

Ejercicios 4.1 - Página 88

1)  $f(x) = x^3 + 1$  en  $x=0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^3 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} =$$

$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0^2 = 0$ . Por lo tanto la derivada de la función  $f(x) = x^3 + 1$  en  $x=0$  es 0.

2)  $f(x) = 2x$  para todo valor de  $x$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+2h-2x}{h} =$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$ . Por lo tanto la derivada de una función  $f(x) = 2x$  es 2 para cualquier valor de  $x$ .

3)  $f(x)$  en  $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Derivadas laterales}$$

NOTA

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0$$

• Por lo tanto la derivada de la función en  $x=0$  existe y es 0.

### Actividad 4.2 - Página 90

a)  $f(x) = 5x^3 + 2x + 8 \rightarrow f'(x) = (5x^3)' + (2x)' + (8)' \quad (\text{Regla 2})$

$$f'(x) = 15x^2 + 2x^0 + 0 \quad (\text{Reglas II, III y I})$$

$$f'(x) = 15x^2 + 2 \cdot 1 + 0$$

$$\boxed{f'(x) = 15x^2 + 2}$$

b)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5x^8 - \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' + (5x^8)' - (\sqrt{x})' \quad (\text{Regla 2})$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^{\frac{1}{3}-1} + (8 \cdot 5x^7) - x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Regla II})$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \quad (\text{Regla I})$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

c)  $f(x) = \frac{\pi x^{\frac{2}{3}}}{x+1} \rightarrow f'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{Regla 4})$

$$= \frac{(\pi x^{\frac{2}{3}})' \cdot (x+1) - (\pi x^{\frac{2}{3}}) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} \quad (\text{Regla 4})$$

$$= \frac{\left(\pi \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\right) \cdot (x+1) - (\pi x^{\frac{2}{3}}) \cdot (x^0+0)}{(x+1)^2} \quad (\text{Reglas II, I})$$

$$= \frac{\left(\frac{2\pi}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot (x+1) - (\pi x^{\frac{2}{3}}) \cdot (1)}{(x+1)^2} \rightarrow \text{simplificar el } (1) ?$$

$$d) f(x) = \frac{2x}{4x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{(f(x))'}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{regla 4})$$

$$= \frac{2 \cdot (4x+1) - (2x) \cdot (4+0)}{(4x+1)^2} \quad (\text{reglas II, I})$$

• No puede terminar así?  $\rightarrow = \frac{2 \cdot (4x+1) - (2x) \cdot (4)}{(4x+1)^2}$   
Sí ✓

$$= \frac{8x+2 - 8x}{(4x+1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{2}{(4x+1)^2}}$$

$$e) f(x) = (x^2 - 2) \cdot (x+4) \rightarrow f'(x) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$= (x^2 - 2)' \cdot (x+4) + (x^2 - 2) \cdot (x+4)' = (2x^1) \cdot (x+4) + (x^2 - 2) \cdot ((x)' + (4)') =$$

$$= (2x) \cdot (x+4) + (x^2 - 2) \cdot (1+0) = (2x) \cdot (x+4) + (x^2 - 2) \cdot (1) = (2x^2 + 8x) + (x^2 - 2) =$$

$$= 2x^2 + 8x + x^2 - 2 = \boxed{3x^2 + 8x - 2}$$

$$g) f(x) = \ln(x-4) + 1 \rightarrow f'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\ln(x-4))' + (1)' =$$

$$= \left( \frac{1}{x-4} \cdot (1-0) \right) + 0 = \frac{1}{x-4} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{x-4} + 0 = \boxed{\frac{1}{x-4}}$$

$$h) f(x) = e^{x^2+1} - x \rightarrow f'(x) = e^{x^2+1} \cdot (x^2+1)' - (x)' = e^{x^2+1} \cdot (2x+0) - 1 =$$

$$= e^{x^2+1} \cdot 2x - 1 =$$

↑  $2xe^{x^2+1} - 1$  • Es costumbre escribir el término polinómico

antes que el exponencial.  $\rightarrow$  No es obligatorio

$$\text{Derivada de } f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} =$$

$$= \frac{(1)' \cdot (x) - (1) \cdot (x)'}{(x)^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{Pendiente } m = f'(1) = -\frac{1}{(1)^2} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$$

### Actividad 4.3 - Página 92

1) Encontrar la recta tangente a  $f(x) = x^2 + 1$  en el punto  $(2, 5)$

• Encontrar la pendiente

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\text{Pendiente } m = f'(2) = 2 \cdot (2) = 4 \rightarrow \boxed{m = 4}$$

• Escribir la ecuación de la recta tangente con el punto  $(2, 5)$  y  $m = 4$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 5 = 4 \cdot (x - 2)$$

$$y - 5 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 8 + 5$$

$$\boxed{y = 4x - 3} \rightarrow \text{Fórmula } y = m \cdot x + b$$

2) Encontrar la recta tangente a  $h(x) = \ln(x-3)$  en el punto  $(5, \ln(2))$

• Encontrar la pendiente ..

$$h(x) = \ln(x-3) \rightarrow h'(x) = \frac{1}{x-3} \cdot 1 = \frac{1}{x-3} \rightarrow \boxed{h'(x) = \frac{1}{x-3}}$$

$$\text{Pendiente } m = h'(5) = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

• Escribir la ecuación de la recta tangente con el punto  $(5, \ln(2))$  y  $m = \frac{1}{2}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - \ln(2) = \frac{1}{2} \cdot (x - 5)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + \ln(2)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x > 2 \\ 0 > 2-x}} \frac{\overbrace{x+1}^{> 0}}{\underbrace{2-x}_{< 0}} = -\infty$$

3) Determinar el o los puntos y la o las rectas tangentes con pendiente  $m=5$  de la función  $f(x) = x^3 + 2x + 1$

• Averiguar derivada de la función

$$f(x) = x^3 + 2x + 1 \rightarrow f'(x) = (x^3)' + (2x)' + (1)' = 3x^2 + 2 \cdot 1 + 0 = \\ = 3x^2 + 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

Hallar que valor o valores de X cumplen que  $3x^2+2=5$

$$3x^2 + 2 \leq 5$$

$$3x^2 = 5 - 2$$

$$x^2 = \frac{3}{13}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \rightarrow x = 1$$

$$X = -1$$

La recta tangente tiene pendiente  $m = 5$  en los puntos  $x = -1$  y  $x = 1$ .

Determinar los puntos de la tangente para  $x = -1$ ,  $x = 1$

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 + 1 = 1^3 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$y = f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2$$

• Constituir ecuaciones de las rectas tangentes

Recta en el punto  $P_1(1, 4)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 4 = 5.(x - 1)$$

$$y = 5x - 5 + 4$$

$$\boxed{y = 5x - 1}$$

Recta en el punto  $P_2(-1, -2)$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - (-2) = 5.(x - (-1))$$

$$y + 2 = 5(x + 1)$$

$$y = 5x + 5 - 2$$

$$\boxed{y = 5x + 3}$$

4) Determinar el punto  $y$ , la recta tangente con pendiente  $m=1$  de la función  $f(x) = e^x + 2$ .

• Averiguar derivada de la función

$$f(x) = e^x + 2 \rightarrow f'(x) = (e^x)' + (2)' = e^x \cdot 1 + 0 = \boxed{e^x}$$

• Hallar valor de  $x$  que cumple  $e^x = 1$ : 1

$$f'(x) = 1$$

$$e^x = 1$$

• Determinar el punto de la tangente para  $x=0$

$$\boxed{x = 0}$$

$$f(0) = e^0 + 2 = 1 + 2 = \boxed{3}$$

• Constituir ecuación de la recta tangente  $(0, 3)$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$\boxed{y = x + 3}$$

Actividad 4.4 - Página 94

① Hallar  $f''(x)$  de las funciones a) b) d) g) y l)

a)  $f(x) = 5x^3 + 2x + 8 \rightarrow f'(x) = 15x^2 + 2 \rightarrow f''(x) = (15x^2)' + (2)' = 2 \cdot 15x + 0 = 30x \rightarrow f''(x) = 30x$

b)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5x^8 - \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 40x^7 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)' + (40x^7)' =$   
 $= \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 7 \cdot 40x^6 + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 280x^6 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$   
 $\boxed{f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 280x^6 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}$

d)  $f(x) = \frac{2x}{4x+1} \rightarrow f'(x) = \cancel{\frac{2}{(4x+1)^2}} \rightarrow f''(x) = \cancel{\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}} =$

$$\cancel{(2)' \cdot (4x+1)^2 - (2) \cdot ((4x+1)^2)' =} \quad \cancel{0 - 2 \cdot (2 \cdot 4x+1) =} \quad \cancel{-2 \cdot (8x+2) =} \\ \cancel{\frac{(4x+1)^2}{(4x+1)^2}} \quad \cancel{(4x+1)^5} \quad \cancel{16x+4}$$

d)  $f(x) = \frac{2x}{4x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{(4x+1)^2} = 2 \cdot (4x+1)^{-2} \rightarrow f''(x) = (2)' \cdot ((4x+1)^{-2})' =$

$$= 2 \cdot -2(4x+1)^{-3} \cdot (4x+1) = 2 \cdot -2(4x+1)^{-3} \cdot 4 = 2 \cdot -8(4x+1)^{-3} = \boxed{-16(4x+1)^{-3}}$$

g)  $f(x) = \ln(x-4) + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-4} = (x-4)^{-1} \rightarrow f''(x) = -1 \cdot (x-4)^{-2} \cdot (1-0) =$   
 $= -1(x-4)^{-2} \cdot 1 = \boxed{-1(x-4)^{-2}}$

D)  $f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \sec^2(x) \rightarrow f''(x) = 2 \cdot \sec(x) \cdot \sec(x) \cdot \tan(x) =$   
 $= 2 \sec^2(x) \cdot \tan(x)$

$$2) f(x) = x^5 - 3x^3 - 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 - 3 - 0 \rightarrow f''(x) =$$

$$= 4 \cdot 5x^3 - 2 \cdot 9x - 0 = 20x^3 - 18x \rightarrow f'''(x) = 3 \cdot 20x^2 - 18 = 60x^2 - 0 \rightarrow$$

$$f''''(x) = 2 \cdot 60x = 120x \rightarrow f''''(x) = 120 \rightarrow f''''(x) = 0$$

Actividad 4.5 - Página 99

$$\textcircled{a}) f(x) = 6x^2 - x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 6x - 3x^2 = 12x - 3x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$12x - 3x^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} 3x(4-x) = 0 \rightarrow \text{Puntos críticos de } f(x) = 0 \text{ y } 4 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ x=0 \quad x=4 \end{array}$$

$$\textcircled{b}) f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \rightarrow f'(x) = 2x + \frac{(2)'(x) - (2)(x)'}{(x)^2} = 2x + \frac{0 \cdot x - (2,1)}{x^2} =$$

$$\boxed{2x - \frac{2}{x^2}} \quad \text{Dom} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x - \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \cdot x^2 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{2} \rightarrow x = 1$$

$$\textcircled{c}) f(x) = \frac{-x^2}{x-2} \rightarrow f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x-2) - (x^2) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{-2x \cdot (x-2) - (x^2) \cdot (1)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{-2x \cdot (x-2) - (x^2)}{(x-2)^2} = \frac{-2x^2 + 4x - x^2}{(x-2)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}}$$

$$\text{Dom} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) = 0$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$-\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow -\frac{x^2 - 4x}{x-2} = \sqrt{0} \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \cdot x-2 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \rightarrow$$

2) a)  $f(x) = -x - 4$  en  $[-4, 1]$

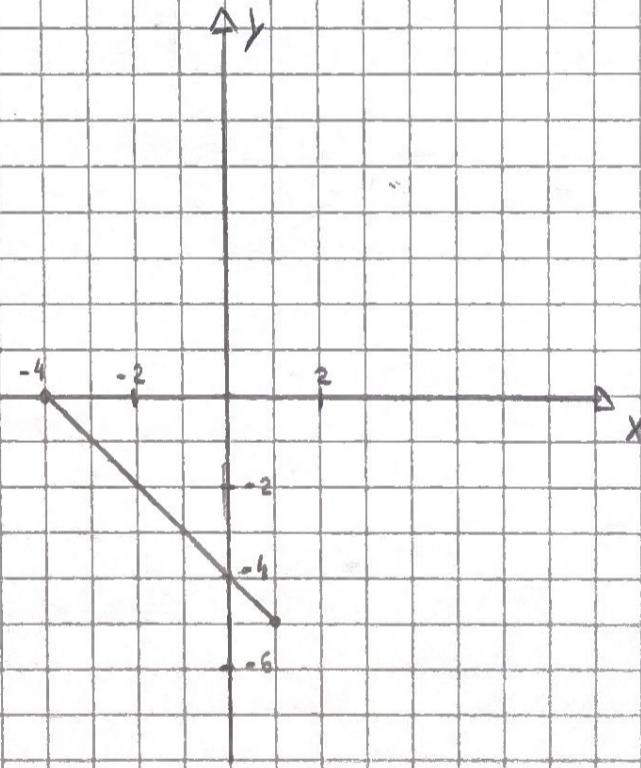
• obtener todos los puntos críticos que pertenecen al interior del intervalo.

$f(x) = -x - 4 \rightarrow f'(x) = -1 \rightarrow$  No hay forma de igualar la derivada a 0 = no existen puntos críticos.

• Evaluar a  $f(x)$  en los puntos extremos del intervalo cerrado

$$f(-4) = -(-4) - 4 = 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{en } (-4, 0) \text{ hay un máximo absoluto.}$$

$$f(1) = -(1) - 4 = -1 - 4 = -5 \rightarrow \text{en } (1, -5) \text{ hay un mínimo absoluto.}$$



b)  $f(x) = 4 - x^2$  en  $[-3, 1] \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(x) = 0$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

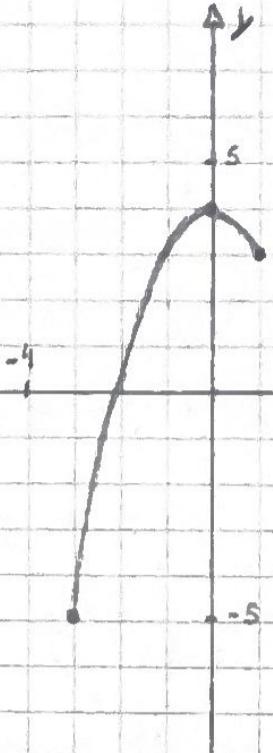
$$f(0) = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4 \rightarrow \text{en } (0, 4) \text{ hay un máximo absoluto}$$

$x = 0 \rightarrow$  Punto Crítico

$$f(-3) = 4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5 \rightarrow$$

en  $(-3, -5)$  hay un mínimo absoluto

$$f(1) = 4 - (1)^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow (1, 3)$$



$$\text{C) } f(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ en } \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow f'(x) = -(x)^{-2} \rightarrow f'(x) = -(-2 \cdot x)^{-3} = -(-2x)^{-3} = 2x^{-3} = \\ = 2 \cdot (x)^{-3} = \frac{2}{x^3} \circ 2(x)^{-3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \frac{2}{x} = \sqrt[3]{0} \rightarrow \frac{2}{x} = 0 \rightarrow 2 = -x \rightarrow x = -2$$

No existen puntos críticos

Pero 0 no está en el intervalo  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -(1.4) = -4 \rightarrow \text{en } \left(\frac{1}{2}, -4\right) \text{ hay un mínimo absoluto}$$

$$f(2) = -\frac{1}{(2)^2} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{en } \left(2, -\frac{1}{4}\right) \text{ hay un máximo absoluto}$$

