Incerteza En Mediciones Indirectas

Tomás Chamorro, Nicolás De Albuquerque y Agustín De Leonardis Armani

Recapitulando

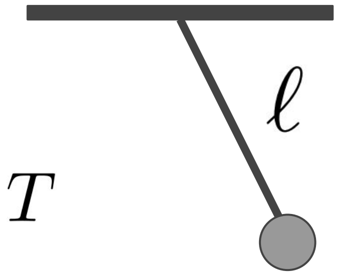
Medición directa → El instrumento compara la magnitud medida con un patrón

$$\boxed{X = X_0 + \delta X}$$

Medición indirecta → Su valor depende de otras magnitudes que se midieron directamente

$$\boxed{??}$$

$$Q = f(X, Y, Z, \dots) \longrightarrow Q = Q_0 + \delta Q$$



$$g = f(T, \ell)$$

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$$

Objetivo

Cómo es posible calcular el valor medio y la desviación estándar de una magnitud que se mide directamente?

- Magnitudes independientes: funciones lineales
- Magnitudes independientes: funciones no lineales
- Magnitudes no independientes

Independencia Estadística

$$(X, Y) \longrightarrow (X_0, Y_0) \longrightarrow (x, y)$$

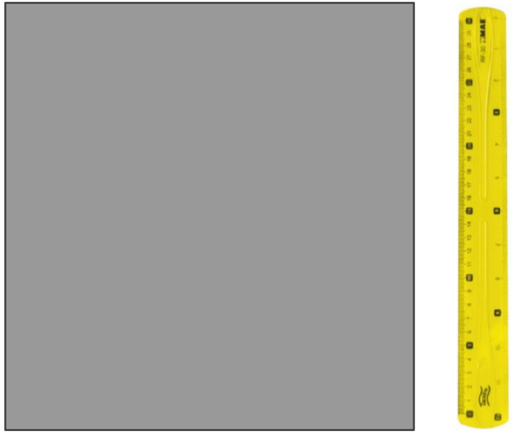
$$\boxed{x - X_0 \not\Longleftrightarrow y - Y_0} \Longrightarrow$$

Son estadísticamente independientes

No tiene relación con la posible correlación entre los valores de las magnitudes físicas

- **Caso 1:** Péndulo $\longrightarrow T \quad \ell \longrightarrow$ Son estadísticamente independientes
- **Caso 2:** Perímetro de un cuadrado $\longrightarrow$ No son estadísticamente independientes

a



$$P = a + a + a + a$$

Relaciones lineales para magnitudes independientes

$$Q = a + bX + cY + dZ \qquad \begin{cases} Q_0 = f(X_0, Y_0, Z_0) \\ \delta Q = f(\delta X, \delta Y, \delta Z) \end{cases}$$

Valor medio $\boxed{Q_0 = a + bX_0 + cY_0 + dZ_0}$

Desviación Estándar $\boxed{\delta Q = \sqrt{b^2(\delta X)^2 + c^2(\delta Y)^2 + d^2(\delta Z)^2}}$

Relaciones no lineales para magnitudes independientes.

Caso más simple.

$$Q = f(X) \xrightarrow{\simeq} \boxed{Q = a + bX}$$

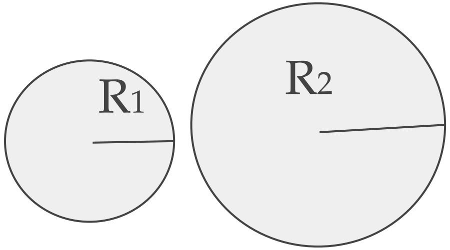
Función no lineal

$$b = \left(\frac{dQ}{dX}\right)\Big|_{X_0}$$

$$Q_0 \simeq f(X_0)$$

$$\delta Q \simeq \left|\overbrace{\frac{dQ}{dX}}\right|_{X_0} \delta X$$

Ejemplo.



$$R_1 = (0{,}5 \pm 0{,}01)mm$$

$$R_2 = (5 \pm \underbrace{0{,}01}_{\delta R})mm$$

Medición Directa

$$S_1 = \pi R_1^2$$

$$S_2 = \pi R_2^2$$

Medición Indirecta

Calculemos las secciones $\rightarrow$ $S = S_o \pm \delta S$

$$S_{1_0} = \pi R_{1_0}^2 = 0{,}78mm^2$$

$$\delta S_1 = \left|\frac{dS_1}{dR_1}\right|_{R_{1_0}} (\delta R_1) = (2\pi R_{1_0})(\delta R_1) = (3{,}14)(0{,}01)mm^2 = 0{,}03mm^2$$

$$S_1 = \pi R_1^2 = (0{,}78 \pm 0{,}03)mm^2$$

$$S_2 = \pi R_2^2 = (78{,}5 \pm 0{,}3)mm^2$$

$\rightarrow$ S_2 es una medición más confiable!

Generalicemos… $Q = f(X) \longrightarrow Q = f(X, Y, Z, ..)$

$$\underline{\simeq}$$

$$Q = f(X, Y) \longrightarrow Q = a + bX + cY$$

$$b = \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)\Bigg|_{(X_0, Y_0)}; c = \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)\Bigg|_{(X_0, Y_0)}$$

$$Q_0 \simeq f(X_0, Y_0)$$

$$(\delta Q)^2 \simeq (\frac{\partial Q}{\partial X})\Big|^2_{(X_0, Y_0)}(\delta X)^2 + (\frac{\partial Q}{\partial Y})\Big|^2_{(X_0, Y_0)}(\delta Y)^2$$

Casos simples:

Producto: $$Q = XY$$

$$Q_0 \simeq X_0 Y_0$$

División: $$Q = X/Y$$

$$Q_0 \simeq X_0/Y_0$$

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)\Big|^2_{(X_0,Y_0)} (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)\Big|^2_{(X_0,Y_0)} (\delta Y)^2$$

$$(\delta Q)^2 \simeq Y_0^2 (\delta X)^2 + X_0^2 (\delta Y)^2$$

$$(\delta Q)^2 \simeq \frac{1}{Y_0^2} (\delta X)^2 + \frac{X_0^2}{Y_0^4} (\delta Y)^2$$

Cantidades no independientes

Ejemplo: perímetro de un cuadrado

No son independientes,
¡son la misma!

$a = a_0 \pm \delta a$

$$P = 4a$$

$$\delta P = 4\delta a$$

$$\cancel{P = a + a + a + a}$$

$$\cancel{\delta P = 2\delta a}$$

¿Por qué da distinto?
¿Estamos haciendo algo mal?

Sí

Caso de estudio

Cantidad *X*

$$X_0 = m_x^*$$

$$\delta X = \tilde{\sigma}[m_x^*] = \sqrt{\frac{D_x^*}{N-1}}$$

Cantidad *Y*

$$Y_0 = m_y^*$$

$$\delta Y = \tilde{\sigma}[m_y^*] = \sqrt{\frac{D_y^*}{N-1}}$$

Cantidad *Q(X,Y)*

$$Q_0 \xleftrightarrow{¿?} X_0 \; Y_0 \qquad \delta Q \xleftrightarrow{¿?} \delta X \; \delta Y$$

El truco de siempre

¡Expansión de Taylor!

$$q_i = f(x_i, y_i) = f(X_0, Y_0) + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 (x_i - X_0) + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 (y_i - Y_0) + \dots$$

Media

$$\begin{aligned}
Q_0 =& m_q^* = \frac{1}{N}\sum_i q_i \\
\simeq& \frac{1}{N}\sum_i Q(m_x^*, m_y^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 (x_i - m_x^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 (y_i - m_y^*) = \\
=& Q(m_x^*, m_y^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 \cancel{\left(\frac{1}{N}\sum_i x_i - m_x^*\right)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 \cancel{\left(\frac{1}{N}\sum_i y_i - m_y^*\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_0 = Q(m_x^*, m_y^*)}$$

Error

$$D_q^* = \frac{1}{N}\sum_i (q_i - m_q^*)^2$$

$$\simeq \frac{1}{N}\sum_i \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 (x_i - m_x^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 (y_i - m_y^*)\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 D_x^* + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 \overset{?}{\sigma_{xy}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 D_y^*$$

$$D_x^* = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - m_x^*) \qquad D_y^* = \frac{1}{N}\sum_i (y_i - m_y^*)$$

Covarianza $\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)$

X e Y independientes $\longrightarrow$ $\sigma_{xy} = 0$

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)\Bigg|^2_{(X_0,Y_0)} (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)\Bigg|^2_{(X_0,Y_0)} (\delta Y)^2$$

¡Recuperamos la ecuación anterior!

X e Y no independientes → Podemos acotar

$$D_q^* \overset{\triangle}{\leq} \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 D_x^* + 2\left|\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0\right|\left|\left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0\right| |\sigma_{xy}| + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 D_y^*$$

$$|\sigma_{xy}| = \left|\frac{1}{N}\sum_i (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)\right| \overset{C-S}{\leq} \frac{1}{N}\sqrt{\sum_i (x_i - m_x^*)^2}\sqrt{\sum_i (y_i - m_y^*)^2} = \sqrt{D_x^* D_y^*}$$

$$\boxed{\delta Q = \sqrt{D_q^*} \leq \left|\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0\right| \delta X + \left|\left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0\right| \delta Y}$$

¡Muchas gracias!

¿Alguna pregunta?