Resumen - Unidad 4

Derivadas

Puede interpretarse como la tasa de crecimiento de una función.

La derivada nos va a decir cómo es el crecimiento en cada uno de los puntos de una función.

> **Definición 4.1 Variación total**
>
> Dada una función definida en un intervalo $[a,b]$ la **variación total de f entre a y b** se define como la diferencia entre las imágenes de b y de a respectivamente.
> Es decir $f(b)-f(a)$ (denotado como Δf).

En el ejemplo anterior, podríamos considerar que el vehículo se desplazó a 84 km/h en promedio. Pues recorrió un total de 168 km en 2 hs. con lo cual podríamos calcular su velocidad promedio. Si reflexionamos acerca del cálculo que hicimos para conocer ese promedio podríamos observar que se puede expresar así:

$$\frac{f(14)-f(12)}{14-12} = \frac{383-215}{2} = 84$$

Definamos ahora ese concepto para cualquier función f en un intervalo $[a,b]$

> **Definición 4.2 Variación promedio (o variación media)**
>
> Si f es una función definida en un intervalo $[a,b]$ la **variación promedio de f entre a y b** se define como el cociente entre la variación total de f y la longitud del intervalo considerado.
>
> Anotamos $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Cuando la variable independiente se mueve en cierto intervalo $[a,b]$, la variación total describe cuánto cambia f entre a y b, mientras que la variación promedio representa **la tasa promedio o razón de cambio promedio** de la función f en ese intervalo.

Siempre hay que observar (leer) de izquierda a derecha en los gráficos.

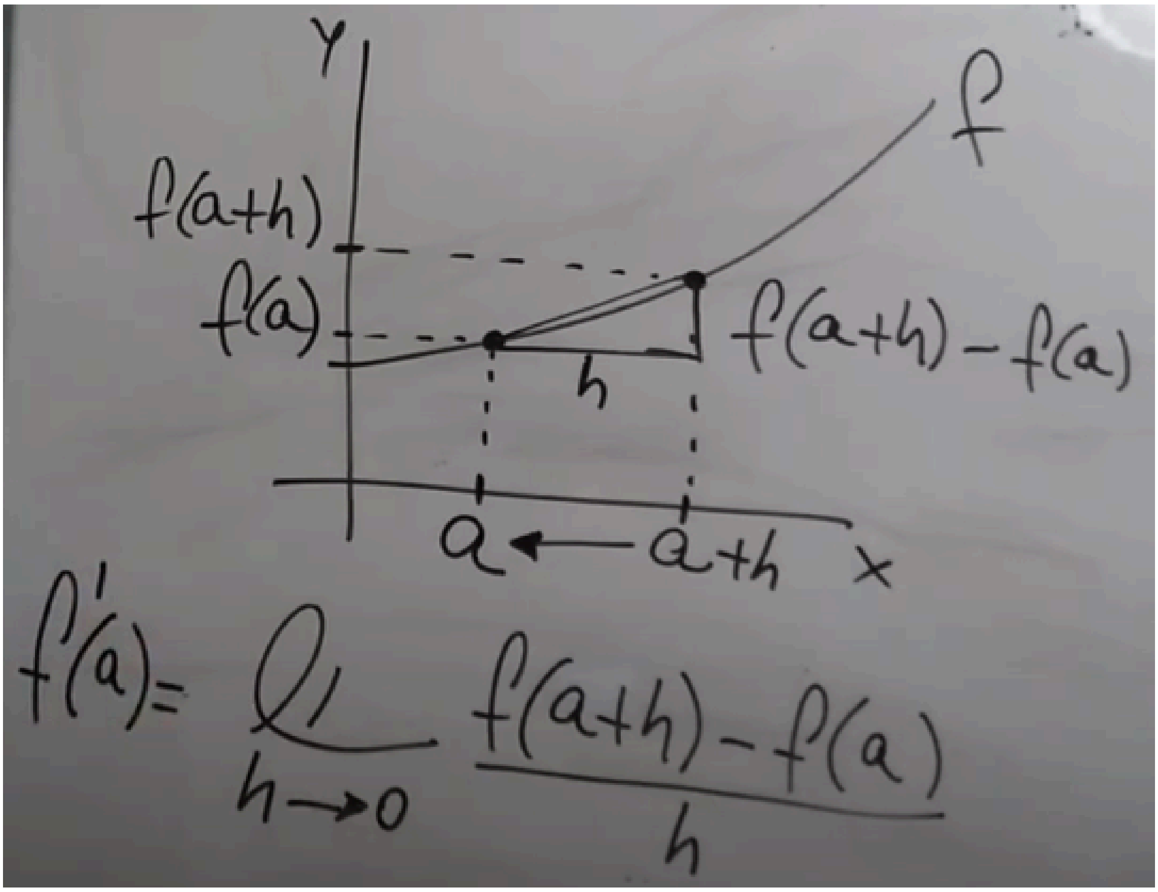
Introducción

La tangente del ángulo es igual a la pendiente de la recta. La derivada es igual a la pendiente. La tangente es el cateto opuesto divido por el cateto adyacente.

Hay que hacer dos restas previas para calcular esos dos elementos cuando no se utiliza h. Si se utiliza h se realiza una sola resta.

Recta secante: corta por dos puntos elegidos que forman parte de la función, es una aproximación mala.

Al acercar muchos los dos puntos obtengo la pendiente de la recta tangente (inclinación de la recta o curva). A eso se le llama derivada.



La variación instantánea de una función f en un punto x_0 es la derivada de f en x_0.

Calcular derivada por definición

No se utilizará siempre pero es fundamental para las funciones a trozos. Debe existir el límite (coincidir por ambos lados) para ser derivable en x punto.

Definición 4.3

Dada f una función definida en un intervalo abierto decimos que existe la derivada en x_0 (perteneciente a ese intervalo) si existe el siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En tal caso se dice que f es *derivable* en x_0.

Aclaraciones:

- Como la derivada es un límite, éste existirá si los límites laterales existen y son iguales.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad y \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  .

  Estos límites se denominan **derivadas laterales**.

- La expresión $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se llama *cociente incremental* (ó cociente de Newton).

- Hay otras notaciones para la derivada de una función.
  Si escribimos $y = f(x)$ las siguientes son alternativas para la notación.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f$$

Definición 4.4

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a, b).
Diremos que f es derivable en (a, b) si es derivable en cada punto del intervalo (a, b)

Reglas de derivación

Para que una función sea derivable, en principio trato de hacer la derivada, pero existen una serie de condiciones. La función no debe tener un pico (debe ser suave) en ese valor, y tiene que ser continua. Si tiene un salto en ese punto no es continua.

La derivada nos informa sobre la función en el punto que queremos calcular, nos da la recta de la pendiente tangente en ese punto o mejor dicho el crecimiento de la curva en ese punto.

Teorema 4.5.1

i. Derivada de una función constante $f(x) = c$ $\quad f'(x) = 0.$

ii. Derivada de una función potencia $(n \in \mathbb{R})$ $f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = n\,x^{n-1}$

iii. Derivada de una función exponencial $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

iv. Derivada de una función logarítmica $f(x) = ln(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

v. Derivada de una función seno $f(x) = sen(x)$ $\quad f'(x) = cos(x)$

vi. Derivada de una función coseno $f(x) = cos(x)$ $\quad f'(x) = -sen(x)$

Las siguientes **propiedades de la derivada** pueden servir como reglas para combinar con las antes dadas y amplían aún más el universo de derivadas que podemos calcular sin recurrir a la definición.

Teorema 4.5.2

Si f y g son funciones derivables en x y c una constante, valen las siguientes reglas

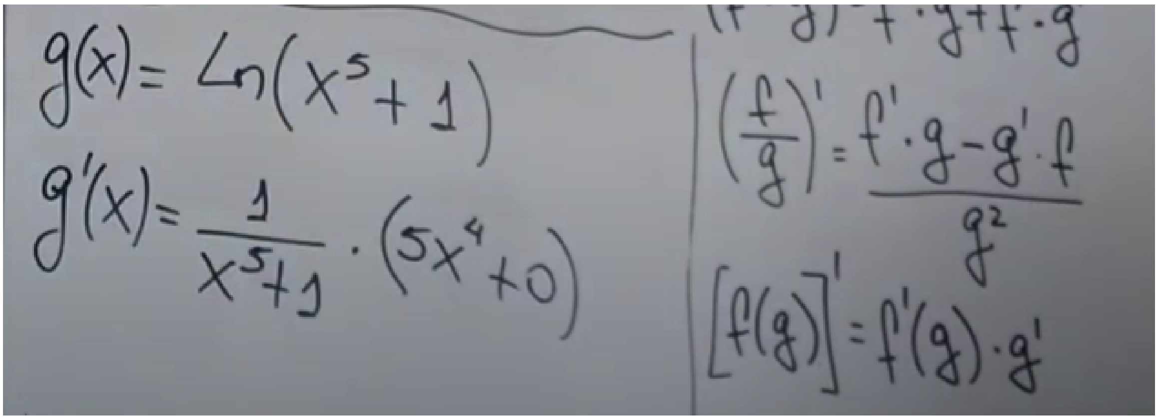
1. Derivada de una función por una cte. c $\quad (c\,f(x))' = c\,f'(x)$

2. Derivada de una suma/resta: $\quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g(x)'$

3. Derivada de un producto: $\quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4. Derivada de un cociente: $\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

5. Derivada de una composición: $\quad (f \circ g)'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$



Funciones no derivables

Hemos visto que para que una función sea derivable en un punto x_0 del dominio debe existir el límite, cuando h tiende a 0, del cociente incremental de f en x_0. A su vez, como hemos aprendido en capítulos previos, para que ese límite exista deben existir ambos límites laterales y coincidir. En este capítulo hemos llamado *derivadas laterales* a los límites laterales del cociente incremental.

Entonces, para que una función resulte derivable en un x0, lo que debemos chequear es que las derivadas laterales coincidan. Si la función no es derivable en x0 = 0 entonces tampoco existe recta tangente en x0 = 0.

Derivabilidad y continuidad

Este ejemplo nos permite concluir que la continuidad de una función en x_0 no alcanza para garantizar la derivabilidad de la función en x_0.
En un lenguaje algo más formal decimos que *la continuidad no es condición suficiente para establecer la derivabilidad de una función.*
Sin embargo lo contrario sí es válido.

El siguiente teorema establece que la derivabilidad de una función en x_0 es una *condición suficiente* para asegurar la continuidad de esa función en el valor x_0.

Teorema 4.4.1
Si una función f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

Recta tangente

Anteriormente vimos que la derivada de una función en un punto x_0 es la variación instantánea de f en x_0. Geométricamente, $f'(x_0)$ **es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente será

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Hay ejemplos muy útiles en el libro.

Segunda derivada

📌 Resultado final de la primera derivada:

- La forma con exponente negativo es más “compacta” y cómoda para derivar.

- La forma con fracción es más clara para “leer” el resultado.

En resumen: **las dos respuestas son correctas**, depende del estilo que prefiera el profe o vos.

Aplicaciones de la derivada

La derivada puede entenderse como la tasa de crecimiento de una función, con lo cual con su información podemos saber si una función crece o decrece.

El objetivo de esta sección es estudiar cómo el conocimiento de la derivada y la derivada segunda de una función nos brinda información acerca de la función misma.

Valores extremos de una función

Los máximos o mínimos de una función siempre son puntos críticos o extremos del intervalo, pero no necesariamente todos los puntos críticos representan un valor extremo local.

Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I = [a, b]$ y x_1, x_2 dos puntos cualesquiera de I:

Definición 4.10
Se dice que una función f es **creciente** en I si $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Definición 4.11
Se dice que una función f es **decreciente** en I si $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

El siguiente teorema afirma que las funciones con derivada positiva son crecientes y las funciones con derivada negativa son funciones decrecientes.

Teorema 4.8.3 Crecimiento y decrecimiento de una función

Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces:

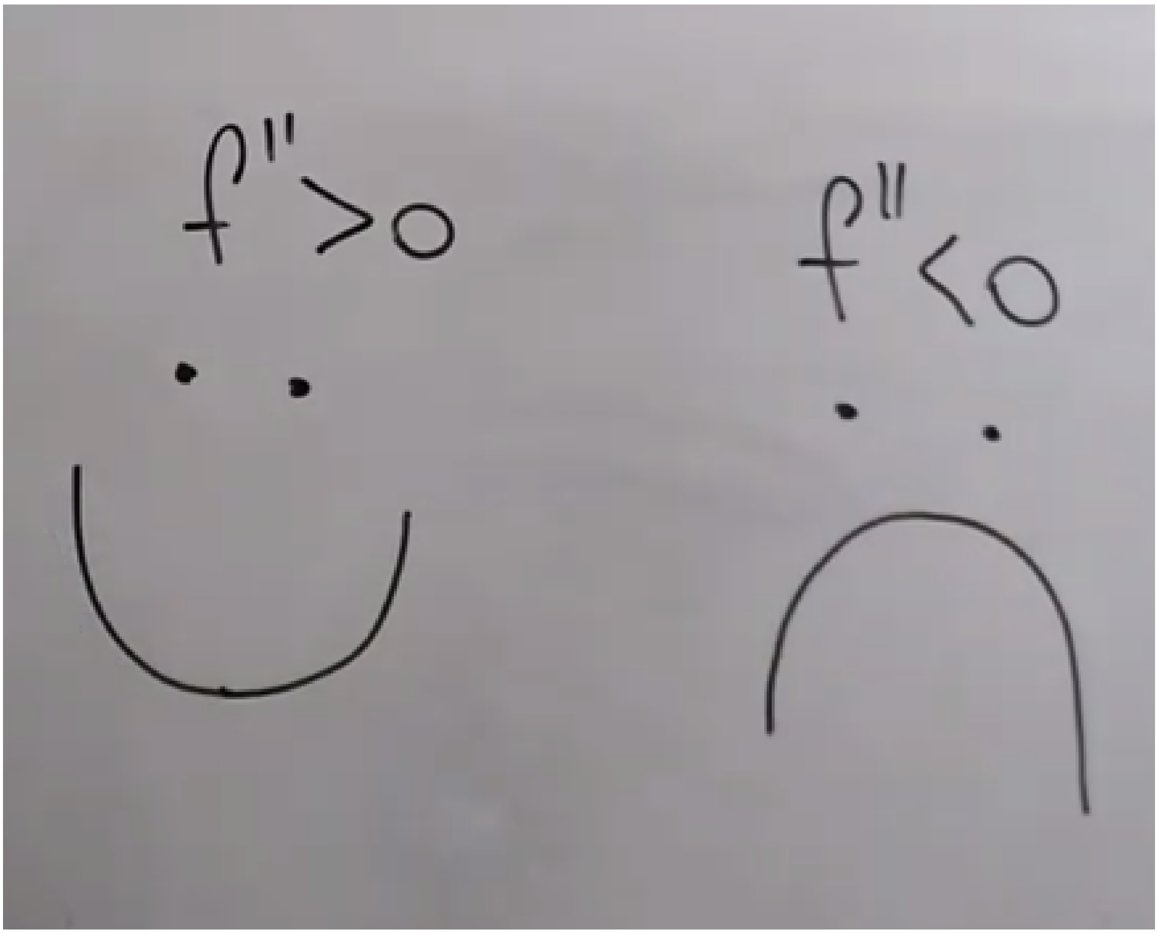
- Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

La derivada nos dice cuál es la pendiente de la recta tangente = el crecimiento o inclinación en cada punto.

Cuando voy subiendo y después empiezo a bajar me encuentro con un máximo local, y cuando vengo bajando y después empiezo a subir me encuentro con un mínimo local.

Si la derivada es negativa, la inclinación es negativa, Si la derivada es positiva, la inclinación es positiva.

Concavidad



Los puntos de inflexión son puntos donde cambia la concavidad. Para obtener los puntos de inflexión se iguala la segunda derivada a 0, tal como se hace con la primera derivada para obtener los puntos críticos.

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

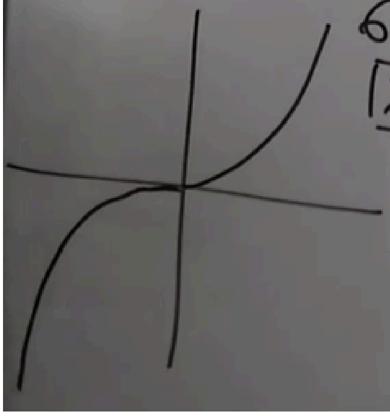
$f''(x) = 6x$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
f'	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$

busco posibles puntos de inflexión $f''=0$

$6x = 0$

$\boxed{x = 0}$



	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$