Teorema A.1. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G, entonces H es un grupo topológico con la topología relativa como subespacio de G.*

Demostración. Solo hace falta comprobar que la operación de grupo y la inversión son continuas. Esto se satisface debido a que la restricción de una función continua $f : X \to Y$ a un subespacio U de X sigue siendo continua de U a $f(U) \subseteq Y$ [8, § V.1, Lem. 2]. $\square$

Proposición A.2. *Sea G un grupo topológico, entonces G es homogéneo y todo subgrupo abierto H de G es también cerrado.*

Demostración. Para todo par de puntos $t, u \in G$ podemos construir el homeomorfismo $L_{ut^{-1}}$ que satisface $L_{ut^{-1}}(t) = u$, por lo que G es homogéneo. Por otro lado, por ser H un subgrupo podemos expresar G como la unión disjunta $G = H \sqcup \bigcup_{g \notin H} gH$. Como H es abierto y $gH = L_g(H)$ para cada g, al ser la multiplicación por la izquierda un homeomorfismo tenemos que cada gH es abierto y por lo tanto que H es el complementario de un abierto en G, luego es cerrado. $\square$

Lemma A.3. *Sea G un grupo topológico y U un entorno abierto de e en G, entonces existe un entorno simétrico abierto V de e tal que $VV = VV^{-1} \subseteq U$.*

Demostración. Denotaremos por m a la operación del grupo G. Como m es continua, $m^{-1}(U)$ es abierto en $G \times G$. Al ser un entorno abierto de (e, e) contiene un elemento base de la topología producto de $G \times G$ que a su vez contiene a (e, e). Llamemos a este elementos base $S \times T$. Escogiendo $R = S \cap T$, tenemos que $R \times R$ también contiene a (e, e). Si elegimos $V = R \cap R^{-1}$ tenemos que V es un entorno simétrico de la unidad ya que contiene a e y $V^{-1} = (R \cap R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R = V$. Queda comprobar $VV \subseteq U$. Fijado $gh \in VV$ tenemos $(g, h) \in V \times V$, por lo tanto $(g, h) \in S \times T \subseteq m^{-1}(U)$, luego $gh \in U$. Concluimos $VV = VV^{-1} \subseteq U$. $\square$

Teorema A.4. *Todo grupo topológico G es un espacio T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in G$ con $x \neq y$ sabemos que $x^{-1}y \neq e$. Como G es homogéneo y $\{e\}$ es cerrado, todos los conjuntos formados por un solo punto son cerrados ya que son de la forma $L_g(\{e\})$, luego el espacio es T_0. El conjunto $U = G \setminus \{x^{-1}y\}$ es un entorno abierto de e y por el lemma 2.3 contiene un entorno simétrico abierto V de la identidad. Además tenemos que $x^{-1}y \notin VV \subseteq U$. Como $e \in V$ tenemos que xV, yV son entornos abiertos de x e y respectivamente. Son disjuntos ya que de no ser así, existirían $v_1, v_2 \in V$ tales que $xv_1 = yv_2$ y por lo tanto $x^{-1}y = v_1v_2^{-1} \in VV^{-1} = VV$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto G es T_2. □

Lemma A.5. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y G/H el espacio cociente con la topología cociente. Entonces la aplicación cociente $q : G \to G/H$ es continua y abierta.*

Demostración. Ver que q es continua es inmediato por la definición de topología cociente. Veamos que es abierta. Sea U un abierto de G, podemos expresar $q(U)$ como $q(U) = \{uH \mid u \in U\}$. Para ver si $q(U)$ es abierto hallamos su preimagen a través de q, $q^{-1}(q(U)) = q^{-1}(\{uH \mid u \in U\}) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$, que es una unión de abiertos, luego UH es abierto, luego $q(U)$ es abierto. □

Teorema A.6. *Sean G un grupo topológico y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal cerrado. Entonces G/H es un grupo topológico con la topología cociente.*

Demostración. Sabemos que si H es normal, G/H tiene estructura de grupo. Tenemos que $eH \in G/H$ es cerrado en la topología cociente, ya que H es cerrado en G. Queda comprobar que la operación m e inversión del grupo cociente son continuas. Dados dos elementos $xH, yH \in G/H$ tenemos que ver que para todo abierto $U \in G/H$ conteniendo a xyH existen dos abiertos V_x y V_y conteniendo a xH, yH, respectivamente, cuyo producto V_xV_y este contenido en U. Sabemos que $q^{-1}(U)$ es un abierto de G ya que la aplicación cociente q es continua. Como la operación de G es continua, existen F_x y F_y abiertos en G, conteniendo a x e y, respectivamente, tales que $F_xF_y \subseteq q^{-1}(U)$. Tomando $V_x = q(F_x)$ y $V_y = q(F_y)$, tenemos que V_x y V_y son abiertos, ya que q es abierta, y $V_xV_y \subseteq U$, habiendo así probado que la operación de grupo de G/H es continua. Como $U^{-1} = (q(q^{-1}(U)))^{-1} = q((q^{-1}(U))^{-1})$ es un abierto ya que q es abierta y continua y la inversión en G también es abierta, tenemos que la inversión en G/H es continua, luego es un grupo topológico. □

Proposición A.7. *Sean G_1 y G_2 grupos topológicos y $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos. Si f es continuo en e_1, entonces es continuo en todo su dominio.*

Demostración. Supongamos que f es continuo en e_1. Por lo tanto para todo abierto $N \subseteq G_2$ tal que $e_2 \in N$, tenemos que $f^{-1}(N)$ es un abierto en G_1 conteniendo a e_1. Sea $S \subseteq G_2$ abierto, queremos ver que $f^{-1}(S)$ es abierto en G_1. Lo demostraremos viendo que para todo $x \in f^{-1}(S)$ podemos encontrar un $U \subseteq f^{-1}(S)$ abierto con $x \in U$. Como S es un abierto de G_2 que contiene a $f(x) = y$, se tiene que $L_{y^{-1}}(S)$ es un abierto de G_2 conteniendo a e_2. Luego, por hipótesis, $f^{-1}(L_{y^{-1}}(S))$ es un abierto de G_1 que contiene a e_1. Por lo tanto, sea $U = L_x(f^{-1}(L_{y^{-1}}(S)))$, tenemos que U es un abierto de G_1 conteniendo a x tal que $U \subseteq f^{-1}(S)$. □

Teorema A.8 (Descomposición canónica de morfismos de grupos topológicos)**.** *Sea un morfismo de grupos topológicos $f : G_1 \to G_2$. Entonces f posee una única factorización $f = i \circ r \circ q$ en morfismos de grupos topológicos, en la que q es un cociente, r es un isomorfismo de grupos e i es una inclusión. Además, la inclusión i es abierta si y sólo si $\mathrm{Im}(f)$ es abierto en G_2, el cociente q es siempre abierto y r es un isomorfismo de grupos topológicos si y sólo si f es abierta como función sobre su imagen.*

Demostración. Como f es un morfismo de grupos topológicos, es también un morfismo algebraico de grupos, luego posee una factorización única

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & G_2 \\ G_1/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "r"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

En la que q es un cociente, r un isomorfismo algebraico e i una inclusión. Como f es continua, $\mathrm{Ker}(f)$ es cerrado por ser la preimagen de un cerrado a través de una función continua y además es normal, luego por el teorema 2.6, $G_1/\mathrm{Ker}(f)$ tiene estructura de grupo topológico y por el lemma 2.5, q es un morfismo de grupos topológicos abierto. La inclusión i es un morfismo de grupos topológicos y por la definición de topología relativa es necesario y suficiente que $\mathrm{Im}(f)$ sea un abierto en G_2 para que i sea abierta. Sea $V \subseteq \mathrm{Im}(f)$ abierto, por la definición de topología relativa $V = W \cap \mathrm{Im}(f)$ con W abierto en G_2. Al ser f continua, $f^{-1}(W) \subseteq G_1$ es un abierto. Debido a que $f^{-1}(i(V)) = f^{-1}(V) = f^{-1}(W)$, tenemos que $f^{-1}(i(V))$ es abierto en G_1. Por el lemma 2.5 sabemos que q es abierta, luego $q(f^{-1}(i(V))) = r^{-1}(V)$ es abierto en $G_1/\mathrm{Ker}(f)$ y por lo tanto r es continua y un morfismo de grupos topológicos. Por lo tanto, al ser r una biyección, es abierta si y sólo si r es un isomorfismo de grupos topológicos. Sea $U \subseteq G_1/\mathrm{Ker}(f)$. Por definición de topología cociente, U es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto. Así, si U es abierto, $r(U) = i^{-1}(f(q^{-1}(U)))$ es abierto si y sólo si f es abierta como función sobre su imagen. $\square$

Corolario A.9. *Sea $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos topológicos. Entonces f se factoriza a través de un cociente $q : G_1 \to G_1/K$ de su dominio,*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & G_2 \\ G_1/K \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

si y sólo si $K \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Demostración. Sabemos que q y g son morfismos algebraicos de grupos si y sólo si K está contenido en $\mathrm{Ker}(f)$. Por el lemma 2.5 q es continua, luego es un morfimos de grupos topológicos. Como q es abierta y f es continua, también lo es g, luego también es un morfismo de grupos topológicos. $\square$

Teorema A.10. *Sean G y H grupos topológicos, entonces $G \times H$ es un grupo topológico con la estructura algebraica de grupo producto y la topología producto. Además, las proyecciones en sus factores son epimorfismos topológicos abiertos.*

Demostración. Sabemos que $G \times H$ tiene estructura (algebraica) de grupo producto y posee una topología producto en la que $\{(e_G, e_H)\}$ en un cerrado. Sean m, n y p las operaciones de G, H y $G \times H$ respectivamente, vamos a definir una función a través de la cual factorizaremos p. Sea $s : (G \times H) \times (G \times H) \to (G \times G) \times (H \times H)$ tal que $s((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = ((h_1, h_2), (h_1, h_2))$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
(G \times H) \times (G \times H) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "s"'] & G \times H \\
(G \times G) \times (H \times H) \arrow[ur, "m \times n"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $m \times n$ es continua por ser m, n continuas y por la definición de topología producto. Sea V un abierto de $(G \times G) \times (H \times H)$, para todo $v \in V$ existe un abierto $U \subseteq V$ conteniendo a v que puede ser expresado como un producto directo de abiertos en sus respectivos espacios $U = U_{G_1} \times U_{G_2} \times U_{H_1} \times U_{H_2}$. La preimagen de este abierto $s^{-1}(U) = U_{G_1} \times U_{H_1} \times U_{G_2} \times U_{H_2}$ es un abierto de $(G \times H) \times (G \times H)$ contenido en $s^{-1}(V)$ tal que $s^{-1}(v) \in s^{-1}(U)$, luego s es continua y por lo tanto p es continua. Para comprobar que la inversión en $G \times H$ es continua usamos que las inversiones en G y H son continuas y aplicamos la definición de topología producto. Es directo comprobar que las proyecciones de $G \times H$ en sus factores son morfismos sobreyectivos y abiertos. □

Proposición A.11. *Sea G un grupo topológico, C_g la componente conexa a la que pertenece el elemento $g \in G$, entonces*

(1) $L_g(C_e) = C_g$.
(2) *C_e es un subgrupo normal cerrado de G.*

Demostración. (1) Tenemos que $L_g(C_e)$ es la imagen a través de una aplicación continua de C_e, luego es conexo. Además $g \in L_g(C_e)$ luego $L_g(C_e) \subseteq C_g$. Del mismo modo $L_{g^{-1}}(C_g)$ es conexo y contiene a e, por lo tanto $L_{g^{-1}}(C_g) \subseteq C_e$. Aplicando a ambos lados L_g tenemos $L_g(L_{g^{-1}}(C_g)) = C_g \subseteq L_g(C_e)$. Concluimos $L_g(C_e) = C_g$.

(2) Como las componentes conexas son cerradas, C_e es cerrado. Como la inversión de grupo es continua, C_e^{-1} es un conexo conteniendo a e, entonces $C_e^{-1} \subseteq C_e$. Invirtiendo a ambos lados tenemos $(C_e^{-1})^{-1} = C_e \subseteq C_e^{-1}$ y por lo tanto $C_e^{-1} = C_e$. Sean $g, h \in C_e$, tenemos que gC_e es un conexo conteniendo a g y debido a esto $gC_e \subseteq C_e$. Además $gh \in gC_e$, luego $gh \in C_e$, lo que prueba que C_e es un subgrupo. La multiplicaciones por izquierda y derecha son continuas así que dado un elemento $g \in C_e$, tenemos que $g^{-1}C_e g$ es un conexo conteniendo a e por lo que $g^{-1}C_e g \subseteq C_e$. □

Proposición A.12. *La componente arco-conexa G_e del elemento neutro e de un grupo topológico G es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Sean $g, h \in G_e$ existen caminos $a, b : I \to G$ conectando g, h con e tales que $a(0) = e, a(1) = g, b(0) = e, b(1) = h$. La función $a^{-1} : I \to G$ tal que $a^{-1}(t) = a(t)^{-1}$ es un camino ya que la inversión de grupo es continua y conecta $a^{-1}(0) = e$ con $a^{-1}(1) = g^{-1}$ luego $g^{-1} \in G_e$. Del mismo modo, por ser la operación de grupo continua, el camino $ab : I \to G$ tal que $ab(t) = a(t)b(t)$ conecta gh con e luego $gh \in G_e$. Sea $k \in G$, el camino $k^{-1}ak$ tal que $k^{-1}ak(t) = k^{-1}a(t)k$ conecta $k^{-1}gk$ con e, por lo tanto $k^{-1}gk \in C_e$, lo que demuestra que G_e es normal. $\square$

APÉNDICE B

Demostraciones de los resultados de 2.2

Teorema B.1. *Sea G un grupo lineal sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$),*

$$\mathfrak{g} = \{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \to G \text{ es suave y } c(0) = I\} \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

es un álgebra de Lie, subespacio de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ con el corchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$. Tal $\mathfrak{g}$ recibe el nombre de álgebra de Lie del grupo G.

Demostración. Veamos que $\mathfrak{g}$ satisface la definición de álgebra de Lie. Obsérvese que efectivamente $\mathfrak{g}$ es un conjunto de matrices del mismo orden que G (pero no necesariamente invertibles), luego tiene sentido la operación $XY - YX$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

En primer lugar vamos a ver que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial. Sean los elementos $c'(0), b'(0) \in \mathfrak{g}$, tenemos que $b'(0) + c'(0) = \frac{d}{dt}[(c(t)b(t))]\Big|_{t=0}$ ya que $c(0) = b(0) = I$. Además $[c(t)b(t)]\Big|_{t=0} = I$. Como G es cerrado por la multiplicación, $c(t)b(t) \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $c'(0) + b'(0) \in \mathfrak{g}$, luego la suma es cerrada en $\mathfrak{g}$. Esta suma es conmutativa. El elemento 0 es el elemento neutro para la suma y pertenece a $\mathfrak{g}$ ya que es la derivada en $t = 0$ del elemento $c(t) = I \in G$. Todo elemento $c'(0)$ posee opuesto $-c'(0) \in \mathfrak{g}$ debido a que sea $d(t) = c(-t)$ tenemos que $d(t) \in G$ y $d'(t) = -c'(-t)$ luego $d'(0) = -c'(0)$. Ahora vamos a comprobar que es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Sea $c'(0)$ un elemento de $\mathfrak{g}$ se tiene que $kc'(0) = b'(0)$ con $b(t) = c(kt)$. Vemos que $b(t)$ es suave por ser c suave y que $b(0) = c(0) = I$, por lo que $kc'(0) \in \mathfrak{g}$. Las propiedades del producto por escalares se ven de manera obvia. Hemos probado así que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial.

En segundo lugar, comprobemos que $[X, Y] = XY - YX$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$ es un corchete de Lie en $\mathfrak{g}$. Empezaremos por ver que $[X, Y]$ está en $\mathfrak{g}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Sabemos que G es cerrado por la conjugación de grupo, por lo tanto sea sea $c : \mathbb{R} \to G$ una curva suave tal que $c(0) = I$, tenemos que $gc(t)g^{-1} \in G$ para todo $g \in G$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Como $[gc(t)g^{-1}]\Big|_{t=0} = I$, entones $(gc(t)g^{-1})'\Big|_{t=0} = gc'(0)g^{-1} \in \mathfrak{g}$, luego $\mathfrak{g}$ es cerrado bajo las aplicaciones $\mathrm{Ad}(g) : X \mapsto gXg^{-1}$ para todo $g \in G$. Dados $X = c'(0), Y \in \mathfrak{g}$, consideramos la función $t \mapsto \mathrm{Ad}(c(t))(Y)$ que va de $\mathbb{R}$ a $\mathfrak{g}$. Esta función es suave ya que $c(t)$ es suave y G es un grupo de Lie. Por la definición de derivada y usando que $c(0) = 1$ tenemos

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{Ad}(c(t))(Y)]\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{Ad}(c(h))(Y) - Y].$$

Por lo visto anteriormente tenemos que $\mathrm{Ad}(c(h))(Y) - Y$ esta en $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, al ser $\mathfrak{g}$ cerrado topológicamente sabemos que el límite está en $\mathfrak{g}$. Calculamos la parte izquierda de la igualdad. Para ello debemos saber que $\frac{d}{dt}(c(t)^{-1}) = -c(t)^{-1}c'(t)c(t)^{-1}$. Esto es debido a que $c(t)c(t)^{-1} = I$, luego $\frac{d}{dt}(c(t)c(t)^{-1}) = 0$. Derivando obtenemos $c'(t)c(t)^{-1} + c(t)(c(t)^{-1})' = 0$. Calculamos, ahora sí, la derivada.

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{Ad}(c(t))(Y)]\Big|_{t=0} = [c'(t)Yc(t)^{-1} - c(t)Yc(t)^{-1}c'(t)c(t)^{-1}]\Big|_{t=0} =$$

$$c'(0)Y - Yc'(0) = XY - YX = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

Es fácill ver que $[X, Y]$ es lineal, satisface la Identidad de Jacobi y que se tiene que $[X, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$. Concluimos así que el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$ es un álgebra de Lie. □

Proposición B.2. *Sean X, Y matrices complejas de orden n y t una variable real. Entonces,*

(1) $e^X e^Y = e^{X+Y}$ *si X e Y conmutan.*
(2) e^X *es no singular.*
(3) $\det(e^X) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$ *siendo $\mathrm{Tr}(X)$ la traza de la matriz X.*
(4) $\frac{d}{dt}(e^{tX}) = Xe^{tX}$.
(5) $t \mapsto c(t) = e^{tX}$ *es una curva suave en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ cumpliendo $c(0) = I$.*
(6) $X \mapsto e^X$ *es una función suave de $\mathbb{R}^{2n^2}$ en sí mismo.*

Demostración. Para demostrar estas propiedades hay que comprobar que la serie e^X es una serie convergente, es decir, que cada elemento de la matriz e^X es convergente. Definimos $||X|| = \sup_{|y|\le 1}(|Xy|)$ siendo $|y|$ y $|Xy|$ normas euclideas en $\mathbb{R}^{2n}$. Tenemos que

$$\Big|\Big| \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{1}{N!}A^N \Big|\Big| \le \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{1}{N!}||A^N|| \le \sum_{N=N_1}^{N_2} \frac{1}{N!}||A||^N.$$

La expresión del sumatorio del lado derecho de la desigualdad tiende a 0 si N_1, N_2 tienden a ∞ ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Por el criterio de Cauchy, la series de la parte derecha es convergente, y por lo tanto, la serie de la parte izquierda también lo es, luego la serie e^X es convergente. A continuación demostraremos las propiedades (3), (4) y (5). Para las propiedades (1), (2), (6) nos referimos a [7, Prop. 0.11].

(3) Toda matriz compleja X es similar a una Y triangular superior, luego puede escribirse como $X = AYA^{-1}$ con Y triangular superior. Por lo tanto

$$\det(e^X) = \det(e^{AYA^{-1}}) = \det(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(AYA^{-1})^N) = \det(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}AY^NA^{-1}) =$$

$$\det(Ae^Y A^{-1}) = \det(e^Y).$$

Como Y es una matriz triangular superior, e^Y también lo es. Esto es debido a que el producto de triangulares superiores es triangular superior, luego se satisface que $\det(e^Y) = \prod_i (e^Y)_{i,i} = e^{\sum_i (Y)_{i,i}} = e^{\mathrm{Tr}(Y)} = e^{\mathrm{Tr}(X)}$.

(4) Procedemos al cálculo de $\frac{d}{dt}(e^{tX}) = \frac{d}{dt}(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(tX)^N))$. Como la serie es convergente, podemos pasar la derivada dentro del sumatorio. Luego

$$\frac{d}{dt}(e^{tX}) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{d}{dt}(\frac{1}{N!}(tX)^N) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} N (tX)^{N-1} X =$$

$$X \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(N-1)!}(tX)^{N-1} = Xe^{tX}.$$

(5) Por la visto en (4), la funcion $t \mapsto c(t) = e^{tX}$ es una curva suave de $\mathbb{R}$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ya que es infinitamente derivable y debido a (3), $\det(e^{tX}) = e^{\mathrm{Tr}(tX)}$ que es distinto de 0 para todo $t \in \mathbb{R}$. Para finalizar, comprobamos que se satisface $c(0) = e^{0X} = e^0 = I$. □

Lemma B.3. *Sea $c(t)$ una curva suave de $\mathbb{R}$ en las matrices de orden n sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), tal que $c(0) = I_n$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}[\det(c(t))]\Big|_{t=0} = \mathrm{Tr}(c'(0)).$$

Demostración. Sea X una matriz de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$, desarollamos su determinante. Tenemos que $\det(X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} X_{1,j} \cdot \det(X[1,j])$ siendo $X_{i,j}$ el elemento de X en la posición i, j y $X[i,j]$ la matriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j. Procedemos al cálculo.

$$\frac{d}{dt}[\det(c(t))]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} c(t)_{1,j} \cdot \det(c(t)[1,j])]\Big|_{t=0} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (c'(0)_{1,j} \cdot \det(c(0)[1,j]) + c(0)_{1,j} \cdot \frac{d}{dt}[\det(c(t)[1,j])]\Big|_{t=0}) =$$

$$c'(0)_{1,1} + \frac{d}{dt}[\det(c(t)[1,1])]\Big|_{t=0}.$$

En la segunda igualdad se ha introducido la derivada dentro del sumatorio y se ha aplicado la fórmula de derivada del producto. En la tercera se ha utilizado que $\det(c(0)[1,j])$ y $c(0)_{1,j}$ son 0 excepto en el caso $j = 1$. Aplicando el desarrollo anterior a $\frac{d}{dt}[\det(c(t)[1,1])]\Big|_{t=0}$ y así sucesivamente, se llega a que

$$\frac{d}{dt}[\det(c(t))]\Big|_{t=0} = c'(0)_{1,1} + c'(0)_{2,2} + ... + c'(0)_{n,n} = \mathrm{Tr}(c'(0)).$$

□

Proposición B.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Por la definición de corchete de Lie de dos subespacios, tenemos que $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$. Fijado un $X \in \mathfrak{h}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_2$ y $Z \in \mathfrak{g}$, usando la identidad de Jacobi y la anticonmutatividad $[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] + [[X,Z],Y]$, que pertenece a $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ por ser $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ ideales. Todo elemento W de $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ puede ser expresado como $W = [X_1, Y_1] + ... + [X_n, Y_n]$ con $X_i \in \mathfrak{h}_1$ y $Y_i \in \mathfrak{h}_2$. Por lo tanto, sea $A \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$[W, A] = [[X_1, Y_1] + ... + [X_n, Y_n], A] = [[X_1, Y_1], A] + ... + [[X_n, Y_n], A].$$

Debido al resultado anterior, cada sumando está en $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$, luego $[W, A] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$. Queda así comprobado que $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ es un ideal. □

Proposición B.5. *El centro de un álgebra de Lie es un ideal.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, veamos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal. Comprobemos que es un subespacio. Es obvio que el elemento 0 pertenece a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Sean $X, Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y $a, b \in \mathbb{K}$, $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[X, Z] = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$, luego $aX + bY \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Así, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un subespacio. Como $0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $[\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] = \{0\} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y por lo tanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un ideal. □

Teorema B.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces el espacio vectorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dotado del corchete de Lie,*

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ &(\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + Y) \mapsto [\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + Y] = \mathfrak{h} + [X, Y] \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, es un álgebra de Lie.

Demostración. Para ver que esta operación satisface la definición de corchete de Lie tenemos que comprobar que está bien definida, que es lineal en sus dos variables, que satisface $[\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + X] = 0$ para todo $\mathfrak{h} + X \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ y que cumple la identidad de Jacobi. En primer lugar vamos a comprobar su correcta definición, es decir, queremos ver que si $\mathfrak{h} + X = \mathfrak{h} + X'$ y $\mathfrak{h} + Y = \mathfrak{h} + Y'$ entonces $\mathfrak{h} + [X, Y] = \mathfrak{h} + [X', Y']$. Como X y X' pertenecen a la misma clase de equivalencia, tenemos que $X' = A + X$ para algún $A \in \mathfrak{h}$. Lo mismo se aplica para Y e Y', $Y' = B + Y$ para un $B \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto $[X', Y'] = [A + X, B + Y] = [A, B] + [A, Y] + [X, B] + [X, Y]$. Como $\mathfrak{h}$ es un ideal, $[A, B], [A, Y], [X, B] \in \mathfrak{h}$ luego $[X', Y'] \in \mathfrak{h} + [X, Y]$ y por lo tanto se satisface $\mathfrak{h} + [X, Y] = \mathfrak{h} + [X', Y']$. La bilinealidad viene dada por la bilinealidad del corchete en $\mathfrak{g}$. Por otro lado, fijado un $\mathfrak{h} + X \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, vemos que $[\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + X] = \mathfrak{h} + [X, X] = \mathfrak{h} + 0$, que es el elemento nulo del espacio vectorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Para verificar la Identidad de Jacobi, fijados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$[[\mathfrak{h} + X, \mathfrak{h} + Y], \mathfrak{h} + Z] = [\mathfrak{h} + [X, Y], \mathfrak{h} + Z] = \mathfrak{h} + [[X, Y], Z].$$

Usando este hecho y que la identidad de Jacobi se satisface en $\mathfrak{g}$, queda probado que también se satisface en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. □

Teorema B.7. *Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie y $\theta : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ un morfismo de álgebras de Lie sobreyectivo, entonces* $\mathrm{Ker}(\theta)$ *es un ideal de $\mathfrak{g}_1$ y θ se puede factorizar como*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "q"'] & \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(\theta) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

donde q es un morfismo de álgebras de Lie y f es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Sabemos por la teoría de espacios vectoriales que q, f son un morfismo y un isomorfismo de espacios vectoriales, respectivamente. Además $\mathrm{Ker}(\theta)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}_1$. Un elemento $Z \in [\mathrm{Ker}(\theta), \mathfrak{g}_1]$ es de la forma $[X_1, Y_1]+...+[X_n, Y_n]$ con $X_i \in \mathrm{Ker}(\theta)$ y $Y_i \in \mathfrak{g}_1$. Tenemos que

$$\theta(Z) = \theta([X_1, Y_1] + ... + [X_n, Y_n]) = [\theta(X_1), \theta(Y_1)] + ... + [\theta(X_n), \theta(Y_n)] =$$

$$[0, \theta(Y_1)] + ... + [0, \theta(Y_n)] = 0,$$

luego $[\mathrm{Ker}(\theta), \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathrm{Ker}(\theta)$ y por lo tanto $\mathrm{Ker}(\theta)$ es un ideal. Como es un ideal, podemos dotar al cociente de la estructura de álgebra de Lie descrita en el teorema 2.18. Por cómo hemos definido el corchete de Lie en $\mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(\theta)$ tenemos que se satisface $q([X, Y]) = \mathrm{Ker}(\theta) + [X, Y] = [\mathrm{Ker}(\theta) + X, \mathrm{Ker}(\theta) + Y] = [q(X), q(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, luego q es un morfismo de álgebras de Lie. Por último, f es un isomorfismo de álgebras de Lie ya que

$$f([\mathrm{Ker}(\theta) + X, \mathrm{Ker}(\theta) + Y]) = f(\mathrm{Ker}(\theta) + [X, Y]) = \theta([X, Y]) =$$

$$[\theta(X), \theta(Y)] = [f(\mathrm{Ker}(\theta) + X), f(\mathrm{Ker}(\theta) + Y)].$$

$\square$

Teorema B.8. *Toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble.*

Demostración. En primer lugar demostraremos que $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^n] \subseteq \mathfrak{g}^{m+n}$ por inducción en n. Para el caso base $n = 1$ tenemos que $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^1] = [\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{m+1} \subseteq \mathfrak{g}^{m+1}$. Supongamos $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^n] \subseteq \mathfrak{g}^{m+n}, \forall m \in \mathbb{N}$. Sea $X \in \mathfrak{g}^m, Y \in \mathfrak{g}^n, Z \in \mathfrak{g}$, por la identidad de Jacobi $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. Usando la anticonmutatividad se tiene que $[[X, Y], Z] - [[X, Z], Y] = -[[Y, Z], X] = [X, [Y, Z]]$. Por hipótesis $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{m+n}$, como $Z \in \mathfrak{g}$ entonces $[[X, Y], Z] \in \mathfrak{g}^{m+n+1}$. Por otro lado $[X, Z] \in \mathfrak{g}^{m+1}$ y $Y \in \mathfrak{g}^n$, luego aplicando otra vez la hipótesis $[[X, Z], Y] \in \mathfrak{g}^{m+n+1}$. Debido a esto, $[[X, Y], Z] - [[X, Z], Y]$ está en $\mathfrak{g}^{m+n+1}$ y por lo tanto también lo está $[X, [Y, Z]]$, así que $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^{n+1}] \subseteq \mathfrak{g}^{m+n+1}$. Queda así demostrado que $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^n] \subseteq \mathfrak{g}^{m+n}$. Demostraremos ahora otro resultado por inducción en n, este es $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{2^n}$. Para el caso base $n = 0$ tenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \subseteq \mathfrak{g}^{2^0} = \mathfrak{g}$. Supongamos $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{2^n}$. Por definición $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$, que por hipótesis está contenido en $[\mathfrak{g}^{2^n}, \mathfrak{g}^{2^n}]$. Por el restultado que hemos probado en la primera parte de la demostración, $[\mathfrak{g}^{2^n}, \mathfrak{g}^{2^n}] \subseteq [\mathfrak{g}^{2^n+2^n}] = \mathfrak{g}^{2^{n+1}}$. En resumen, $\mathfrak{g}^{(n+1)} \subseteq \mathfrak{g}^{2^{n+1}}$, luego hemos demostrado por inducción este segundo resultado. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente, $\mathfrak{g}^i = \{0\}$ para algún i. Como la cadena de subespacios $\mathfrak{g}^m$ es descendente, para un j tal que $2^j > i$ tendremos $\mathfrak{g}^{2^j} = \{0\}$. Fijado un j de estas características y aplicando el resultado demostrado, $\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}^{2^j}$, obtenemos $\mathfrak{g}^{(j)} = \{0\}$ y por tanto $\mathfrak{g}$ es resoluble. $\square$

Proposición B.9. *Sea $\mathfrak{h}$ una súbalgebra de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ y si $\mathfrak{h}$ es un ideal en otra subálgebra $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Demostración. Empecemos comprobando que $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Es cerrado bajo la multiplicación por escalares y bajo la suma, por serlo $\mathfrak{h}$ y por ser el corchete lineal, luego es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ y $Z \in \mathfrak{h}$, veamos que $[[X,Y],Z] \in \mathfrak{h}$. Por la identidad de Jacobi y la anticonmutatividad tenemos que $[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$. Como $X, Y \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, cada sumando pertenece a $\mathfrak{h}$, por lo tanto $[[X,Y],Z] \in \mathfrak{h}$. Así $[\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}), \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. El hecho de que $\mathfrak{h}$ sea un ideal en $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ se ve de manera inmediata por la definición de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. También es inmediato que si $\mathfrak{h}$ es un ideal en otra subálgebra $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. $\square$