3.2.1 Ejercicios - Página 76

1) a) $f(x) = |x-2| + 3$ en $a = 2$

- $f(2) = |x-2| + 3 = |2-2| + 3 = 0 + 3 = 3 \rightarrow f(2) = 3$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} |x-2| + 3 = 3$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} |x-2| + 3 = 3$

- $\boxed{f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3}$

- Como se cumplen las 3 condiciones, la función f(2) es continua.

NOTA

b) $g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ en $a = 2$

• $g(2) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{2^2 - 25}{2 - 5} = \frac{4 - 25}{-3} = \frac{-21}{-3} = 7$

• $\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2^2 - 25}{x - 5} = 7$

$$\boxed{f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 7}$$

• $\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2^2 - 25}{x - 5} = 7$

• Como se cumplen las 3 condiciones $f(2)$ es continua.

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$

• $h(0) = 0$

• Es una discontinuidad inevitable porque no existe el límite de la función en $x = 0$.

• $\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

• $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

3) $f(x) \begin{cases} -2x + 1 & si\ x \leq -1 \\ 1 & si\ -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$

¿Es continua en $x = -1$ y en $x = 1$?

• $f(-1) = -2x + 1 = -2.(-1) + 1 = 2 + 1 = 3$

• $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} -2x + 1 = \lim_{x \to -1^-} -2.(-1) + 1 = 3$

• $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 1 = 1$

• Es una discontinuidad inevitable porque no existe el límite de la función en $x = -1$

HOJA Nº

FECHA

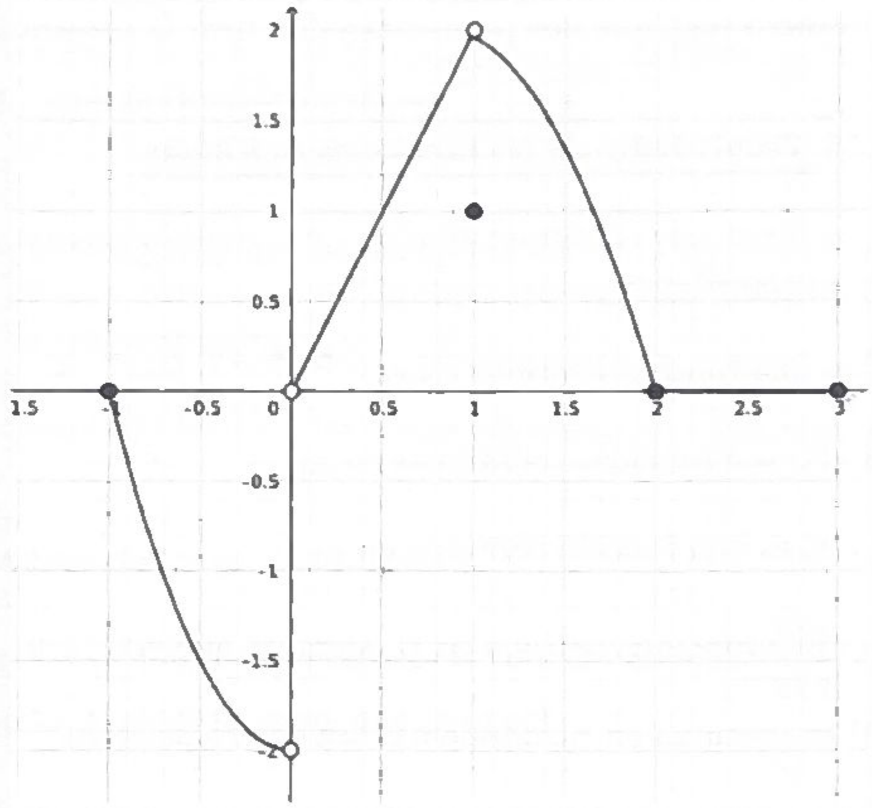
- $f(1) = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{1} = 1$

- Se cumplen las 3 condiciones por lo que $f(1)$ es continua

2. A partir de la siguiente gráfica de $f(x)$:



Responder:

a) ¿Existe $f(-1)$? Sí

b) ¿Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x)$? Sí

c) ¿$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$? Sí

d) ¿Existe $f(0)$? No

e) ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$? No

f) ¿f es continua en $a = 0$? No, inevitable

g) ¿Existe $f(1)$? Sí

h) ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$? Sí

i) f es continua en $a = 1$? No, evitable

j) ¿f es continua en $a = 2$? Sí

k) ¿f es continua en $a = 3$? Sí, es continua por izquierda

✓ 3. Dada la siguiente función decidir si es continua en $x = -1$ y en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3.3.1 Ejercicios - Página 80

1) a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 3x \longrightarrow$ Conjunto de continuidad $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) $g(x) = 2e^{2x+1} \longrightarrow$ conjunto de continuidad $(-\infty, +\infty)$

c) $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{x+3} \longrightarrow$ conjunto de continuidad $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

2)

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > -2 \\ kx^2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases} \longrightarrow$$

• Función a trozos

• Para $x < -2$ es continua por ser una función polinómica

• Para $x > -2$ es continua por ser una función polinómica

• Imponer la continuidad en el punto de pegado $x = -2$

• $g(-2) = k \cdot (-2)^2 = k4$

• $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} kx^2 = \lim\limits_{x \to -2^-} k(-2)^2 = k4$

$2 = 4k \longrightarrow k = \dfrac{2}{4} \longrightarrow k = \dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} -x = \lim\limits_{x \to -2^+} -(-2) = 2$

NOTA

Si $k = \frac{1}{2}$, g es continua también en $x = -2$, por lo que resulta continua en todo su dominio si $k = \frac{1}{2}$

3) ¿Es continua en $[-2,5]$? ⟶ Intervalo cerrado

$$h(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si } x\geq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x<3 \end{cases}$$

• Continuidad en el intervalo $[-2,3)$: es una función racional. Se debe evitar que el denominador $=0$ ⟶ $x-3=0$ ⟶ $x=3$ ⟶ 3 no se incluye en el intervalo, por lo que la función es continua en este intervalo.

• continuidad en el intervalo $[3,5]$: es continua por ser una función polinómica.

• Imponer la continuidad en el punto de pegado $x=3$

• $h(3)=x^2-3=3^2-3=9-3=6$.

• $$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{3^2-9}{3-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{9-9}{0}=\frac{0}{0}$$ ⟶ Indeterminación

Diferencia de cuadrados

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3^-}x+3=3+3=6$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)\ \therefore\ \lim_{x\to 3}f(x)=6$$

• $$\lim_{x\to 3^+}x^2-3=3^2-3=9-3=6$$

$\boxed{\text{El límite existe y la función es continua en } x=3}$

Además $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$

• Límite derecho del intervalo cerrado $[a,b]=[-2,5]$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(-2)^2-9}{-2-3}=\frac{-5}{-5}=1$$

• Es continua por la derecha en a

• Límite izquierdo del intervalo cerrado $[a,b]=[-2,5]$

$$\lim_{x\to 5^-}x^2-3=25-3=22$$

• Es continua por la izquierda en b

HOJA N°

FECHA

- $h(x)$ es continua en $[-2,5]$ porque se cumplen los siguientes items
- h es continua en todos los puntos interiores
- h es continua por la derecha en $-2 \rightarrow f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$
- h es continua por la izquierda en $5 \rightarrow f(5) = \lim_{x \to 5^-} f(x)$