Laboratorio 4 - Grupo 2 - Verano 2025

Capítulo 5

Conceptos básicos de probabilidad

1. Fenómenos aleatorios

- **Definición**: Un fenómeno es aleatorio si, al repetirse bajo las mismas condiciones iniciales, produce resultados impredecibles.

1. Fenómenos aleatorios

- **Definición**: Un fenómeno es aleatorio si, al repetirse bajo las mismas condiciones iniciales, produce resultados impredecibles.

- **Ejemplo:** Se lanza un dado muchas veces de la misma manera. Su trayectoria es casual y el resultado es impredecible.

1. Fenómenos aleatorios

Algunos fenómenos físicos siguen leyes determinísticas, lo que permite predecir su evolución si conocemos las condiciones iniciales. Sin embargo, hay factores secundarios que no pueden tratarse de esta manera y generan un comportamiento aleatorio, el cual siempre está presente en mayor o menor medida.

1. Fenómenos aleatorios

- **Ejemplo:** La caída libre de un objeto, está descrito por una ecuación que la determina. Sin embargo, la trayectoria real estará influenciada por factores secundarios aleatorios, como vibraciones, vientos y errores de lanzamiento.

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

no es real!

1. Fenómenos aleatorios

Ejemplo 2: La medición de una cantidad física es, en gran medida, un proceso determinista. Sin embargo, es imposible eliminar completamente la influencia de fluctuaciones casuales, y el resultado de una medición es un intervalo de valores en lugar de un solo valor.

10 cm

1. Fenómenos aleatorios

Existen algunos fenómenos para los cuales un tratamiento determinista es totalmente imposible. En algunos casos, esto se debe simplemente a la complejidad del fenómeno; en otros casos, típicamente en la física atómica y subatómica, el fenómeno tiene una naturaleza genuinamente aleatoria.

1. Fenómenos aleatorios

Existen algunos fenómenos para los cuales un tratamiento determinista es totalmente imposible. En algunos casos, esto se debe simplemente a la complejidad del fenómeno; en otros casos, típicamente en la física atómica y subatómica, el fenómeno tiene una naturaleza genuinamente aleatoria.

¿Qué hacemos en esos casos?

1. Fenómenos aleatorios

Existen métodos para tratar la aleatoriedad de los fenómenos. Tales métodos se basan en la teoría de la probabilidad y en la estadística.

El resultado de un solo fenómeno aleatorio es completamente impredecible; la repetición del fenómeno dará lugar a una distribución aleatoria de resultados. Sin embargo, cuando el número de repeticiones se vuelve muy grande, la distribución de resultados adquiere características de creciente regularidad, y los valores promedio de algunas cantidades relevantes se vuelven cada vez más estables.

1. Fenómenos aleatorios

Volviendo al ejemplo de las mediciones...

Una sola medición de una cantidad física con fluctuaciones aleatorias da un valor impredecible. Pero, si repetimos la medición muchas veces, los resultados se agrupan en una distribución definida que se puede describir con dos valores: la media y la desviación estándar.

Como se la complican estos físicos

(10,0 ± 0,1) cm

2.1 Espacio muestral (S)

- **Definición**: Conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio.
  - Puede ser finito (ej: lanzar un dado, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
  - Infinito numerable (ej: lanzar una moneda hasta obtener cara, $S=\{\circ, \times\circ, \times\times\circ, \times\times\times\circ, \ldots\}$).
  - Infinito no numerable (ej: tiempo de desintegración de un isótopo radiactivo, $S = [0, \infty)$).

2. 2 Eventos (A)

- **Definición:** Cualquier subconjunto posible A del espacio muestral S es un evento: en otras palabras, un evento es un conjunto de posibles resultados. Un evento A se realiza si uno de los resultados que le pertenecen se realiza. Los resultados individuales a veces se llaman eventos simples.

2. 2 Eventos (A)

- **Ejemplo 1:**
  Una moneda se lanza dos veces. El espacio muestral es S={ ××, ×◦, ◦×, ◦◦ }
  El evento "una cara" es el subconjunto A={ ×◦, ◦× }, que corresponde a los casos en los que aparece exactamente una cara.

- **Ejemplo 2:**
  Se lanza un dado diez veces. Un resultado es una secuencia de diez números, cada uno entre 1 y 6. Hay 6^{10} posibles secuencias diferentes, por lo que el espacio muestral S tiene 6^{10} elementos.
  Algunos posibles eventos son:
  - "El 6 aparece 5 veces"
  - "El 3 aparece 2 veces y el 2 aparece 4 veces"
  - "El 4 aparece 3 veces consecutivas"

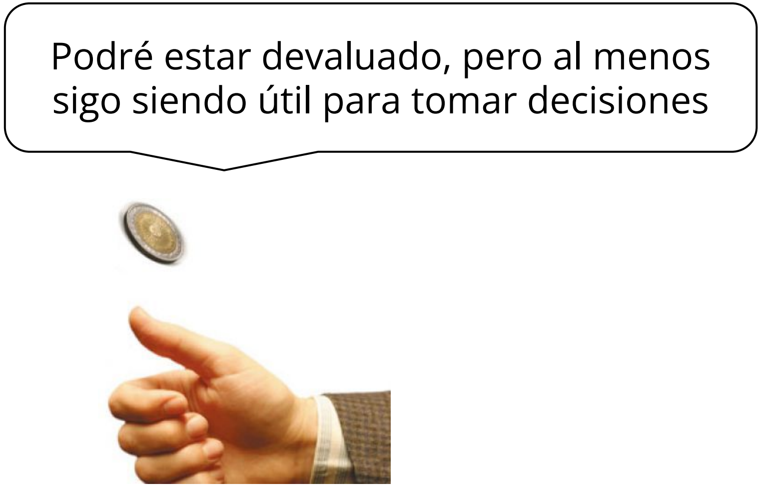
2. 2 Eventos (A)

- Es conveniente distinguir dos eventos particulares:
  - Evento seguro: $A = S$ (siempre ocurre).
  - Evento imposible: $A = \varnothing$ (nunca ocurre).

- Ejemplo: Se lanza un dado. El evento "el resultado es un número mayor que 0 y menor que 7" es seguro. El evento "el resultado es 8" es imposible.

3. Probabilidad de un evento

- **Motivación:** Se lanza una moneda diez veces. Se espera que la realización del evento "los resultados son 6 cruces y 4 caras" sea más fácil que la realización del evento "los resultados son 10 caras".



3. Probabilidad de un evento

- **Motivación:** Se lanza una moneda diez veces. Se espera que la realización del evento "los resultados son 6 cruces y 4 caras" sea más fácil que la realización del evento "los resultados son 10 caras".
- **Definición**: La probabilidad (Ƥ) es un número entre 0 y 1 que mide la facilidad de ocurrencia de un evento.
  1. Ƥ = 1: Evento seguro.
  2. Ƥ = 0: Evento imposible.

3. Probabilidad de un evento

- Reglas para calcular probabilidad:
  1. Probabilidad clásica
  2. Probabilidad estadistica
  3. Probabilidad subjetiva

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad clásica:**
  La probabilidad de un evento se evalúa "a priori", sin realizar experimentos, como la razón entre el número de resultados que corresponden al evento y el número total de resultados posibles en el espacio muestral:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{number of favorable outcomes}}{\text{total number of outcomes}} = \frac{m}{M}\,.$$

- **Requisitos:**
  - De todos los posibles resultados, solo uno se realiza.
  - Los posibles resultados tienen la misma probabilidad: un resultado no tiene ventaja sobre los demás.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad clásica:**

    - **Ejemplo 1 :**Se lanza un dado. La probabilidad de obtener un "3" es P(3) = 1/6, ya que hay 6 posibles resultados y solo uno es favorable.
    - **Ejemplo 2.** Una caja contiene 5 bolitas, 2 blancas y 3 marrones. Se extrae una bolita al azar: la probabilidad de que sea blanca es P(ext blanca) = 2/5, ya que hay 5 resultados posibles y 2 favorables.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad estadistica:**
  Esta regla es conocida como "a posteriori", porque, a diferencia de la probabilidad clásica, que se calcula sin realizar experimentos, la probabilidad estadística se calcula después de realizar varios experimentos.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad estadistica:**
  Imaginemos que realizamos un experimento N veces y que el evento A ocurre en n^* de esos N experimentos. La **frecuencia estadística** (o frecuencia muestral) del evento A se calcula como la razón de estos dos valores:

$$p^*(A) = \frac{n^*}{N}$$

- La probabilidad de que ocurra un evento A depende de cuántas veces suceda en los experimentos realizados. Sin embargo, esta frecuencia es **aleatoria**: puede variar al repetir los experimentos. Con más repeticiones, la frecuencia se estabiliza y se acerca al valor real de la probabilidad.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad estadistica:**
  Ejemplo: Se lanza una moneda 100 veces y la frecuencia estadística de "cara" es p1* = 45/100. La misma moneda se lanza nuevamente 100 veces y la frecuencia estadística ahora es p2* = 52/100, y así sucesivamente.

  Sin embargo, la experiencia muestra que la amplitud relativa de las fluctuaciones aleatorias de los valores de p* tiende a disminuir cuando el número N de experimentos aumenta. En los casos en que se puede usar la regla clásica, se puede verificar experimentalmente que la frecuencia estadística tiende al valor de probabilidad de la regla clásica.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad estadistica:**

R. von Mises (1883-1953) propuso considerar la probabilidad P(A) de un evento A como el valor límite de la frecuencia estadística p*(A) cuando $N \to \infty$. Esta propuesta no corresponde a una definición operativa de probabilidad, porque N es necesariamente finito en un experimento real. Sin embargo, es común expresar la probabilidad como:

$$P(A) \approx p^*(A) = n^* / N$$

con la comprensión de que cuanto mayor sea N, mejor será la estimación de la probabilidad mediante esta fórmula.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad subjetiva**
  Es un enfoque que mide el grado de confianza que una persona tiene en que un evento ocurra. A diferencia de la probabilidad clásica y estadística, que se basan en cálculos o experimentos previos, la probabilidad subjetiva se basa en la opinión personal y experiencia de quien realiza la estimación.

  - **Ejemplo:** si alguien lanza un dado y estima que la probabilidad de sacar un "5" es 1/6, lo hace basándose en su conocimiento de cómo funcionan los dados y en su experiencia pasada, aunque no haya hecho suficientes experimentos para confirmarlo de manera estadística.

3. Probabilidad de un evento

- **Probabilidad subjetiva**
  En criollo: es la probabilidad a ojo.

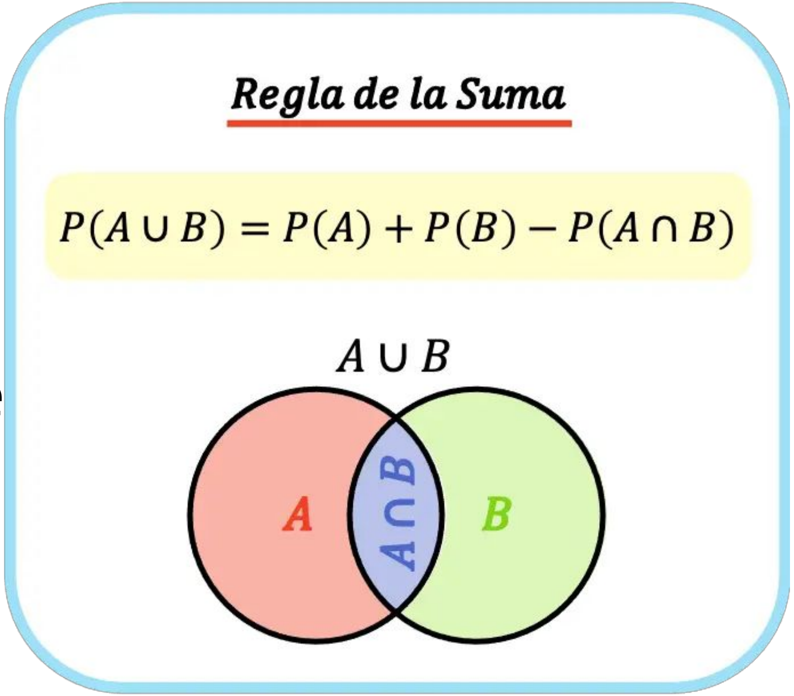
4 Ases, ya fue,
apuesto todo!!

3. Probabilidad de un evento

- **Reglas para calcular probabilidad (RESUMEN)**:
  1. **Probabilidad Clásica**:
     - Ƥ(A) = (Número de resultados favorables) / (Número total de resultados).
     - Requiere que todos los resultados sean equiprobables.
     - Ejemplo: Ƥ(3) al lanzar un dado = 1/6.
  2. **Probabilidad Estadística**:
     - Ƥ(A) ≈ (Número de veces que ocurre A) / (Número total de experimentos).
     - Se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia.
     - Ejemplo: Lanzar una moneda 100 veces y contar cuántas veces sale cara.
  3. **Probabilidad Subjetiva**:
     - Basada en el grado de confianza personal en la ocurrencia de un evento.
     - Ejemplo: Asignar Ƥ = 1/6 a obtener un "5" en un dado basado en experiencia previa.

4. Suma de eventos y su probabilidad.

- Suma de eventos:
  - C=A+B o C=A ∪ B
  - (Ej: colores de ojos.)
- Eventos mutuamente excluyente
  - (Ej: dados)
  - probabilidad de la suma:



5. Producto de eventos y su probabilidad.

- Producto de eventos:
- C=AB o C= A ∩ B
- (Ej: gato)
- Probabilidad condicional
- Eventos independientes
- Probabilidad del producto:
- P(AB) = P(A) P(B|A)
- P(AB) = P(A)P(B) (independientes)

6. Eventos complejos.

- Eventos contrarios:
- A ∩ **A** = ∅
- Utilidad de las definiciones anteriores.
- Ej: “tengo una diana donde disparó 3 veces, puedo acertar o errar con cierta probabilidad(no necesariamente igual), cual es la probabilidad de que acierte solo 1 vez?”
- S = {123, 12**3**, 1**2**3, **1**23, **12**3, **1**2**3**, 1**23**, **123**}
- C= 1**23** + **1**2**3** + **12**3.

7. Cálculo combinatorio

[Técnicas de *conteo*]

Consiste en contar

- Jugar a cosas
- Ordenar cosas

7. Cálculo combinatorio

Antes, casino.

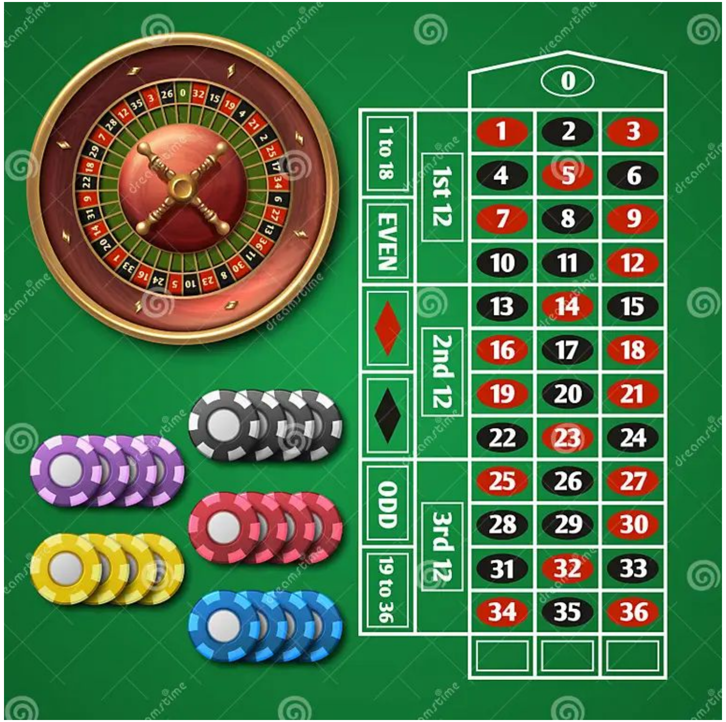
Ruleta? Malas noticias.

Cuántos números tiene?

Ruleta: 36 números y el cero.

El cero no es un número

El cero no es un número?



7. Cálculo combinatorio

Jugamos $1.000 a un número

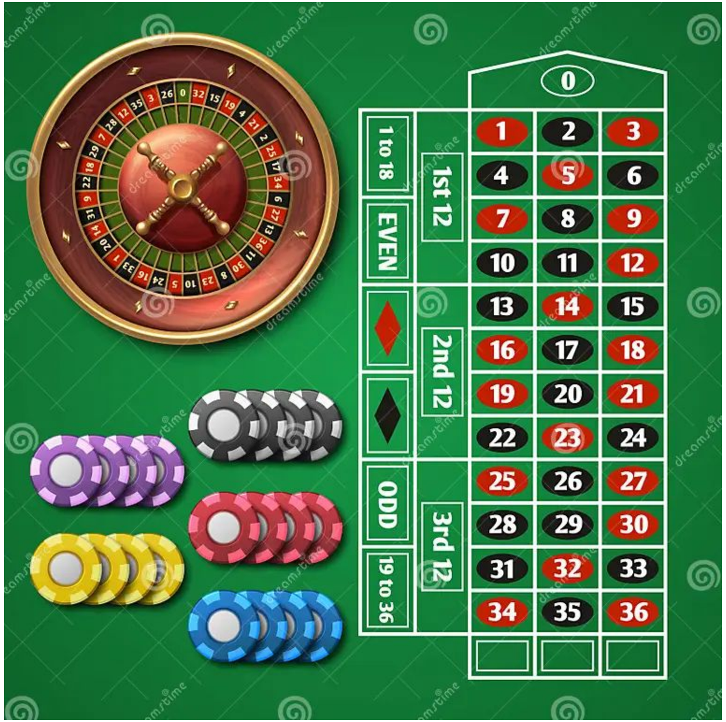
(el 0 es un número)

Ƥ = ?

Ƥ = 1/37 ≈ 0,027...

Le pegamos

Ganamos $35.000

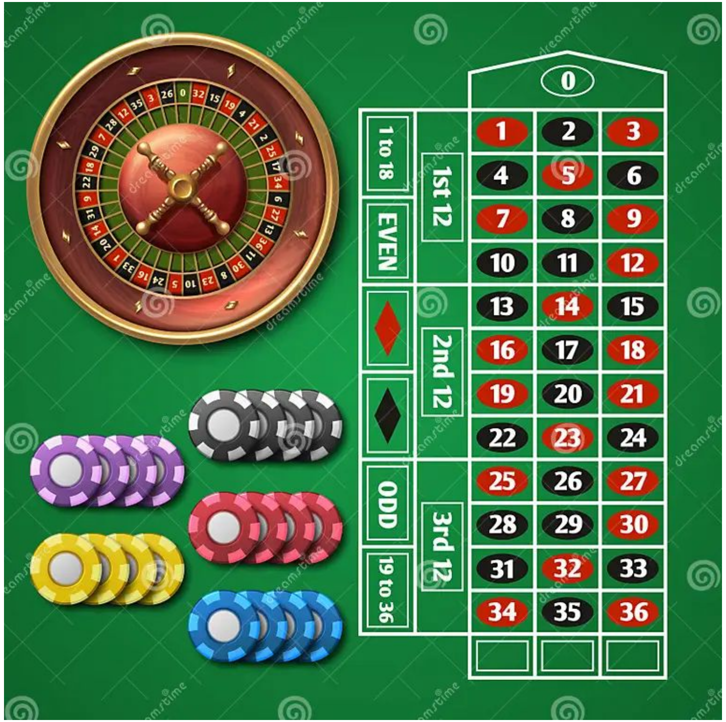


7. Cálculo combinatorio

$P = 1/37 \approx 0{,}027$...

Qué significa?

Que si jugamos para siempre, esa sería la frecuencia relativa



7. Cálculo combinatorio

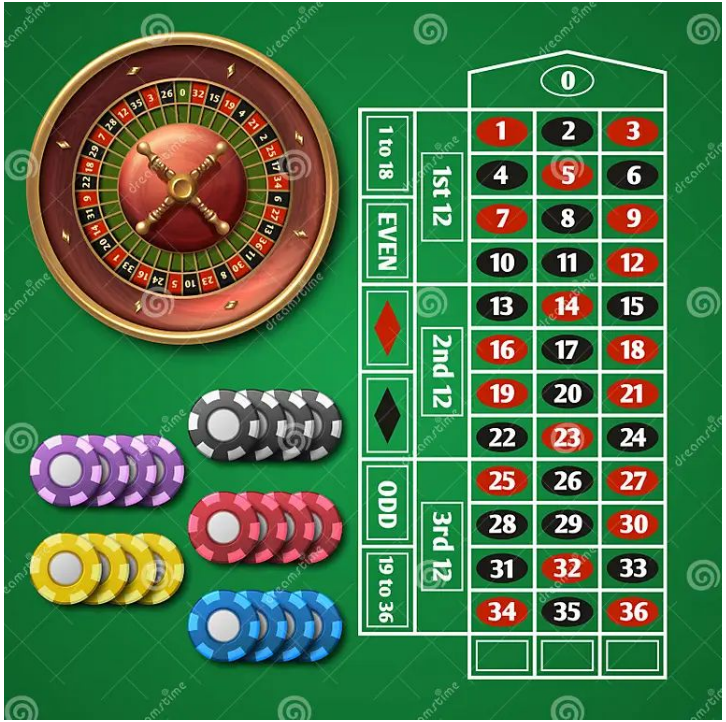
Jugamos $1.000 a *todos* los números

Ƥ = ?

Ƥ = 1

Le pegamos

Perdimos $1.000



7. Cálculo combinatorio

Somos 4 hijos varones.

(Yo soy el 3ro)

Probabilidad 4 hijos varones?

Ᵽ = 1/16 = 0,0625

Probabilidad 3er hijo varón?

Ᵽ = 1/2 = 0,5

Qué significa?

7. Cálculo combinatorio

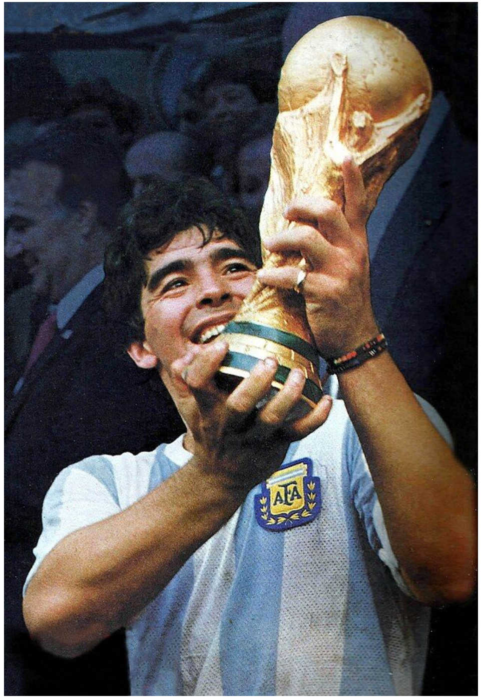
7. Cálculo combinatorio

Tengo 4 hijos.

Tengo 4 hijos.

Tengo 4 hijos.

(Vivo eternamente)

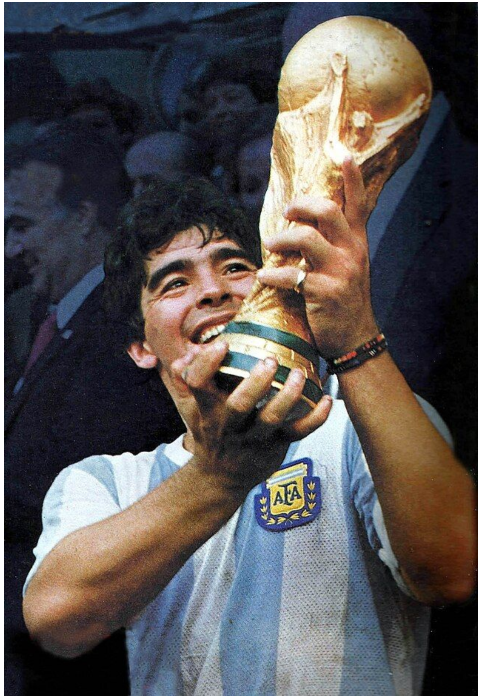


7. Cálculo combinatorio

Vivo eternamente:

No puedo hacer el experimento N veces.

Hagamos el experimento:



7. Cálculo combinatorio

```
from random import choice as elegir

cantidad_de_varones, favorables, N = [0, 1, 2, 3,
4], 0, 100000000

for i in range(N):

    resultado = elegir(cantidad_de_varones)

    if resultado == 4: favorables += 1

print(favorables/N)
```

7. Cálculo combinatorio

```
print("P = 1/16 = 0.0625\np* = n*/N =",
      favorables / N, ":C")
```

```
P = 1/16 = 0.0625
p* = n*/N = 0.1999795 :C
```

7. Cálculo combinatorio

```
from random import choice as elegir

cantidad_de_varones, favorables, N = [0, 1, 2, 3,
4], 0, 100000000

for i in range(N):

    resultado = elegir(cantidad_de_varones)

    if resultado == 4: favorables += 1

print(favorables/N)
```

```
print("P = 1/16 = 0.0625\np* = n*/N =",
      favorables / N, ":C")

P = 1/16 = 0.0625
p* = n*/N = 0.1999795 :C
```

7. Cálculo combinatorio

```
from random import choice as elegir
posibilidades, favorables, N = [“M”, “F”], 0, 100000000
for j in range(N):
    varones = 0
    for i in range(4):
        resultado = elegir(posibilidades)
        if resultado == “M”: varones += 1
    if varones == 4: favorables += 1
print(favorables/N)
```

7. Cálculo combinatorio

```
print("P = 1/16 = 0.0625\np* = n*/N =",
      favorables / N, ":D")
```

```
P = 1/16 = 0.0625
p* = n*/N = 0.0623835 :D
```

7. Cálculo combinatorio

[Técnicas de *conteo*]

Consiste en contar

- Jugar a cosas
- Ordenar cosas

7. Cálculo c

- Ordenar

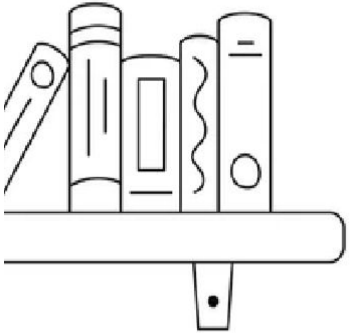
Ponemos el

Ponemos el

...

Ponemos el

Total: 1/7 ×



7. Cálculo combinatorio

[Técnicas de ***conteo***]

Consiste en **contar**

No multiplicar probabilidades!

Prohibido multiplicar probabilidades D:

Objetivo:

$$\mathcal{P} = |A| \,/\, |S|$$

Cantidad de casos favorables dividido cantidad de casos totales

7. Cálculo combinatorio

Objetivo:

$$\mathcal{P} = |A| \ / \ |S|$$

Cantidad de casos favorables dividido cantidad de casos totales

Solamente en espacios muestrales equiprobables

7. Cálculo combinatorio

Ponemos 7 libros

Cuántas posibilidades?

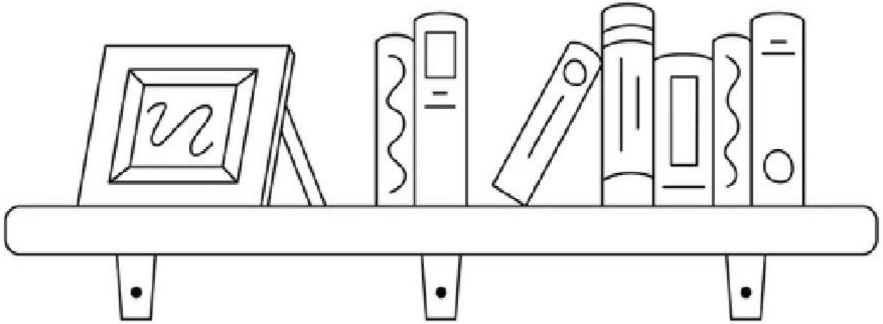
Primera posición: 7

Segunda posición: 6

...

Combinaciones: $|S| = 7!$

$(7! = 5040)$



7. Cálculo combinatorio

- Ordenamientos [Permutations]

Formas de ordenar n cosas

En un determinado orden

Cantidad de formas:

$$n!$$

Probabilidad de que se nos dé un determinado orden:

$$\mathcal{P} = 1 / n!$$

7. Cálculo combinatorio

Ponemos 7 libros

Pero ahora tenemos 3 huecos

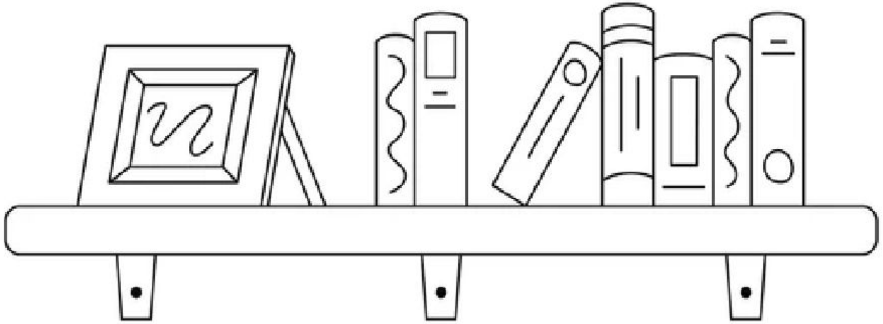
Cuántas combinaciones?

Primera posición: 7

Segunda posición: 6

Tercera posición: 5

Fin. Nos quedamos sin el 4, 3, 2, 1.



7. Cálculo combinatorio

7 libros en 3 huecos

1ra: 7 ; 2da: 6 ; 3ra: 5

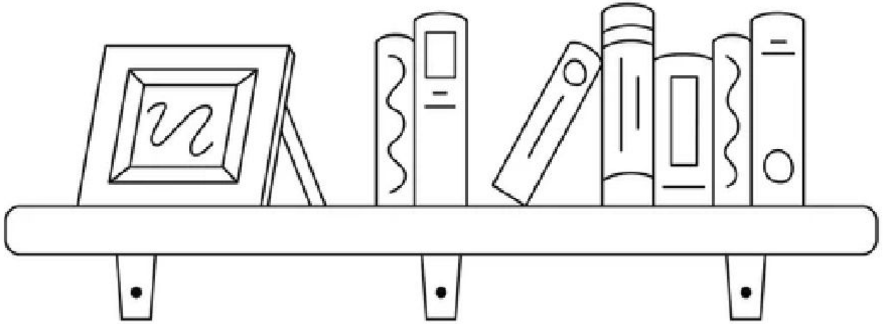
Combinaciones:

$|S| = 7 \times 6 \times 5$

$|S| = 7 \times 6 \times 5 = 7! / 4!$

$|S| = 7 \times 6 \times 5 = 7! / 4! = 7! / (7-3)!$

$(7 \times 6 \times 5 = 210)$



7. Cálculo combinatorio

- Variaciones [Dispositions]

Formas de ordenar n cosas en k huecos

En un determinado orden

Cantidad de formas:

$$D_{n,k} = n! / (n-k)!$$

Probabilidad de que se nos dé un determinado orden:

$$\mathcal{P} = 1 / D_{n,k}$$

7. Cálculo combinatorio

Ponemos 7 libros

Pero ahora tenemos 3 huecos

Y nos los guardamos en una bolsa

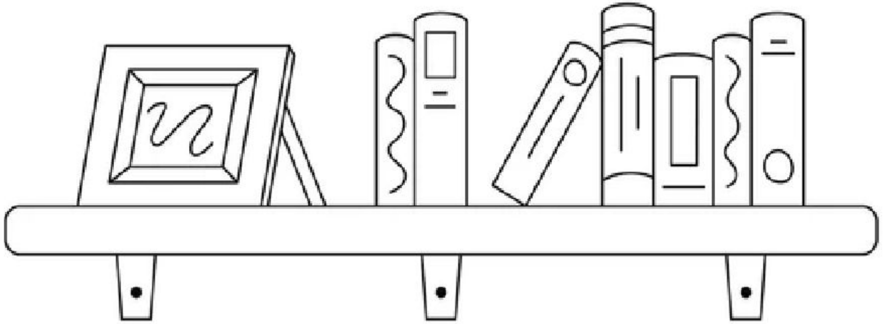
Cuántas combinaciones?

Primera posición: 7

Segunda posición: 6

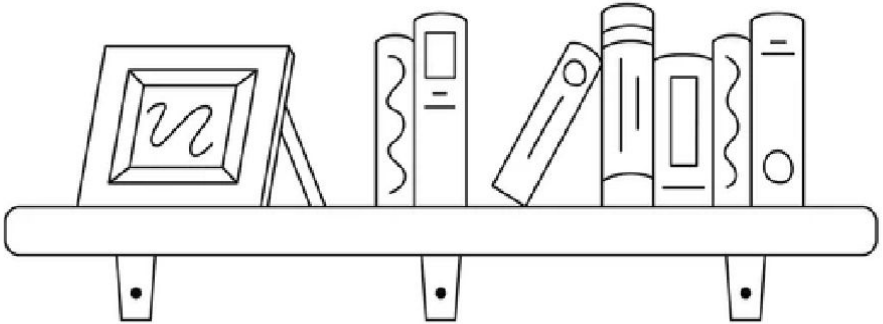
Tercera posición: 5

Fin. Nos quedamos sin el 4, 3, 2, 1.



7. Cálculo combinatorio

Pero ahora no nos importa si nos tocaron los libros A, B y F en el orden A-F-B o en el orden B-A-F



Tenemos que dividir por la cantidad de formas de ordenar esos 3 libros

7. Cálculo combinatorio

7 libros en 3 huecos sin importar el orden

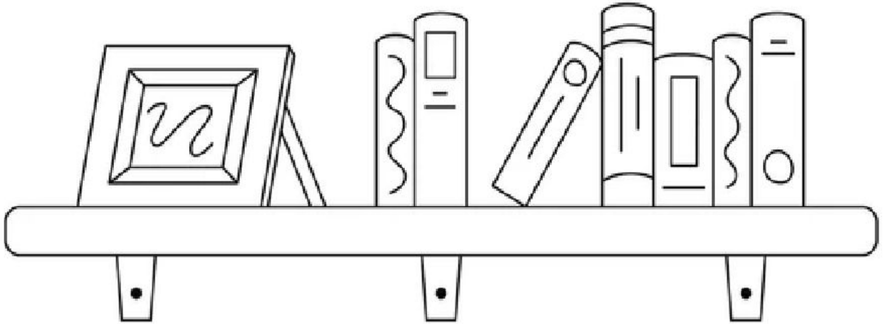
1ra: 7 ; 2da: 6 ; 3ra: 5

Combinaciones de antes: 7! / (7-3)!

Combinaciones ahora: eso dividido 3!

$|S| = 7! / ((7-3)! \times 3!)$

$(7\times6\times5/ 3! = 35)$



7. Cálculo combinatorio

- <u>Subpoblaciones</u> [Combinations]

Formas de agarrar k cosas de n elementos

En un algún orden cualquiera

Que no nos importa

Es un muestreo

Cantidad de formas:

$$C_{n,k} = n! / (n-k)! \times k!$$

Probabilidad de que se nos dé una determinada subpoblación en algún orden cualquiera que no nos importa:

$$\mathcal{P} = 1 / C_{n,k}$$

7. Cálculo combinatorio

[Técnicas de *conteo*]

Consiste en contar

- Jugar a cosas
- Ordenar cosas
- **Hacer física**