Proposición 1. Sea $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$. $\quad \mathrm{CONS}(\Gamma) = \mathrm{CONS}(\mathrm{CONS}(\Gamma))$

Demostración. Al ser una igualdad de conjuntos, debemos probar la doble inclusión i.e. que $\mathrm{CONS}(\Gamma) \subseteq \mathrm{CONS}(\mathrm{CONS}(\Gamma))$ y $\mathrm{CONS}(\Gamma) \supseteq \mathrm{CONS}(\mathrm{CONS}(\Gamma))$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $\varphi \in \mathrm{CONS}(\Gamma) \xRightarrow{\text{def. } \texttt{DER}} \varphi \in \texttt{DER} \xRightarrow{\text{def. CONS}} \varphi \in \mathrm{CONS}(\mathrm{CONS}(\Gamma))$. Lo que prueba esta inclusión.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $\varphi \in \mathrm{CONS}(\mathrm{CONS}(\Gamma))$. Entonces, $(\bar{\exists}\mathcal{D}_0 \in \texttt{DER})\ H(\mathcal{D}_0) = \{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subseteq \mathrm{CONS}(\Gamma)$ y $C(\mathcal{D}_0) = \varphi$. A su vez, $(\bar{\forall} i \in \{1, \dots, n\})(\bar{\exists}\mathcal{D}_i)\ H(\mathcal{D}_i) \subseteq \Gamma$ y $C(\mathcal{D}_i) = \delta_i$, entonces $\varphi \in \mathrm{CONS}(\Gamma)$. Lo cual concluye la prueba.

Visualmente, la prueba de la última inclusión quiere decir:

$$\left.\begin{array}{ccc} \Gamma & & \Gamma \\ \nabla & \dots & \nabla \\ \delta_1 & \dots & \delta_n \\ & \bigtriangledown & \\ & \varphi & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \Gamma \\ \bigtriangledown \\ \varphi \end{array}$$

$\square$