Ejercicios 4.1 - Página 88

1) $f(x) = x^3 + 1$ en $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^3 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h} =$$

$\lim_{h \to 0} h^2 = 0^2 = 0$. Por lo tanto la derivada de la función $f(x) = x^3 + 1$ en $x = 0$ es 0.

2) $f(x) = 2x$ para todo valor de x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} =$$

$\lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$. Por lo tanto la derivada de una función $f(x) = 2x$ es 2 para cualquier valor de x.

3) $f(x)$ en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Derivadas laterales}$$

NOTA

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} -h = 0$$

• Por lo tanto la derivada de la función en $x=0$ existe y es 0.

Actividad 4.2 - Página 90

a) $f(x) = 5x^3 + 2x + 8 \longrightarrow f'(x) = (5x^3)' + (2x)' + (8)'$ (regla 2)

$f'(x) = \overset{3.5}{15x^2} + 2x^0 + 0$ (reglas II, II y I)

$f'(x) = 15x^2 + 2.1 + 0$

$$\boxed{f'(x) = 15x^2 + 2}$$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5x^8 - \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' + (5x^8)' - (\sqrt{x})'$ (regla 2)

$f'(x) = (\frac{1}{3}x)^{\frac{1}{3}-1} + (8.5x)^7 - x^{\frac{1}{2}}$ (regla II)

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ (regla II)

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

c) $f(x) = \frac{\pi x^{\frac{2}{3}}}{x+1} \longrightarrow f'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ (regla 4)

$= \frac{(\pi x^{\frac{2}{3}})' \cdot (x+1) - (\pi x^{\frac{2}{3}}) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$ (regla 4)

$= \frac{(\pi \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1}) \cdot (x+1) - (\pi x^{\frac{2}{3}}) \cdot (x^0 + 0)}{(x+1)^2}$ (reglas II y I)

$$\boxed{= \frac{\left(\frac{2\pi}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot (x+1) - (\pi x^{\frac{2}{3}}) \cdot (1)}{(x+1)^2}}$$ $\longrightarrow$ simplificar el (1)?

HOJA Nº

FECHA

d) $f(x) = \dfrac{2x}{4x+1} \longrightarrow f'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ (regla 4)

$= \dfrac{2.(4x+1) - (2x).(4+0)}{(4x+1)^2}$ (reglas II y I)

• No puede terminar acá? $\longrightarrow$ $= \dfrac{2.(4x+1) - (2x).(4)}{(4x+1)^2}$

Sí ✓

$= \dfrac{8x+2-8x}{(4x+1)^2}$

$= \boxed{\dfrac{2}{(4x+1)^2}}$

e) $f(x) = (x^2-2).(x+4) \longrightarrow f'(x) = (f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$= (x^2-2)'.(x+4) + (x^2-2).(x+4)' = (2x^1).(x+4) + (x^2-2).((x)' + (4)') =$

$= (2x).(x+4) + (x^2-2).(1+0) = (2x).(x+4) + (x^2-2).(1) = (2x^2+8x) + (x^2-2) =$

$= 2x^2+8x+x^2-2 = \boxed{3x^2+8x-2}$

g) $f(x) = \ln(x-4)+1 \longrightarrow f'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x) = (\ln(x-4))' + (1)' =$

$= \left(\dfrac{1}{x-4}.(1-0)\right) + 0 = \dfrac{1}{x-4}.1 + 0 = \dfrac{1}{x-4} + 0 = \boxed{\dfrac{1}{x-4}}$

h) $f(x) = e^{x^2+1} - x \longrightarrow f'(x) = e^{x^2+1}.(x^2+1)' - (x)' = e^{x^2+1}.(2x+0) - 1 =$

$= \boxed{e^{x^2+1}.2x-1} =$

$2xe^{x^2+1} - 1$ • "Es costumbre escribir el término polinómico antes que el exponencial". $\longrightarrow$ No es obligatorio

NOTA

Derivada de $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} =$

$= \frac{(1)' \cdot (x) - (1) \cdot (x)'}{(x)^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$

pendiente $m = f'(1) = -\frac{1}{(1)^2} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$

Actividad 4.3 - Página 92

1) Encontrar la recta tangente a $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $(2,5)$

- Encontrar la pendiente

$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x \rightarrow \boxed{f'(x) = 2x}$

pendiente $m = f'(2) = 2 \cdot (2) = 4 \rightarrow \boxed{m = 4}$

- Escribir la ecuación de la recta tangente con el punto $(2,5)$ y $m = 4$

$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 5 = 4 \cdot (x - 2)$

$y - 5 = 4x - 8$

$y = 4x - 8 + 5$

$\boxed{y = 4x - 3} \rightarrow$ Formula $y = m \cdot x + b$

2) Encontrar la recta tangente a $h(x) = \ln(x-3)$ en el punto $(5, \ln(2))$

- Encontrar la pendiente

$h(x) = \ln(x-3) \rightarrow h'(x) = \frac{1}{x-3} \cdot 1 = \frac{1}{x-3} \rightarrow \boxed{h'(x) = \frac{1}{x-3}}$

pendiente $m = h'(5) = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$

- Escribir la ecuación de la recta tangente con el punto $(5, \ln(2))$ y $m = \frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - \ln(2) = \frac{1}{2} \cdot (x - 5)$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + \ln(2)}$

HOJA N°

FECHA

$$\lim_{\underbrace{x\to 2^+}_{x>2}} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 3>0}}{\underbrace{2-x}_{<0}} = -\infty$$

$x>2$

$0>2-x$

3) Determinar el o los puntos y la o las rectas tangentes con pendiente $m=5$ de la función $f(x) = x^3+2x+1$

. Averiguar derivada de la función

$$f(x) = x^3+2x+1 \longrightarrow f'(x) = (x^3)'+(2x)'+(1)' = 3.x^2+2.1+0 =$$

$$= 3x^2+2 \longrightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2+2}$$

. Hallar que valor o valores de x cumplen que $3x^2+2=5$

$$3x^2+2=5$$

$$3x^2=5-2$$

$$x^2=\frac{3}{3}$$

$$x^2=1$$

$$x=\sqrt{1} \longrightarrow \boxed{x=1}$$

$$\longrightarrow \boxed{x=-1}$$

La recta tangente tiene pendiente $m=5$ en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

. Determinar los puntos de la tangente para $x=-1$ y $x=1$

$y = f(1) = x^3+2x+1 = 1^3+2.1+1 = 1+2+1 = \boxed{4}$

$y = f(-1) = (-1)^3+2.(-1)+1 = -1-2+1 = \boxed{-2}$

NOTA

• Construir ecuaciones de las rectas tangentes

Recta en el punto P_1 (1,4)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 4 = 5.(x - 1)$$

$$y = 5x - 5 + 4$$

$$\boxed{y = 5x - 1}$$

Recta en el punto P_2 (-1,-2)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - (-2) = 5.(x - (-1))$$

$$y + 2 = 5(x + 1)$$

$$y = 5x + 5 - 2$$

$$\boxed{y = 5x + 3}$$

4) Determinar el punto y la recta tangente con pendiente $m = 1$ de la función $f(x) = e^x + 2$.

• Averiguar derivada de la función

$$f(x) = e^x + 2 \rightarrow f'(x) = (e^x)' + (2)' = e^x . 1 + 0 = \boxed{e^x}$$

• Hallar valor de x que cumple $e^x = 1$

$f'(x) = 1$

$e^x = 1$

$\boxed{x = 0}$

• Determinar el punto de la tangente para $x = 0$

$f(0) = e^0 + 2 = 1 + 2 = \boxed{3}$

• Construir ecuación de la recta tangente (0,3)

$y - y_1 = m.(x - x_1) =$

$y - 3 = 1.(x - 0)$

$\boxed{y = x + 3}$

HOJA Nº

FECHA

Actividad 4.4 - Página 94

1) Hallar $f''(x)$ de las funciones a) b) d) g) y l)

a) $f(x) = 5x^3 + 2x + 8 \longrightarrow f'(x) = 15x^2 + 2 \longrightarrow f''(x) = (15x^2)' + (2)' = 2.15x + 0 = 30x \longrightarrow \boxed{f''(x) = 30x}$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5x^8 - \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)' + (40x^7)' - = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 7.40x^6 + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 280x^6 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$\boxed{f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 280x^6 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$\cancel{d)\ f(x) = \frac{2x}{4x+1} \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{(4x+1)^2} \longrightarrow f''(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2} =}$

$\cancel{\frac{(2)'.(4x+1)^2 - (2).((4x+1)^2)'}{((4x+1)^2)^2} = \frac{0 - 2.(2.4x+1)}{(4x+1)^4} = \frac{-2.(8x+2)}{16x+4} =}$

d) $f(x) = \frac{2x}{4x+1} \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{(4x+1)^2} = 2.(4x+1)^{-2} \longrightarrow f''(x) = (2)'.((4x+1)^{-2})' =$

$= 2.-2(4x+1)^{-3}.(4x+1)' = 2.-2(4x+1)^{-3}.4 = 2.-8(4x+1)^{-3} = \boxed{-16(4x+1)^{-3}}$

g) $f(x) = \ln(x-4) + 1 \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x-4} = (x-4)^{-1} \longrightarrow f''(x) = -1.(x-4)^{-2}.(1-0) =$

$= -1(x-4)^{-2}.1 = \boxed{-1(x-4)^{-2}}$

l) $f(x) = \tan(x) \longrightarrow f'(x) = \sec^2(x) \longrightarrow f''(x) = 2.\sec(x).\sec(x).\tan(x) =$

$= \boxed{2\sec^2(x).\tan(x)}$

NOTA

2) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 5.x^4 - 3.3x^2 - 3 - 0 \rightarrow f''(x) =$

$= 4.5x^3 - 2.9x - 0 = 20x^3 - 18x \rightarrow f'''(x) = 3.20x^2 - 18 = 60x^2 - 0 \rightarrow$

$f''''(x) = 2.60x = 120x \rightarrow f'''''(x) = 120 \rightarrow f''''''(x) = 0$

Actividad 4.5 - Página 99

a) $f(x) = 6x^2 - x^3 \rightarrow f'(x) = 2.6x - 3x^2 = 12x - 3x^2$

$f'(x) = 0$

$12x - 3x^2 = 0$

$\underbrace{3x}_{\substack{0 \\ x=0}}\underbrace{(4-x)}_{\substack{0 \\ x=4}} = 0 \rightarrow$ Puntos críticos de $f(x) = 0$ y 4

b) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \rightarrow f'(x) = 2x + \left(\frac{(2)'.(x) - (2).(x)'}{(x)^2}\right) = 2x + \frac{(0.x) - (2.1)}{x^2} =$

$= \boxed{2x - \frac{2}{x^2}}$ Dom $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) = 0$

$2x - \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0.x^2 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{2} \rightarrow \boxed{x = 1}$

c) $f(x) = -\frac{x^2}{x-2} \rightarrow f'(x) = -\frac{(x^2)'.(x-2) - (x^2).(x-2)'}{(x-2)^2} = -\frac{(2x).(x-2) - (x^2).(1)}{(x-2)^2} =$

$= -\frac{(2x).(x-2) - (x^2)}{(x-2)^2} = -\frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \boxed{-\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}}$ Dom $= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f'(x) = 0$

$-\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow -\frac{x^2 - 4x}{x-2} = \sqrt{0} \rightarrow -x^2 - 4x = 0.x - 2 \rightarrow -x^2 - 4x = 0 \rightarrow$

2) a) $f(x) = -x-4$ en $[-4,1]$

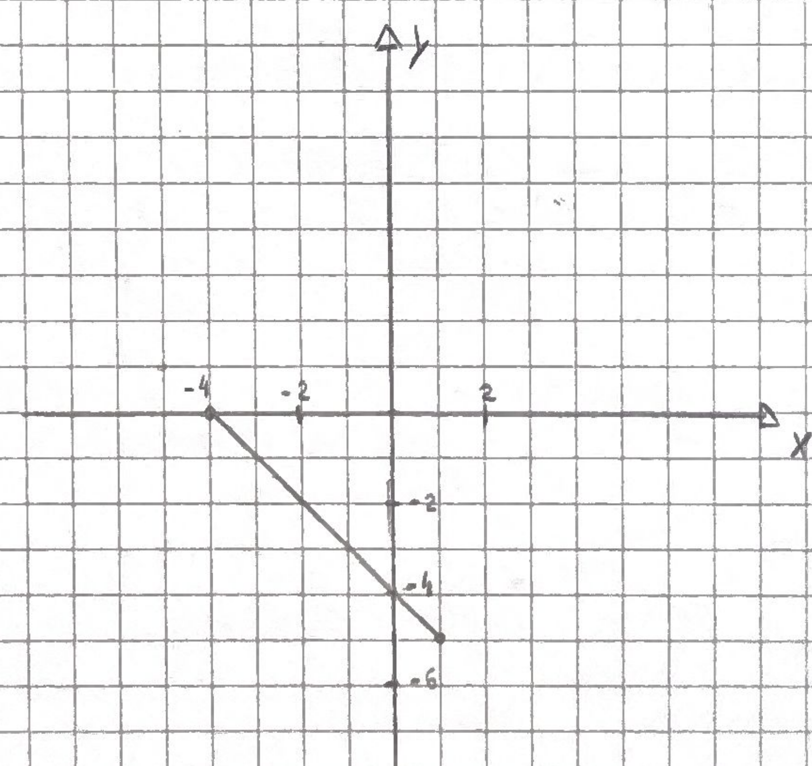
. obtener todos los puntos críticos que pertenecen al interior del intervalo.

$f(x) = -x-4 \rightarrow f'(x) = -1 \rightarrow$ No hay forma de igualar la derivada a 0 = no existen puntos críticos.

. Evaluar a f(x) en los puntos extremos del intervalo cerrado

$f(-4) = -(-4)-4 = 4-4 = 0 \rightarrow$ en $(-4,0)$ hay un máximo absoluto.

$f(1) = -(1)-4 = -1-4 = -5 \rightarrow$ en $(1,-5)$ hay un mínimo absoluto.



b) $f(x) = 4-x^2$ en $[-3,1] \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(x) = 0$

$-2x = 0$

$x = -\frac{0}{2}$

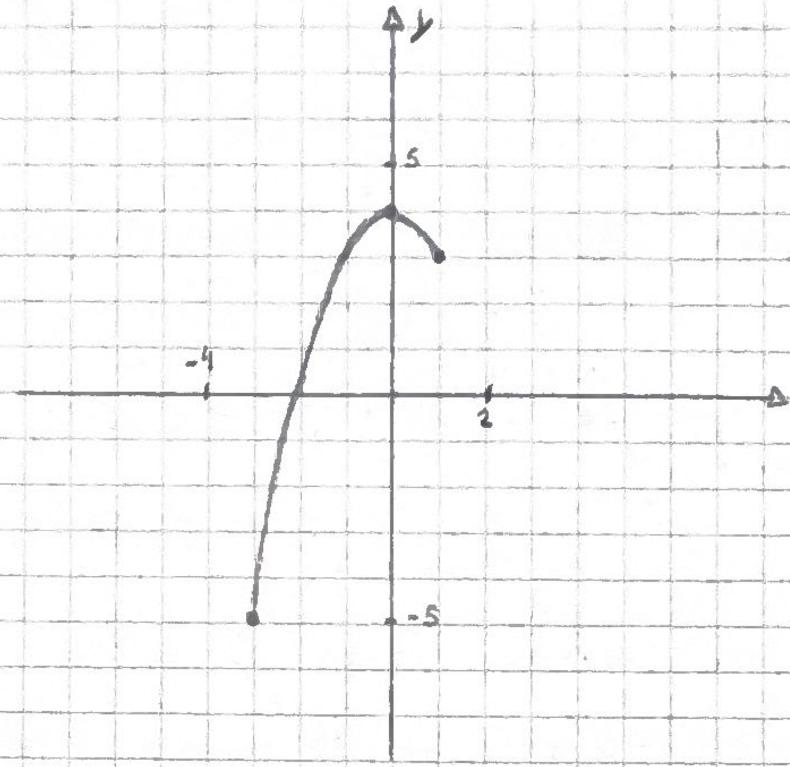
$x = 0 \rightarrow$ Punto Crítico

$f(0) = 4-(0)^2 = 4-0 = 4 \rightarrow$ en $(0,4)$ hay un máximo absoluto

$f(-3) = 4-(-3)^2 = 4-9 = -5 \rightarrow$ en $(-3,-5)$ hay un mínimo absoluto

$f(1) = 4-(1)^2 = 4-1 = 3 \rightarrow (1,3)$

NOTA



c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ en $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow f(x) = -(x)^{-2} \rightarrow f'(x) = -(-2.x)^{-3} = -(-2x)^{-3} = 2x^{-3} =$

$= 2.(x)^{-3} = \frac{2}{x^3}$ o $2(x)^{-3}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \frac{2}{x} = \sqrt[3]{0} \rightarrow \frac{2}{x} = 0 \rightarrow 2 = -x \rightarrow x = -2$

Pero 0 no está en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

No existen puntos críticos

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -(1.4) = -4 \rightarrow$ en $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ hay un mínimo absoluto

$f(2) = -\frac{1}{(2)^2} = -\frac{1}{4} \rightarrow$ en $\left(2, -\frac{1}{4}\right)$ hay un máximo absoluto