

### 3.2.1 Ejercicios - Página 76

1) a)  $f(x) = |x-2| + 3$  en  $a = 2$

$$f(2) = |x-2| + 3 = |2-2| + 3 = 0 + 3 = 3 \rightarrow f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x-2| + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x-2| + 3 = 3$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

• Como se cumplen las 3 condiciones, la función  $f(2)$  es continua.



b)  $g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$  en  $a = 2$

•  $g(2) = \frac{2^2 - 25}{2 - 5} = \frac{4 - 25}{-3} = \frac{-21}{-3} = 7$

•  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2^2 - 25}{x - 5} = 7$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$$

•  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^2 - 25}{x - 5} = 7$

• Como se cumplen las 3 condiciones  $f(2)$  es continua.

c)  $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  en  $a = 0$

•  $h(0) = 0$

• Es una discontinuidad inevitable porque no existe el límite de la función en  $x = 0$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

③  $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

¿Es continua en  $x = -1$ , en  $x = 1$ ?

•  $f(-1) = -2(-1) + 1 = 2 + 1 = 3$

•  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2x + 1 = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2(-1) + 1 = 3$

•  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1$

• Es una discontinuidad inevitable porque no existe el límite de la función en  $x = -1$



HOJA N°

FECHA

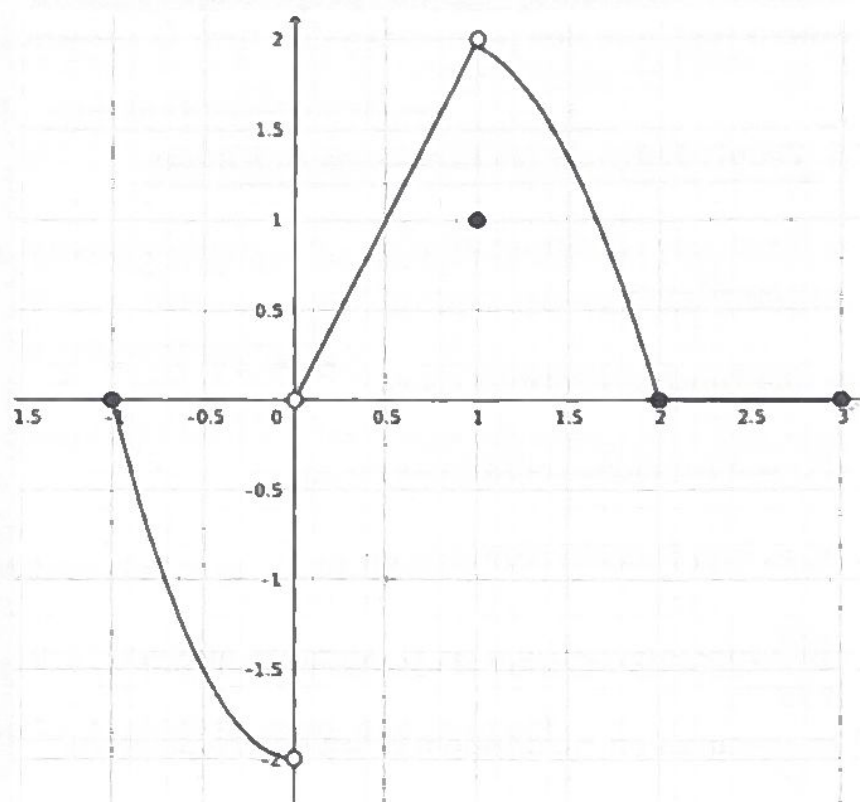
$$\bullet f(1) = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1} = 1$$

• Se cumplen las 3 condiciones por lo que  $f(1)$  es continua

2. A partir de la siguiente gráfica de  $f(x)$ :



Responder:

a) ¿Existe  $f(-1)$ ? Sí

b) ¿Existe  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ? Sí

c) ¿ $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ? Sí

d) ¿Existe  $f(0)$ ? No

e) ¿Existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ? No

f) ¿ $f$  es continua en  $a = 0$ ? No, inevitable

g) ¿Existe  $f(1)$ ? Sí

h) ¿Existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Sí

i) No, evitable  
¿ $f$  es continua en  $a = 1$ ? No

j) Sí  
¿ $f$  es continua en  $a = 2$ ? Sí

k) Sí, es continua por izquierda  
¿ $f$  es continua en  $a = 3$ ? Sí

✓ 3. Dada la siguiente función decidir si es continua en  $x = -1$  y en  $x = 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



### 3.3.1 Ejercicios - Página 80

1a)  $f(x) = \frac{1}{x-2} - 3x \rightarrow$  Conjunto de continuidad  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b)  $g(x) = 2e^{2x+1} \rightarrow$  conjunto de continuidad  $(-\infty, +\infty)$

c)  $h(x) = \frac{\cos(x)}{x+3} \rightarrow$  conjunto de continuidad  $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

2)

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > -2 \\ kx^2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases} \rightarrow \text{Función a trozos}$$

• Para  $x < -2$  es continua por ser una función polinómica

• Para  $x > -2$  es continua por ser una función polinómica

• Imponer la continuidad en el punto de pegado  $x = -2$

$$g(-2) = k(-2)^2 = 4k$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} kx^2 = \lim_{x \rightarrow -2^-} k(-2)^2 = 4k$$

$$2 = 4k \rightarrow k = \frac{2}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} -x = \lim_{x \rightarrow -2^+} -(-2) = 2$$

Si  $k = \frac{1}{2}$ ,  $g$  es continua

también en  $x = -2$ , por lo que

resulta continua en todo su dominio

Si  $k \neq \frac{1}{2}$

NOTA



3) ¿Es continua en  $[-2, 5]$ ?  $\rightarrow$  Intervalo cerrado

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

• Continuidad en el intervalo  $[-2, 3)$ : es una función racional. Se debe evitar que el denominador  $= 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow 3$  no se incluye en el intervalo, por lo que la función es continua en este intervalo.

• Continuidad en el intervalo  $[3, 5]$ : es continua por ser una función polinómica.

• Imponer la continuidad en el punto de pegado  $x = 3$

$$h(3) = x^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3^- \\ \rightarrow 0}} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3^- \\ \rightarrow 0}} \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - 9}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$\swarrow$  Diferencia de cuadrados

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} x+3 = 3+3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

El límite existe  $\downarrow$  la función es continua en  $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$\text{Así que } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

• Límite derecho del intervalo cerrado  $[a, b] = [-2, 5]$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(2)^2 - 9}{2 - 3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

• Es continua por la derecha en  $a$

• Límite izquierdo del intervalo cerrado  $[a, b] = [-2, 5]$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 - 3 = 25 - 3 = 22$$

• Es continua por la izquierda en  $b$



HOJA N°

FECHA

- $h(x)$  es continua en  $[-2, 5]$  porque se cumplen los siguientes items
- $h$  es continua en todos los puntos interiores
- $h$  es continua por la derecha en  $-2 \rightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
- $h$  es continua por la izquierda en  $5 \rightarrow f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$