

Actividad 2.1

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{sí } x > 2 \\ 1 & \text{sí } x \leq 2 \end{cases}$$

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

\neq No coinciden

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1$$

No existe el límite de la función

Cuando x tiene de al punto estudiado.

~~b) $g(x) = |x| \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$~~

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Δ = Coinciden. La función existe cuando

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = -0 = 0$$

x tiene de 0 (Punto estudiado)

No entendí lo del valor absoluto

2.6 Ejercicios - Página 69

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x+2}{\lim_{x \rightarrow 3} x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2}{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$$

con Propiedades \rightarrow

sin Propiedades \nwarrow

$$(\text{sustitución directa}) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 5x^2 + 10 = 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 10 = 1 + 5 + 10 = 16$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{-2^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 1}{5 - 3 \cdot (-2)} = \frac{-8 + 8 - 1}{5 + 6} = \frac{-1}{11} = -\frac{1}{11}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x - \pi) = \sin(\pi - \pi) = \sin(0) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2}}{x} = \frac{\sqrt[3]{2^2 + 2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4 + 2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \text{symbolab da } \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{2}{x^3 + 1}\right) = \ln\left(\frac{2}{1^3 + 1}\right) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln 1 = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \frac{\ln(0+1)}{e^0} = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos(x^2) \cdot (1+x)^4 = 3 \cos(0^2) \cdot (1+0)^4 = 3 \cdot \cos(0) \cdot (1)^4 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$

i) $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = |3-3| = |0| = 0$

j) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x} = \frac{|3-3|}{3} = \frac{0}{3} = \frac{0}{3} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{0}{0^2 + 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación}$

→ Factorizar el denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 4} = \frac{4 - 4}{4 - 4} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

No se pueden simplificar los dos x^2 porque están nestando.

Solo se puede si están multiplicando.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \cdot x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

↑ Trinomio ↑
↑ Dif de cuadrados ↑

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 3 \cdot -1 + 2} = \frac{1 - 1}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

Actividad 2.2

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{Si } x \neq 1 \\ 3 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

No es $x=1$ realmente, así que no se utiliza $\frac{x-1}{x^2-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

2) Calcular, si existen, los siguientes límites

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \frac{\sqrt{0+9} - 3}{0} = \frac{\sqrt{9} - 3}{0} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 9} - 3) \cdot (\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 9})^2 - 3^2}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 9} + 3)} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 9} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}{1^2 - 3 \cdot 1 + 2} = \frac{1 - 2 + 1}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} = \frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

2.6 Ejercicios - Página 69

~~$$\text{2) a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3x^4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cancel{x} - 3x^4 = -\infty$$~~

~~$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} - 3 \right) = 0 - 0 = 0$$~~

~~$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$~~

~~$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \text{Indeterminado } +\infty$$~~

Simplifico

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \text{Potencia más alta } x^2 : \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{16}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} =$$~~

~~$$= \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{16}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \text{Propiedad } \frac{c}{x} \rightarrow 0 \text{ (donde } c \text{ es constante), } 0 > 0$$~~

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{16}{x^4} \right) = 3$$~~

~~$$= 3 + 0 - 0 = \frac{3}{1} = 3$$~~

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1) \rightarrow \text{Es } +1 \downarrow \text{no } -1 \text{ porque es } -(1)^2 = +1$$

Ejercicios 2.6 - Página 69

D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+x} = \frac{0}{0^2+0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

↓
Factor común en el denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$$

↓
x

se cancelan y queda 1 en el numerador

D) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 4} = \frac{4 - 4}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

↓

Trinomio $x^2 + bx + c$

Diferencia de cuadrados

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

m) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + (-1)(3+2)} = \frac{1-1}{1+3+2} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

↓

Diferencia de cuadrados

Trinomio $x^2 + bx + c$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+2} = \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$ Multiplicar por el conjugado $= \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} =$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \sqrt{x}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2$$

$$\text{ñ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{0^3}{0^2+0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

4

Factorizar el denominador
con factor común

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{x^3}{x(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} = \frac{0^2}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2-x} = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{No es una indeterminación} \rightarrow \text{Es divergente que se pueda salvar}$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{No es una indeterminación} \rightarrow \text{Es divergente que se pueda salvar}$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{|x+2|} = \frac{-2}{|-2+2|} = \frac{-2}{0} \rightarrow \text{No es una indeterminación} \rightarrow \text{Es divergente que se pueda salvar}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overbrace{x}^{-\infty} - \overbrace{3x^3}^{-\infty} = -\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5-3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{0}{2}}{x} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+3x-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2} = \text{Factor común} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{16}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{16}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{3}{1} + \overset{0}{\cancel{\frac{2}{x}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{16}{x^2}}}}{\underset{1-\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{2}{x^2}}}{1-0-0}} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3}{x^3 - x^2 - 6x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} \right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} - \frac{2}{1} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} \right)}{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} - \frac{2}{1} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} - \frac{2}{1} \right)} = \frac{0 - 0 - 0}{1 - 1 - 6 - 2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^2}{\sqrt{x^4 - 6x^3}} = \frac{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{x^4 \left(1 - \frac{6x}{x^3} \right)}} = \frac{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{x^4 \left(1 - \frac{6}{x^3} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \sqrt{1 - \frac{6}{x^3}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{6}{x^3}}} = \frac{x^2 \cdot (1 - 0)}{\sqrt{1 - 0}} = \frac{x^2 \cdot 1}{\sqrt{1}} = \frac{x^2}{1} = x^2 = +\infty$$

3) a) $h(x) \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8-2x & \text{si } x < 4 \end{cases} \rightarrow \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$

→ coinciden. La función existe cuando x tiende a 4 (punto estudiado).

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 0}$$

Escribir con palabras "Existe el límite".

b) $f_2(x) \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -1} f_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

→ coinciden. La función existe cuando x tiende a 0 (punto estudiado).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

$$4) a) f(x) = \frac{x^2}{x+1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-1)^2}{-1+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

• Existe asíntota vertical en $x = -1$

$$\bullet \text{No existe asíntota horizontal} \rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{+\infty^2}{+\infty+1} = +\infty$$

No tienden a un número.

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{-\infty^2}{-\infty+1} = -\infty$$

$$b) g(x) = \frac{4x^2 + 2x - 2}{3x - 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{4(\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} - 2}{3 \cdot \frac{1}{3} - 1} = \frac{4 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 2}{1 - 1} = \frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2}{0} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9} + \frac{6}{9} - \frac{18}{9}}{0} = \frac{-8}{9} \neq 0 \rightarrow \text{Existe asíntota vertical en } x = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{4x^2 + 2x - 2}{3x - 1} = \frac{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x(3 - \frac{1}{x})} = \frac{x^2}{x} \cdot \frac{\left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{\frac{3x - 1}{x}} = x \cdot \frac{x}{3x - 1} = \frac{x^2}{3x - 1} = \frac{x^2}{3} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal porque x no tiende a un número fijo.

$$c) h(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$$

Término perfecto

Busco 0 en el denominador $\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 0+2$$

$$x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\frac{1}{0^-} = -\infty$

• Existe asíntota vertical en $x=2$ • Existe asíntota horizontal en $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4x+4}{x^2}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$\frac{0^+ - 0^+}{1 - 0^+ + 0^+} = \frac{0^+ - 0^+}{1} = 0$

d) $\begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & \text{si } x < 2 \\ 3x^3-2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Busco 0 en el denominador $\rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=1^2 \rightarrow x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\frac{1}{0^-} = -\infty$

• Existe asíntota vertical en $x=1$
• Existe asíntota vertical en $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$\frac{-\infty - 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$

Existe asíntota horizontal en $y=0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$\frac{0^+ - 0^+}{1 - 0} = \frac{0^+ - 0^+}{1} = 0$