

Resumen - Unidad 3

Continuidad

Dibujar una línea sin levantar el lápiz, de forma continua. La continuidad se refiere a variar de forma incesante.

Una función se dice **continua en $x = a$** , cuando coinciden los siguientes tres valores:

1. $f(a)$
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Para el primer paso hay que calcular la función en el punto = reemplazar en la variable el valor de la variable independiente en ese punto.

Las funciones polinómicas son continuas en todos los puntos porque el dominio son todos los reales.

Definición 3.2

Una discontinuidad se dice evitable si existe el límite de la función en $x = a$, pero no coincide con $f(a)$; ya sea porque toma otro valor o porque no existe $f(a)$.

Este tipo de discontinuidades las podemos observar en el gráfico b) y d).

Definición 3.3

Una discontinuidad se dice inevitable si no existe el límite de la función en $x = a$.

Este tipo de discontinuidades las podemos observar en el gráfico c) y e).

En las asíntotas verticales, alguno de los dos límites dará infinito y por lo tanto $f(x)$ será discontinua inevitable en ese punto.

Teorema 3.2.1 Propiedades de las funciones continuas

Sean f y g funciones continuas en $a = x_0$ y k un número real, entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. $k f(x)$ es una función continua en x_0
2. $f(x) \pm g(x)$ son funciones continuas en x_0
3. $f(x) \cdot g(x)$ es una función continua en x_0
4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una función continua en x_0 , siempre que $g(x_0) \neq 0$
5. $(f(x))^n$ es continua en x_0 , donde n es un entero positivo.
6. $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en x_0 , siempre que esté definida en un intervalo que contenga a x_0 , donde n es un entero positivo.
7. Si además h es una función continua en el valor $f(x_0)$, la función composición $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ es continua en x_0

Funciones continuas en un intervalo

Definición 3.4

1. Continuidad en un intervalo abierto

Una función es continua en un intervalo (a, b) si y sólo si es continua en cada punto del intervalo.

2. Continuidad en un intervalo cerrado

$f(x)$ es continua en $[a, b]$ si se cumplen los siguientes items:

- f es continua en todos los puntos interiores, o sea en (a, b)
- f es continua por la derecha en a . Es decir $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- f es continua por la izquierda en b . Es decir $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

Se pierde el concepto de límite completo.

Observaciones:

1. Si el intervalo es cerrado sólo en uno de los extremos, tenemos que estudiar el límite por izquierda o por derecha según corresponda.
2. Cuando una función f es continua en cada punto de su dominio, solemos decir simplemente que f es una función continua.

Importante

Recordemos del capítulo anterior que en muchas situaciones los límites podían calcularse por evaluación directa. Notemos que en esos casos se trata de funciones continuas, con lo cual podemos asegurar que:

- La función identidad $f(x) = x$ y las funciones constantes son continuas para todo número real.
- Toda función polinómica es continua en \mathbb{R} .
- Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo su dominio, es decir siempre que $Q(x) \neq 0$.
- Las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.
- Las funciones exponenciales y logarítmicas también son continuas en sus dominios.