INDUCCIÓN

→ primer elemento (no siempre es 1)

- Si se cumple $P(1)$ → Queda comprobado
- Se asume $P(k)$ → Si se cumple $P(k+1)$

Si en $\lim |f(x)|$, $f(x)$ provoca indeterminación se resuelve la $\frown$ → luego se opera el cal. abs.

NÚMEROS COMPLEJOS

Si hay a, b, ai, bi, lo separa en parte real y parte compleja todo.

$|z|^2 = a^2 + b^2$ | $z = 8 \to z = 8 + 0i$

$a^2 + b^2 = (a+bi)\cdot(a-bi)$ → n. real → n. imag → números

Forma Binómica → $a + bi$

Forma Polar → $|z|_{\alpha \cdot 2k\pi}$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ → i desaparece → $\sqrt{(\pm a)^2 + (\pm b)^2}$

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)^{\circ} = $ grado

$a^2 + b^2 \neq c^2$ → ⊕ → Si no están al $(\,)^2$ es una recta.

c → radio

$a^2 + b^2 < c^2$ → ● $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$

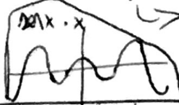
$a^2 + b^2 > c^2$ → ☼ $C(a\ y\ b)$ ↳ centro

$a^2 + b^2 = c^2$ → ○

a y b de num comp. son x e y en esa ecuación

Ejercicios num complejos

- Cambiar $z = a + bi$
- Hallar raíces ↳ forma Polar.
- Cambiar $z = a + bi$ ↳ podar cancan ↳ mirar cuadrante de la arc tang y representar



Representar nº complejos en forma polar

a →	$-a$	a
	$-a$	a
b →	b	b
	$-b$	$-b$

↳ solo cuando hay raíces
↳ si no se mult. y divide en polar

$\pi \to 180^{\circ}$

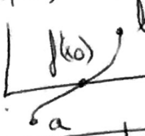
$\frac{\pi}{4} \to 45^{\circ}$

$2\pi \to 360^{\circ}$

Teorema Bolzano

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Entonces existe al menos un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Uno positivo $f(a)$ y uno negativo $f(b)$



~~Se~~ Para solucionar ejercicios Bolzano, se buscan dos valores para que $f(x)$ sea (positivo y otro negat.) pero estos dos valores siempre entre el intervalo $[a, b]$

Forma trigonométrica ↳ $|z|\cdot(\cos\theta + i\cdot\cos\theta) = z$

Forma exponencial ↳ $|z|\cdot e^{i\theta} = z$

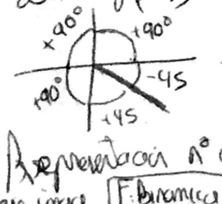
$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\cdot\cos\theta)$

Calcular raíces no compl.

$\sqrt[n]{|z|}_{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad K = 0, 1, \ldots n-1$

Si $\operatorname{arctg}(-K)$ ↳ Se halla la de K y luego se suman 90° las veces para que llegue al cuadrante negativo

$\operatorname{arctg}(-1)$



→ 315°

$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

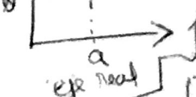
$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arctg}-\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$

Representación nº complejos

F. Binómica



$\frac{\cos(x)}{x}$

Forma Polar

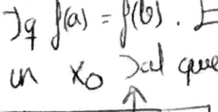
$z = a + b$

Teorema de Darboux

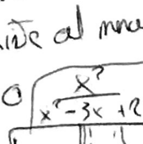
Sea f una función continua en $[a, b]$ y c un valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe al menos un valor $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tq $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un x_0 tal que $f'(x_0) = 0$



$\frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$



TEOREMA VALOR MEDIO

Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe al menos un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Derivabilidad y puntos inflexión

$f''(x) > 0$ ∪, < 0 ∩

$f''(x) = 0$ → puntos inflexión

Extremos, crecimiento y decrecimiento

↳ $f'(x) = 0$ < los valores serán los x.

↳ Se hace tabla para ver monotonía $f(x)$

INECUACIONES

$x - 3 \leq 5 \to x \leq 8$

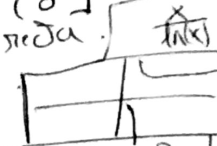
$+a < +b \Rightarrow$ ~~...~~ $-a > -b$

Al multiplicar o dividir por algo negativo ↝ se cambia el $>$ $<$

Se simplifica → se hace la tabla → se evalúa → se comprueban los intervalos (ó] → se hace la recta.

Si hay val. absol. → $-\sqrt{y} > x > +\sqrt{y}$

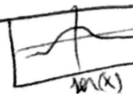
$x > \pm\sqrt{y}$



Ejercicios punto entre intervalo

continua en todo el intervalo.

1. Se asegura que la función es continua en el intervalo. Si es continua → pasa por el intervalo.
2. Se comprueban dos extremos: uno por encima y otro por debajo.
3. Para comprobar si es único o no, se hace la derivada y se comprueba si cambia o no la función. Importante → $f(x)$ continua.



Encontrar conjunto num que satisfagan

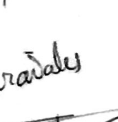
- Polinomio con radicales
  1. Se hallan raíces y se escribe como descomposición factores.
  2. Se realiza un cuadro con todos los intervalos posibles.
  3. Dependiendo del enunciado se cogen ⊖ $<$, ⊕ $>$
- Con valor absoluto
  Se descompone el valor absoluto.
  Se descompone una inecuación a trozos. ↳ como una inecuación respetando las inecuaciones
  Se resuelven siempre los intervalos

Asíntotas

$\ln(x)\cdot(x)^3$ → lim laterales

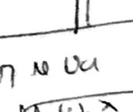
- Verticales (x) ↳ en los puntos que no haya dominio ↳ en los puntos concretos, no los interv. Sabiendo los puntos, para ver el comp. de $f(x)$ se estudian los lim. → pueden ser cortadas (∞) $(-\infty)$
- Horizontales (y) → Puede haber dos

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ → A. Horizontales



(Caso Especial) → si al factorizar se va algo del numerador ↳ si da $\frac{0}{0}$ → se resuelve.

$\frac{x}{x^2-1}$



- Oblicuas: Hay cuando el grado del num. es justo uno más que el del denom.

Hallarla → $y = mx + n$ → Puede darse $y = mx$ / $y = n$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx$

Si está afectada por sen, cos, ln, log → NO

COSAS RARAS → NO HAY.

Igualdades

$\ln$: $\ln(\infty)=\infty$

$\ln(1)=0$ $\ln(e^x)=x$

$\ln(0)=$ no existe $(-\infty)$ $\nexists$

$\ln(e^{-1})=-1$ $\ln(e^1)=1$

$\ln x^n = n\cdot\ln(x)$

$(\ln(x))^2 \neq \ln(x^2)$

$\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$

$\ln(x/y)=\ln x - \ln y$

e: $e^{\infty}=\infty$ $e^{-\infty}=0$ $e^0=1$

$\cos\pi=-1$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

sen: $\operatorname{sen}(0)=0$ $\operatorname{sen}\pi=0$ $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$(\operatorname{sen}(x))^2=\operatorname{sen}^2(x)\neq \operatorname{sen}(x^2)$

cos: $\cos(0)=1$

$\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=1$

Tag: $\operatorname{Tag}(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos x}$

$\operatorname{Tag}^{-1}(x)=\operatorname{cotag} x=\frac{1}{\operatorname{Tag}(x)}$

$\operatorname{Tag}(0)=0$ $\operatorname{Tag}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

cotag: $\operatorname{cotag}^2(x)=\frac{1}{\operatorname{Tag}^2(x)}$

$\operatorname{arcosen}^{-1}(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

$\operatorname{arcosen}(0)=0$

$\operatorname{cos}(\operatorname{arcotag} x)=\ldots$ $\operatorname{arcotag}(1)=45°$

$\frac{+K}{0}=\infty$ $\frac{-K}{0}=-\infty$

$\frac{-K}{-0}=\infty$ $\frac{K}{-\infty}=0^-$

$\frac{K}{\infty}=0^+$ $0!=1$

$(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$

$\infty+K=\infty$

$\infty\cdot(-K)=-\infty$

$\infty\cdot K=\infty$

$\frac{0}{K}=0$ $\frac{\infty}{K}=\infty$

$\infty^{-\infty}=0$ $\infty^{\infty}=\infty$

$a-\infty=-\infty$ $\frac{\infty}{0}=\infty$

$\infty-a=\infty$

$\infty\cdot\infty=\infty$

$a+0=a$

$x^2\cdot x^3=x^{2+3}$ $x^2/x^3=x^{2-3}$ $(x^3)^3=x^9$

$\operatorname{arcotag}(0)=0$

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

$(a-b)\cdot(a^2+b^2+2ab)=a^3-b^3$

$(a+b)\cdot(a^2+b^2+2ab)=a^3+b^3$

$\operatorname{sen}(x)=\sqrt{1-\cos^2(x)}$ $\sqrt{2}=1{,}41$

$\cos(x)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}$ $\sqrt{3}=1{,}73$ $\sqrt{5}=2{,}23$

$\operatorname{sen}^3(x)=\operatorname{sen}(x)\cdot(1-\cos^2(x))$

DERIVADAS

$K\to 0$ $x\to 1$

$x^n\to n\cdot x^{n-1}$

$\ln(x)\to\frac{1}{x}$

$\log_a x\to\frac{1}{x\cdot\ln a}$

$e^x\to e^x$

$a^x\to a^x\cdot\ln(a)$

$\operatorname{sen}x\to\cos x$

$\cos x\to-\operatorname{sen}x$

$\operatorname{Tg}\to\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{Tag}^2 x$

$\operatorname{arcosen}\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{arcocos}\to\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{arcotag}\to\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{x}$; $-1x$; $\sqrt{x}$

$\operatorname{sen}(u)\to\cos(u)\cdot u'$

$\cos(u)\to-\operatorname{sen}(u)\cdot u'$

$e^u\to e^u\cdot u'$

$\ln u\to\frac{u'}{u}$

$\operatorname{arcosen} u=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\operatorname{arcocos} u=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\operatorname{arcotag}(1)=45°$

$(\cos x-1)=(\cos x+1)$; $(\cos^2 x-1)$

FUNCIONES

1) Dominio

- Polinom $\to x^2-6\to\mathbb{R}$
- Racional $\to\frac{x^2-6}{x-2}\to\mathbb{R}-\{$anulan denom$\}$
- $\sqrt{f(x)}\to$ Valores que hagan $\sqrt{f(x)}\to f(x)$; $f(x)\geq 0$
- $\exp(e)$, sen, cos $\to\mathbb{R}$
- ln, log $\to$ Valores $f(x)>0$

2) Simetría

Simetría: $f(x)=-f(-x)\to$ Impar

Paridad: $f(x)=f(-x)\to$ Par

3) Signo

$\to$ nulas $f(x)=0$

para ver las cuadrantes entre las que está $f(x)$

Con los ejes / corte

1) Puntos de corte $f(x)$, $y=0$

EJE OX $\to y=0$

EJE OY $\to x=0$

Si un punto de corte está excluido del dom. se estudia el signo para ver el compor.

$\to$ Si piden que $f(a)$ sea continua pero $\frac{0}{0}$; $\frac{a}{0}$ $\to$ derivada y lim laterales

Continuidad

Ejercicios continuidad: 1º Dom.

$f(x)\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in K \\ f(x) & \text{si } x>K \end{cases}$

$\lim_{x\to K^+}$; $\lim_{x\to K^-}$ $\to f(a)$ ✓

$\to$ Si coincide es continua en el punto. Si no no.

Continua ↑ Derivable. Pero no al revés.

Derivabilidad

Si ysolo si $\lim_{x\to h}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Valores abs, no son derivables en el punto que las hace 0 pero si son continuas.

f derivable $\Rightarrow$ continua

f no continua $\Rightarrow$ no derivable

se hallan lim laterales.

$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

$R_n(x)\leq P_n(x)\leq$

Al hallar $R_n(x)$ $c\in(x_0,x_1)$ Se sustituye el c por x_0 y x_1 en valor abs. y se elige el mayor

Se calcula $f^{n+1}(c)$ $\to$ se sustituye c. $\to$ se quitan constantes

$\to$ si $|f^{n+1}(c)|$, lueg

x_0 es el punto de $P_n(x)$ (cuadrado)

$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{n+1!}(x-x_0)^{n+1}$ $c\in(x_0,x_1)$; $c\in(x_0,\xi)$

$\to$ Al aplicar infini $\to=0$

TAYLOR

$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(x)}{3!}(x-a)^3\ldots\ldots$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\ldots$

$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ldots$

$\operatorname{sen}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\ldots$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$

$\operatorname{Tag}(x)=x+\frac{x^3}{3}$

$\operatorname{Tag}^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots$ $\operatorname{arcotag}(x)$

$\operatorname{arcosen}(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}$

$\operatorname{arcocos}=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}$

LIMITES

$\lim c\cdot d=\lim c\cdot \lim d$

$\frac{0}{0}$:
- $x\to\infty\Rightarrow$ Infinitésimos
- L'Hopital $\to f(x)$
- Polinomio $\to$ factorizar $\to$ simplificar $\to$ sustituir
- Radical $\to$ racionalizar $\to$ factorizar $\to$
- Multiplicar o dividir por conjugado

$\frac{\infty}{\infty}$:
- $\to$ L'Hopital $\to f(x)$
- $\to$ Se divide num y den entre max. exponente se simplifica y resuelve el lim

$\infty-\infty$:
- $\to$ Racionales $\to$ común denominador
- $\to$ Irracionales $\to$ multiplicar * conj.

$0\cdot\infty$ $\to$ Se transforma en $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$; $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

$0^{\infty}, \infty^0, 1^{\infty}$ $\to\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\to e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln(f(x))}$

Solo con 1^{∞} $\to\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\to e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)}$

Lim laterales $\to e^{\pm}$, $\frac{K}{0\pm K}$, $\frac{K}{0}\to\pm\infty$

Lim $|x-5|$ $\to$ se divide $\to$ lim laterales

$\operatorname{arcotag}(-1)=315°=-45°$

Cotas (1,3): MAX ∄, MIN ∄, SUP 3, INF 1

[1,3]: SUP 3, INF 1, MAX 3, MIN 1

Def derivada

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

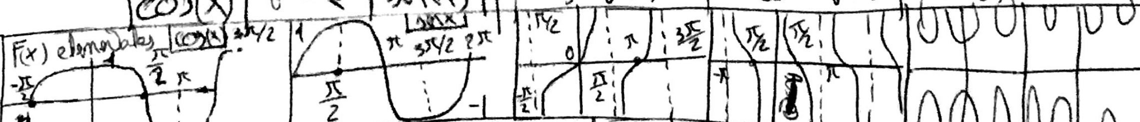
$\operatorname{arcotag}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arcotag}(\infty)=\frac{\pi}{2}$

derivada en el punto

arcotag x

$\operatorname{arcotag} x=y\Rightarrow\operatorname{Tag} y=x$

F(x) elementales



arcotag ∞ → 90°	0	30	45	60	90
sen(x)	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos(x)	1	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
Tg(x)	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

$\lim_{x\to 0}$: $\frac{e^x-1}{x}=1$ $\frac{1-\cos(x)}{x}=0$

$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$ $\frac{\operatorname{arcotag} x}{x}=1$

$\frac{\operatorname{arcosen}(x)}{x}=1$

$\lim_{x\to\infty}$: $\frac{\ln(x)}{x}=0$ $\frac{a}{\ln(x)}=a$

$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=0$ $\frac{\cos x}{x}=0$

$\lim_{x\to a} c$ $\downarrow$ c