

## Métodos Numéricos - LCC 2022

Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Brian Luporini

### Práctica 3: Resolución de ecuaciones no lineales

---

- 1) Determine gráficamente valores aproximados de las primeras tres raíces positivas de la función  $f(x) = \cos(x) \cosh(x) + 1$ . (Recordar que  $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ ).
- 2) Usando el método de la bisección, hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones con una precisión de  $10^{-2}$

a)  $\sin x = \frac{x^2}{2}$

b)  $e^{-x} = x^4$

c)  $\log x = x - 1$ .

- 3) Aplicar el método de la secante para hallar la raíz no nula de  $f(x) = \frac{x^2}{4} - \sin x$ .
- 4) ¿Qué se obtiene al aplicar reiteradamente a un valor cualquiera la función coseno? Formalizar lo que sucede.
- 5) Consideramos la iteración  $x_{k+1} = 2^{x_k-1}$  para resolver la ecuación  $2x = 2^x$ . Determinar para que valores iniciales  $x_0$  la iteración converge y en ese caso cual es el límite.
- 6) Convertir la ecuación  $x^2 - 5 = 0$  en el problema de punto fijo  $x = x + c(x^2 - 5) := g(x)$ , con  $c$  constante positiva. Elegir un valor adecuado de  $c$  que asegure la convergencia de  $x_{n+1} = x_n + c(x_n^2 - 5)$  a  $z = -\sqrt{5}$ .
- 7) Dada la profundidad  $h$  y el período  $T$  de una ola, su longitud de onda  $l$  surge de la relación de dispersión  $w^2 = gd \tanh(hd)$ , donde  $w = \frac{2\pi}{T}$  es una pulsación,  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $d = \frac{2\pi}{l}$  es el número de onda. Conociendo  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$  y  $h = 4 m$ , se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con  $T = 5 s$ . Construir un algoritmo en Scilab que efectúe los siguientes cálculos:
  - a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con un dígito de precisión, partiendo de  $d = 1$ .
  - b) Utilizar el método de Newton para calcular la solución con 4 dígitos de precisión, partiendo del resultado obtenido en a).
- 8) Se quiere calcular la solución de la ecuación  $e^x = 3x$ , usando la iteración simple de punto fijo con diferentes funciones de iteración:

i)  $g_1(x) = \frac{e^x}{3}$

ii)  $g_2(x) = \frac{e^x - x}{2}$

iii)  $g_3(x) = \log(3x)$

iv)  $g_4(x) = e^x - 2x$

¿Cuáles son útiles para calcular la solución de la ecuación?

- 9) Efectuar cinco iteraciones del método de Newton para el siguiente sistema:

$$0 = 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y$$

$$0 = 2xy + e^x \sin y$$

utilizando como valor inicial  $x_0 = -1$  y  $y_0 = 4$ .

- 10) Resolver el sistema

$$0 = x^2 + xy^3 - 9$$

$$0 = 3x^2y - 4 - y^3$$

usando el método de Newton para cada uno de los siguientes valores iniciales:

a) (1.2, 2.5)

b) (-2, 2.5)

c) (-1.2, -2.5)

d) (2, -2.5).

- 11) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ , una función definida en el dominio bidimensional. Las siguientes condiciones son suficientes para un mínimo local estricto de  $f$ :

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = \mathbf{0} \quad (\text{gradiente nulo})$$

$$(ii) \quad \text{matriz hessiana } \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \text{ definida positiva.}$$

Se desea hallar los valores de  $x_1$  y  $x_2$  que minimizan la función

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2}.$$

- Partiendo del punto inicial  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1]^T$ , hallar mediante el método de Newton un punto que satisfaga la condición (i). Utilizar como criterio de finalización  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 \leq 10^{-12}$ .
  - Corroborar que el punto hallado en el ítem a) es un mínimo (local) de  $f$  verificando el cumplimiento de la condición (ii).
- 12) La presión requerida para sumergir un objeto grande y pesado en un terreno suave y homogéneo que se encuentra sobre una base dura, puede predecirse a partir de la presión requerida para sumergir objetos más pequeños en el mismo suelo.

En particular la presión  $p$  necesaria para sumergir una lámina circular de radio  $r$  una distancia  $d$  en un terreno suave, donde la base dura yace a una distancia  $D > d$ , puede aproximarse por una ecuación de la forma

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

donde  $k_i, i = 1, 2, 3$  dependen de  $d$ , pero no de  $r$ .

Recordar que la presión se obtiene de dividir la fuerza aplicada y el área correspondiente.

- Encontrar los valores de  $k_i, i = 1, 2, 3$ , si se supone que una lámina circular de radio 1 pulgada requiere una presión de 10 libras/pulgada<sup>2</sup>, para sumergirse 1 pie en un terreno suave, una lámina de radio 2 pulgadas requiere una presión de 12 libras/pulgada<sup>2</sup> para sumergirse 1 pie, y una lámina de 3 pulgadas de radio requiere 15 libras/pulgada<sup>2</sup> de presión para sumergirse esa distancia.
- Usando los cálculos realizados en a), predecir el radio mínimo de una lámina circular que deberá sostener una carga de 500 libras de fuerza sumergiéndose menos de 1 pie.