

PRÁCTICO 4: DEDUCCIÓN NATURAL EN PROP

1. Realice los agregados que estime pertinentes para que los siguientes árboles sean elementos de DER. Asimismo, provea juicios que correspondan con dichas pruebas i.e. dé $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ y $\varphi \in \text{PROP}$ tales que cada razonamiento (árbol) pruebe que $\Gamma \vdash \varphi$.

(a)

$$\frac{\frac{\frac{[g]}{b \rightarrow g} \quad \frac{[a \leftrightarrow b \rightarrow g]}{a} \quad \frac{[\neg a \wedge b]}{\neg a}}{\frac{\perp}{\neg g}}}{\frac{\neg a \wedge b \rightarrow \neg g}{(a \leftrightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg a \wedge b \rightarrow \neg g}}$$

(b)

$$\frac{\frac{\frac{[c]}{d \rightarrow c}}{(d \rightarrow c) \vee a} \quad \neg((d \rightarrow c) \vee a)}{\frac{\perp}{\neg c}} \quad \neg c \vee \neg b$$

(c)

$$\frac{\frac{\frac{[a \wedge \neg b]}{a} \quad \frac{[a \rightarrow b]}{b} \quad \frac{[a \wedge \neg b]}{\neg b}}{\frac{\perp}{\neg(a \rightarrow b)}}}{\frac{a \wedge \neg(a \rightarrow b)}{\neg(a \wedge \neg(a \rightarrow b))}} \quad \perp$$

(d)

$$\frac{\frac{\frac{[f] \quad [f \rightarrow p]}{p}}{p \vee s} \quad \neg f \vee p \vee s \quad [\neg(\neg f \vee p \vee s)]}{\frac{\perp}{\neg(f \rightarrow p)}} \quad \neg(f \rightarrow p) \rightarrow s$$

$$\frac{\frac{\frac{s}{p \vee s}}{\neg f \vee p \vee s} \quad [\neg(\neg f \vee p \vee s)]}{\frac{\perp}{\neg f}} \quad \neg f \vee p \vee s \quad [\neg(\neg f \vee p \vee s)]$$

$$\frac{\perp}{\neg f \vee p \vee s}$$

(e)

$$\frac{\frac{[p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{\neg p}}{\perp}}{\neg p} \quad p \leftrightarrow \neg p$$

$$\frac{\frac{[\neg p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{p}}{\perp}}{\neg p} \quad p \leftrightarrow \neg p$$

$$\frac{\perp}{\perp}$$

2. Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

- | | |
|---|---|
| (a) $\varphi \vdash \varphi$ | (g) $\vdash \neg \perp$ |
| (b) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ | (h) $\neg \varphi \vdash \varphi \rightarrow (\perp \vee \neg \perp)^1$ |
| (c) $\vdash \perp \rightarrow \varphi$ | (i) [ED2005] $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ (*) |
| (d) $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$ | (j) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \sigma \vdash \neg \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$ |
| (e) [PP2007] $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$ | [EF2014] |
| (f) $\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$ | (k) $\clubsuit \vdash \neg \perp \leftrightarrow \neg \neg \neg \perp$ |

3. Demuestre que:

- | | |
|--|--|
| (a) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$. | (c) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \psi$ entonces $\vdash \varphi \wedge (\psi \vee \sigma)$ |
| (b) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \rightarrow \varphi$. | (d) $\clubsuit \vdash \varphi$ si y solamente si $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg \perp$ |

Ejercicios integradores.

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

1. **[PP1998]** $(\varphi \rightarrow \psi) \vdash ((\psi \rightarrow \sigma) \wedge \neg \sigma) \rightarrow \neg \varphi$
2. **[PP1999]** $\varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi, \quad \varphi \rightarrow \sigma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$
3. **[PP2000]** $\varphi \rightarrow (\sigma \vee \psi) \vdash \neg \sigma \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
4. **[PP2001]** $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \wedge \alpha \vdash \beta$
5. **[PP2002]** $\neg \psi \rightarrow \neg \varphi \vdash \varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \sigma)$
6. **[PP2003]** $\neg(\alpha \wedge \neg(\alpha \rightarrow \beta)) \vdash \neg(\alpha \wedge \neg \beta)$
7. **[PP2004]** $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ [Ley de DeMorgan]
8. **[PP2005]** $(\alpha \wedge \neg \beta) \vee (\neg \alpha \wedge \beta) \vdash \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$
9. **[PP2006]** $\neg \beta \rightarrow \gamma, \quad \alpha \vee \beta \vdash \gamma$ (*)
10. **[PP2007]** $\vdash (\neg \sigma \rightarrow (\neg \varphi \wedge \neg \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma)$
11. **[PP2008]** $\vdash (a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow b) \rightarrow (\neg \neg a \vee c) \rightarrow b$
12. **[PP2009]** $\vdash \neg \alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)$

¹ Sugerencia: notar que $\vdash \neg \perp$.

13. [PP2010] $\neg((\psi \rightarrow \varphi) \vee \alpha) \vdash \neg\varphi \vee \neg\beta$
 14. [PP2010] $((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
 15. [PP2011] $\vdash ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \wedge \neg\alpha)) \rightarrow \neg\alpha$
 16. [PP2011] $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
 17. [PP2012] $(q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \vee p$
 18. [PP2012] $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))$
 19. [PP2013] $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\neg\psi \vee \neg\varphi$
 20. [PP2013] $\neg\varphi, \quad \neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \sigma$
 21. [PP2013] $(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1 \vdash \neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)$
 22. [PP2014] $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma \vdash \gamma \vee \neg\beta$
 23. [PP2014] $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \beta \rightarrow \neg\gamma)$
 24. [PP2015] $\vdash ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
 25. [PP2015] $\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\neg\gamma \vee \neg\beta) \rightarrow \gamma$
 26. [PP2016] $\neg(\beta \vee \alpha) \vdash \alpha \wedge \beta$
 27. [PP2016] $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$
 28. [PP2017] $\gamma \rightarrow \alpha, \quad \neg \rightarrow (\neg\beta \vee \alpha) \vdash \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$
 29. [PP2017] $p_2 \rightarrow \neg p_1, \quad p_3 \rightarrow p_1, \quad \neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee p_1) \vdash \neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3)$
 30. [PP2017] $p_3 \rightarrow p_1, \quad \neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee p_1) \vdash (p_2 \vee p_3) \rightarrow p_1$ [Riesgo de salud]
 31. [PP2018] $p \leftrightarrow \neg p \vdash \perp$
 32. [PP2018] $p \vee q, \quad p \rightarrow r, \quad q \rightarrow s \vdash t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)$
-
33. [ED2008] $\neg p \wedge q \rightarrow r, \quad r \vee s \rightarrow \neg p, \quad s \vdash \neg q \vee r$
 34. [ED2010] $\alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha \wedge \beta$
 35. [ED2011] $\neg p \wedge \neg q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \vee r$

36. [EF2012] $(\neg\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash \neg\gamma \wedge \alpha \rightarrow \neg\neg\beta$

37. $a \vee b, \quad c \vee \neg b \vdash a \vee c$

SOLUCIONES PROPUESTAS AL PRÁCTICO 4

A continuación se presenta un esbozo de las soluciones de los ejercicios, es decir, las mismas no están completas: falta agregar el inciso indicador de la cancelación de las hipótesis destacadas entre corchetes. Se alienta al lector a realizar tales agregados a efectos de profundizar la comprensión de dichas pruebas.

Asimismo, a efectos de no sobrecargar la notación se ha optado por emplear letras del alfabeto latino en lugar de aquellas del alfabeto griego.

1. Vistos en clase.

2. (k)

$$\frac{\frac{\frac{[\perp] \quad [\neg\perp]}{\perp} E_{\neg} \quad \frac{\frac{[\perp] \quad [\neg\perp]}{\perp} E_{\neg} \quad \frac{\perp}{\neg\perp} RAA}{\neg\perp} I_{\neg}}{\neg\perp} I_{\neg} \quad \frac{\frac{\frac{[\perp] \quad [\neg\perp]}{\perp} E_{\neg} \quad \frac{\perp}{\neg\perp} RAA}{\neg\perp} I_{\neg} \quad \frac{\perp}{\neg\perp} RAA}{\neg\perp} I_{\neg} \quad \frac{[\neg(\neg\perp)]}{\neg(\neg(\neg\perp))} E_{\neg} \quad \frac{\perp}{\neg(\neg(\neg\perp))} I_{\neg}}{\neg\perp \leftrightarrow \neg(\neg(\neg\perp))} I_{\leftrightarrow}$$

Otra forma más sencilla:

$$\frac{\frac{[\perp] \quad [\neg\perp]}{\perp} E_{\neg} \quad \frac{[\neg(\neg\perp)]}{\neg(\neg(\neg\perp))} E_{\neg} \quad \frac{\perp}{\neg(\neg(\neg\perp))} I_{\neg}}{\neg\perp \leftrightarrow \neg(\neg(\neg\perp))} I_{\leftrightarrow}$$

3. Vistos en clase.

Ejercicios integradores.

1.

$$\frac{\frac{[a] \quad a \rightarrow b}{b} E_{\rightarrow} \quad \frac{[(b \rightarrow c) \wedge \neg c]}{b \rightarrow c} E_{\wedge_1} \quad \frac{[(b \rightarrow c) \wedge \neg c]}{\neg c} E_{\wedge_2}}{c} E_{\rightarrow} \quad \frac{\perp}{\neg a} I_{\neg} \quad \frac{[(b \rightarrow c) \wedge \neg c] \quad \neg c}{(b \rightarrow c) \wedge \neg c \rightarrow \neg a} I_{\rightarrow}$$

2.

$$\frac{\frac{[a] \quad a \rightarrow b}{b} E_{\rightarrow} \quad \frac{[a] \quad b}{a \wedge b} I_{\wedge} \quad \frac{a \wedge b \rightarrow c}{c} E_{\rightarrow} \quad \frac{[\neg c]}{E_{\neg}} \quad \frac{\perp}{\neg a} I_{\neg}}{\neg c \rightarrow \neg a} I_{\rightarrow}$$

3.

$$\frac{\frac{[a] \quad a \rightarrow b \vee c}{b \vee c} E \rightarrow \quad \frac{\frac{[b] \quad [\neg b]}{\perp} E \perp \quad \frac{[c] \quad [\neg b]}{c \wedge \neg b} E \wedge_1}{\frac{c}{c} E \vee} \frac{a \rightarrow c}{\neg b \rightarrow a \rightarrow c} I \rightarrow$$

4.

$$\frac{\frac{(\neg b \rightarrow \neg a) \wedge a}{a} E \wedge_2 \quad \frac{[\neg b] \quad (\neg b \rightarrow \neg a) \wedge a}{\neg a} E \wedge_1}{\frac{\neg a}{\perp} E \neg} \frac{\perp}{b} RAA$$

5.

$$\frac{\frac{[a] \quad [a \rightarrow \neg b]}{\neg b} E \rightarrow \quad \frac{[b] \quad \neg b}{\perp} E \neg}{\frac{\perp}{\neg a} I \neg} \frac{\neg a \rightarrow \neg b}{[b] \quad \neg b} E \rightarrow$$

$$\frac{\frac{\perp}{c} E \perp}{(a \rightarrow \neg b) \rightarrow c} I \rightarrow$$

$$\frac{(a \rightarrow \neg b) \rightarrow c}{b \rightarrow (a \rightarrow \neg b) \rightarrow c} I \rightarrow$$

6.

$$\frac{\frac{[a \wedge \neg b]}{a} E \wedge_1 \quad \frac{[a \rightarrow b]}{b} E \rightarrow \quad \frac{[a \wedge \neg b]}{\neg b} E \wedge_2}{\frac{\perp}{\neg(a \rightarrow b)} I \neg} \frac{\neg(a \wedge \neg(a \rightarrow b))}{a \wedge \neg(a \rightarrow b)} E \neg$$

$$\frac{\perp}{\neg(a \wedge \neg b)} I \neg$$

10.

$$\frac{\frac{[\neg a] \quad [\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg c]}{\neg b \wedge \neg c} E \rightarrow \quad \frac{[\neg a] \quad [\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg c]}{\neg b \wedge \neg c} E \rightarrow}{\frac{\neg b \wedge \neg c}{\neg b} E \wedge_1 \quad \frac{\neg b \wedge \neg c}{\neg c} E \wedge_2} \frac{[b] \quad \perp}{[c] \quad \perp} E \neg$$

$$\frac{\frac{\perp}{a} RAA}{b \vee c \rightarrow a} I \rightarrow$$

$$\frac{b \vee c \rightarrow a}{(\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg c) \rightarrow b \vee c \rightarrow a} I \rightarrow$$

7.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a] \quad \frac{[-a \wedge \neg b] \quad E \wedge_1 \quad E \neg}{\neg a} \quad E \neg \quad [b] \quad \frac{[-\neg a \wedge \neg b] \quad E \wedge_2}{\neg b} \quad E \neg}{\frac{\perp \quad E \perp}{b} \quad E \vee} \quad \frac{[-a \wedge \neg b] \quad E \wedge_2}{\neg b} \quad E \neg \quad \frac{\perp \quad I \neg}{\neg(a \vee b)} \quad I \neg \\
 \hline
 \frac{[a] \quad \frac{a \vee b}{a \vee b} \quad I \vee_1 \quad \frac{[-\neg(a \vee b)] \quad E \neg}{\perp \quad I \neg} \quad E \neg \quad \frac{[b] \quad \frac{a \vee b}{a \vee b} \quad I \vee_2 \quad \frac{[-\neg(a \vee b)] \quad E \neg}{\perp \quad I \neg} \quad I \wedge}{\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b} \quad I \leftrightarrow
 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a \wedge \neg b] \quad E \wedge_1 \quad \frac{[a \leftrightarrow b] \quad E \leftrightarrow_1}{b} \quad E \leftrightarrow_1 \quad \frac{[a \wedge \neg b] \quad E \wedge_2}{\neg b} \quad E \neg}{\perp} \quad \frac{[a \wedge \neg b] \quad E \wedge_2 \quad \frac{[a \leftrightarrow b] \quad E \leftrightarrow_1}{a} \quad E \leftrightarrow_1 \quad \frac{[-a \wedge b] \quad E \wedge_1}{\neg a} \quad E \neg}{\perp} \quad E \vee \\
 \hline
 \frac{\perp \quad I \neg}{\neg(a \leftrightarrow b)} \quad I \neg
 \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[g] \quad \frac{g \vee \neg g}{g \vee \neg g} \quad I \vee_1 \quad \frac{[-\neg(g \vee \neg g)] \quad E \neg}{\perp \quad I \neg} \quad E \neg \quad \frac{\perp \quad I \neg}{g \vee \neg g} \quad I \vee_2 \quad \frac{[-\neg(g \vee \neg g)] \quad E \neg}{\perp \quad RAA} \quad E \neg \quad \frac{\perp \quad RAA}{g \vee \neg g} \quad RAA \quad \frac{[g] \quad \frac{[-\neg g] \quad I \wedge}{g \wedge \neg g} \quad E \wedge_2 \quad \frac{[-\neg g] \quad E \vee}{\neg g} \quad E \neg}{\neg g} \quad E \neg \\
 \hline
 \frac{[-\neg b] \quad \frac{\neg b \rightarrow g}{g} \quad E \rightarrow \quad \frac{\perp \quad RAA}{b} \quad I \vee_2 \quad \frac{\perp \quad RAA}{a \vee b} \quad I \vee_2 \quad \frac{a \vee b \rightarrow g}{g} \quad E \rightarrow \quad \frac{[-\neg g] \quad E \neg}{\perp \quad RAA} \quad E \neg}{g} \quad RAA
 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a] \quad \frac{[\neg a \wedge (b \rightarrow g)]}{\neg a} E\wedge_1}{\perp} E\neg \\
 \frac{[a \vee b] \quad \frac{\perp}{b} E\perp}{b} E\vee \quad \frac{[b] \quad \frac{[\neg a \wedge (b \rightarrow g)]}{b \rightarrow g} E\wedge_2}{b \rightarrow g} E\rightarrow \\
 \frac{\frac{g}{a \vee b \rightarrow g} I\rightarrow}{\neg a \wedge (b \rightarrow g) \rightarrow a \vee b \rightarrow g} I\rightarrow
 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[c]}{d \rightarrow c} I\rightarrow}{(d \rightarrow c) \vee a} I\vee_1 \quad \neg((d \rightarrow c) \vee a) \\
 \frac{\perp}{\neg c} I\neg \\
 \frac{\neg c \vee \neg b}{\neg c \vee \neg b} I\vee_1
 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a]}{a \vee b} I\vee_1 \quad \frac{[a \vee b \rightarrow b \wedge \neg a]}{b \wedge \neg a} E\rightarrow \\
 \frac{[a] \quad \frac{b \wedge \neg a}{\neg a} E\wedge_2}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{\neg a} I\neg \\
 \frac{\neg a}{(a \vee b \rightarrow b \wedge \neg a) \rightarrow \neg a} I\rightarrow
 \end{array}$$

17.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg p]}{q \rightarrow \neg p} I\rightarrow \quad \frac{(q \rightarrow \neg p) \rightarrow p}{p} E\rightarrow \quad \frac{[\neg p]}{p} E\neg \\
 \frac{\perp}{p} RAA \\
 \frac{\neg(p \rightarrow \neg q) \vee p}{\neg(p \rightarrow \neg q) \vee p} I\vee_2
 \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p] \quad \frac{[\neg p \wedge \neg(p \wedge q)]}{\neg p} E\wedge_1}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{q} E\perp \\
 \frac{p \rightarrow q}{p} I\rightarrow \quad \frac{[(p \rightarrow q) \rightarrow p]}{p} E\rightarrow \quad \frac{[\neg p \wedge \neg(p \wedge q)]}{\neg p} E\wedge_1 \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))} I\neg \\
 \frac{\neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))} I\rightarrow
 \end{array}$$

19.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[f] \quad f \rightarrow p}{p} E \rightarrow \quad \frac{[\neg p]}{E \neg} \\
 \frac{\perp}{\neg f} I \neg \\
 \frac{\neg(\neg p) \vee \neg f}{I \vee_2} \quad \frac{[\neg(\neg(\neg p) \vee \neg f)]}{E \neg} \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg p)} I \neg \\
 \frac{\neg(\neg p) \vee \neg f}{I \vee_1} \quad \frac{[\neg(\neg(\neg p) \vee \neg f)]}{E \neg} \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg p) \vee \neg f} RAA
 \end{array}$$

20.

(tautología dem. en [PP2014])

$$\begin{array}{c}
 \neg \varphi \quad \frac{[\neg(\alpha \wedge \beta)]^{(1)} \quad \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg \alpha \vee \neg \beta}{\neg \alpha \vee \neg \beta} E \rightarrow \\
 \frac{\sigma}{\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \sigma} I \rightarrow (1)
 \end{array}$$

22.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg b]}{g \vee \neg b} I \vee_2 \quad \frac{[\neg(g \vee \neg b)]}{E \neg} \\
 \frac{\perp}{b} RAA \\
 \frac{a \rightarrow b}{I \rightarrow} \quad \frac{(a \rightarrow b) \rightarrow g}{E \rightarrow} \\
 \frac{g}{g \vee \neg b} I \vee_1 \quad \frac{[\neg(g \vee \neg b)]}{E \neg} \\
 \frac{\perp}{g \vee \neg b} RAA
 \end{array}$$

23.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[g]}{b \rightarrow g} I \rightarrow \quad \frac{[a \leftrightarrow b \rightarrow g]}{a} E \leftrightarrow_1 \quad \frac{[\neg a \wedge b]}{\neg a} E \wedge_1 \\
 \frac{\perp}{\neg g} I \neg \\
 \frac{\neg a \wedge b \rightarrow \neg g}{I \rightarrow} \\
 \frac{(a \leftrightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg a \wedge b \rightarrow \neg g}{I \rightarrow}
 \end{array}$$

21.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p_0 \rightarrow p_1]}{\neg p_1} \quad \frac{(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1}{E \rightarrow} \quad \frac{[\neg(\neg p_1)]}{\perp} \quad \frac{E \neg}{I \neg} \\
 \frac{\neg(p_0 \rightarrow p_1)}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{I \vee_2}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{[\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)]}{\perp} \quad \frac{E \neg}{I \neg} \\
 \frac{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{I \vee_1}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{[\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)]}{\perp} \quad \frac{E \neg}{RAA}
 \end{array}$$

25.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg g]}{\neg g \vee \neg b} I\vee_1 \quad [\neg(\neg g \vee \neg b)]}{\frac{\perp}{g} RAA} E\neg}{\frac{\neg(\neg g \vee \neg b) \rightarrow g}{(a \rightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg(\neg g \vee \neg b) \rightarrow g} I \rightarrow} I \rightarrow$$

26.

$$\frac{\frac{[a \vee b] \quad \frac{[a]}{b \vee a} I\vee_2 \quad \frac{[b]}{b \vee a} I\vee_1}{b \vee a} E\vee \quad \neg(b \vee a)}{\frac{\perp}{a \wedge b} E\perp} E\neg$$

$$\frac{a \wedge b}{a \vee b \rightarrow a \wedge b} I \rightarrow$$

28.

$$\frac{\frac{[\neg a] \quad \neg a \rightarrow \neg b \vee a}{\neg b \vee a} E \rightarrow \quad \frac{[a] \quad [\neg a]}{\neg b} E\neg \quad \frac{[g] \quad g \rightarrow a}{a} E \rightarrow \quad \frac{[\neg a]}{\neg g} E\neg}{\neg b \quad \frac{\perp}{\neg g} I\neg} E\vee \quad I\wedge$$

$$\frac{\neg b \wedge \neg g}{\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg g} I \rightarrow$$

32.

$$\frac{\frac{[p] \quad p \rightarrow r}{r} E \rightarrow \quad \frac{[\neg r \wedge \neg s]}{\neg r} E\wedge_1}{\frac{\perp}{\neg p} I\neg} E\neg$$

$$\frac{p \vee q \quad \frac{[p]}{\neg p} E\neg \quad \frac{\perp}{q} E\perp}{q} E\vee \quad \frac{[q] \quad q \rightarrow s}{s} E \rightarrow \quad \frac{[\neg r \wedge \neg s]}{\neg s} E\wedge_2$$

$$\frac{\perp}{\neg(\neg r \wedge \neg s)} I\neg \quad \frac{\neg(\neg r \wedge \neg s)}{t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)} I \rightarrow$$

27.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[f] \quad [\neg f] \quad \frac{\frac{\perp}{\neg f \wedge p} \quad E_{\perp} \quad E_{\neg}}{[f \vee \neg f \wedge p]} \quad E_{\vee} \quad \frac{[\neg f] \quad \frac{[p]}{\neg f \wedge p} \quad I_{\wedge}}{\neg f \wedge p} \quad E_{\vee}}{[f \vee p]} \quad \frac{\frac{\neg f \wedge p}{f \vee \neg f \wedge p} \quad I_{\vee_2} \quad \frac{[\neg(f \vee \neg f \wedge p)]}{\neg(f \vee \neg f \wedge p)} \quad E_{\neg}}{f \vee p \leftrightarrow f \vee \neg f \wedge p} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{f \vee \neg f \wedge p} \quad RAA \quad I_{\leftrightarrow}}{f \vee \neg f \wedge p} \quad E_{\neg}}{f \vee p \leftrightarrow f \vee \neg f \wedge p}
 \end{array}$$

29.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p_2] \quad \frac{p_2 \rightarrow \neg p_1}{\neg p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2 \vee p_1}{\neg p_2 \vee p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{\neg p_2}{\neg p_2} \quad E \neg}{[p_2] \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{\neg p_2} \quad I \neg}{\neg p_2} \quad E \neg \quad \frac{[p_1] \quad \frac{p_2 \rightarrow \neg p_1}{\neg p_1} \quad E \neg}{\frac{\perp}{\neg p_2} \quad E \neg} \quad E \vee \quad \frac{[p_3] \quad \frac{p_3 \rightarrow p_1}{p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{[\neg p_1]}{\neg p_1} \quad E \neg}{\frac{\perp}{\neg p_3} \quad I \neg} \quad I \wedge} \\
 \frac{\neg p_2 \wedge \neg p_3}{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge \neg p_3} \quad I \rightarrow
 \end{array}$$

30.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p_3] \quad \frac{p_3 \rightarrow p_1}{p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{[\neg p_1]}{\neg p_1} \quad E \neg \quad \frac{\frac{\perp}{\neg p_3} \quad I \neg}{\neg p_3} \quad E \neg}{[p_3] \quad \frac{\frac{\perp}{p_2} \quad E \perp}{p_2} \quad E \vee} \quad \frac{[p_1] \quad \frac{[\neg p_1]}{\neg p_1} \quad E \neg \quad \frac{\frac{\perp}{\neg p_2} \quad E \perp}{\neg p_2} \quad E \vee \quad \frac{[p_3] \quad \frac{p_3 \rightarrow p_1}{p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{[\neg p_1]}{\neg p_1} \quad E \neg}{\frac{\perp}{\neg p_3} \quad I \neg} \quad I \wedge}{[p_2 \vee p_3] \quad [p_2] \quad \frac{p_2}{p_2} \quad E \neg \quad \frac{[\neg p_1]}{\neg p_1} \quad E \neg \quad \frac{\frac{\perp}{\neg p_2} \quad E \perp}{\neg p_2} \quad E \vee \quad \frac{[p_3] \quad \frac{p_3 \rightarrow p_1}{p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{[\neg p_1]}{\neg p_1} \quad E \neg}{\frac{\perp}{\neg p_3} \quad I \neg} \quad I \wedge} \\
 \frac{\neg p_2 \wedge \neg p_3}{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge \neg p_3} \quad I \rightarrow
 \end{array}$$

31.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{\neg p} \quad E \leftrightarrow_1 \quad \frac{\perp}{\neg p} \quad I \neg}{[p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{p} \quad E \leftrightarrow_1 \quad \frac{\perp}{p} \quad E \neg} \quad \frac{[\neg p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{p} \quad E \leftrightarrow_1 \quad \frac{[\neg p]}{\neg p} \quad E \neg}{\frac{\perp}{p} \quad RAA} \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{p} \quad E \leftrightarrow_1 \quad \frac{[\neg p]}{\neg p} \quad E \neg}{\perp}
 \end{array}$$

33.

$$\begin{array}{c}
 \frac{s}{r \vee s} IV_2 \quad \frac{r \vee s \rightarrow \neg p}{\neg p} E \rightarrow \quad [q] \\
 \frac{\neg p \wedge q}{\neg p \wedge q} I \wedge \quad \frac{\neg p \wedge q \rightarrow r}{\neg p \wedge q \rightarrow r} E \rightarrow \\
 \frac{r}{\neg q \vee r} IV_2 \quad \frac{[\neg(\neg q \vee r)]}{\neg q \vee r} E \neg \\
 \frac{\perp}{\neg q \vee r} I \neg \quad \frac{\neg q}{\neg q \vee r} IV_1 \quad \frac{[\neg(\neg q \vee r)]}{\neg q \vee r} E \neg \\
 \frac{\perp}{\neg q \vee r} RAA
 \end{array}$$

34.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a]}{a \vee b} IV_1 \quad \frac{a \vee b \leftrightarrow b}{a \vee b \leftrightarrow b} E \leftrightarrow_1 \\
 \frac{[a \wedge b]}{a} E \wedge_1 \quad \frac{[a]}{a \wedge b} I \wedge \quad \frac{b}{a \wedge b} I \wedge \\
 \frac{a \leftrightarrow a \wedge b}{a \leftrightarrow a \wedge b} I \leftrightarrow
 \end{array}$$

37.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[b] \quad [\neg b]}{a \vee b} E \neg \\
 \frac{a \vee b \quad [a]}{a} E \vee \quad \frac{\perp}{a} E \perp \\
 \frac{a}{a \vee c} IV_1 \quad \frac{[\neg(a \vee c)]}{a \vee c} E \neg \\
 \frac{\perp}{b} RAA \quad \frac{[\neg b]}{b} E \neg \\
 \frac{c \vee \neg b \quad [c]}{c} E \vee \quad \frac{\perp}{c} E \perp \\
 \frac{c}{a \vee c} IV_2 \quad \frac{[\neg(a \vee c)]}{a \vee c} E \neg \\
 \frac{\perp}{a \vee c} RAA
 \end{array}$$

Última actualización: 6 de abril de 2019.

35.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p]}{p \vee q} IV_1 \quad \frac{[q]}{p \vee q} IV_2 \quad \frac{[\neg(p \vee q)]}{\neg p} E_{\neg} \quad \frac{[\neg(p \vee q)]}{\neg q} I_{\neg} \quad \frac{[\neg(p \vee q)]}{\neg q} I_{\neg} \quad \frac{[\neg(p \vee q)]}{\neg q} I_{\neg} \quad \frac{[\neg(p \vee q)]}{\neg q} I_{\neg} \\
 \hline
 \neg p \wedge \neg q \\
 \hline
 \frac{r}{(p \vee q) \vee r} I_{\vee_2} \quad \frac{\neg p \wedge \neg q \rightarrow r}{(p \vee q) \vee r} E_{\rightarrow} \quad \frac{\frac{\perp}{p \vee q} RAA}{(p \vee q) \vee r} I_{\vee_1} \quad \frac{[\neg((p \vee q) \vee r)]}{(p \vee q) \vee r} E_{\neg} \quad \frac{\perp}{(p \vee q) \vee r} RAA \quad \frac{[\neg((p \vee q) \vee r)]}{(p \vee q) \vee r} E_{\neg}
 \end{array}$$

36.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg g \wedge a]}{a} E_{\wedge_2} \quad \frac{[\neg a]}{\neg a} E_{\neg} \quad \frac{[b]}{[b]} \quad \frac{[\neg b]}{[\neg b]} E_{\neg} \quad \frac{[\neg g \wedge a]}{\neg g} E_{\wedge_1} \quad \frac{[g]}{[g]} E_{\neg} \quad \frac{\perp}{\perp} E_{\vee} \\
 \hline
 \frac{[\neg a \vee b]}{(\neg a \vee b) \vee g} \quad \frac{\perp}{\perp} \quad \frac{\perp}{\neg(\neg b)} I_{\neg} \quad \frac{\neg(\neg b)}{\neg g \wedge a \rightarrow \neg(\neg b)} I_{\rightarrow}
 \end{array}$$