Distribución de variables aleatorias

Grupo 3 - Correa Milagros, Pironio Bernardo, Caamaño Bresba Facundo Manuel.

The Uncertainty in Physical Measurements

Paolo Fornasini

Distribución binomial

p → Positivo

$q = 1 - p$ → Negativo

En **n** repeticiones:

- **k** resultados positivos
- **n - k** resultados negativos

Distribución binomial

$$p \longrightarrow \text{Positivo}$$

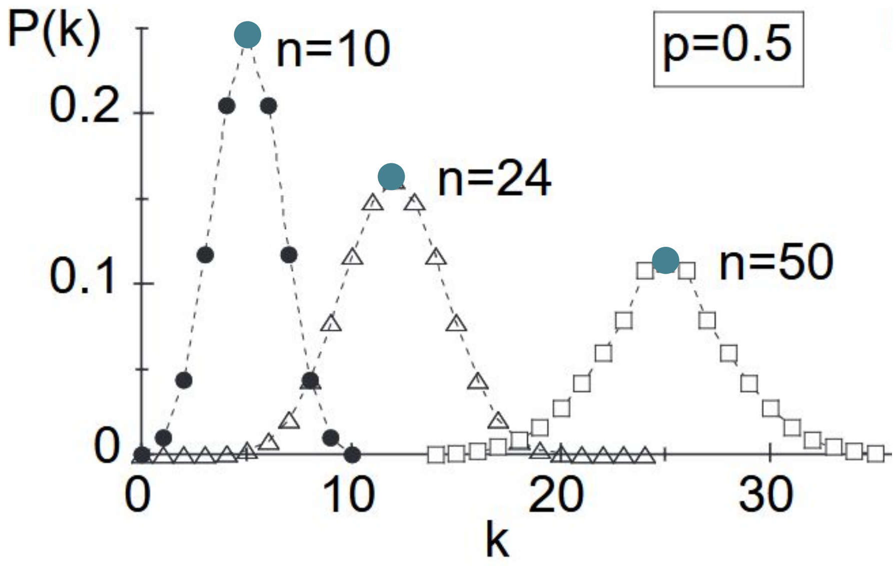
$$q = 1 - p \longrightarrow \text{Negativo}$$

Probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos

$$\mathcal{P}_{np}(k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k}$$

$$0 \leq k \leq n$$

Ejemplo — k caras en n lanzamientos de moneda



$$\mathcal{P}(k) = \binom{n}{k} 0.5^n$$

Simétrico respecto a

k = n/2

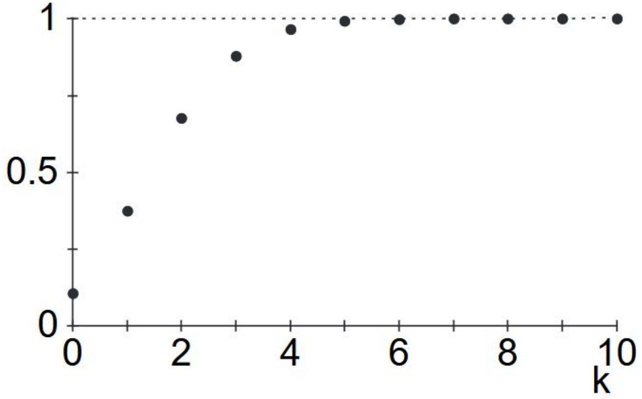
Condición de normalización

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

(Se mantiene para todas las distribuciones ❗❗)

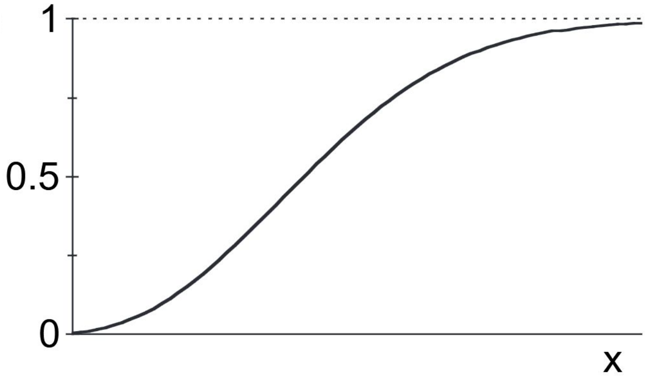
Distribución de variables aleatorias

Discretas



$$\mathcal{P}(k_j) \;=\; p_j$$

Continuas

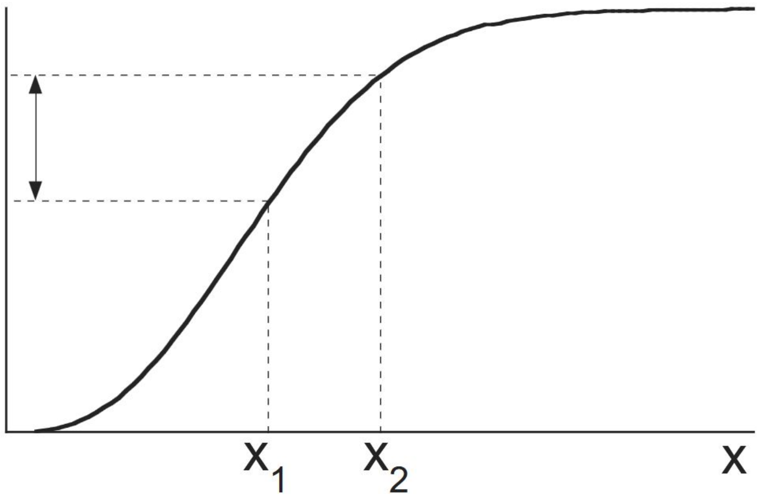


X: Variable aleatoria continua

x: Valores posibles

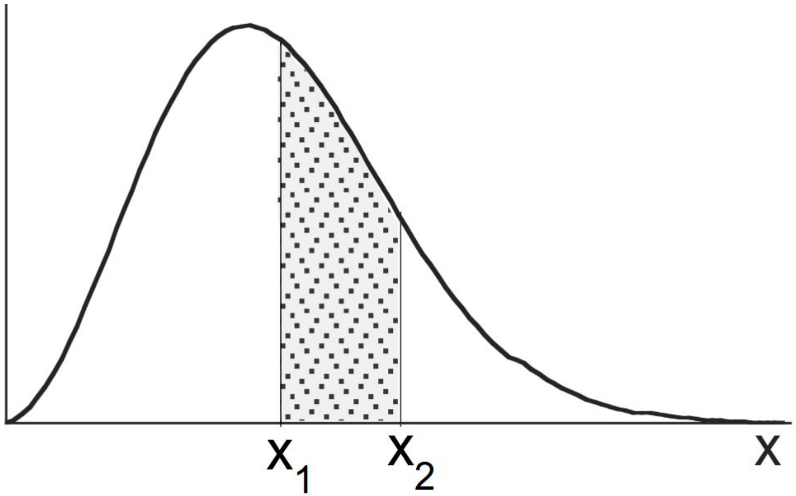
Función de distribución cumulativa (FDC)

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x)$$



Función de densidad de probabilidad (FDP)

$$f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$$



FDC

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x)$$

$$\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2) = \mathcal{P}(X \leq x_2) - \mathcal{P}(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

Probabilidad de un único valor x_1

$$\mathcal{P}(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} [F(x_2) - F(x_1)] = 0$$

P = 0 $\not\rightleftarrows$ Imposible

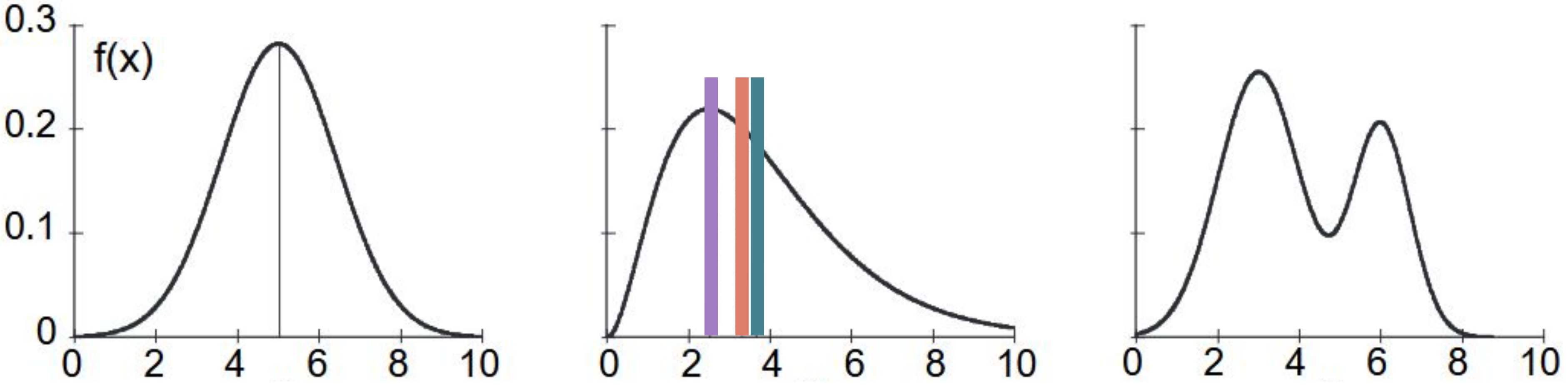
P = 1 $\not\rightleftarrows$ Certero

Parámetros de posición

- **Mediana**
- **Media (m)**
- **Moda**

$$m_k = \langle k \rangle = \sum_j k_j p_j \qquad \text{(discreta)}$$

$$m_x = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{(continua)}$$



Simétrica **Asimétrica** **Bimodal**

Parámetros de dispersión

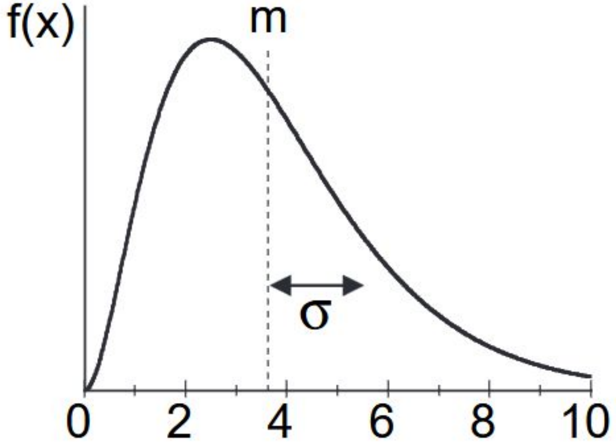
- **Varianza (D)**

Discreta: $\sum_j (k_j - m_k)^2 \; p_j$

Continua: $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \, f(x) \, \mathrm{d}x$

- **Desviación estándar (σ)**

$$\sigma = \sqrt{D}$$



- **Coef. de asimetría (β)**
- **Curtosis (γ_2)**

Momentos

- **Iniciales (α_s)**

Discretas: $\sum_j k_j^s p_j$

Continuas: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^s \, f(x) \, \mathrm{d}x$

- **Centrales (μ_s)**

Discretas: $\sum_j (k_j - m_k)^s p_j$

Continuas: $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s \, f(x) \, \mathrm{d}x$

Órdenes de los momentos (centrales)

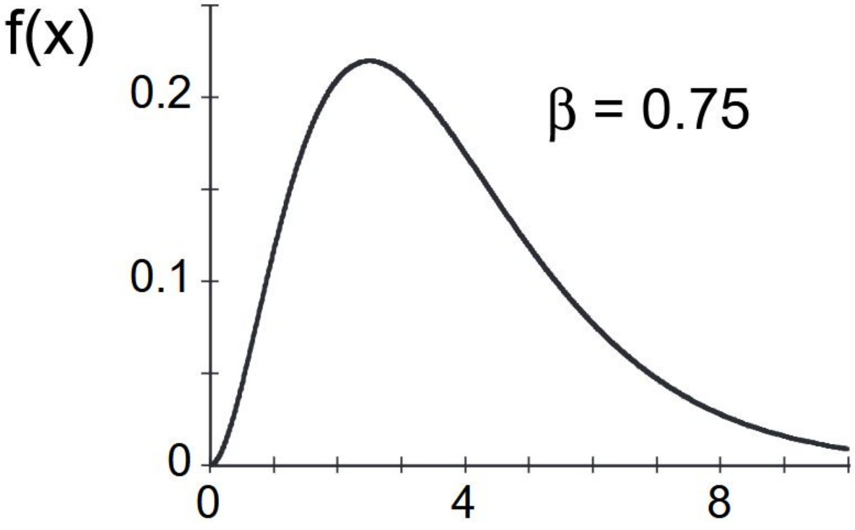
$\mu_0 = \sum_j (k_j - m_k)^0 p_j = 1$ **(Cond. normalización)**

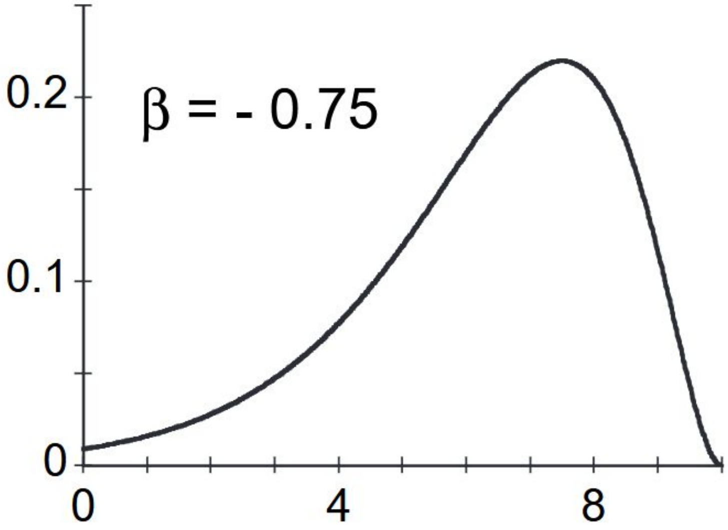
$\mu_1 = \sum_j (k_j - m_k) p_j =$
0 **(Media)**

$\mu_2 = \sum_j (k_j - m_k)^2 p_j = D_k$ **(Varianza)**

Órdenes de los momentos (centrales)

$\beta = \mu_3 / \sigma^3$ **(Coeficiente de asimetría)**

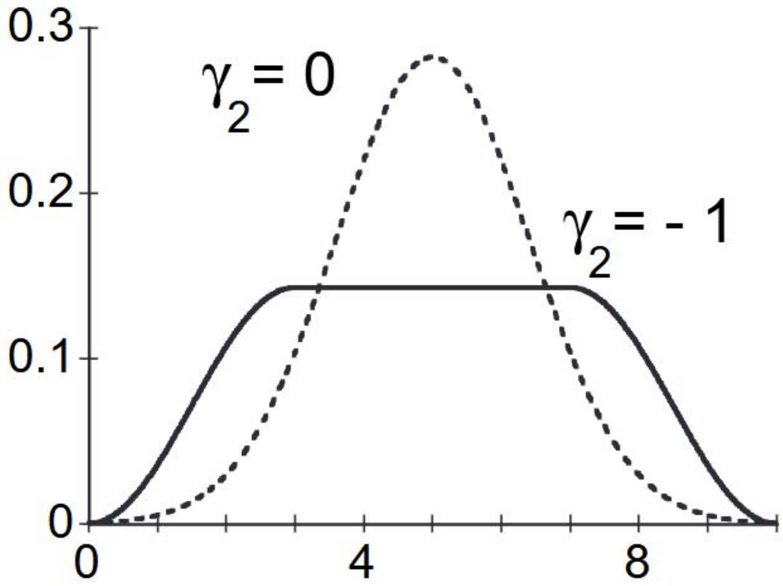


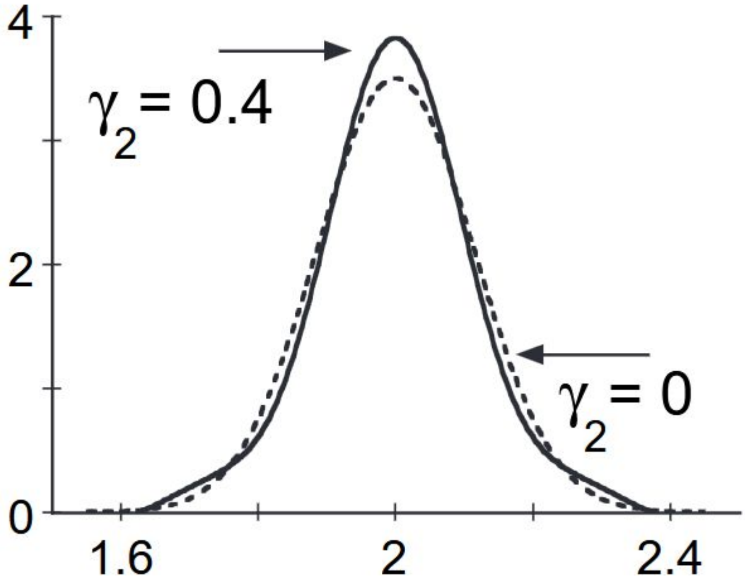


Órdenes de los momentos (centrales)

$$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4 - 3$$

(Curtosis)





Distribución de Poisson

- Aproximación a distribución binomial
- Conteos de eventos aleatorios

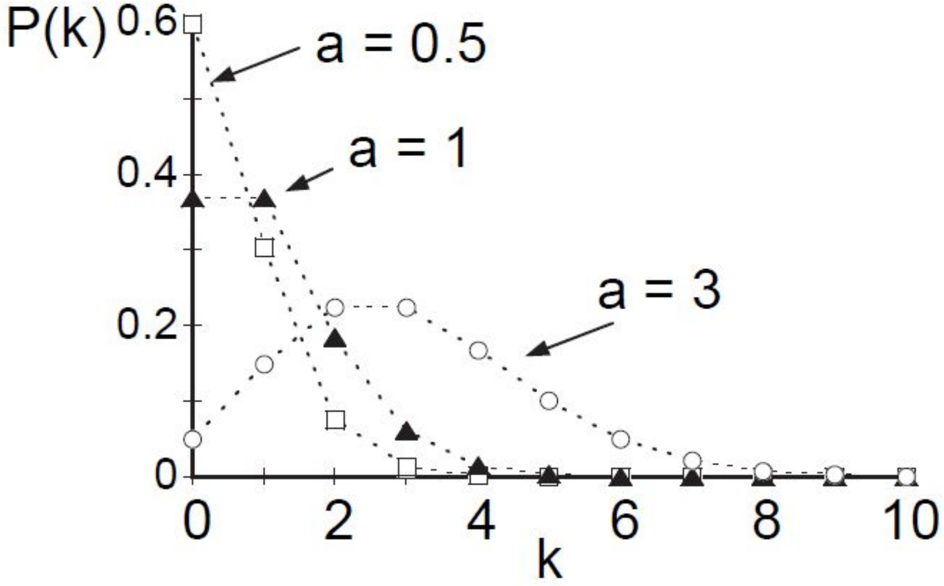
$$\mathcal{P}_a(k) = \frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a}$$

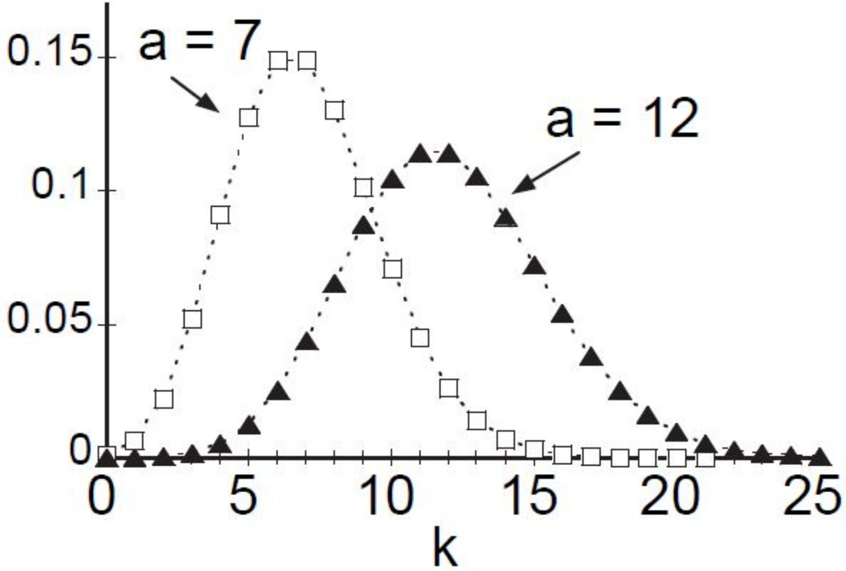
$$m = a\ , \qquad D = \mu_2 = a$$

Normalización de la distribución

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \mathrm{e}^{-a} = \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{a} = 1$$

Parámetros de la distribución





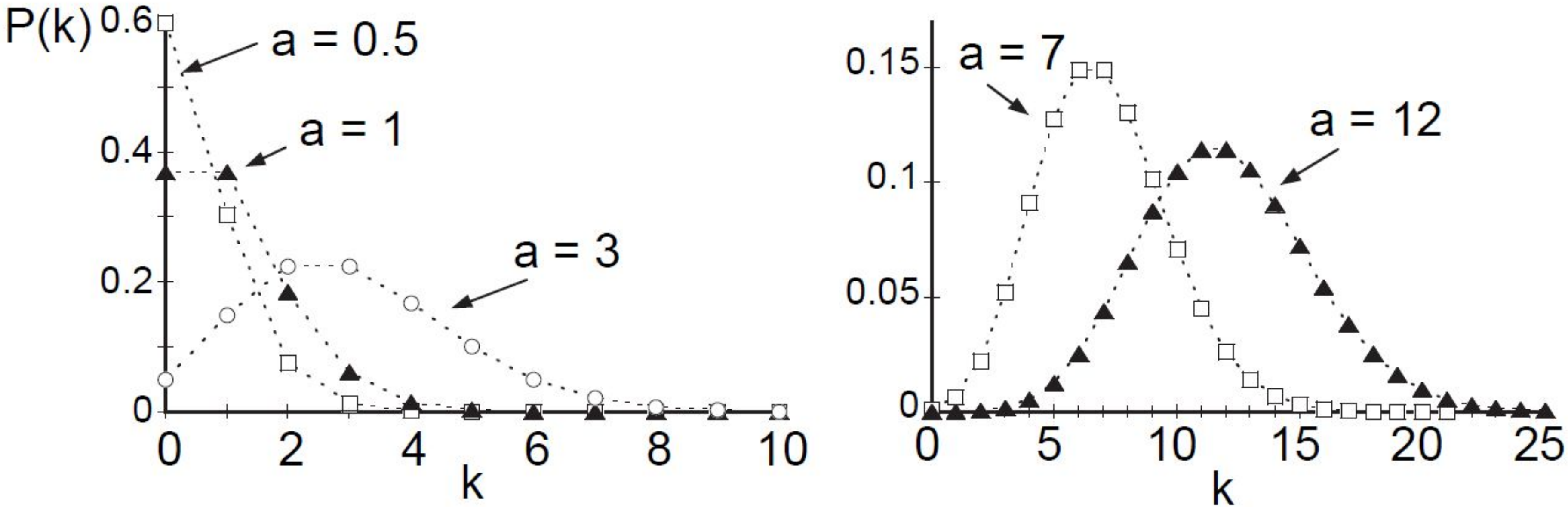
$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{a}$$

$$\sigma / m = 1/\sqrt{a}$$

Coef. de kurtosis y asimetría

$$\beta = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{a}$$


P(k)
0.6
0.4
0.2
0
a = 0.5
a = 1
a = 3
0
2
4
6
8
10
k
0.15
0.1
0.05
0
a = 7
a = 12
0
5
10
15
20
25
k

Recuerdo de distribución binomial

Binomial $$m = np$$

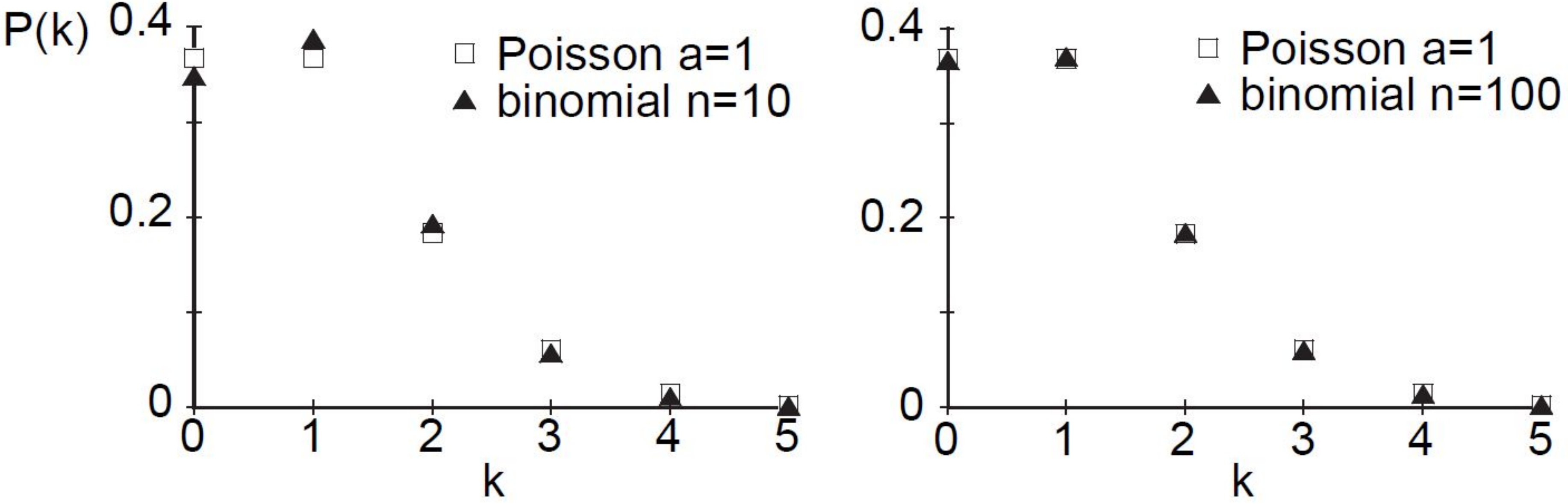
Poisson $$a = m = np$$

$$n \longrightarrow \infty \qquad p \longrightarrow 0$$

Distribución binomial y de Poisson

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(k) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} \\
&= \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k}}}_{\longrightarrow 1}\frac{a^{k}}{k!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}\underbrace{\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}}_{\longrightarrow 1}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-a}
$$


P(k)
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
k
Poisson a=1
binomial n=10
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
k
Poisson a=1
binomial n=100

Ejemplo: Maquinas de fabrica

Binomial

$$\mathcal{P}_{50,0.04}(4) = \frac{50!}{46!\ 4!}\ 0.04^4\ \ 0.96^{46} = 0.09016$$

Poisson

$$\mathcal{P}_2(4) = \frac{2^4}{4!}\, e^{-2} = 0.0902$$

Proceso estacionario de Poisson

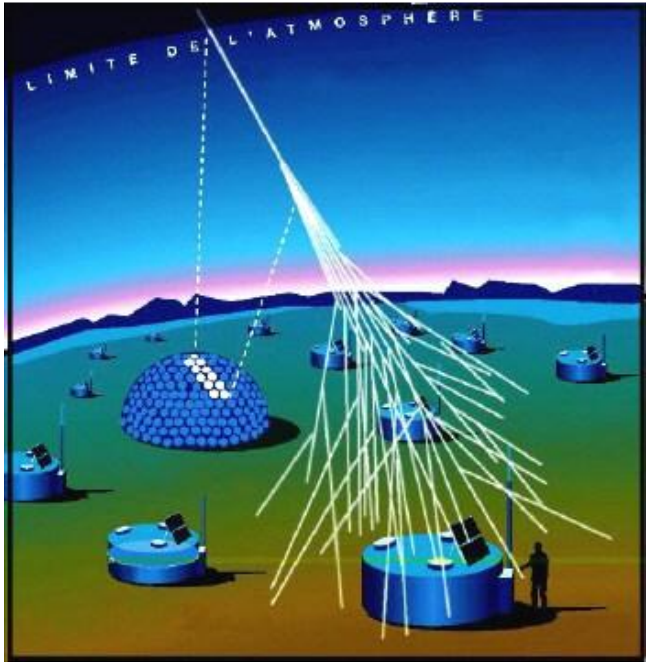
~~Binomial~~ $\longrightarrow$ Poisson

No se puede definir un n y p $\longrightarrow$ Se puede definir un $a = \lambda\Delta t$

Parámetro de densidad $\lambda = n/\Delta T$

$$\mathcal{P}_a(k) \;=\; \frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a} \;=\; \frac{(\lambda\,\Delta t)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,\Delta t}$$

Estadísticas de conteo



Medición única

k partículas detectadas en un tiempo *Δt*

$$\mathcal{P}_a(k) \;=\; \frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a}\;;\quad a = \lambda\Delta t$$

Medición única

k partículas detectadas en un tiempo *Δt*

$$\mathcal{P}_a(k) \;=\; \frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a}\;; \quad a = \lambda\Delta t$$

$$m_k^* = a^* = k$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{a}}$$

Medición única

k partículas detectadas en un tiempo *Δt*

$$\mathcal{P}_a(k) \;=\; \frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a}\;; \quad a = \lambda\Delta t$$

$$m_k^* = a^* = k \qquad \longrightarrow \qquad \tilde{a} = k \qquad ; \;\; \delta\lambda/\tilde{\lambda} \;=\; 1/\sqrt{k}$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{a}} \qquad\qquad \tilde{\lambda} = k/\Delta t \;; \qquad \delta\lambda = \sqrt{k}/\Delta t$$

Varias mediciones

N mediciones con *Δt* y k_i :

$$D_k^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (k_i - m_k^*)^2$$

$$m_k^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i$$

Varias mediciones

N mediciones con *Δt* y k_i :

$$D_k^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(k_i - m_k^*)^2$$

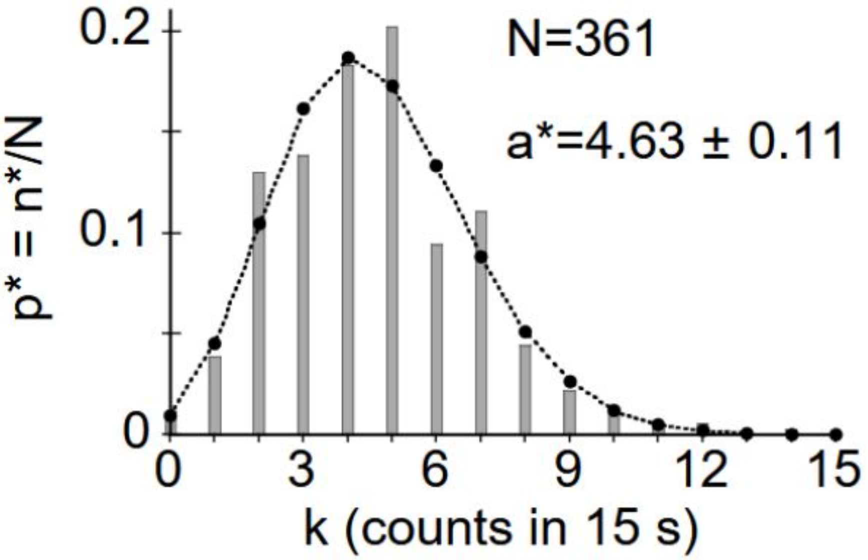
$$m_k^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_i$$

$$\longrightarrow$$

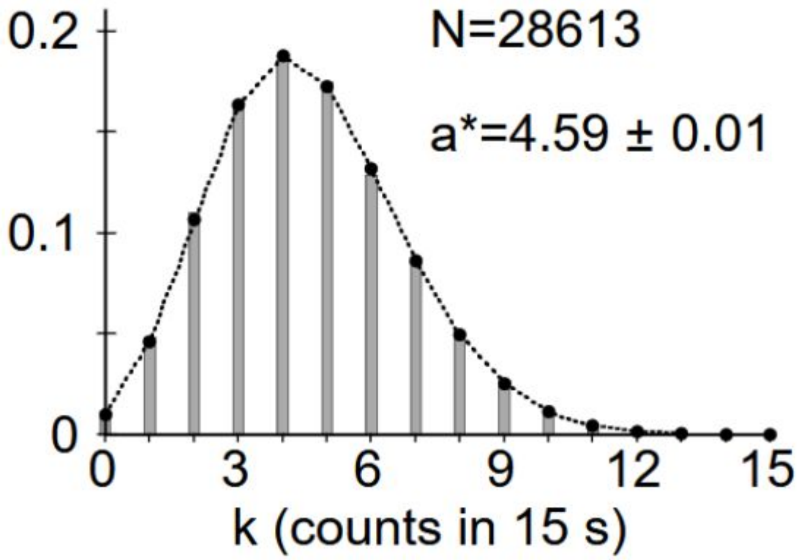
$$\tilde{a} = m_k^*$$

$$\delta\tilde{a} = \sigma[m_k^*] \simeq \frac{\sqrt{D_k^*}}{\sqrt{N}}$$

Ejemplo



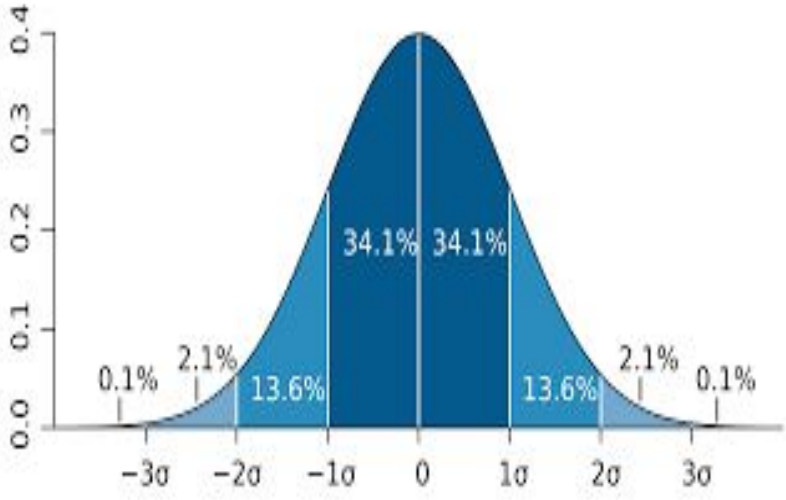
0.2
0.1
0
p* = n*/N
N=361
a*=4.63 ± 0.11
0
3
6
9
12
15
k (counts in 15 s)



0.2
0.1
0
N=28613
a*=4.59 ± 0.01
0
3
6
9
12
15
k (counts in 15 s)

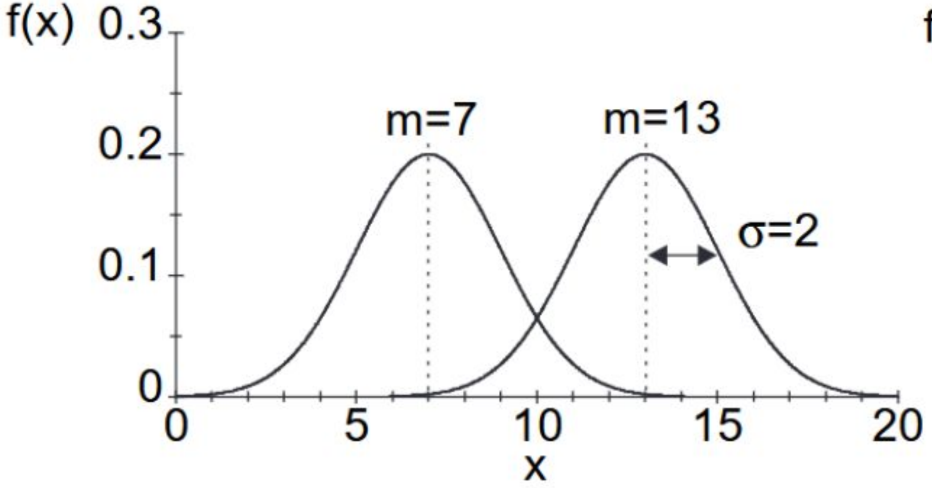
Distribución Normal

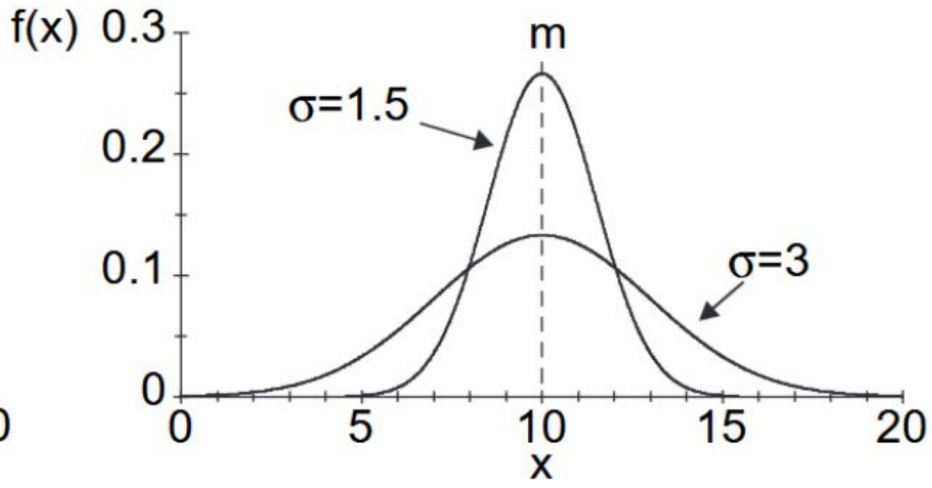
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$



Características

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x = 1$$





Momentos centrales de la distribución normal

$$\mu_s = (s-1)\,\sigma^2\,\mu_{s-2} \qquad (s \geq 2)$$

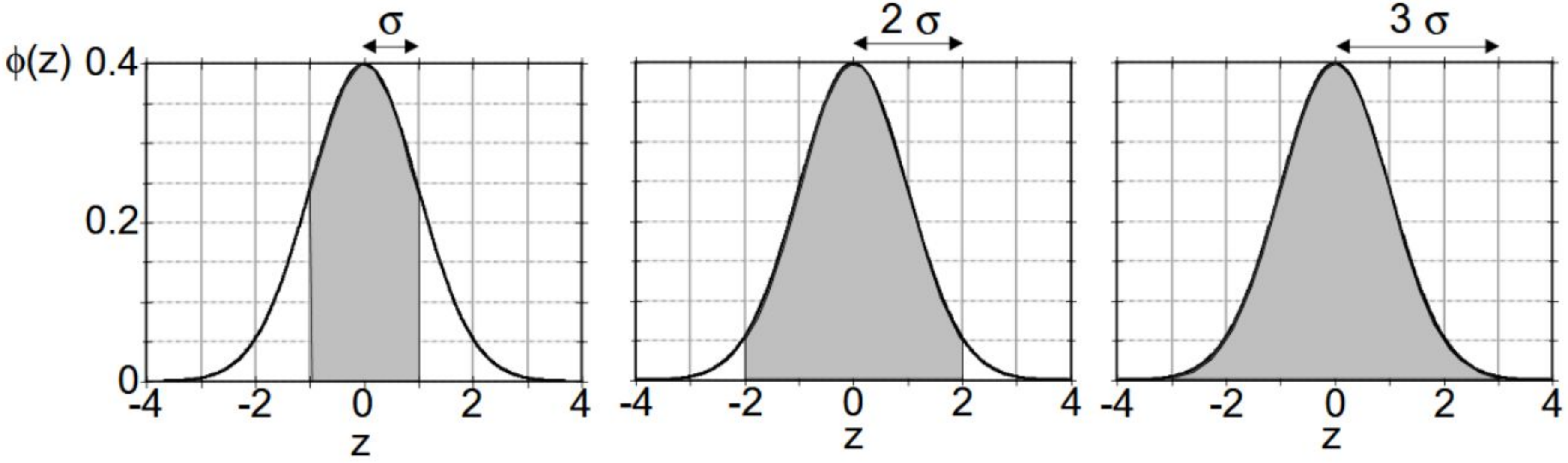
$$\mu_s = 0\ \forall s \text{ impar} \qquad \text{(simetría respecto a } x = m\text{)}$$

$$\gamma_2 = \mu_4/\sigma^4 - 3 = 0$$

Probabilidades

$$z = \frac{x - m}{\sigma} \longrightarrow \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$$

$$\mathcal{P}(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \mathrm{d}z$$



$$\mathcal{P}\left(m-\sigma<x<m+\sigma\right) = 0.6826$$
$$\mathcal{P}\left(m-2\sigma<x<m+2\sigma\right) = 0.9544$$
$$\mathcal{P}\left(m-3\sigma<x<m+3\sigma\right) = 0.9974$$

Muchas gracias

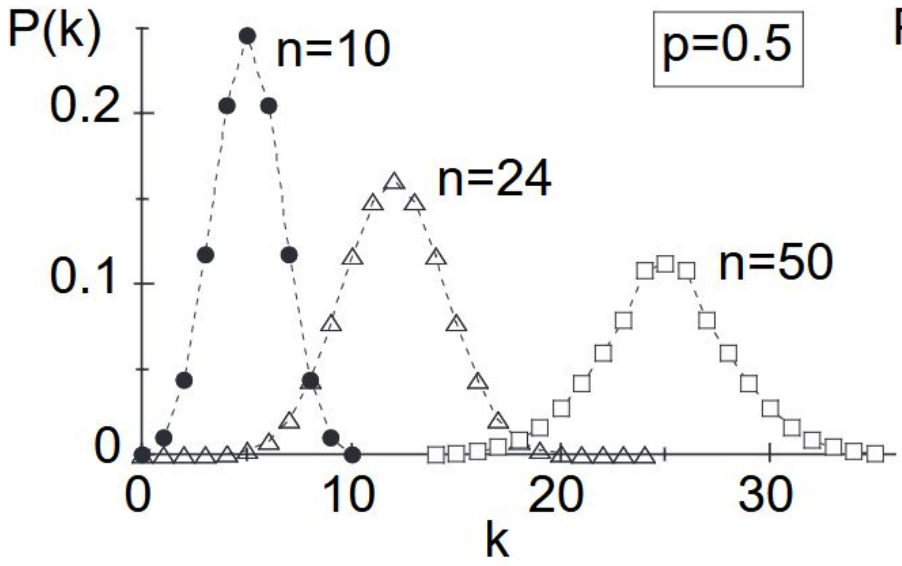
Apéndice: ejemplo de proceso de Poisson

- Llaman 150 veces por hora → λ = 150 l/h

- Quiero saber la probabilidad de tener 6 llamadas en 1 min → a = $\lambda\Delta t$ =150 l/h (1/60) h

$$\mathcal{P}(6) = \frac{2.5^6}{6!} \, \mathrm{e}^{-2.5} = 0.278$$

Ejemplo — k caras en n lanzamientos de moneda



Distribución uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < x_1 \,, \\ C & \text{for } x_1 \le x < x_2 \,, \\ 0 & \text{for } x \ge x_2 \,, \end{cases}$$