Resumen - Unidad 2

Utilización del signo de la base en la potencia.

Esto nos deja con el término -3^4. Este ejemplo es un poco complicado porque hay un signo negativo. Una de las reglas de la notación exponencial es que el exponente se relaciona *sólo* con el valor inmediato a su izquierda. Entonces, -3^4 no significa $-3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3$. Significa " el opuesto de 3^4," o $-(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$. Si quisiéramos que la base fuera -3, tendríamos que usar paréntesis en la notación: $(-3)^4$. ¿Por qué tan exigentes? Bueno, haz las cuentas:

$$-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$$
$$(-3)^4 = -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 = 81$$

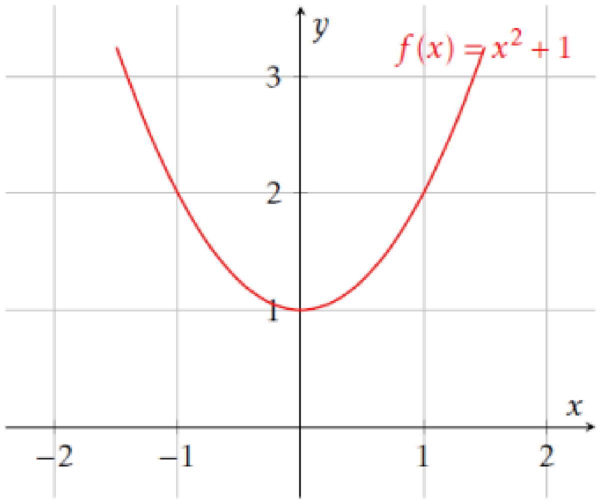
Límites

El límite de una función es útil para:

- Analizar el comportamiento de una función tanto alrededor de un punto, como cuando los valores de x del dominio aumentan indefinidamente.
- Definir los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración.
- La noción de límite, tal como la describimos en los ejemplos, está destinada a comunicar **el comportamiento de una función cerca de algún punto de interés, pero en realidad no en ese punto**.

Introducción

En el siguiente gráfico se muestra parte de la función $f(x) = x^2 + 1$



Luego, si calculamos algunos valores que toma la función para valores menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f(0{,}5) &= 1{,}25 \\
f(0{,}75) &= 1{,}56 \\
f(0{,}80) &= 1{,}64 \\
f(0{,}90) &= 1{,}81 \\
f(0{,}95) &= 1{,}90 \\
f(0{,}99) &= 1{,}98 \\
f(0{,}999) &= 1{,}998
\end{aligned}$$

Si tomamos valores de x cada vez más cercanos a 1 pero menores a 1, los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2. Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por izquierda, los valores de f (x) se acercan al valor 2, y puede simbolizarse de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee : *el límite, cuando x tiende a* 1 *por izquierda, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2.*

Este límite puede calcularse sencillamente, por ser una función polinómica , reemplazando directamente la variable en la expresión de la función [1], es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En muchos otros casos tendremos que modificar previamente la expresión antes de reemplazar la variable.

Sigamos adelante con el mismo ejemplo. Ahora, si calculamos algunos valores que toma la función para x mayores a 1, pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ f(1{,}5) &= 3{,}25 \\ f(1{,}25) &= 2{,}56 \\ f(1{,}2) &= 2{,}44 \\ f(1{,}1) &= 2{,}21 \\ f(1{,}05) &= 2{,}10 \\ f(1{,}01) &= 2{,}02 \\ f(1{,}001) &= 2{,}002 \end{aligned}$$

Si tomamos valores de x mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.

Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por derecha, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee: *el límite, cuando x tiende a 1 por derecha, de $x^2 + 1$ es igual a 2.*

Aquí, podemos hacer lo mismo que antes, reemplazar directamente en la expresión de la función, es decir

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

- En este caso en particular, tanto los límites por izquierda y por derecha coinciden en su resultado, pero esto no sucede en todos los casos.
- A estos límites, tanto al límite por izquierda como al límite por derecha, los llamamos **límites laterales**.
- Queremos destacar que, como en esta situación, **si ambos límites laterales existen y toman el mismo valor numérico diremos que existe el límite de la función** cuando x tiende al valor estudiado.

En este ejemplo, podemos decir que el límite, cuando x tiende a 1, de $(x^2 + 1)$ es 2. Es decir que, si no se hace mención alguna a si el límite es por izquierda o por derecha, se entiende que ambos límites laterales coinciden. Puede simbolizarse así:

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

Básicamente los límites pueden calcularse simplemente reemplazando la variable en la expresión
que corresponde. El Ejemplo 2.2 es muy útil para entender esto.

Si los límites laterales no coinciden en el mismo valor numérico diremos que no existe el límite de la función cuando x tiende al punto estudiado.

Segundo ejemplo

Si una función no está definida para x=1 como en el Ejemplo 2.3, es posible preguntarse cómo se comporta la función cuando x toma valores próximos a 1.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

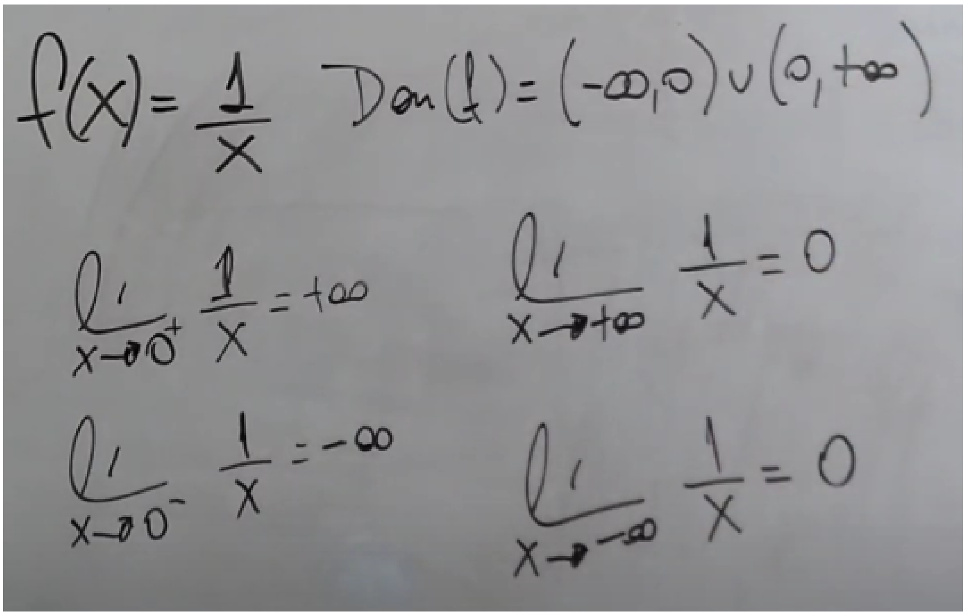
$$\begin{aligned}
g(0{,}75) &= \quad 1{,}75 \\
g(0{,}90) &= \quad 1{,}90 \\
g(0{,}99) &= \quad 1{,}99 \\
g(0{,}999) &= \quad 1{,}999 \\
g(1) & \quad\ \ \text{no existe} \\
g(1{,}001) &= \quad 2{,}001 \\
g(1{,}01) &= \quad 2{,}01 \\
g(1{,}1) &= \quad 2{,}1 \\
g(1{,}25) &= \quad 2{,}25
\end{aligned}$$

A partir de estos datos , no es difícil concluir que a medida que x toma valores cada vez más próximos a 1 (tanto por valores mayores como por menores), g(x) toma valores cada vez más próximos a 2. Entonces:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Observemos que aunque en este ejemplo la función no está definida en el punto x = 1, podemos concluir que el límite de f (x) cuando x → 1 existe y vale 2.

Tercer ejemplo



Al +∞ solo me puedo acercar por la izquierda. Al -∞ solo me puedo acercar por la derecha. No es necesario poner -0 en el último caso.

Definición 2.3

Se dice que el límite, cuando x tiende a x_0, de $f(x)$ es igual a L cuando los límites laterales existen y coinciden. Lo anterior se simboliza:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

En otras palabras, un límite existe si podemos acercar arbitrariamente (tanto como se desee) los valores de $f(x)$ a L escogiendo x lo suficientemente cercano a x_0 (tanto por valores mayores como por menores), pero no igual a x_0.

"Sí y solo sí" es básicamente un bicondicional ↔ visto en Matemática 0.

a) Si f es la función identidad, entonces para cualquier valor de x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

(b) Si f es la función constante, (función con el valor constante c), entonces para cualquier valor de x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$$

Resumen de casos (2025)

Existen tres casos vistos entre los ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3:

Si quiero calcular el límite de un punto que sí existe en la función. Si los límites laterales existen y coinciden, existe el límite de la función cuando x tiende al punto estudiado.

Si quiero calcular el límite de un punto que sí existe en la función. Si los límites laterales existen pero no coinciden, no existe el límite de la función cuando x tiende al punto estudiado.

Si quiero calcular el límite de un punto que no existe en la función pero observo valores próximos a ese punto. Si los límites laterales existen y coinciden en la aproximación a ese punto inexistente, existe el límite de la función cuando x tiende al punto estudiado.

Límites por sustitución directa

Propiedades algebraicas de los límites

Para calcular límites de funciones, que son a su vez combinaciones aritméticas de funciones con límites conocidos, utilizamos varias reglas sencillas.

Sean L, M, k y x_0 números reales.

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M$$

entonces,

1. Propiedad de la suma/diferencia entre funciones:
$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$

2. Propiedad del producto entre una constante y una función:
$\lim_{x\to x_0} k\, f(x) = k \lim_{x\to x_0} f(x) = k\,L$

3. Propiedad del producto de funciones:
$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x). \lim_{x\to x_0} g(x) = L.M$

4. Propiedad del cociente entre funciones:
$\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}, \qquad \text{si} \quad M \neq 0$

5. Propiedad de la potencia de una función:
$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n = [L]^n$, n entero positivo

6. Propiedad de la raíz de una función:
$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} = [L]^{1/n}$, n entero positivo

Aclaraciones:

1. Todas estas propiedades son válidas si los límites de las funciones existen. Es decir, si tienden a un valor numérico.
2. La propiedad del cociente no se puede utilizar cuando el límite del denominador es 0. Veremos más adelante como resolver este tipo de límites.

Importante: Propiedad de sustitución directa

Si f es una función polinómica, racional, exponencial, potencia racional, logarítmica o trigonométrica y además x_0 está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Es decir que en estos casos calcular un límite es tan sencillo como reemplazar el valor x_0 en la función.

Las funciones enumeradas no son las únicas con esta propiedad de sustitución directa. Aquellas funciones que cumplen esta propiedad se llaman continuas en x_0 y esas características se estudiarán en el próximo capítulo.

Límites que no se pueden calcular por sustitución directa

Algunos casos ocurren cuando la expresión en el límite incluye una división y el denominador tiende a 0. Podemos distinguir dos casos que involucran esta situación. Uno cuando el numerador también tiende a cero y el otro donde el numerador tiende a una constante no nula. Nos ocuparemos inmediatamente de esta última situación.

Límites que resultan infinitos

Aquellos límites donde la expresión incluye una división y solamente el denominador tiende a 0.

Ejemplo 2.7 Determinar el límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.

Como los valores de $f(x) = 1/x$ no se aproximan a un número real cuando x tiende a cero por derecha ni cuando x tiende a cero por izquierda, la conclusión es que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ **no existe**.

Pero este comportamiento de los valores de $f(x) = 1/x$ cuando x tiende a 0, requiere nuestra atención y una notación especial.

Si se escoge x lo bastante cerca de 0 por derecha, podemos ver que los valores de $f(x) = 1/x$ aumentan indefinidamente, en este caso diremos que los valores tienden a *más infinito*, lo indicaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Por otro lado si se escoge x lo bastante cerca de 0 por izquierda, podemos ver que los valores de $f(x) = 1/x$ disminuyen indefinidamente, en este caso diremos que los valores tienden a *menos infinito*, lo indicaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Esta notación no significa que consideremos ∞ como un número, ni tampoco que exista el límite.

Geométricamente, esto dice que la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ se acerca a la línea vertical $x = 0$, cuando $x \to 0$. Cuando esto ocurre, decimos que la recta $x = 0$ es una *asíntota vertical*.

Sobre el Ejemplo 2.9:

Observar que el razonamiento para concluir que la expresión tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ puede separarse en dos pasos. Primero observamos que el numerador tiende a un número distinto de cero mientras el denominador tiende a cero; con lo cual podemos deducir que el resultado se hará arbitrariamente grande (tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$). En segunda instancia estudiamos los signos del numerador y del denominador y, utilizando la regla de signos en el cociente, podemos concluir si el límite tiende a $+\infty$ o si tiende a $-\infty$.

Asíntotas

Ejemplo 2.7

> La **asíntota vertical** ocurre en la recta **x = 0**, que es precisamente el **eje y**.

> La **asíntota horizontal** ocurre en la recta **y = 0**, que es precisamente el **eje x**.

La asintota vertical está sobre el eje y. El eje y tiene ecuación x = 0 en el primer ejemplo. Una ecuación x = num es una linea vertical y una ecuación y = num es una línea horizontal.

- Una asíntota no forma parte de la función, pero es un elemento que nos sirve para graficar la función.
- Cuando x tiende a algún número (me acerco por izquierda o por derecha) y se va hacia +∞ o -∞, esa es la idea de la asíntota vertical.

Definición 2.4

La recta $x = x_0$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- La asíntota horizontal es similar, pero con la diferencia de que va hacia adelante o hacia atrás. La curva tiende a acercarse a y=0.
- El concepto de asíntota horizontal es que cuando vaya hacia +∞ (hacia delante en el eje x) la expresión tienda a un número fijo, y puede suceder lo mismo con -∞ (hacia atrás en el eje x) con el mismo número fijo, otro o ninguno.
- Acá queda más claro cómo calcular las asíntotas e identificarlas. Si x tiende a un determinado número, y reemplazo x, obtengo la asíntota vertical. Si x tiende a +**∞** o -**∞** y lo reemplazo, puedo obtener la asíntota horizontal:

La función $f(x)$ tiene $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2\}$, con lo cual $x = -2$ es candidato a asíntota vertical. Para verificarlo, tomemos los límites por derecha y por izquierda a ese valor.

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-2^-} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Como podemos observar en $x = -2$ hay una **Asíntota Vertical** ya que se cumple con la definición 2.4 . Recordemos que alcanza con que uno de los límites tienda a más o menos infinito para que haya una asíntota vertical.

Para analizar las asíntotas horizontales tomemos los límites a $+\infty$ y a $-\infty$ para saber si tienden a un valor $L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+3/x)}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+3/x}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/x}_{\to 1}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+3/x)}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{1+3/x}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/x}_{\to 1}} = 1$$

Voy a tener una asintota vertical cuando vea que el límite x que tiende a algún número (ya sea por izquierda o derecha) se vaya a +∞ o -∞ *(puede ser distinto de cada lado)*.

Voy a tener una asintota vertical cuando vea que el límite que tiende a +∞ o -∞ *tienda a un número fijo (puede ser distinto de cada lado).*

Los polinomios son continuos en todos los números reales, por lo que no tienen asíntotas verticales.

Asíntotas verticales

Hay una **asíntota vertical en $x = a$** si al acercarse x a a (por izquierda o derecha), la función crece sin límite:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Es decir: la función "explota" hacia infinito (positivo o negativo).

Asíntotas horizontales

Hay una **asíntota horizontal en $y = L$** si al irse x al infinito (positivo o negativo), la función se aproxima a un número:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

En este caso, L es la altura de la recta horizontal a la que se arrima la gráfica.

🔧 Entonces, resumiendo lo tuyo con correcciones:

- **Asíntota vertical**: el límite cuando x tiende a un número da $\pm\infty$.
- **Asíntota horizontal**: el límite cuando x tiende a $\pm\infty$ da un número fijo.

2) Asíntota horizontal u oblicua

Comparo grados:

- Numerador: grado 2.
- Denominador: grado 1.

👉 Cuando el numerador tiene **un grado mayor**, no hay asíntota horizontal.

Límites con x tendiendo al infinito

2.4.2. Límites con x tendiendo al infinito

También nos interesa examinar el comportamiento de las funciones a medida que x aumenta indefinidamente (simbolizado como $x \to +\infty$) o cuando x disminuye indefinidamente (simbolizado como $x \to -\infty$). Veamos el comportamiento de las funciones conocidas:

1. Funciones constantes:
$$\lim_{x\to+\infty} k = k \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} k = k.$$
2. Función identidad:
$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$
3. Función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

   Podemos ver que cuando tomamos valores muy grandes de x el resultado de la cuenta $\frac{1}{x}$ es muy chico, es decir que si $x \to +\infty$ entonces $\frac{1}{x} \to 0$. A este comportamiento lo escribiremos como,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Similarmente,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

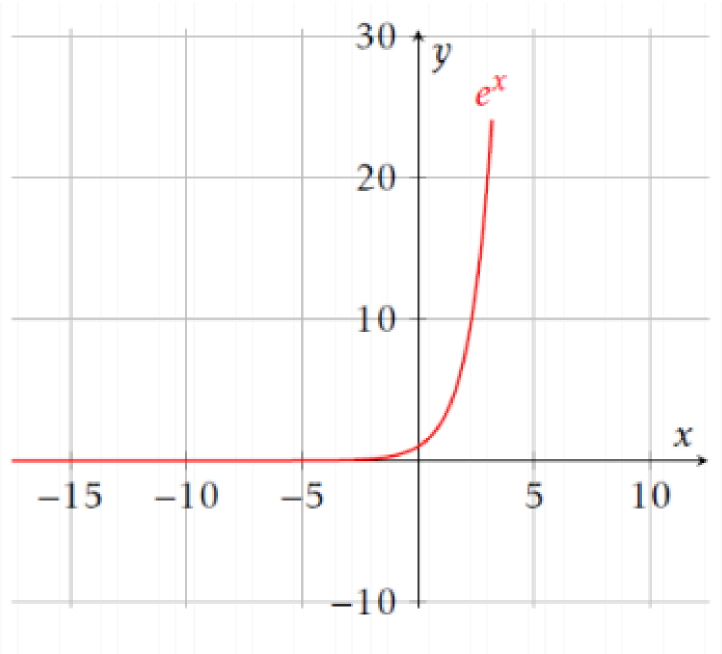
Observemos que la gráfica de f (ver la figura del Ejemplo 2.7) parece acercarse a la línea horizontal $y = 0$, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. En este caso, decimos que en $y = 0$ hay una *asíntota horizontal*.

En general, si t es un número racional ($t > 0$)
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0$$

4. Funciones exponenciales:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

.



Hay una asíntota horizontal en $y = 0$ (solamente hacia $-\infty$)

5. Funciones logarítmicas:

$$\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty.$$

En este caso no tomamos $\lim\limits_{x \to -\infty} ln(x)$ porque la función no está definida para esos valores.

Definición 2.5

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$, si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Límites indeterminados

A este tipo de límites se los llama límites indeterminados. Insistimos en aclarar que cuando el límite sea indeterminado **no significa que el límite no exista ni**

tampoco hay certeza de que el límite exista, sino que debemos hacer algo para poder calcularlo y determinar si existe o no.

La idea para resolver esta clase de límites es modificar algebraicamente la expresión, sin modificar el resultado, para que luego pueda calcularse el límite. A este proceso en el cual modificamos la expresión para poder calcular un límite indeterminado le decimos usualmente **salvar la indeterminación.**

En ambos ejemplos (2.12 y 2.13), para poder dar una respuesta, lo que hicimos fue calcular el límite de una función sobre la cual no se pueden aplicar las propiedades, **reemplazándola por otra expresión que es equivalente a la anterior sobre la que sí podemos sacar conclusiones**. Aunque dimos un argumento de por qué se puede hacer este cálculo, enunciamos a continuación el teorema que sustenta ese método.

Teorema 2.4.1

Sean f y g dos funciones tales que $f(x) = g(x)$ para x cercanos a x_0 pero quizá no en $x = x_0$.

Entonces: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Hay que utilizar factor común, factorización y multiplicación (al numerador y al denominador) por el conjugado de la expresión que tiene el radical. Dentro de la factorización hay diversos casos. No es lo mismo obtener el límite indeterminado de una función polinómica que el límite de cociente de polinomios.

Límites especiales: orden de magnitud

Solo aplica con x tendiendo al infinito.

Cuanto más grande es el numerador, mayor será el resultado. Cuanto más grande es el denominador, menor será el resultado.

Cuanta mayor diferencia exista entre el numerador y denominador, mayor será el resultado. Cuanto menor sea la diferencia entre el numerador y denominador, menor será el resultado.

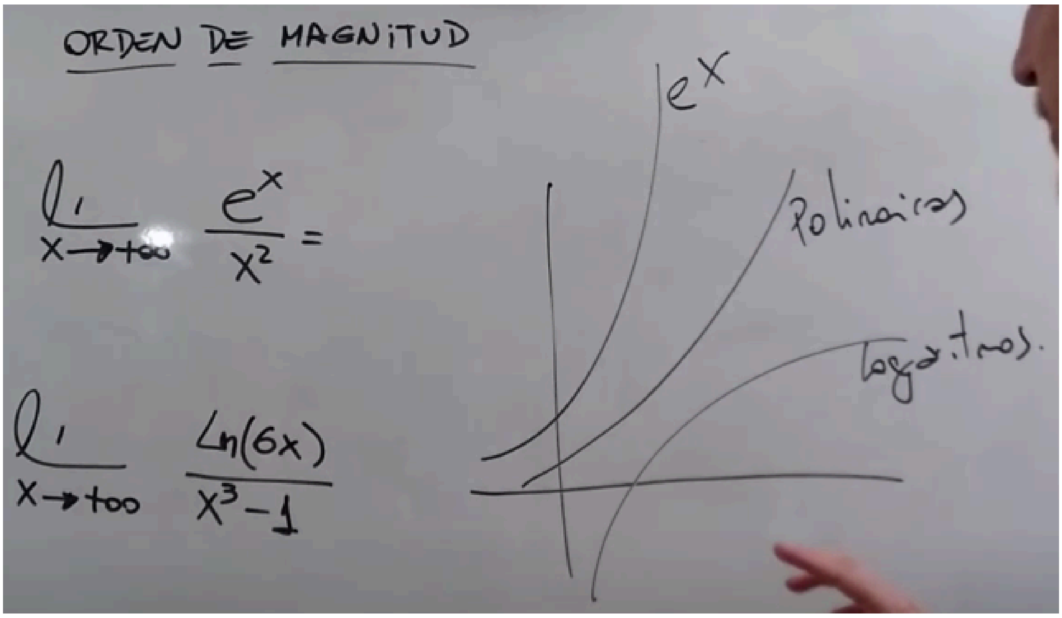
Las funciones exponenciales son mucho más grandes que las funciones polinómicas si sigo hacia adelante (en dirección al infinito) y la diferencia se hace cada vez más grande.

Sea $\alpha > 0$, se tiene que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

  Esto nos dice que el crecimiento de una función exponencial es más rápido que el de cualquier potencia (positiva) de x, cuando $x \to +\infty$
  Lo indicamos de la siguiente manera: $e^x >> x^\alpha$

Las tres van hacia el infinito pero a distintas velocidades.



Cuadro resumen

Límites Determinados		Límites Indeterminados	
$\dfrac{f \to k}{g \to 0} = \infty$	$\dfrac{f \to 0}{g \to k} = 0$		
$\dfrac{f \to k}{g \to \infty} = 0$	$\dfrac{f \to \infty}{g \to k} = \infty$	$\dfrac{f \to 0}{g \to 0}$	
$\dfrac{f \to \infty}{g \to 0} = \infty$	$\dfrac{f \to 0}{g \to \infty} = 0$	$\dfrac{f \to \infty}{g \to \infty}$	
$\dfrac{f \to k}{g \to m} = \dfrac{k}{m}$			
$(f \to k) \cdot (g \to m) = k \cdot m$			
$(f \to \infty) \cdot (g \to \infty) = \infty$			
$(f \to k) \cdot (g \to \infty) = \infty$		$(f \to \infty) \cdot (g \to 0)$	
$(f \to k) + (g \to \infty) = \infty$			
$(f \to +\infty) + (g \to +\infty) = +\infty$		$(f \to +\infty) - (g \to +\infty)$	
$(f \to -\infty) + (g \to -\infty) = -\infty$		$(f \to +\infty) + (g \to -\infty)$	
$(f \to t)^{(g \to +\infty)} = +\infty$	con $t > 0$	$(f \to 0)^{(g \to +\infty)}$	$(f \to 0)^{(g \to 0)}$
$(f \to t)^{(g \to -\infty)} = 0$	con $t > 0$		