Resumen - Unidad 5

d es de diferencia.

Integrales

El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de la base y la altura.

¿Cómo se define el área de una región en un plano si dicha región está acotada por una curva? La respuesta a esta pregunta está relacionada al concepto de integral.

La idea de las integrales es calcular un área. Básicamente es posible calcular dichas cantidades si las dividimos en pequeñas partes y sumamos las contribuciones de cada una.

El truco para llegar al área verdadera es meter muchos intervalos.

Símbolo Δ (delta) se utiliza para diferencia (medida).

Lo que decimos es que con la idea de límite podemos estudiar cómo progresan las sucesivas aproximaciones del área que nos interesa conocer. Es decir que podremos considerar la suma de las áreas de rectángulos con base cada vez más pequeña, cuya longitud tiende a cero, y luego calcular el límite de esa expresión para poder conseguir el área exacta de la región que estamos considerando:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x = \text{Área}.$$

Integral definida

Debe dar como resultado un número.

Definición 5.1

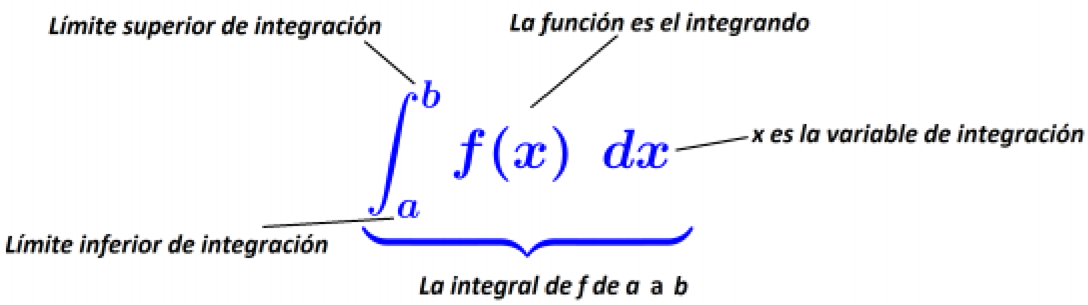
En general si se tiene una función f, continua y definida en un intervalo $[a,b]$. Si se divide el intervalo en subintervalos de igual longitud Δx, luego se toman los puntos medios de esos intervalos, $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$. Entonces **la integral definida de f, desde a hasta b** es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

Si este límite existe decimos que su valor es **la integral de f entre a y b**, en cuyo caso solemos decir que f es **integrable**.

Observaciones:

- Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama signo de integral. Se parece a una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas.
- La suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ se llama **suma de Riemann**.
- Sabemos, por el ejemplo introductorio, que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos.



Teorema 5.2.1

Si f es continua en $[a,b]$, o si f tiene una cantidad finita (no infinita) de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a,b]$. Es decir, la integral definida existe.

Propiedades de las integrales

Teorema 5.2.2

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a,b]$ y sea k una constante, entonces:

1. Intervalo de ancho cero: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. Orden de integración: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. Linealidad: $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
4. Aditividad en el intervalo : $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
5. Comparación : Si para todo $x \in [a,b]$ $\quad f(x) \leq g(x)$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
6. Acotamiento: Si $M = \text{máx}[f]$ en $[a,b]$ y $m = \text{mín}[f]$ en $[a,b]$ entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Calcular integrales definidas

No siempre se debe calcular el límite de las sumas de Riemann. De manera más directa se puede aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona la integración con la derivación.

Se calcula la integral definida de f mediante otra función F cuya derivada sea f.

Teorema 5.3.1 Teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y
$$g'(x) = f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in (a,b).$$

Definición 5.3

Una función F se llama **primitiva** de una función f en $[a,b]$, si
$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo valor} \quad x \in [a,b].$$

También suele nombrarse a la primitiva como antiderivada de la función f , ya que el razonamiento involucrado en la búsqueda de una primitiva involucra el cálculo de una derivada.

Es posible recuperar el razonamiento de las reglas de derivación y revertir su procedimiento.

Regla de Barrow

El siguiente procedimiento describe cómo calcular integrales definidas una vez que se haya calculado su primitiva. Se evalúa la primitiva hallada en los límites de integración superior e inferior, para finalmente calcular una diferencia.

Definición 5.4 Regla de Barrow
Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F es una primitiva de f , entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Integral indefinida

Debe dar como resultado una función + la constante de integración.

Es como una especie de función pero sin los límites de integración por lo que busco la antiderivada.

La constante de integración se utiliza siempre que sea una integral indefinida.

Teorema 5.4.1

Sea c una constante cualquiera:

- $\int 1\,dx = x + c.$
- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, con $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x}\,dx = ln(|x|) + c.$
- $\int e^x\,dx = e^x + c.$
- $\int sen(x)\,dx = -\cos(x) + c.$
- $\int \cos(x)\,dx = sen(x) + c.$

Importante Las propiedades de linealidad enunciadas para la integrales definidas en el teorema 5.2.2 (inciso 3) también valen para las integrales indefinidas.

Técnicas de integración

y si recuperamos la idea de que la integral y la derivada son procesos inversos:

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

El último término de la suma se pasa restando.

Integración por partes

Es para la derivada de un producto de dos funciones.

Enunciaremos un método que recoge lo anterior y nos permitirá resolver integrales de funciones que pueden expresarse como un producto de una función por la derivada de otra.

Teorema 5.5.1 Método de Integración por partes

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$, de donde $du = f'(x)dx$, y $dv = g'(x)dx$: podemos escribir el método de integración por partes en términos de u y v

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Para hallar el valor de una integral definida usando el método de integración por partes, la expresión anterior se adapta de la siguiente manera:

$$\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

La gran mayoría de las veces la función polinómica es la función que se elige como u y se deriva, mientras que dV va a ser la otra parte. Pero cuando hay una función logarítmica es al revés: la logarítmica se elige como u y la polinómica como dV (porque no sabemos la integral de ln(x)).

Integración por sustitución

Se relaciona con la regla de la cadena.

Veremos entonces un método para calcular la integral del producto de una función compuesta por la derivada de su argumento.

Teorema 5.5.2 Método de integración por sustitución

Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Como indica su nombre, este método de integración consiste en la aplicación de un cambio de variable para simplificar la expresión a integrar.

Lo importante del método es escoger un cambio útil, ya que, en caso contrario, la integral resultante puede ser de mayor dificultad.

Si sabemos que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y tenemos que calcular $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$, debemos identificar a la función $g(x)$ y su derivada para hacer un cambio de variables.

La sustitución elegida será $u = g(x)$.

Sabemos que calcular el diferencial de una función es igual al producto de su derivada por el diferencial de la variable, es decir que $du = g'(x)dx$ con lo cual la integral original podrá escribirse de una forma más simple

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Además será una expresión mucho más sencilla de integrar recordando que la primitiva de f es F

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

Notemos que al usar la regla de Barrow se cancela la constante de integración de la primitiva hallada anteriormente. En adelante cuando calculemos una integral definida no añadiremos la constante de integración.

Cálculo de áreas

https://www.youtube.com/watch?v=ZX1FAeJ5bRI

Una integral puede dar resultado negativo o 0 pero un área no.

Si identifiqué bien las funciones techo y piso, el cálculo del área siempre tiene que resultar positivo.