

## PRÁCTICO 4: DEDUCCIÓN NATURAL EN PROP

1. Realice los agregados que estime pertinentes para que los siguientes árboles sean elementos de DER. Asimismo, provea juicios que correspondan con dichas pruebas i.e. dé  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  y  $\varphi \in \text{PROP}$  tales que cada razonamiento (árbol) pruebe que  $\Gamma \vdash \varphi$ .

(a)

$$\frac{\frac{\frac{[g]}{b \rightarrow g} \quad \frac{[a \leftrightarrow b \rightarrow g]}{a} \quad \frac{[\neg a \wedge b]}{\neg a}}{\frac{\perp}{\neg g}}}{\frac{\neg a \wedge b \rightarrow \neg g}{(a \leftrightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg a \wedge b \rightarrow \neg g}}$$

(b)

$$\frac{\frac{\frac{[c]}{d \rightarrow c}}{(d \rightarrow c) \vee a} \quad \neg((d \rightarrow c) \vee a)}{\frac{\perp}{\neg c}} \quad \neg c \vee \neg b$$

(c)

$$\frac{\frac{\frac{[a \wedge \neg b]}{a} \quad \frac{[a \rightarrow b]}{b} \quad \frac{[a \wedge \neg b]}{\neg b}}{\frac{\perp}{\neg(a \rightarrow b)}}}{\frac{a \wedge \neg(a \rightarrow b)}{\neg(a \wedge \neg(a \rightarrow b))}} \quad \perp$$

(d)

$$\frac{\frac{\frac{[f] \quad [f \rightarrow p]}{p}}{p \vee s} \quad \neg f \vee p \vee s \quad [\neg(\neg f \vee p \vee s)]}{\frac{\perp}{\neg(f \rightarrow p)}} \quad \neg(f \rightarrow p) \rightarrow s$$

$$\frac{\frac{\frac{s}{p \vee s}}{\neg f \vee p \vee s} \quad [\neg(\neg f \vee p \vee s)]}{\frac{\perp}{\neg f}} \quad \neg f \vee p \vee s \quad [\neg(\neg f \vee p \vee s)]$$

$$\frac{\perp}{\neg f \vee p \vee s}$$

(e)

$$\frac{\frac{[p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{\neg p}}{\perp}}{\neg p} \quad p \leftrightarrow \neg p$$

$$\frac{\frac{[\neg p] \quad \frac{p \leftrightarrow \neg p}{p}}{\perp}}{\neg p} \quad p \leftrightarrow \neg p$$

$$\frac{\perp}{\perp}$$

2. Se pretende demostrar que  $\neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3) \vdash (p_2 \vee p_3) \rightarrow p_1$  para lo cual se construye la siguiente derivación:

$$\frac{\frac{[p_2 \vee p_3]^{(1)}}{p_2} E\vee \quad \frac{\frac{[\neg p_1]^{(2)}}{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge \neg p_3} E \rightarrow \quad \frac{\neg p_2 \wedge \neg p_3}{\neg p_2} I\wedge_1}{\frac{\perp}{p_1} E\neg (2)} I\neg \quad \frac{\perp}{p_2 \vee p_3 \rightarrow p_1} I \rightarrow (1)$$

Determinar por qué la derivación no es correcta.

3. Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

- |                                                           |                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\varphi \vdash \varphi$                              | (g) $\vdash \neg \perp$                                                                             |
| (b) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$                  | (h) $\neg \varphi \vdash \varphi \rightarrow (\perp \vee \neg \perp)^1$                             |
| (c) $\vdash \perp \rightarrow \varphi$                    | (i) <b>[ED2005]</b> $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ (*)                                          |
| (d) $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$            | (j) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \sigma \vdash \neg \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$ |
| (e) <b>[PP2007]</b> $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$ | <b>[EF2014]</b>                                                                                     |
| (f) $\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$          | (k) $\clubsuit \vdash \neg \perp \leftrightarrow \neg \neg \neg \perp$                              |

4. Demuestre que:

- |                                                                      |                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$ .        | (c) Si $\vdash \varphi$ y $\vdash \psi$ entonces $\vdash \varphi \wedge (\psi \vee \sigma)$  |
| (b) Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ . | (d) $\clubsuit \vdash \varphi$ si y solamente si $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg \perp$ |

## Ejercicios integradores.

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

1. **[PP1998]**  $(\varphi \rightarrow \psi) \vdash ((\psi \rightarrow \sigma) \wedge \neg \sigma) \rightarrow \neg \varphi$
2. **[PP1999]**  $\varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi, \quad \varphi \rightarrow \sigma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$
3. **[PP2000]**  $\varphi \rightarrow (\sigma \vee \psi) \vdash \neg \sigma \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
4. **[PP2001]**  $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \wedge \alpha \vdash \beta$
5. **[PP2002]**  $\neg \psi \rightarrow \neg \varphi \vdash \varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \sigma)$
6. **[PP2003]**  $\neg(\alpha \wedge \neg(\alpha \rightarrow \beta)) \vdash \neg(\alpha \wedge \neg \beta)$

<sup>1</sup> Sugerencia: notar que  $\vdash \neg \perp$ .

7. [PP2004]  $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$  [Ley de DeMorgan]
8. [PP2005]  $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \vdash \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$
9. [PP2006]  $\neg\beta \rightarrow \gamma, \quad \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vdash \gamma$  (\*)
10. [PP2007]  $\vdash (\neg\sigma \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma)$
11. [PP2008]  $\vdash (a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow b) \rightarrow (\neg\neg a \vee c) \rightarrow b$
12. [PP2009]  $\vdash \neg\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)$
13. [PP2010]  $\neg((\psi \rightarrow \varphi) \vee \alpha) \vdash \neg\varphi \vee \neg\beta$
14. [PP2010]  $((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
15. [PP2011]  $\vdash ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \wedge \neg\alpha)) \rightarrow \neg\alpha$
16. [PP2011]  $\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\neg\psi)$
17. [PP2012]  $(q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \vee p$
18. [PP2012]  $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))$
19. [PP2013]  $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\neg\psi \vee \neg\varphi$
20. [PP2013]  $\neg\varphi, \quad \neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad \neg\varphi \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \sigma$
21. [PP2013]  $(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1 \vdash \neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)$
22. [PP2014]  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma \vdash \gamma \vee \neg\beta$
23. [PP2014]  $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \beta \rightarrow \neg\gamma)$
24. [PP2015]  $\vdash ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
25. [PP2015]  $\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\neg\gamma \vee \neg\beta) \rightarrow \gamma$
26. [PP2016]  $\neg(\beta \vee \alpha) \vdash \alpha \wedge \beta$
27. [PP2016]  $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$
28. [PP2017]  $\gamma \rightarrow \alpha, \quad \neg \rightarrow (\neg\beta \vee \alpha) \vdash \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$
29. [PP2017]  $p_2 \rightarrow \neg p_1, \quad p_3 \rightarrow p_1, \quad \neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee p_1) \vdash \neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3)$
30. [PP2017]  $p_3 \rightarrow p_1, \quad \neg p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee p_1) \vdash (p_2 \vee p_3) \rightarrow p_1$  [Riesgo de salud]

31. [PP2018]  $p \leftrightarrow \neg p \vdash \perp$

32. [PP2018]  $p \vee q, \quad p \rightarrow r, \quad q \rightarrow s \vdash t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)$

---

33. [ED2008]  $\neg p \wedge q \rightarrow r, \quad r \vee s \rightarrow \neg p, \quad s \vdash \neg q \vee r$

34. [ED2010]  $\alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha \wedge \beta$

35. [ED2011]  $\neg p \wedge \neg q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \vee r$

36. [EF2012]  $(\neg \alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash \neg \gamma \wedge \alpha \rightarrow \neg \neg \beta$

---

37.  $a \vee b, \quad c \vee \neg b \vdash a \vee c$

38.  $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg \alpha \vee \neg \beta$

[Ley de DeMorgan]

## SOLUCIONES PROPUESTAS AL PRÁCTICO 4

A continuación se presenta un esbozo de las soluciones de los ejercicios, es decir, las mismas no están completas: falta agregar el inciso indicador de la cancelación de las hipótesis destacadas entre corchetes. Se alienta al lector a realizar tales agregados a efectos de profundizar la comprensión de dichas pruebas.

Asimismo, a efectos de no sobrecargar la notación se ha optado por emplear letras del alfabeto latino en lugar de aquellas del alfabeto griego.

1. Vistos en clase.
2. Aunque no era pedido, se propone la siguiente derivación para probar el juicio en cuestión:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[p2 \vee p3] \quad [p2]}{p2} \quad \frac{\frac{[p3] \quad [\neg p3]}{\perp} E\perp}{p2} E\vee \quad \frac{[\neg p1] \quad \neg p1 \rightarrow \neg p2 \wedge \neg p3}{\neg p2 \wedge \neg p3} E\rightarrow \quad \frac{\neg p2 \wedge \neg p3}{\neg p2} E\wedge_1}{\perp} E\neg \quad \frac{[\neg p1] \quad \neg p1 \rightarrow \neg p2 \wedge \neg p3}{\neg p2 \wedge \neg p3} E\rightarrow \quad \frac{\neg p2 \wedge \neg p3}{\neg p3} E\wedge_2}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{p3} RAA \quad \frac{\perp}{p1} RAA \\
 \frac{p2 \vee p3 \rightarrow p1}{p2 \vee p3 \rightarrow p1} I\rightarrow
 \end{array}$$

3. (k)

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\perp] \quad [\neg \perp]}{\perp} E\perp \quad \frac{[\neg \perp]}{\perp} RAA \quad \frac{[\neg(\neg \perp)]}{\neg(\neg(\neg \perp))} E\perp \\
 \frac{[\perp] \quad [\neg \perp]}{\perp} E\perp \quad \frac{\perp}{\neg \perp} I\neg \quad \frac{\neg(\neg(\neg \perp))}{\neg \perp} I\neg \\
 \frac{\perp}{\neg \perp} RAA \quad \frac{\neg \perp}{\neg \perp} I\neg \quad \frac{\neg(\neg(\neg \perp))}{\neg \perp} I\neg \\
 \neg \perp \leftrightarrow \neg(\neg(\neg \perp))
 \end{array}$$

Otra forma más sencilla:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\perp]}{\neg \perp} I\neg \quad \frac{[\neg \perp] \quad [\neg(\neg \perp)]}{\perp} E\perp \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg(\neg \perp))} I\neg \\
 \neg \perp \leftrightarrow \neg(\neg(\neg \perp))
 \end{array}$$

4. Vistos en clase.

## Ejercicios integradores.

1.

$$\frac{\frac{[a] \quad a \rightarrow b}{b} E \rightarrow \quad \frac{[(b \rightarrow c) \wedge \neg c]}{b \rightarrow c} E \wedge_1 \quad \frac{[(b \rightarrow c) \wedge \neg c]}{\neg c} E \wedge_2}{c} E \rightarrow \quad \frac{\perp}{\neg a} I \neg}{(b \rightarrow c) \wedge \neg c \rightarrow \neg a} I \rightarrow$$

2.

$$\frac{\frac{[a] \quad a \rightarrow b}{b} E \rightarrow \quad \frac{[a] \quad b}{a \wedge b} I \wedge}{c} E \rightarrow \quad \frac{a \wedge b \rightarrow c}{[\neg c]} E \neg}{\frac{\perp}{\neg a} I \neg} E \neg}{\neg c \rightarrow \neg a} I \rightarrow$$

3.

$$\frac{[a] \quad a \rightarrow b \vee c}{b \vee c} E \rightarrow \quad \frac{[b] \quad [\neg b]}{\frac{\perp}{c} E \perp} E \neg \quad \frac{[c] \quad [\neg b]}{c \wedge \neg b} I \wedge}{c} E \vee}{\frac{c}{a \rightarrow c} I \rightarrow} E \vee}{\neg b \rightarrow a \rightarrow c} I \rightarrow$$

4.

$$\frac{(\neg b \rightarrow \neg a) \wedge a}{a} E \wedge_2 \quad \frac{[\neg b] \quad \frac{(\neg b \rightarrow \neg a) \wedge a}{\neg b \rightarrow \neg a} E \wedge_1}{\neg a} E \rightarrow}{\frac{\perp}{b} RAA} E \neg$$

5.

$$\frac{[a] \quad [a \rightarrow \neg b]}{\neg b} E \rightarrow \quad \frac{[b] \quad \neg b}{\frac{\perp}{\neg a} I \neg} E \neg}{\frac{\perp}{\neg a} I \neg} E \neg \quad \frac{\neg a \rightarrow \neg b}{[b] \quad \neg b} E \rightarrow}{\frac{\perp}{c} E \perp} E \neg}{\frac{(a \rightarrow \neg b) \rightarrow c}{b \rightarrow (a \rightarrow \neg b) \rightarrow c} I \rightarrow} I \rightarrow$$

6.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a \wedge \neg b]}{a} E\wedge_1 \quad \frac{[a \rightarrow b]}{b} E \rightarrow \quad \frac{[a \wedge \neg b]}{\neg b} E\wedge_2 \\
 \frac{[a \wedge \neg b]}{a} E\wedge_1 \quad \frac{\perp}{\neg(a \rightarrow b)} I\neg \quad \frac{\perp}{\neg(a \wedge \neg b)} I\neg \\
 \frac{a \wedge \neg(a \rightarrow b)}{\neg(a \wedge \neg(a \rightarrow b))} E\neg \quad \frac{\perp}{\neg(a \wedge \neg b)} I\neg
 \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg a]}{\neg b \wedge \neg c} E\wedge_1 \quad \frac{[\neg a]}{\neg b} E\neg \quad \frac{[\neg a]}{\neg b \wedge \neg c} E\wedge_2 \quad \frac{[\neg a]}{\neg c} E\neg \\
 \frac{[b \vee c]}{\perp} \quad \frac{[b]}{\perp} E\neg \quad \frac{[c]}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{a} RAA \quad \frac{\perp}{b \vee c \rightarrow a} I \rightarrow \\
 \frac{b \vee c \rightarrow a}{(\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg c) \rightarrow b \vee c \rightarrow a} I \rightarrow
 \end{array}$$

12.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg a \wedge (b \rightarrow g)]}{\neg a} E\wedge_1 \quad \frac{[a]}{\perp} E\perp \quad \frac{[a \vee b]}{b} E\vee \quad \frac{[b]}{b \rightarrow g} E\wedge_2 \\
 \frac{[a]}{\perp} E\perp \quad \frac{[b]}{b \rightarrow g} E\wedge_2 \\
 \frac{g}{a \vee b \rightarrow g} I \rightarrow \\
 \frac{a \vee b \rightarrow g}{\neg a \wedge (b \rightarrow g) \rightarrow a \vee b \rightarrow g} I \rightarrow
 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[c]}{d \rightarrow c} I \rightarrow \quad \frac{[c]}{(d \rightarrow c) \vee a} I\vee_1 \quad \frac{\perp}{\neg((d \rightarrow c) \vee a)} E\neg \\
 \frac{\perp}{\neg c} I\neg \quad \frac{\perp}{\neg c \vee \neg b} I\vee_1
 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a]}{a \vee b} I\vee_1 \quad \frac{[a \vee b \rightarrow b \wedge \neg a]}{b \wedge \neg a} E \rightarrow \\
 \frac{[a]}{\perp} E\perp \quad \frac{[a]}{\neg a} E\neg \\
 \frac{\perp}{\neg a} I\neg \quad \frac{\perp}{(a \vee b \rightarrow b \wedge \neg a) \rightarrow \neg a} I \rightarrow
 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{c}
\frac{[a] \quad \frac{[\neg a \wedge \neg b] \quad E \wedge_1}{\neg a} \quad E \neg}{\frac{\perp}{b} \quad E \perp} \quad E \neg \quad \frac{[b] \quad \frac{[\neg a \wedge \neg b] \quad E \wedge_2}{\neg b} \quad E \neg}{\frac{\perp}{b} \quad E \perp} \quad E \neg \\
\frac{[a \vee b] \quad \frac{b}{\frac{\perp}{b} \quad E \perp} \quad E \vee}{\frac{[a] \quad \frac{[\neg a \wedge \neg b] \quad E \wedge_2}{\neg b} \quad E \neg}{\frac{[a] \quad I \vee_1}{a \vee b} \quad E \neg} \quad E \neg \quad \frac{[b] \quad \frac{I \vee_2}{a \vee b} \quad E \neg}{\frac{\perp}{\neg b} \quad I \neg} \quad I \wedge \\
\frac{\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b}{\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b} \quad I \leftrightarrow
\end{array}$$

 $\infty$ 

[illegible]

9.

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{[g]}{g \vee \neg g} I \vee_1 \quad \dfrac{[\neg(g \vee \neg g)]}{E \neg}}{\dfrac{\dfrac{\perp}{g \vee \neg g} I \neg \quad \dfrac{I \vee_2}{[\neg(g \vee \neg g)]} E \neg}{\dfrac{\dfrac{\perp}{g \vee \neg g} RAA \quad \dfrac{\perp}{g \vee \neg g} RAA}{\dfrac{[g] \quad [\neg g]}{g \wedge \neg g} E \wedge_2} I \wedge} \\
\dfrac{[\neg b] \quad \dfrac{\neg b \rightarrow g}{g} E \rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\perp}{b} RAA \quad \dfrac{I \vee_2}{a \vee b}}{a \vee b \rightarrow g} E \rightarrow}{\dfrac{\perp}{g} RAA} E \vee
\end{array}$$







17.

$$\frac{\frac{[\neg p]}{q \rightarrow \neg p} I \rightarrow \quad \frac{(q \rightarrow \neg p) \rightarrow p}{p} E \rightarrow}{\frac{\frac{\perp}{p} RAA}{\neg(p \rightarrow \neg q) \vee p} I \vee_2} \frac{[\neg p]}{E \neg}$$

18.

$$\frac{\frac{[p]}{\frac{[\neg p \wedge \neg(p \wedge q)]}{\neg p} E \wedge_1} E \neg \quad \frac{\frac{\perp}{q} E \perp}{p \rightarrow q} I \rightarrow}{\frac{p}{[(p \rightarrow q) \rightarrow p]} E \rightarrow} \frac{[\neg p \wedge \neg(p \wedge q)]}{\neg p} E \wedge_1 \quad \frac{\perp}{\neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))} I \neg \quad \frac{\neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg(p \wedge q))} I \rightarrow$$

19.

$$\frac{[f]}{p} \frac{f \rightarrow p}{E \rightarrow} \quad \frac{[\neg p]}{E \neg} \quad \frac{\perp}{\neg f} I \neg \quad \frac{\neg(\neg p) \vee \neg f}{I \vee_2} \quad \frac{[\neg(\neg(\neg p) \vee \neg f)]}{E \neg} \quad \frac{\perp}{\neg(\neg p)} I \neg \quad \frac{\neg(\neg p) \vee \neg f}{I \vee_1} \quad \frac{[\neg(\neg(\neg p) \vee \neg f)]}{E \neg} \quad \frac{\perp}{\neg(\neg p) \vee \neg f} RAA$$

20.

(tautología dem. en [PP2014])

$$\neg \varphi \quad \frac{[\neg(\alpha \wedge \beta)]^{(1)} \quad \frac{\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg \alpha \vee \neg \beta}{\neg \alpha \vee \neg \beta} E \rightarrow}{\frac{\sigma}{\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \sigma} I \rightarrow (1)}$$

16.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[f] \quad [\neg p]}{f \wedge \neg p} I \wedge \quad \frac{[\neg(f \wedge \neg p)]}{\perp} I \neg \quad \frac{\perp}{\neg f \vee \neg(\neg p)} IV_1 \quad \frac{[\neg(\neg f \vee \neg(\neg p))]}{\perp} I \neg \quad \frac{\perp}{\neg f \vee \neg(\neg p)} IV_2 \quad \frac{[\neg(\neg f \vee \neg(\neg p))]}{\perp} I \neg \quad \frac{\perp}{\neg f \vee \neg(\neg p)} RAA \quad I \leftrightarrow \\
 \frac{[f \wedge \neg p]}{f} E \wedge_1 \quad \frac{[\neg f]}{\perp} E \neg \quad \frac{[\neg(f \wedge \neg p)]}{\perp} E \neg \quad \frac{[f \wedge \neg p]}{\neg p} E \wedge_2 \quad \frac{[\neg(\neg p)]}{\perp} E \vee \quad \frac{[\neg f \wedge \neg p]}{\perp} I \neg \quad \frac{[\neg f \vee \neg(\neg p)]}{\neg(f \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg f \vee \neg(\neg p)}
 \end{array}$$

21.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p_0 \rightarrow p_1]}{\neg p_1} \quad \frac{(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1}{E \rightarrow} \quad \frac{[ \neg(\neg p_1) ]}{\perp} \quad \frac{E \neg}{I \neg} \\
 \frac{\neg(p_0 \rightarrow p_1)}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{I \vee_2}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{[ \neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1) ]}{\perp} \quad \frac{E \neg}{I \neg} \\
 \frac{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{I \vee_1}{\neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1)} \quad \frac{[ \neg(\neg(\neg p_1)) \vee \neg(p_0 \rightarrow p_1) ]}{\perp} \quad \frac{E \neg}{RAA}
 \end{array}$$

22.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg b]}{g \vee \neg b} I\vee_2 \quad \frac{[\neg(g \vee \neg b)]}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{b} RAA \\
 \frac{a \rightarrow b}{a \rightarrow b} I\rightarrow \\
 \frac{(a \rightarrow b) \rightarrow g}{g} E\rightarrow \\
 \frac{g}{g \vee \neg b} I\vee_1 \quad \frac{[\neg(g \vee \neg b)]}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{g \vee \neg b} RAA
 \end{array}$$

23.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[g]}{b \rightarrow g} I\rightarrow \quad \frac{[a \leftrightarrow b \rightarrow g]}{a} E\leftrightarrow_1 \quad \frac{[\neg a \wedge b]}{\neg a} E\wedge_1 \\
 \frac{\perp}{\neg g} I\neg \\
 \frac{\neg a \wedge b \rightarrow \neg g}{\neg a \wedge b \rightarrow \neg g} I\rightarrow \\
 \frac{(a \leftrightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg a \wedge b \rightarrow \neg g}{(a \leftrightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg a \wedge b \rightarrow \neg g} I\rightarrow
 \end{array}$$

25.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg g]}{\neg g \vee \neg b} I\vee_1 \quad \frac{[\neg(\neg g \vee \neg b)]}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{g} RAA \\
 \frac{\neg(\neg g \vee \neg b) \rightarrow g}{\neg(\neg g \vee \neg b) \rightarrow g} I\rightarrow \\
 \frac{(a \rightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg(\neg g \vee \neg b) \rightarrow g}{(a \rightarrow b \rightarrow g) \rightarrow \neg(\neg g \vee \neg b) \rightarrow g} I\rightarrow
 \end{array}$$

26.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a \vee b]}{[a \vee b]} \quad \frac{[a]}{b \vee a} I\vee_2 \quad \frac{[b]}{b \vee a} I\vee_1 \\
 \frac{b \vee a}{b \vee a} E\vee \quad \frac{\neg(b \vee a)}{\perp} E\neg \\
 \frac{\perp}{a \wedge b} E\perp \\
 \frac{a \wedge b}{a \vee b \rightarrow a \wedge b} I\rightarrow
 \end{array}$$

28.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg a]}{\neg a \rightarrow \neg b \vee a} E\rightarrow \quad \frac{[a]}{[\neg b]} \quad \frac{[\neg a]}{\perp} E\perp \quad \frac{[g]}{g \rightarrow a} E\rightarrow \quad \frac{[\neg a]}{[\neg a]} E\neg \\
 \frac{\neg b \vee a}{\neg b} E\vee \quad \frac{\neg b}{\neg b} E\neg \quad \frac{\perp}{\neg g} I\neg \\
 \frac{\neg b \wedge \neg g}{\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg g} I\rightarrow
 \end{array}$$







29.

$$\begin{array}{c}
\frac{[p_2] \quad p_2 \rightarrow \neg p_1}{\neg p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2 \vee p_1}{\neg p_2 \vee p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{[p_1] \quad [\neg p_1]}{\perp} \quad E \neg \\
\frac{[p_2] \quad \frac{\neg p_2 \vee p_1}{\neg p_2} \quad E \neg}{\neg p_2} \quad E \neg \quad \frac{[p_3] \quad p_3 \rightarrow p_1}{p_1} \quad E \rightarrow \quad \frac{[\neg p_1]}{E \neg} \\
\frac{\frac{\perp}{\neg p_2} \quad I \neg}{\neg p_2} \quad E \neg \quad \frac{\frac{\perp}{\neg p_3} \quad I \neg}{\neg p_3} \quad I \wedge \\
\frac{\neg p_2 \wedge \neg p_3}{\neg p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge \neg p_3} \quad I \rightarrow
\end{array}$$

30.

[illegible]

31.

[illegible]

32.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p] \quad \frac{p \rightarrow r}{r} E \rightarrow \quad \frac{[\neg r \wedge \neg s]}{\neg r} E \wedge_1}{\neg r} E \neg \\
 \frac{[p] \quad \frac{\perp}{\neg p} I \neg}{\neg p} E \neg \\
 \frac{p \vee q \quad \frac{\perp}{q} E \perp}{q} \\
 \frac{[q] \quad \frac{q \rightarrow s}{s} E \vee \quad \frac{q \rightarrow s}{s} E \rightarrow \quad \frac{[\neg r \wedge \neg s]}{\neg s} E \wedge_2}{\neg s} E \neg \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg r \wedge \neg s)} I \neg \\
 \frac{\neg(\neg r \wedge \neg s)}{t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)} I \rightarrow
 \end{array}$$

Otra versión posible para cancelar  $[t]$ :

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p] \quad \frac{p \rightarrow r}{r} E \rightarrow \quad \frac{[\neg r \wedge \neg s]}{\neg r} E \wedge_1}{\neg r} E \neg \\
 \frac{[p] \quad \frac{\perp}{\neg p} I \neg}{\neg p} E \neg \\
 \frac{p \vee q \quad \frac{\perp}{q} E \perp}{q} \\
 \frac{[q] \quad \frac{q \rightarrow s}{s} E \vee \quad \frac{q \rightarrow s}{s} E \rightarrow \quad \frac{[t] \quad \frac{[\neg r \wedge \neg s]}{t \wedge \neg r \wedge \neg s} I \wedge}{\neg r \wedge \neg s} E \wedge_2}{\neg s} E \neg \\
 \frac{\perp}{\neg(\neg r \wedge \neg s)} I \neg \\
 \frac{\neg(\neg r \wedge \neg s)}{t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)} I \rightarrow
 \end{array}$$

33.

$$\begin{array}{c}
 \frac{s}{r \vee s} I \vee_2 \quad \frac{r \vee s \rightarrow \neg p}{\neg p} E \rightarrow \quad [q] \quad \frac{\neg p \wedge q}{\neg p \wedge q} I \wedge \quad \frac{\neg p \wedge q \rightarrow r}{\neg p \wedge q \rightarrow r} E \rightarrow \\
 \frac{r}{\neg q \vee r} I \vee_2 \quad \frac{[\neg(\neg q \vee r)]}{\neg q \vee r} E \neg \\
 \frac{\perp}{\neg q} I \neg \\
 \frac{\neg q}{\neg q \vee r} I \vee_1 \quad \frac{[\neg(\neg q \vee r)]}{\neg q \vee r} E \neg \\
 \frac{\perp}{\neg q \vee r} RAA
 \end{array}$$

34.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a] \quad \frac{a \vee b}{a \vee b} I \vee_1 \quad \frac{a \vee b \leftrightarrow b}{a \vee b \leftrightarrow b} E \leftrightarrow_1}{a \vee b} I \wedge \\
 \frac{[a \wedge b] \quad \frac{a}{a \wedge b} E \wedge_1 \quad \frac{[a] \quad \frac{a \vee b}{a \vee b} I \vee_1 \quad \frac{a \vee b \leftrightarrow b}{a \vee b \leftrightarrow b} E \leftrightarrow_1}{a \vee b} I \wedge \\
 \frac{a \leftrightarrow a \wedge b}{a \leftrightarrow a \wedge b} I \leftrightarrow
 \end{array}$$



37.

$$\begin{array}{c}
 \frac{a \vee b \quad [a] \quad \frac{\frac{[b] \quad [\neg b]}{E\neg} \quad \frac{\perp}{a} E\perp}{E\vee}}{a \vee c} I\vee_1 \quad \frac{[\neg(a \vee c)]}{E\neg} \\
 \frac{\frac{\perp}{b} RAA}{[\neg b] E\neg} \\
 \frac{c \vee \neg b \quad [c] \quad \frac{\frac{\perp}{c} E\perp}{E\vee}}{a \vee c} I\vee_2 \quad \frac{[\neg(a \vee c)]}{E\neg} \\
 \frac{\perp}{a \vee c} RAA
 \end{array}$$

38.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[a] \quad [b]}{a \wedge b} I\wedge \quad \frac{\neg(a \wedge b)}{E\neg} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg a} I\neg}{\neg a \vee \neg b} I\vee_1 \quad \frac{[\neg(\neg a \vee \neg b)]}{E\neg} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg b} I\neg}{\neg a \vee \neg b} I\vee_2 \quad \frac{[\neg(\neg a \vee \neg b)]}{E\neg} \\
 \frac{\perp}{\neg a \vee \neg b} RAA
 \end{array}$$

*Última actualización: 16 de abril de 2019.*