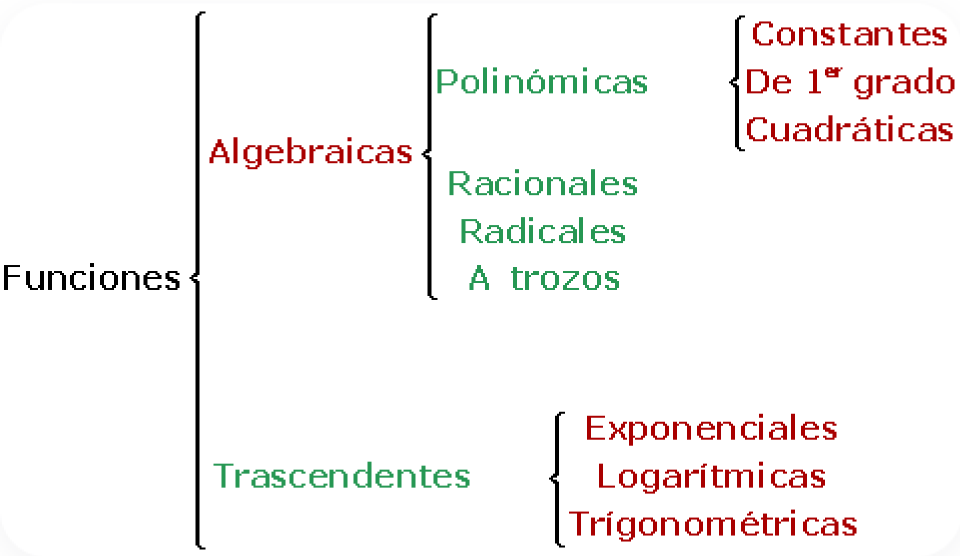
Resumen - Unidad 1

El grado de una función polinómica se determina identificando el término con el mayor exponente de la variable. Este exponente mayor es el grado del polinomio.

Funciones

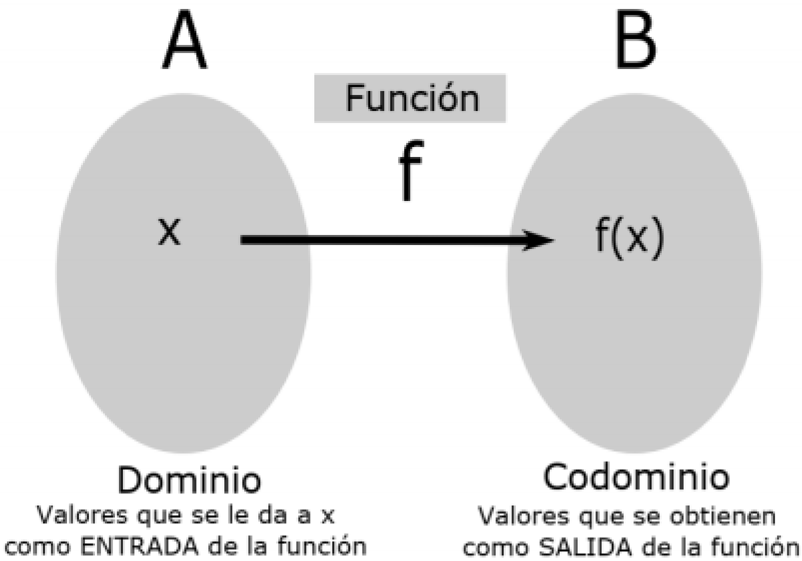
Desarrollo de herramientas que permiten estudiar funciones.

- Una función se puede representar de diferentes maneras: mediante una fórmula, en una tabla, mediante un gráfico o con palabras.
- Nos centraremos en aquellas funciones que se representan de manera algebraica a través de una fórmula explícita.
- Muchos fenómenos de la vida diaria se pueden representar como funciones.



- Las funciones se simbolizan con letras.
- Para encontrar el dominio debo interesarme por cuáles son los problemas o cuentas que no se pueden resolver en cada caso específico.

- **Buscamos el conjunto de valores de x: x para los cuales la función está bien definida (no hay raíces cuadradas de números negativos ni divisiones por cero, tampoco se puede sacar logaritmo de 0 o números negativos).**



A cada elemento de un primer conjunto se le asigna un único elemento de un segundo conjunto.

Codominio son los valores que puede tomar la función, mientras que **Imagen** son los valores que efectivamente toma la función. Ejemplo de altura de los alumnos en un aula.

Dominio en símbolos se escribe : Dom(f) = **ℝ.**

También puede expresarse en notación de intervalos, es decir Dom(f) = (−∞;∞).

Analizamos diferentes características de las funciones.

Traslaciones

Una vez que conozcamos la gráfica de una función, a partir de ella (que llamaremos función base) podremos obtener una nueva función mediante la suma de una constante de la siguiente manera:

Traslación horizontal: Si conocemos la gráfica de una función f, la gráfica de la función $y = f(x-k)$ se traslada:

- k unidades a la derecha, si $k > 0$.
- k unidades a la izquierda, si $k < 0$.

- Si es fuera del paréntesis sube (+) o baja (-).
- Si es dentro del paréntesis se desplaza hacia la derecha (-) o izquierda (+).

Dilataciones

Dilatar es cambiar el tamaño de la gráfica de una función $y = f(x)$, "estirarla"o "comprimirla" verticalmente.

Si consideramos una función f y la multiplicamos por una constante positiva c, obtenemos una nueva función que se comporta de dos formas distintas:

- si $c > 1$ la gráfica de f se "estira" verticalmente en un factor c,
- si $0 < c < 1$ la gráfica de f se "comprime" en relación al factor c.

Reflexiones

Reflejar una función es invertir la posición de su gráfica respecto de una recta. En este curso nos centraremos en la reflexión respecto del eje x.

Si consideramos una función f y la multiplicamos por la constante -1, obtenemos una nueva función cuya gráfica está reflejada respecto del eje x.

Funciones Polinómicas

Pueden ser evaluadas en todo número real, por lo que su dominio serán todos los reales.

Son funciones de variable real, quiere decir que la variable independiente será reemplazada por un número real cuando querramos conocer el valor de la función en ese punto del dominio.

Una función $f(x)$ se dice **polinómica** si su expresión tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un número entero positivo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales conocidas, con $a_n \neq 0$.

A la potencia entera (y positiva) de x en cada término se le llama *grado* del término. Y diremos que **la función polinómica es de grado n** si el término de mayor grado es $a_n x^n$.

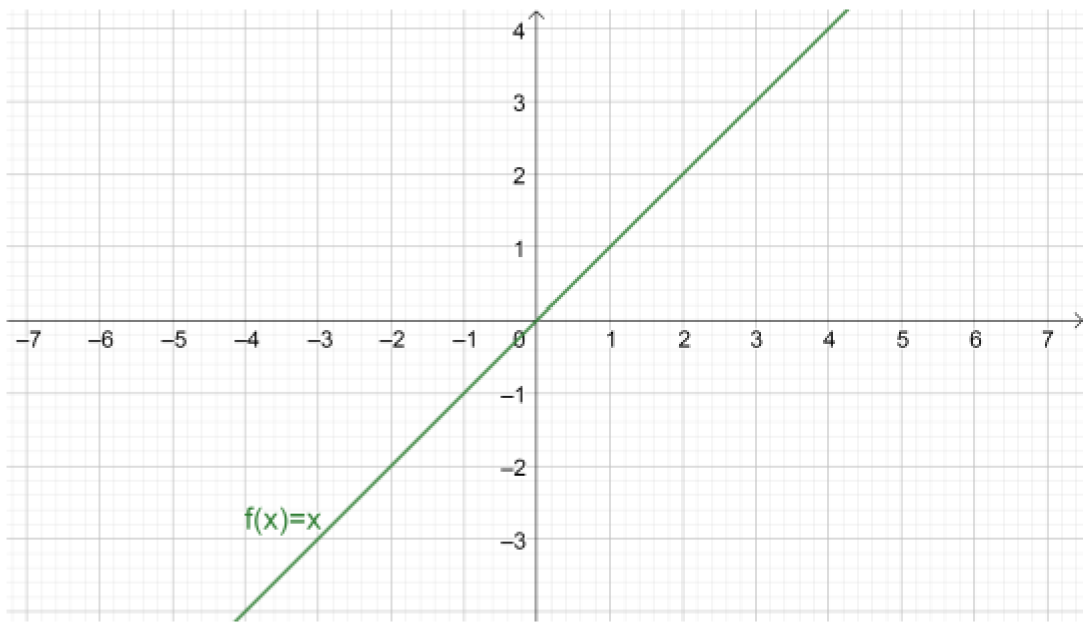
El dominio de todas las funciones polinómicas es $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$.

Funciones Lineales

Es una función polinómica de grado 1. Es decir que su expresión es de la forma f (x) = y = mx + b. Su representación gráfica está dada por una recta donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada al origen (es decir, la intersección con el eje y).

Casos especiales:

- Las **funciones constantes** se pueden considerar un caso particular de las funciones lineales. Se presentan en el caso en que la pendiente es nula; es decir, cuando m = 0. Su gráfica es una recta horizontal.
- Una función lineal muy especial es f (x) = x, llamada **función identidad**, donde m = 1 y b = 0. Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen y divide en dos partes iguales a los cuadrantes primero y tercero:



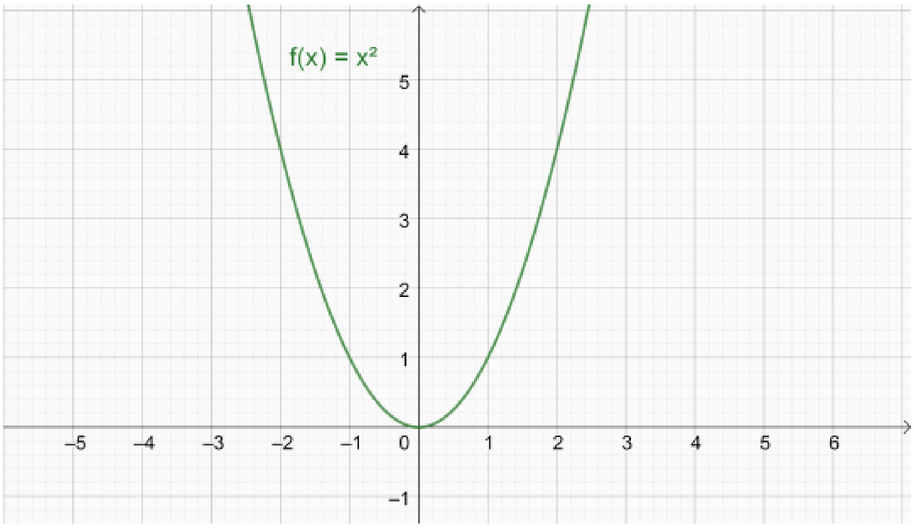
▼ Básicamente es una matriz.

...está diciendo que **la función identidad** puede entenderse como **una transformación lineal cuya matriz asociada es la matriz identidad**. En otras palabras, está haciendo un puente entre el **enfoque funcional** (de funciones reales) y el **enfoque matricial** (de transformaciones lineales en álgebra lineal).

Función Cuadrática

La **función cuadrática** es un caso particular de función polinómica. Concretamente, es una función polinómica de grado 2.

Es decir que son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Su representación gráfica está dada por una parábola.

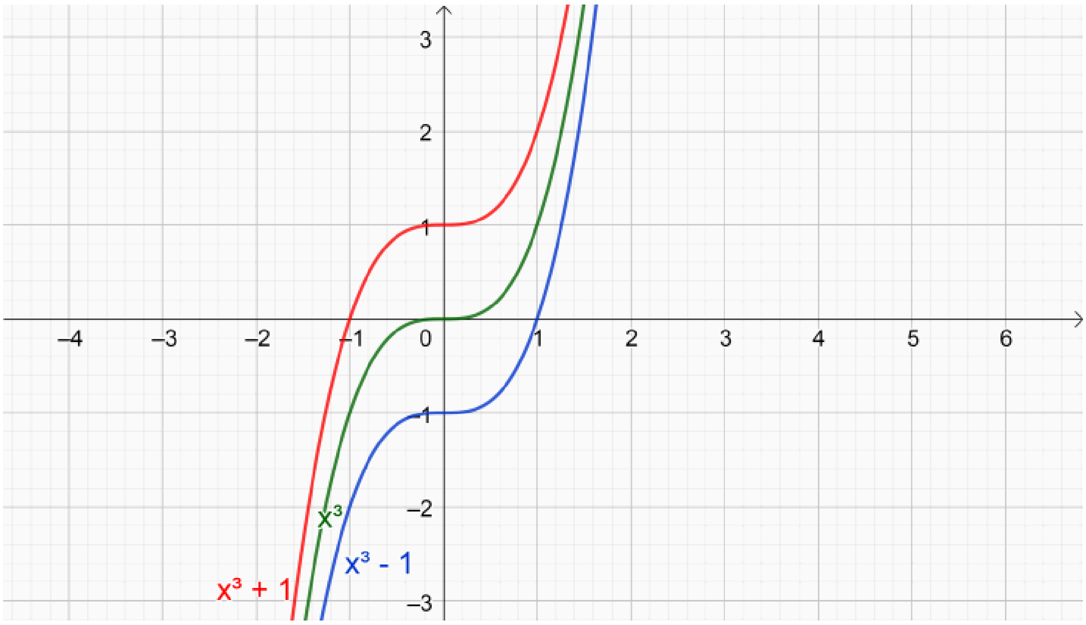


Básicamente es una parábola.

Función Cúbica

Las funciones cúbicas son de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$. Es decir que son funciones polinómicas de grado 3.

Traslaciones verticales de una función cúbica



Funciones Potencias Racionales

Función Potencia

Una función $f(x) = x^a$, donde a es una constante fraccionaria, se denomina **función potencia**. No es sencillo determinar una manera general de reconocer sus gráficas, pero gran parte de la tarea que desarrollaremos en este libro nos permitirá conocer detalles de la función que serán fundamentales para poder reconstruir su gráfica, entre otras cosas.

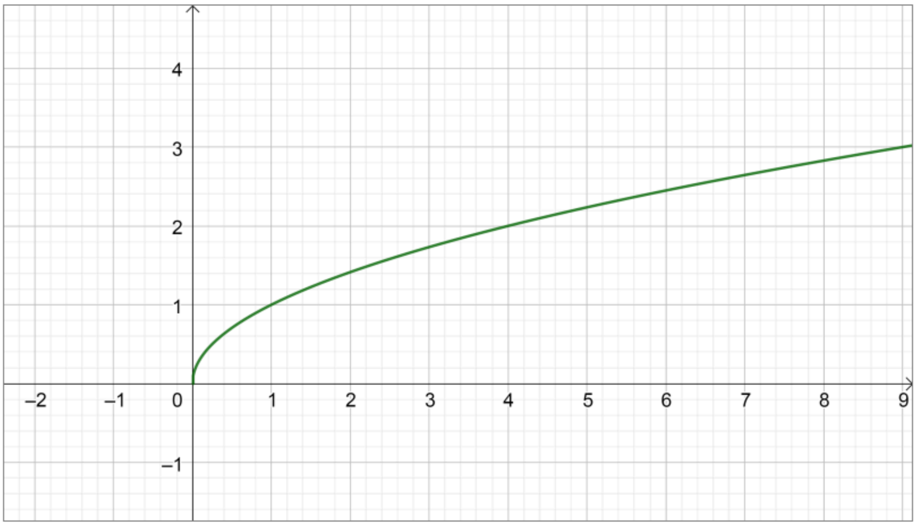
La función potencia es aquella con un solo término que es el producto de un número real, un coeficiente y una variable elevada a un número real fijo.

Caso particular: Función raíz cuadrada

$$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

El dominio de la función raíz cuadrada es $[0,+\infty)$. Pues, si pensamos que el resultado de evaluar la función debe ser un número real, no es posible conocer la raíz cuadrada de números negativos.

La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ tiene la siguiente forma:



Funciones Racionales

Una **función racional** es un cociente entre dos funciones polinomiales. Concretamente, si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, se define la función racional como

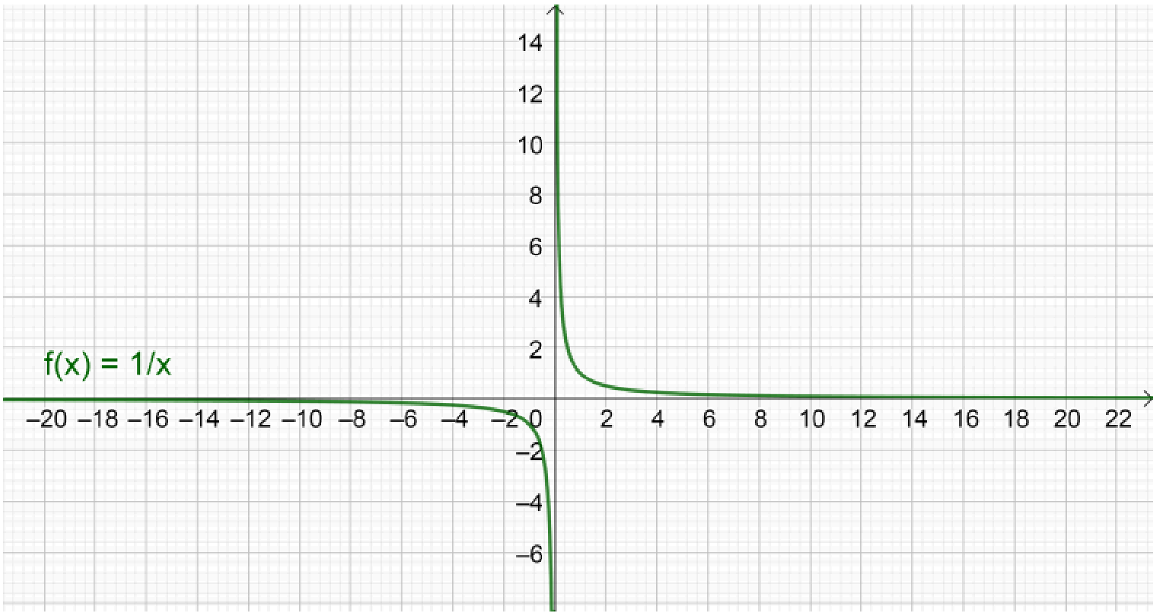
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

El dominio de una función racional es el subconjunto de los números reales para los cuales $q(x)$ no se anula, pues no se puede dividir por cero. Esto es,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0\}.$$

La **gráfica** de una función racional no es inmediata para el caso general. Sin embargo, podemos reconstruirla, a partir de una función base conocida, en el caso particular de cocientes de funciones lineales.

Concretamente, si tanto en el numerador como en el denominador de la función racional encontramos funciones lineales, su gráfica será la traslación, reflexión y/o dilatación de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.



Función Exponencial

Las exponenciales tienen el crecimiento más grande de todos.

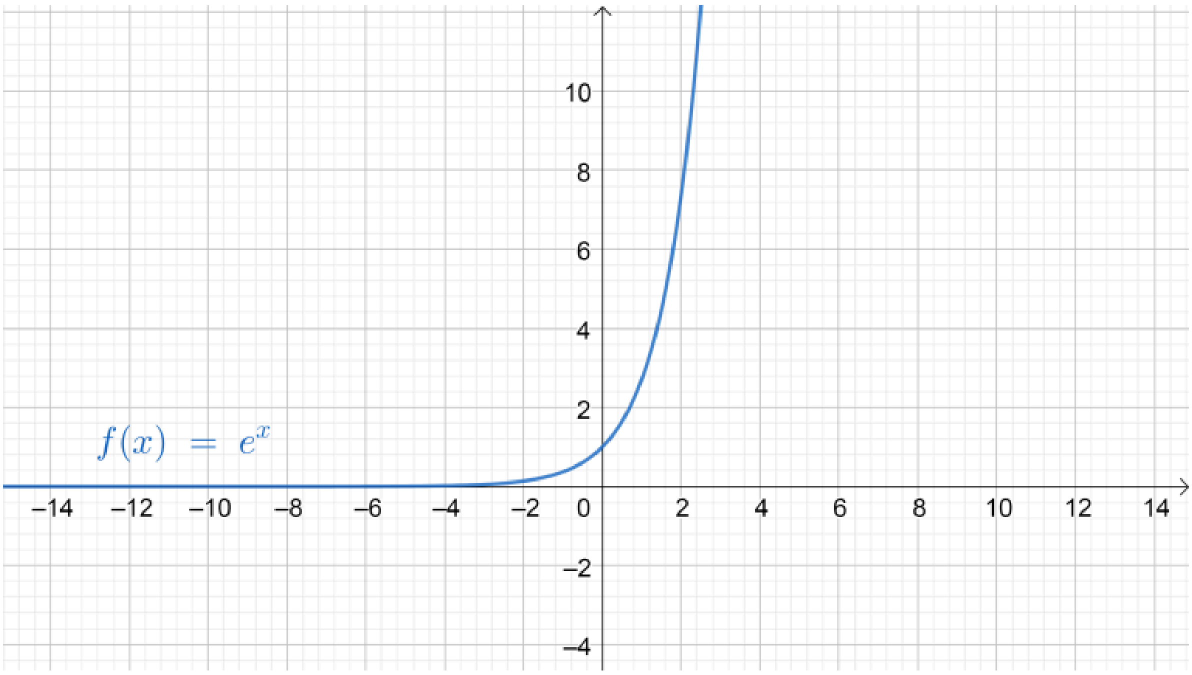
Ejemplo básico: COVID 19. Las exponenciales tienen el crecimiento más grande de todos.

Las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva y tienen su variable en el exponente son llamadas, precisamente, **funciones exponenciales**.

El dominio de las funciones exponenciales es el conjunto $\mathbb{R}$.

De todas ellas una muy particular e importante es la que tiene como base al número e, conocido como número de Euler ($e \approx 2{,}71828$). Es un número irracional de uso muy frecuente en el análisis matemático.

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función exponencial de base e.



Propiedades de la función exponencial

Similar a las reglas de las potencias de igual base.

> Dados a un número positivo y b, c y r números cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades:
> 1. $a^0 = 1$
> 2. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
> 3. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
> 4. $(a^b)^r = a^{b \cdot r}$

Función Logarítmica

Es usual, en matemática, que cada vez que se crea o define una operación, una función o una acción, se estudia la posibilidad de definir una operación, función o acción, que "desarme" lo que se ha hecho. Pensemos en la suma y la resta, el producto y la división, elevar al cuadrado y la raíz cuadrada, etc.

Pues bien, la función logarítmica es aquella que "deshace" la acción que produce la función exponencial. Y se define de ese modo.

Entonces, las **funciones logarítmicas** $f(x) = log_a(x)$, donde la base a es una constante positiva, son las inversas de las funciones exponenciales.

Teniendo en cuenta el comentario inicial, podemos pensar al resultado de la operación $log_a(x)$ como el valor de la potencia a la cual debemos elevar al número a para alcanzar el valor x. En símbolos: $log_a(x) = n$ si y sólo si $a^n = x$.

Básicamente deshace la función exponencial, es inversa. El último párrafo se refiere a la regla de despeje. Las logarítmicas tienen el crecimiento más bajo de todos.

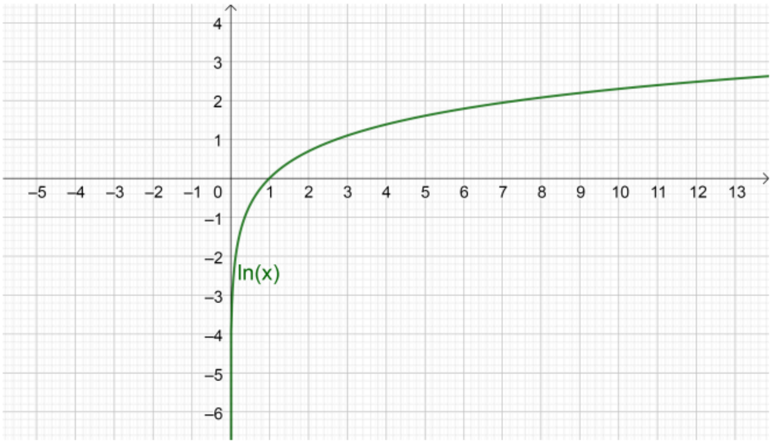
Con respecto al dominio no se puede sacar logaritmo de 0 o números negativos. Al buscar un dominio el resultado debe ser positivo.

Clave el logaritmo natural (e).

El dominio de las funciones logarítmicas es el conjunto $(0,+\infty)$.

Llamamos *logaritmo natural* al caso particular del logaritmo de base e y lo simbolizamos como $log_e(x) = ln(x)$.

En la siguiente figura se muestra la función logaritmo en base e, $f(x) = log_e(x) = ln(x)$.



Ejemplo 1.5 Si queremos despejar la variable x en la siguiente ecuación:

$$3^{x^2-2} = 5$$

podemos usar la función logarítmica para nuestro propósito. En este caso usaremos el $log_3(x)$ pues la expresión exponencial involucrada en la ecuación es de base 3:

$$log_3(3^{x^2-2}) = log_3(5)$$

Notar que del lado izquierdo de la igualdad la función logarítmica y la función exponencial quedan expresadas de manera continuada, con lo que la primera "deshace" aquello que ha producido la segunda y resulta en una expresión que nos es más familiar y a la cual podemos continuar despejando sin mayor dificultad:

$$x^2 - 2 = log_3(5)$$

$$x^2 = log_3(5) + 2$$

$$|x| = \sqrt{log_3(5) + 2}$$

$$x = \pm\sqrt{log_3(5) + 2}$$

hallando así los valores de x que resuelven la ecuación. Valores que, aunque parezcan extraños, son números reales que pueden ser hallados a través de la calculadora de manera relativamente sencilla, como observaremos luego de enunciar las propiedades del logaritmo.

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_2 16 = 4$$

$$\log_2 32 = 5$$

- El resultado crece de forma muy lenta en el ejemplo anterior.

$$f(x) = 2 \cdot \ln(x+1) + 3$$

- En este último ejemplo la función logarítmica está desplazada un lugar hacia la izquierda, trasladada tres hacia arriba y está dilatada al doble, se estiró.
- Dominio del ejemplo anterior:

quiero que $x + 1 > 0$

$$\boxed{x > -1}$$

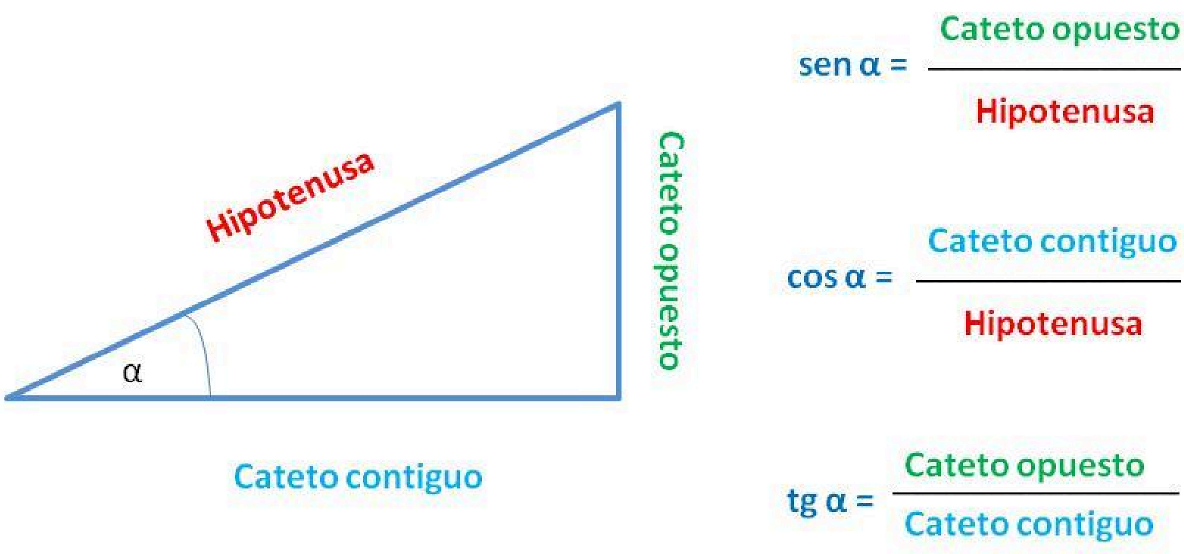
$$\text{Dom}(f) = (-1; +\infty)$$

Propiedades del Logaritmo

Dados a, b y c números positivos y r un número cualquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

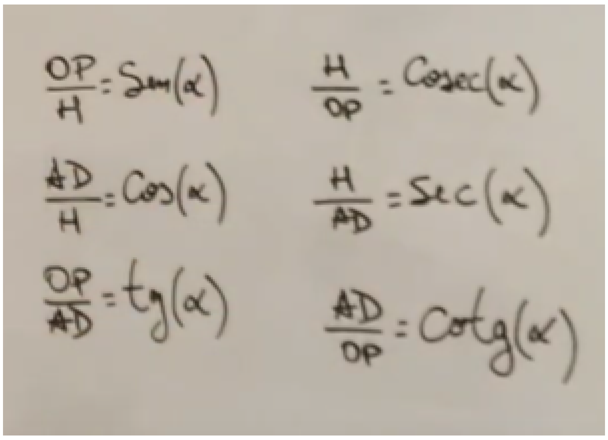
1. $log_a(1) = 0$
2. $log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$
3. $log_a(b/c) = log_a(b) - log_a(c)$
4. $log_a(b^r) = r \cdot log_a(b)$
5. $log_a(b) = \dfrac{log_c(b)}{log_c(a)}$

Funciones Trigonométricas

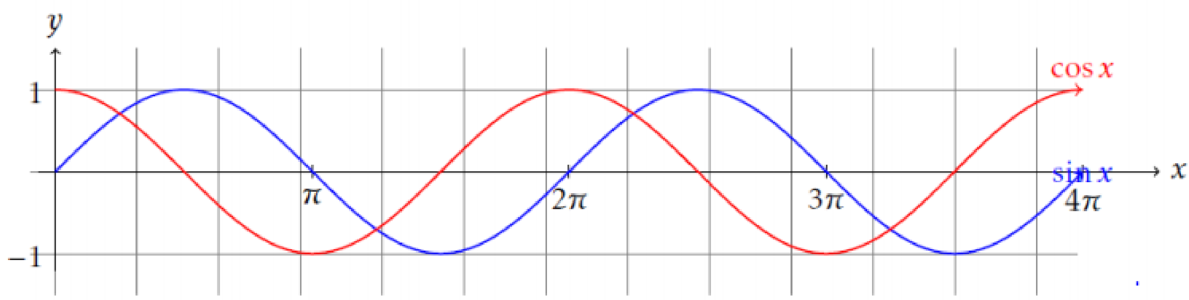


Cateto contiguo = Cateto adyacente.

Son 6 divisiones posibles entre tres números distintos provenientes de los tres lados distintos del triángulo (factorial de 3!). Se trabaja con radianes al graficar.



La trigonometría es la rama de la matemática que estudia la relación entre lados y ángulos de un triángulo, a partir de la división de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo surgen las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente.



El seno tiene un periodo de 2π, cuando llega a 0 se repite nuevamente. Para el coseno el pensamiento es muy similar.

En el siguiente cuadro se tiene algunos valores exactos del seno y coseno para ciertos ángulos.

Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5	0	-1	0	1

Para el análisis de las demás funciones trigonométricas nos ayudaremos con las identidades trigonométricas. Algunas de ellas son muy usuales, por ejemplo sabemos que $\frac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x)$ siempre y cuando el $cos(x)$ no valga cero.

De esta forma si $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = sen(x)$ tenemos que $h(x) = tg(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$ y su dominio será $Dom(h) = \{x \in \mathbb{R} / cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Funciones a trozos

En ocasiones es necesario recurrir a diferentes expresiones (cuadráticas, racionales, exponenciales, etc.) para representar una situación; de modo que **la función que se construye se representa mediante el uso de fórmulas diferentes en distintas partes de su dominio**.

Función Valor Absoluto

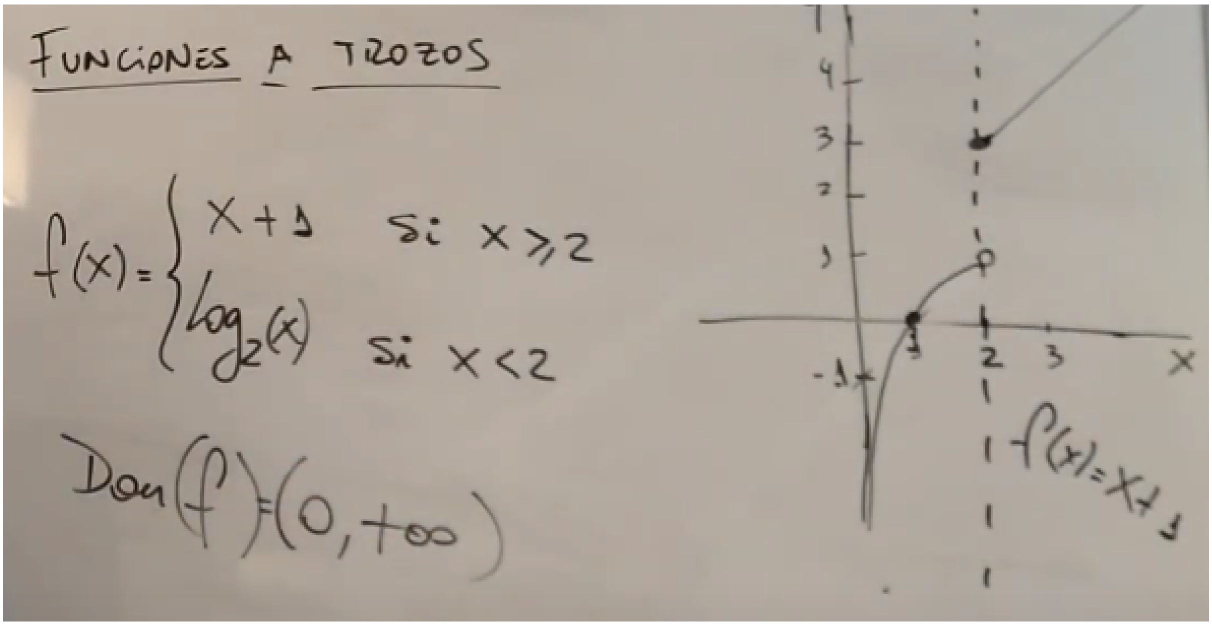
Un caso particular de función a trozos muy usado es la **función valor absoluto**. El valor absoluto de un número suele pensarse como el mismo número "sin signo". Sin embargo, para dar una instrucción precisa de cómo calcularlo se divide en dos casos: para los valores positivos se deja el mismo valor y para los valores negativos se cambia el signo.

La función valor absoluto tiene como $Dom(f) = (-\infty, +\infty)$, pues se puede calcular el valor absoluto de cualquier número real.

Si quisiéramos pensarlo como una función, debemos notar que tiene diferente expresión para distintas partes del dominio. Concretamente para valores $x \in (-\infty, 0)$, la función toma valores $-x$ y para valores $x \in [0, +\infty)$, la función toma valores x.

En este caso la función en cuestión se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Traslaciones de la función valor absoluto

Los desplazamientos de lugares sobre el eje y se presentan cuando sumamos o restamos por fuera de las barras de valor absoluto. Si los desplazamientos los hacemos horizontalmente, lo que debemos modificar es el interior de las barras de valor absoluto.

Operaciones entre funciones

Otra forma de obtener funciones es a partir de hacer ciertas operaciones entre las funciones conocidas. Ya no solo se utilizan las ∪ (uniones) sino también las ∩ (intersecciones), que son los elementos que se encuentran en ambos dominios.

1.4.1. Suma, resta, producto y cociente de funciones

Definición 1.4

Supongamos que f y g son funciones con dominios D_1 y D_2, respectivamente. **Las funciones** $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ están definidas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

para todo $x \in D_1 \cap D_2$ (es decir, para x que pertenezca a ambos dominios).

La función $\dfrac{f}{g}$ está definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para $x \in D_1 \cap D_2 - \{x : g(x) = 0\}$.

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si c es un número real, entonces la función cf está definida para todo x en el dominio de f mediante

$$(cf)(x) = cf(x)$$

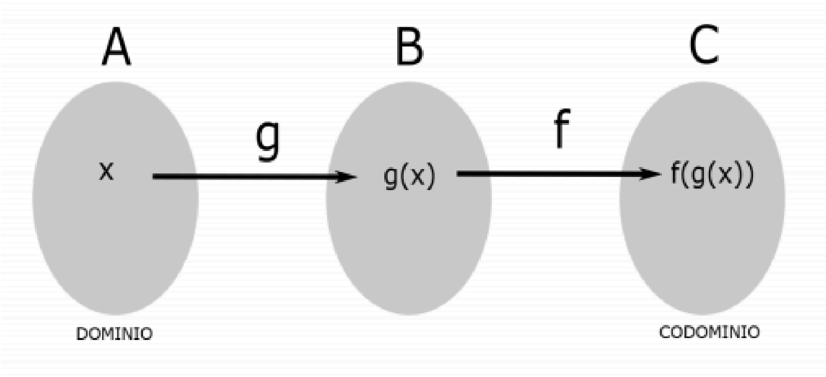
.

Composición de funciones

Si f y g son funciones, la **composición** de estas funciones se escribe como $f \circ g$ (se lee g compuesta con f), está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Observación
La composición de dos funciones es un proceso de dos pasos, como se indica en el siguiente esquema:



Importante: Para definir $f(g(x))$, primero se necesita definir $g(x)$, por lo que x debe estar en el dominio de g. A continuación, f debe definirse en el punto $g(x)$, de modo que el número $g(x)$ deba estar en el dominio de f. Veamos un ejemplo.

Ejemplo:

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad Dom(g \circ f) = \{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \,/\, \frac{1}{x} \in (0, +\infty) \}$

$g(x) = \ln(x)$ $\quad Dom(g \circ f) = (0, +\infty)$ $\quad \frac{1}{x} > 0$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad x > 0$

$$Dom(g \circ f) = \{ x \in Dom(f) \,/\, f(x) \in Dom(g) \}$$