Actividad 2.1

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x > 2 \\ 1 & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

Calcular $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$$

$\neq$ No coinciden

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 1 = 1$$

No existe el límite de la función cuando x tiende al punto estudiado

b) $g(x) = |x| \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$

$=$ Coinciden. La función existe cuando x tiende a 0 (punto estudiado)

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = -0 = 0$$

No entendí lo del valor absoluto

2.6 Ejercicios - Página 69

1) a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x+2}{\lim\limits_{x \to 3} x+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 2}{\lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 3} = \frac{3+2}{3+3} = \boxed{\frac{5}{6}}$

con propiedades

sin propiedades

(sustitución directa) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{3+2}{3+3} = \boxed{\frac{5}{6}}$

NOTA

b) $\lim_{x \to 1} x^3+5x^2+10 = 1^3+5.1^2+10 = 1+5+10 = \boxed{16}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{-2^3+2.-2^2-1}{5-3.-2} = \frac{-8+8-1}{5+6} = \frac{-1}{11} = \boxed{\frac{-1}{11}}$

d) $\lim_{x \to \pi} \text{sen}(x-\pi) = \text{sen}(\pi-\pi) = \text{sen}(0) = \boxed{0}$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x} = \frac{\sqrt[3]{2^2+2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4+2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{6}}{2}} =$ Symbolab da $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

f) $\lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{2}{x^3+1}\right) = \ln\left(\frac{2}{1^3+1}\right) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln 1 = \boxed{0}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \frac{\ln(0+1)}{e^0} = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

h) $\lim_{x \to 0} 3\cos(x^2).(1+x)^4 = 3\cos(0^2).(1+0)^4 = 3.\cos(0).(1)^4 = 3.1.1 = \boxed{3}$

i) $\lim_{x \to 3} |x-3| = |3-3| = |0| = \boxed{0}$

j) $\lim_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x} = \frac{|3-3|}{3} = \frac{|0|}{3} = \frac{0}{3} = \boxed{0}$

k) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x} = \frac{0}{0^2+0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

$\leftarrow$ Factorizar el denominador

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x} = \frac{x}{x.(x+1)} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

NOTA

l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \dfrac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 4} = \dfrac{4 - 4}{4 - 4} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

No se pueden simplificar los dos x^2 porque están restando.
Solo se puede si están multiplicando.

Trinomio

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \dfrac{(x-2).(x+1)}{(x-2).(x+2)} = \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{2+1}{2+2} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

Dif de cuadrados

m) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2+3x+2} = \dfrac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 3.-1+2} = \dfrac{1 - 1}{1 - 3+2} = \boxed{\dfrac{0}{0}} \rightarrow$ Indeterminación

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2+3x+2} = \dfrac{(x-1).(x+1)}{(x+1).(x+2)} = \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{-1-1}{-1+2} = \dfrac{-2}{1} = \boxed{-2}$

Actividad 2.2

1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Calcular $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

No es $x = 1$ realmente, así que voy a utilizar $\dfrac{x-1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x \to 1^{+,-}} f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1).(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{1+1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

2) Calcular, si existen, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} = \dfrac{\sqrt{0+9} - 3}{0} = \dfrac{\sqrt{9} - 3}{0} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} = \dfrac{(\sqrt{x^2+9} - 3)}{x^2} \cdot \dfrac{(\sqrt{x^2+9} + 3)}{(\sqrt{x^2+9} + 3)} = \dfrac{(\sqrt{x^2+9})^2 - 3^2}{x^2.(\sqrt{x^2+9} + 3)} = \dfrac{(x^2+9) - 9}{x^2.(\sqrt{x^2+9} + 3)} =$

$= \dfrac{x^2}{x^2.\sqrt{x^2+9} + 3} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9} + 3} = \dfrac{1}{\sqrt{0^2+9} + 3} = \dfrac{1}{3+3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

NOTA

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1^2 - 2.1 + 1}{1^2 - 3.1 + 2} = \frac{1 - 2 + 1}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1).(x+1)}{(x-1).(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} = \frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = \boxed{0}$$

2.6 Ejercicios - Página 69

2) a) $\lim_{x \to -\infty} x - 3x^4 = \lim_{x \to -\infty} \overbrace{x}^{\to -\infty} - \overbrace{3x^4}^{\to -\infty} = \boxed{-\infty}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{x}\right) = 0 - 0 = \boxed{0}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \frac{3x + x - 8}{x + 1} =$ Indeterminado $\frac{+\infty}{+\infty}$

Simplifico

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \text{Potencia más alta} \rightarrow x^2 : \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{16}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} =$$

$= \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{16}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} =$ Propiedad $\frac{c}{x^n}$ tiende a 0 (donde c es una constante y $n > 0$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{2}{x} - \frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = 3$$

$= \frac{3 + 0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$

HOJA N°

FECHA

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1) \rightarrow$ Es $+1$ y no -1 porque es $-(1)^2 = +1$

Ejercicios 2.6 - Página 68

1) k) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x} = \frac{0}{0^2+0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

Factor común en el denominador

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x.(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{0+1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = \boxed{1}$

x se cancelan y queda 1 en el numerador

l) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{2^2-2-2}{2^2-4} = \frac{4-4}{4-4} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

Trinomio x^2+bx+c
Diferencia de cuadrados

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)}.(x+1)}{\cancel{(x-2)}.(x+2)} = \frac{x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \boxed{\frac{3}{4}}$

m) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)^2+(-1)3+2} = \frac{1-1}{1-3+2} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

Diferencia de cuadrados
Trinomio x^2+bx+c

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(x-1).\cancel{(x+1)}}{(x+2).\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{x+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$

n) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$ Multiplicar por el conjugado $= \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1).(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1).(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1).(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} =$

$= \frac{\cancel{(x-1)}.(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}} = \sqrt{x}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = \boxed{2}$

NOTA

ñ) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{0^3}{0^2+0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación

Factorizar el denominador con factor común

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{x^3}{x(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} = \frac{0^2}{0+1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

o) $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0} \rightarrow$ No es una indeterminación que se pueda salvar $\rightarrow$ Es divergente

p) $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0} \rightarrow$ No es una indeterminación que se pueda salvar $\rightarrow$ Es divergente

q) $\lim_{x\to -2} \frac{x}{|x+2|} = \frac{-2}{|-2+2|} = \frac{-2}{0} \rightarrow$ No es una indeterminación que se pueda salvar $\rightarrow$ Es divergente

2) a) $\lim_{x\to -\infty} x - 3x^4 = \lim_{x\to +\infty} \overbrace{x}^{-\infty} - \overbrace{3x^4}^{-\infty} = \boxed{-\infty}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{5-3}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \overbrace{\frac{2}{x}}^{0} = \boxed{0}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\underbrace{x^2+3x-1}_{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2} =$ Factor común $= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2x}{x^2}-\frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{3}^{3} + \overbrace{\frac{2}{x}}^{0} - \overbrace{\frac{16}{x^2}}^{0}}{\underbrace{1}_{1} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-6x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{6x}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)} =$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{0}-\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{0}-\overbrace{\frac{3}{x^3}}^{0}}{\underbrace{1}_{1}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{6}{x^2}}_{0}-\underbrace{\frac{2}{x^3}}_{0}} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}} = \frac{x^4\left(1-\frac{2x^2}{x^4}\right)}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{6x}{x^4}\right)}} = \frac{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{6}{x^3}\right)}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\frac{6}{x^3}}} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(\overbrace{1}^{1}-\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{0}\right)}{\sqrt{\underbrace{1}_{1}-\underbrace{\frac{6}{x^3}}_{0}}} = \frac{x^2\cdot(1-0)}{\sqrt{1-0}} = \frac{x^2\cdot 1}{\sqrt{1}} = \frac{x^2}{1} = \overbrace{x^2}^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

3) a) $h(x)\begin{cases}\sqrt{x-4} & si\ x>4 \rightarrow \sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0 \\ 8-2x & si\ x<4 \rightarrow 8-2\cdot 4 = 8-8 = 0\end{cases}$ = coinciden. La función existe cuando x tiende a 4 (punto estudiado).

$\boxed{\lim_{x\to 4^+} h(x) = \lim_{x\to 4^-} h(x) = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to 4} h(x) = 0}$ ✓

Escribir con palabras "Existe el límite".

b) $f_2(x)\begin{cases}\frac{x}{e^x} & si\ x\le 0 \\ x^2 & si\ x>0\end{cases}$ Calcular $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ y $\lim_{x\to -1} f_2(x)$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = \boxed{0}$

coinciden. La función existe cuando x tiende a 0 (punto estudiado).

$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

NOTA

HOJA N°

FECHA

4) a) $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \longrightarrow \lim_{x \to -1} \frac{(-1)^2}{-1+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\frac{1}{0^+} = +\infty$

- Existe asíntota vertical en $x=-1$
- No existe asíntota horizontal $\longrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{+\infty^2}{+\infty+1} = \boxed{+\infty}$

$\frac{x^2}{x+1} = \frac{-\infty^2}{-\infty+1} = \boxed{-\infty}$

No tienden a un número.

b) $g(x) \frac{4x^2+2x-2}{3x-1} \longrightarrow \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{4.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2.\frac{1}{3} - 2}{3.\frac{1}{3} - 1} = \frac{4.\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 2}{1-1} = \frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2}{0} =$

$= \frac{\frac{4}{9} + \frac{6}{9} - \frac{18}{9}}{0} = \frac{\frac{-8}{9}}{0} = -\frac{8}{9} \neq 0 \longrightarrow$ • Existe asíntota vertical en $x = \frac{1}{3}$

$x \to +\infty = \frac{4x^2+2x-2}{3x-1} = \frac{x^2\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x\left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\left(\underbrace{4}_{4} + \underbrace{\frac{2}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}\right)}{\underbrace{3}_{3} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} = x.\frac{4}{3} = \boxed{+\infty.\frac{4}{3}}$

No hay asíntota horizontal porque x no tiende a un número fijo.

c) $h(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+4}$

Trinomio $\boxed{\square}$ perfecto

Busco 0 en el denominador $\longrightarrow x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2 = 0$

$x-2 = \sqrt{0}$

$x = 0+2$

$\boxed{x=2}$

NOTA

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

• Existe asíntota vertical en $x=2$ • Existe asíntota horizontal en $y=0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \frac{\underset{0}{\frac{1}{x}} - \underset{0}{\frac{2}{x^2}}}{\underset{1}{1} - \underset{0}{\frac{4}{x}} + \underset{0}{\frac{4}{x^2}}} = \frac{0-0}{1-0-0} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

d)

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & \text{si } x < 2 \\ 3x^3 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Busco 0 en el denominador $\rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=1^2 \rightarrow \boxed{x=1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{(1)^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

• Existe asíntota vertical en $x=1$

• Existe asíntota vertical en $x=-1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\underset{-0}{\frac{1}{x}}}{\underset{1}{1} - \underset{0}{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{1} = 0$$

Existe asíntota horizontal en $y=0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\underset{0}{\frac{1}{x}}}{\underset{1}{1} - \underset{0}{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{1} = 0$$

NOTA