Práctica 6: Aproximación de autovalores

Métodos Numéricos 2021

Brian Luporini

21 de Octubre de 2021

Ejercicio 2

(a) Aplicar el teorema de Gerschgorin para mostrar que las raíces r de $p(\lambda)$ verifican que

$$|r| \leq 1 \quad \text{o} \quad |r + a_{n-1}| \leq |a_0| + \ldots + |a_{n-2}|.$$

Ejercicio 2

(a) Aplicar el teorema de Gerschgorin para mostrar que las raíces r de $p(\lambda)$ verifican que

$$|r| \leq 1 \quad \text{o} \quad |r + a_{n-1}| \leq |a_0| + \ldots + |a_{n-2}|.$$

Sea

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0.$$

Para poder aplicar el teorema de Gerschgorin debemos buscar una matriz A de tamaño $n \times n$ de manera tal que las raíces de $p(\lambda)$ sean sus autovalores.

Definimos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vamos a probar que p_A, el polinomio característico de A, verifica $p_A(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$. En efecto, consideremos la matriz

$$B = A - \lambda \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Vamos a generar ceros en la última fila empezando de derecha a izquierda. Esto es, en un primer paso $E_n \leftarrow E_n + (a_{n-1} + \lambda) E_{n-1}$. De esta operación obtenemos la matriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} - a_{n-1}\lambda - \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos hacer lo mismo para los otros coeficientes tomando las operaciones

$$E_n \leftarrow E_n + (\lambda^i + \sum_{k=1}^{i} a_{n-k}\lambda^{i-k})E_{n-i}, \quad i = 2, ..., n$$

para obtener la matriz

$$B_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -p(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, intercambiamos las filas $E_n \leftrightarrow E_{n-1}$; $E_{n-1} \leftrightarrow E_{n-2}$; ...; $E_2 \leftrightarrow E_1$, se tiene

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} -p(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz B_{n+1} es triangular inferior y su determinante verifica $\det(B_{n+1}) = -p(\lambda)$. Ahora, obtuvimos B_{n+1} de $A - \lambda\mathrm{Id}$ por operaciones elementales y solo el intercambio de filas cambia de determinante de la matriz (le cambia el signo). Entonces, se tiene

$$\det(A - \lambda\mathrm{Id}) = (-1)^{n-1}\det(B_{n+1}).$$

Por lo tanto,

$$p_A(\lambda) = (-1)^n p(\lambda).$$

Luego, las raíces r de $p(\lambda)$ son los autovalores de A. Por el teorema de Gerschgorin se tiene

$$|r| \leq 1 \quad \text{o} \quad |r + a_{n-1}| \leq |a_0| + \ldots |a_{n-2}|.$$