

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
(FCEIA-UNR)

MÉTODOS NUMÉRICOS

Prof. Alejandro G. Marchetti

Unidad V

Sistemas de Ecuaciones Lineales Métodos Iterativos



Octubre de 2022

Los métodos iterativos generan una sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ que converge a la solución del sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Estos métodos son eficientes para resolver sistemas lineales de grandes dimensiones, en especial, sistemas lineales dispersos como los que se presentan en los análisis de circuitos y en la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Para n grande, la eliminación de Gauss requiere aproximadamente $\frac{2}{3}n^3$ operaciones aritméticas, mientras que los métodos iterativos requieren del orden de n^2 operaciones para obtener una solución suficientemente precisa.

Comenzaremos describiendo los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel, métodos clásicos que datan de fines del siglo XVIII.

1. Método de Jacobi

El método de Jacobi es un método de reemplazos simultáneos. Empezemos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Despejando x_j de la ecuación j :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{9} (b_1 - x_2 - x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{10} (b_2 - 2x_1 - 3x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{11} (b_3 - 3x_1 - 4x_2) \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^\top$ una estimación inicial de \mathbf{x} . El método de Jacobi define la iteración

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{9} (b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10} (b_2 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{11} (b_3 - 3x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)}) \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En forma general, el sistema a resolver es $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Luego, la ecuación i -ésima es

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

de donde podemos despejar

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right)$$

El método de Jacobi propone como iteración

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad k \geq 0, \quad (1)$$

siendo estas las ecuaciones que se emplean para programar el método.

A continuación procederemos a reescribir el sistema de ecuaciones (1) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Sea $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz diagonal de A . Luego

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad (I - D^{-1}A) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, el sistema de ecuaciones (2) nos queda:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}\mathbf{b} + (I - D^{-1}A)\mathbf{x}^{(k)}. \quad (3)$$

2. Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es un método de reemplazos sucesivos.

Ejemplo 2 Consideremos nuevamente el sistema lineal del Ejemplo 1. Esta vez utilizamos en forma inmediata la información de cada nuevo componente x_i calculado:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{9} (b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10} (b_2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{11} (b_3 - 3x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}) \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En forma general, el método de Gauss-Seidel propone como iteración:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^{(k)} \right) \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

siendo estas las ecuaciones que se emplean para programar el método.

Procederemos ahora a escribir el sistema de ecuaciones (4) en forma matricial. Primero, reescribimos (4) como

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde la primera sumatoria se anula para $i = 1$, y la segunda sumatoria se anula para $i = n$. A su vez, esta última ecuación se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Por conveniencia, introducimos la descomposición $A = L + D + U$, donde L es la matriz triangular inferior de A que no incluye la diagonal, D es la diagonal de A , y U es la matriz triangular superior de A que no incluye la diagonal

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, el sistema de ecuaciones (5) se puede escribir como

$$(L + D)\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(k)}. \quad (6)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= (L + D)^{-1}\mathbf{b} - (L + D)^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} \\ &= (L + D)^{-1}\mathbf{b} - (L + D)^{-1}(A - (L + D))\mathbf{x}^{(k)}, \end{aligned} \quad (7)$$

de donde obtenemos

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (L + D)^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - (L + D)^{-1}A)\mathbf{x}^{(k)}. \quad (8)$$

3. Esquema General de los Métodos Iterativos

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y el sistema a resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sea $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular. Luego

$$N\mathbf{x} = N\mathbf{x} - A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

El proceso iterativo es de la forma

$$N\mathbf{x}^{(k+1)} = (N - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

o bien

$$N\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad P = N - A, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo general, N se elige tal que el sistema $N\mathbf{z} = \mathbf{f}$ sea fácil de resolver. Para una matriz general $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el método de Jacobi se define con

$$N = D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el método de Gauss-Seidel se define con

$$\mathbf{N} = \mathbf{L} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para aplicar el método iterativo, la matriz \mathbf{N} debe ser no singular. Siendo \mathbf{A} no singular, se puede lograr que \mathbf{N} sea no singular intercambiando las filas y/o columnas de \mathbf{A} de ser necesario.

4. Condiciones de Convergencia

Vimos que los métodos iterativos se pueden escribir en forma vectorial como

$$\mathbf{N}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{N} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{N}^{-1}((\mathbf{N} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \quad (9)$$

Por otra parte, la solución del sistema cumple

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{b} \quad (10)$$

Introduciendo el error $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$, y restando (9) de (10), obtenemos

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{e}^{(k)} \quad (11)$$

Teorema 1 Si $\|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\| < 1$, entonces la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, definida por el proceso iterativo (9), converge a la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier estimación inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Tomando la norma del error (11) tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| &= \|(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\| \|\mathbf{e}^{(k)}\| \\ &= \|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\| \|(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{e}^{(k-1)}\| \\ &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{e}^{(k-1)}\| \leq \dots \\ &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\|^{k+1} \|\mathbf{e}^{(0)}\| \end{aligned}$$

Siendo $\|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\| < 1$, se cumple que $\|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\|^{k+1} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, y se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| = 0$$

es decir, $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$ cuando $k \rightarrow \infty$. □

La condición $\|\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\| < 1$ representa una condición suficiente de convergencia que es válida para cualquier norma matricial inducida.

Teorema 2 (Estabilidad asintótica de un proceso iterativo lineal) Sea $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El proceso iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)}$ converge a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $\rho(\mathbf{B}) < 1$.

Corolario 1 *La fórmula de iteración*

$$\mathbf{N}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{N} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

dará lugar a una sucesión que converge a la solución de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}) < 1$.

Demostración. La demostración surge de aplicar el Teorema 2 al proceso iterativo dado por la ecuación (11). \square

La condición de que el radio espectral de la matriz del método iterativo, $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})$, sea menor que 1, representa una condición necesaria y suficiente de convergencia.

Consideraremos ahora el caso especial de matrices diagonalmente dominantes.

Definición 1 *La matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalmente dominante si*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

Teorema 3 *Si la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalmente dominante, luego la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ generada por el método de Jacobi converge a la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier $\mathbf{x}^{(0)}$ inicial.*

Demostración. El método de Jacobi usa $\mathbf{N} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, que suponemos invertible. Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Veamos la forma que tiene la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \hline 1 & & & 1 & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{11}}{a_{11}} & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} & \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{array}$$

Luego

$$\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

y se tiene que

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad (13)$$

Por otra parte, siendo \mathbf{A} diagonal dominante,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

Luego,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Combinando (13) y (14), tenemos

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\|_{\infty} < 1$$

Luego, por el Teorema 1, el método de Jacobi converge a la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. \square

Teorema 4 Si la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal dominante, luego la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ generada por el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para cualquier $\mathbf{x}^{(0)}$ inicial.

Demostración. Utilizaremos la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$, definida anteriormente. Demostraremos que si \mathbf{A} es diagonal dominante se cumple que $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}) < 1$, con $\mathbf{N} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$, es decir, se cumple la condición necesaria y suficiente de convergencia para el método de Gauss-Seidel.

Sea λ un autovalor de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})$ y \mathbf{v} el autovector asociado tal que $\|\mathbf{v}\|_{\infty} = 1$. Nos preguntamos si $|\lambda| < 1$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{N}(\mathbf{I} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{N}\mathbf{v} \\ \mathbf{N}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{N}\mathbf{v} \\ -\mathbf{U}\mathbf{v} &= \lambda(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{v} \end{aligned} \quad (15)$$

Veamos la forma que tiene el vector $\mathbf{U}\mathbf{v}$

$\mathbf{U}\mathbf{v}$								v_1 v_2 \vdots v_i \vdots v_n
0	a_{12}	\dots	\dots	\dots	\dots	a_{1n}	$\sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$	
0	0	a_{23}	\dots	\dots	\dots	a_{2n}	\vdots	
\vdots		\ddots	\ddots			\vdots	\vdots	
\vdots			\ddots	$a_{i,i+1}$	\dots	a_{in}	$\sum_{j=i+1}^n a_{ij}v_j$	
\vdots			\ddots	\ddots	\ddots	\vdots	\vdots	
\vdots				\ddots	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}$	$a_{n-1,n}v_n$	
0	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	0	0	

Veamos ahora la forma que tiene el vector $(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{v}$

$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{v}$								v_1 v_2 \vdots v_i \vdots v_n
a_{11}	0	\dots	\dots	\dots	\dots	0	$a_{11}v_1$	
a_{21}	a_{22}	0				\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\ddots	\ddots			\vdots	\vdots	
a_{i1}	a_{i2}	\dots	a_{ii}	0		\vdots	$\sum_{j=1}^i a_{ij}v_j$	
\vdots				\ddots	\ddots	\vdots	\vdots	
\vdots					\ddots	0	\vdots	
a_{n1}	a_{n2}	\dots	\dots	\dots	\dots	a_{nn}	$\sum_{j=1}^n a_{nj}v_j$	

Luego, el sistema de ecuaciones (15) se puede escribir como

$$-\sum_{j=i+1}^n a_{ij}v_j = \lambda \sum_{j=1}^i a_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, n$$

de donde

$$\lambda a_{ii}v_i = -\lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, n$$

Como $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i| = 1$, luego existe un índice m tal que $|v_m| = 1 \geq |v_j|, \forall j \neq m$.

$$\lambda a_{mm}v_m = -\lambda \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj}v_j - \sum_{j=m+1}^n a_{mj}v_j$$

Tomando el valor absoluto,

$$\begin{aligned} |\lambda||a_{mm}| &\leq |\lambda| \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| |v_j| + \sum_{j=m+1}^n |a_{mj}| |v_j| \\ &\leq |\lambda| \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| + \sum_{j=m+1}^n |a_{mj}| \end{aligned}$$

Luego

$$|\lambda| \left(|a_{mm}| - \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| \right) \leq \sum_{j=m+1}^n |a_{mj}| \quad (16)$$

Por otra parte, siendo \mathbf{A} diagonal dominante,

$$|a_{mm}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n |a_{mj}| = \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| + \sum_{j=m+1}^n |a_{mj}| \quad (17)$$

Combinando (16) y (17) obtenemos

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=m+1}^n |a_{mj}|}{|a_{mm}| - \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}|} < 1$$

Con lo cual queda demostrado que el radio espectral de $(\mathbf{I} - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{A})$ es menor que uno, y por el Corolario 1, el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. \square

En algunos casos se puede lograr que la matriz de coeficientes del sistema (matriz \mathbf{A}) quede con diagonal dominante intercambiando las filas y/o columnas de \mathbf{A} .

5. Métodos de Relajación

El procedimiento de Gauss-Seidel se suele modificar como sigue:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)} \right) \\ x_i^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ x_n^{(k+1)} &= (1 - \omega)x_n^{(k)} + \frac{\omega}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

donde ω es el *factor de escala*. Podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $\omega = 1$, tenemos el método de Gauss-Seidel.
- Si $0 < \omega < 1$, se trata de un **método de subrelajación**. Estos métodos se pueden usar para obtener la convergencia de algunos sistemas que no son convergentes con el método de Gauss-Seidel.

- Si $\omega > 1$, se trata de un **método de sobrerelajación**. Estos métodos se designan con la abreviatura **SOR** y se emplean para acelerar la convergencia en sistemas para los que el método de Gauss-Seidel converge.

Podemos reformular la ecuación (18) como

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = (1 - \omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \omega b_i \quad (19)$$

Utilizando la descomposición de \mathbf{A} como $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$, utilizada en el Teorema 4, reescribimos (19) en forma matricial:

$$(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})\mathbf{x}^{(k+1)} = [(1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]\mathbf{x}^{(k)} + \omega\mathbf{b}$$

Si $(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}$ existe, entonces podemos expresar el método SOR de la forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_\omega$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\omega &= (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}] \\ \mathbf{c}_\omega &= \omega(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Luego, el error del método SOR está determinado por

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{T}_\omega \mathbf{e}^{(k)}$$

Por el Teorema 2, el método SOR converge a la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para todo vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ si y solo si $\rho(\mathbf{T}_\omega) < 1$.

Para algunas matrices sencillas se puede determinar el valor de ω que minimiza $\rho(\mathbf{T}_\omega)$, es decir, se puede elegir ω de manera óptima. En el siguiente teorema consideraremos el caso particular de las matrices definidas positivas y tridiagonales.

Teorema 5 Si \mathbf{A} es definida positiva y tridiagonal, entonces la elección óptima de ω para el método SOR es

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(\mathbf{T}_J)]^2}}$$

donde $\mathbf{T}_J = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})$ es la matriz del método de Jacobi.

Bibliografía

1. Kendall E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, 1989.
2. Richard L. Burden y J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, Séptima edición, Cengage Learning, México D.F., 2009.