

Proposición 1. Sea $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. $\text{CONS}(\Gamma) = \text{CONS}(\text{CONS}(\Gamma))$

Demostración. Al ser una igualdad de conjuntos, debemos probar la doble inclusión i.e. que $\text{CONS}(\Gamma) \subseteq \text{CONS}(\text{CONS}(\Gamma))$ y $\text{CONS}(\Gamma) \supseteq \text{CONS}(\text{CONS}(\Gamma))$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $\varphi \in \text{CONS}(\Gamma) \xrightarrow{\text{def. DER}} \varphi \in \text{DER} \xrightarrow{\text{def. CONS}} \varphi \in \text{CONS}(\text{CONS}(\Gamma))$. Lo que prueba esta inclusión.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $\varphi \in \text{CONS}(\text{CONS}(\Gamma))$. Entonces, $(\exists \mathcal{D}_0 \in \text{DER}) H(\mathcal{D}_0) = \{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subseteq \text{CONS}(\Gamma)$ y $C(\mathcal{D}_0) = \varphi$. A su vez, $(\forall i \in \{1, \dots, n\})(\exists \mathcal{D}_i \in \text{DER}) H(\mathcal{D}_i) \subseteq \Gamma$ y $C(\mathcal{D}_i) = \delta_i$, entonces $\varphi \in \text{CONS}(\Gamma)$. Lo cual concluye la prueba.

Visualmente, la prueba de la última inclusión quiere decir:

$$\left. \begin{array}{ccc} \Gamma & & \Gamma \\ \nabla & \dots & \nabla \\ \delta_1 & & \delta_n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla \\ \varphi \end{array}$$

□