

3.2.1 Ejercicios - Página 76

1) a) $f(x) = |x-2| + 3$ en $x=2$

• $f(2) = |x-2| + 3 = |2-2| + 3 = 0+3 = 3 \rightarrow f(2) = 3$

• $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x-2| + 3 = 3$

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x-2| + 3 = 3$

• $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

• Como se cumplen las 3 condiciones, la función $f(2)$ es continua.

NOTA

b) $g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ en $a = 2$

• $g(2) = \frac{2^2 - 25}{2 - 5} = \frac{4 - 25}{2 - 5} = \frac{-21}{-3} = 7$

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2^2 - 25}{x - 5} = 7$

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^2 - 25}{x - 5} = 7$

$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

• Como se cumplen las 3 condiciones
 $f(2)$ es continua.

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$

• $h(0) = 0$

• Es una discontinuidad inevitable porque no existe el límite de la función en $x=0$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$

③ $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ¿Es continua en $x = -1$, en $x = 1$?

• $f(-1) = -2(-1) + 1 = 2 + 1 = 3$

• $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2x + 1 = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2(-1) + 1 = 3$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$

• Es una discontinuidad inevitable porque no existe el límite de la función en $x = 1$.

HOJA N°

FECHA

$$\bullet f(1) = 1$$

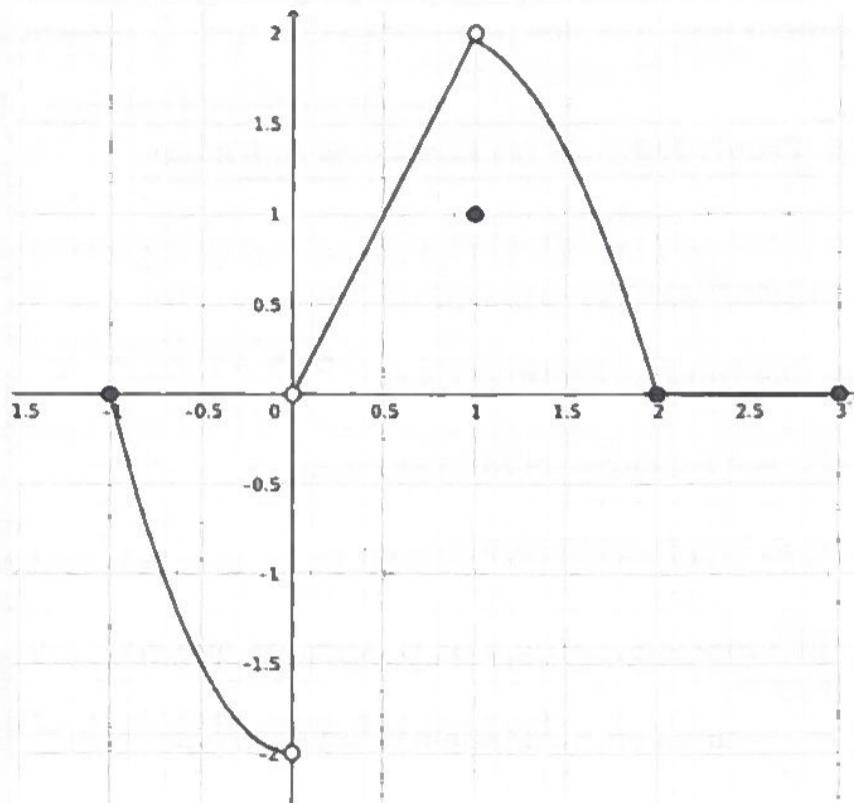
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1} = 1$$

• Se cumplen las 3 condiciones por lo que

$f(1)$ es continua

2. A partir de la siguiente gráfica de $f(x)$:



Responder:

a) ¿Existe $f(-1)$? Sí

b) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$? Sí

c) ¿ $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$? Sí

d) ¿Existe $f(0)$? No

e) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? No

f) f es continua en $a = 0$? No, inevitable

g) ¿Existe $f(1)$? Sí

h) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Sí

i) f es continua en $a = 1$? No, evitable

j) f es continua en $a = 2$? Sí

k) f es continua en $a = 3$? Sí, es continua por izquierda

✓ 3. Dada la siguiente función decidir si es continua en $x = -1$ y en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.3.1 Ejercicios - Página 80

1a) $f(x) = \frac{1}{x-2} - 3x \rightarrow$ Conjunto de continuidad $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) $g(x) = 2e^{2x+1} \rightarrow$ Conjunto de continuidad $(-\infty, +\infty)$

c) $h(x) = \frac{\cos(x)}{x+3} \rightarrow$ Conjunto de continuidad $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

2)

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > -2 \\ kx^2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases} \rightarrow \text{Función a trozos}$$

• Para $x < -2$ es continua por ser una función polinómica

• Para $x > -2$ es continua por ser una función polinómica

• Imparce la continuidad en el punto de pegado $x = -2$

$$\cdot g(-2) = k \cdot (-2)^2 = k4$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} kx^2 = \lim_{x \rightarrow -2^-} k(-2)^2 = k4$$

$$2 = 4k \rightarrow k = \frac{2}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} -x = \lim_{x \rightarrow -2^+} -(-2) = 2$$

Si $k = \frac{1}{2}$, g es continua

también en $x = -2$, por lo que

resulta continua en todo su dominio

$$\text{Si } k = \frac{1}{2}$$

NOTA

3) ¿Es continua en $[-2,5]$? \rightarrow Intervalo cerrado.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

• Continuidad en el intervalo $[2,3]$: es una función racional. Se debe evitar que el denominador = 0 $\rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow 3$ no se incluye en el intervalo, por lo que la función es continua en este intervalo.

• Continuidad en el intervalo $[3,5]$: es continua por ser una función polinómica.

• Imponer la continuidad en el punto de pegado $x = 3$

$$\cdot h(3) = x^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6.$$

$$\cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 3^- \\ \rightarrow 0}} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - 9}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Diferencia de cuadrados

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

El límite existe \rightarrow la función es continua en $x = 3$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$\text{Asimismo } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

• Límite derecho del intervalo cerrado $[a,b] = [-2,5]$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(2)^2 - 9}{2 - 3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

• Es continua por la derecha en a

• Límite izquierdo del intervalo cerrado $[a,b] = [-2,5]$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 - 3 = 25 - 3 = 22$$

• Es continua por la izquierda en b

HOJA N°

FECHA

• $h(x)$ es continua en $[-2, 5]$ porque se cumplen los siguientes ítems

• h es continua en todos los puntos interiores

• h es continua por la derecha en $-2 \rightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

• h es continua por la izquierda en $5 \rightarrow f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$