Matemáticas y Demostración

Por Pablo Curiel

1. Las matemáticas de hoy. Una de las cosas que caracterizan a la matemática moderna es la necesidad implícita de demostrar todo lo que se diga sobre las cuestiones que se estén estudiando en cada caso. Aquí, demostrar significa *deducir* las propiedades y hechos que nos importan a partir de las definiciones de las ideas discutidas.

Se entiende que esas definiciones *vienen dadas*. Que forman parte de un convenio indiscutible y que todo lo que merezca la pena decir viene de ellas. Además, casi todo está dicho ya, porque las teorías tienen toda la apariencia de obras terminadas, y solo queda resolver ejercicios que también vienen dados (y eso solo cuando el autor del libro o seminario tiene la cortesía de sacarlos de la chistera).

Tal y como están diseñados los programas universitarios, parece haber un acuerdo con que la sustancia de la actividad matemática consiste en: primero conocer las definiciones, segundo poder replicar las demostraciones, y tercero saber "manejar" los conceptos en la resolución de problemas. Pasaremos revista a estas tres partes.

2. Definición de definición. Las dos primeras partes van de memorizar. Un matemático es alguien que primero memoriza cosas. Las definiciones, que son la base de teoremas y problemas, resumen la esencia de los objetos que protagonizan una teoría ya terminada. Se introducen al principio, sin que haga falta haber visto (ni mucho menos comprendido) ejemplos de esos objetos que tanto nos interesan y vamos a pasar años estudiando[1].

Esto último ya es una anomalía grande de las matemáticas. Los estudiantes se matriculan en cursos sin saber lo que van a estudiar, y por tanto sin garantías a priori de que les vaya a gustar[2]. Alguien a quien no le gusta lo que hace es muy difícil que obtenga éxitos y satisfacciones haciéndolo, es evidente. Pensará continuamente en otras cosas y no podrá concentrarse, porque está percibiendo con todos sus sentidos que esa actividad es una pérdida de tiempo.

Por otro lado está la sensación que deja encontrarse, como "definiciones", lo que en realidad son propiedades de objetos conocidos sobradamente por el que presenta la definición, ¡objetos concebidos y estudiados antes de que la definición existiera! Igual que otros conceptos de la vida cotidiana, las ideas matemáticas existen antes de las definiciones, y son alcanzables por cualquiera, no exclusivas de un "patrimonio de matemáticos". La prueba de esto es que, si no fuera así, jamás se habría llegado a las definiciones (¡no habría nada que definir!).

O es así, o no queda más remedio que reconocer que las definiciones no definen nada y estudiar matemáticas es, y siempre ha sido, una estupidez. No son una estupidez, pero esto solo lo sabrá bien el que se haya divertido planteando cuestiones matemáticas, resolviéndolas, aprendiendo de la experiencia, construyendo ejemplos, entendiendo, y, en fin,

[1]Hay quien llama a esto "modo superior de conocimiento", porque permite saber lo que son las cosas sin haberlas aprendido antes. En serio.

[2]Por otro lado, aunque supieran lo que van a estudiar y les interesase, la propia estructura de los cursos hace imposible disfrutar estudiando...

disfrutando de la *belleza* de las matemáticas (que da una satisfacción parecida a notar la belleza de otras realidades como un paisaje o una canción). Ese *matemático* probablemente no se las tomará demasiado en serio, ni se enfadará hablando de ellas, ni le importarán los títulos, y sentirá asco hacia toda la pompa y misticismo con que las revisten los que hoy día ganan dinero distribuyéndolas.

Ahora queda aclarar para qué sirven las definiciones y para qué no. La definición de pato da una descripción resumida del animal que recibe ese nombre. Recoge datos suficientes para entenderse hablando con otros, pero no recoge todo lo que es, parece, representa, hace y podría hacer un pato. No agota su sentido ni captura completamente su realidad. Es una descripción imperfecta.

Así debería ser con las matemáticas. Primero están las ideas y las preguntas que plantea considerarlas atentamente. La teoría es una descripción formal lo más completa posible de esas ideas, pero siempre está limitada. En cuanto se "define" una recta, ya no se le permite ser curva (en el contexto más común), y cuando se define una curva, muchas veces no se le permite tener singularidades (puntos en los que "no parece una recta").

Al pensar en geometría uno se encuentra todos los casos a la vez: rectas, curvas, líneas retorcidas, segmentos, círculos, etc. Cuando se intenta describir todas las propiedades de estos objetos (por ejemplo, la propiedad de tener recta tangente), es cuando uno se encuentra contraejemplos y se ve de qué propiedad más básica aún (hipótesis) depende eso que queremos afirmar.

A menudo hay diferentes formas de expresar esa esencia (por ejemplo, la propiedad de tener recta tangente se deduce de que la curva venga descrita implícitamente por funciones cuyas diferenciales sean linealmente independientes sobre la curva, o bien explícitamente por una parametrización regular). Contemplando ahora esos avatares de una misma esencia, se encuentran cosas como que la diferenciabilidad es una propiedad local (cosa obvia teniendo en cuenta que la recta tangente en un punto, intuitivamente, "pasa por dos puntos consecutivos"), es decir, su existencia depende solo de cómo es la curva en los puntos arbitrariamente cercanos al punto de tangencia. También se aprecia que ni la parametrización ni las ecuaciones son "intrínsecas" a la curva, que solo son elecciones y que podemos elegir otras que nos gusten más.

Esta libertad es lo que permite a las matemáticas avanzar y renovar sus conceptos. No tenemos por qué adherirnos ni a definiciones de lo más básicas como punto, función o número (y no hacerlo es lo que ha dado fama a muchos matemáticos), si lo que vemos en las ideas que describen nos sugiere otra definición mucho mejor.

En resumen, las matemáticas no se aprenden ni se entienden mejor considerando las definiciones como principio, sin una variedad de ejemplos que alimente la imaginación y anime a la investigación. Las definiciones son el producto refinado de la investigación, y junto con la teoría presentan y aclaran las dependencias lógicas entre hipótesis y resultados. Son útiles sobre todo "para el que ya se lo sabe", pero un profesor no debería basarse en ellas para enseñar, a menos que quiera dárselas de genio ante unos alumnos a los que debería estar guiando, y no cegando.

3. Con extra de rigor. Lo siguiente que hacen los estudiantes de matemáticas es aprenderse las demostraciones de memoria, para cuando se las pregunten (cosa que harán).

Si las definiciones ya eran difíciles de asimilar, ahora viene una tromba de resultados inimaginables acompañados de complicados razonamientos que les dan peso, que hablan de cosas que no se sabe lo que son, utilizando propiedades que no parecían importantes hasta ese momento, y suelen acabar repentinamente sin que parezca que se haya demostrado nada. A veces al final se dice una frase en latín (*Quod erat demostrandum*), como si fuera un conjuro...

Toda esta morralla no hay quien la entienda a menos que ya sea matemático. El rigor no tiene ningún valor para nadie que no esté interesado en poner a prueba la veracidad de la proposición en primer lugar. Las demostraciones son una defensa para defender las teorías de los críticos, como una coraza. Pero esa coraza también oculta la claridad de las ideas e impide el aprendizaje. Los resultados matemáticos deberían estar como joyas en una vitrina transparente, bien protegidas (razonadas), pero a la vez visibles y disponibles para el que quiera verlas de cerca.

Igual que con las definiciones, las demostraciones completas y generales están muy bien para el que conoce la materia y quiere hacer una consulta. Pero no para memorizarlas, ni para repetirlas una y otra vez en cada libro, existiendo Wikipedia y otras recopilaciones de resultados... Basta con explicar los conceptos informalmente hasta entenderlos tan bien que sus propiedades importantes (y las hipótesis en que se basan) sean tan obvios que quede claro cómo usarlos para demostrar otras cosas. Luego se puede mirar por encima una demostración en un caso sencillo donde aparezcan todas las ideas (señalando qué hipótesis intervienen y cómo generalizar), o en el caso general para el que le apetezca comprobarlo (pero nunca obligando a aprendérselo).

Un ejemplo es la clasificación de aplicaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo. Este proceso comienza considerando la acción de varias aplicaciones sencillas en espacios reales de dimensión baja, donde la intuición geométrica está disponible. Ahí salta a la vista que muchas de ellas tienen subespacios *invariantes*, y que su acción queda descrita completamente por cómo actúan sobre ellos (lo que reduciría la dimensión). También se nota que aplicaciones diferentes pueden tener el mismo efecto, habiendo bases donde se representan por la misma matriz, y se plantea el problema de encontrar la matriz más sencilla posible para cada aplicación, lo que geométricamente consiste en descomponer el espacio en suma de subespacios invariantes.

La base de ese procedimiento está en que los subespacios invariantes de tipo más sencillo (generados por un vector y sus transformados) admiten siempre un suplementario también invariante, lo que resuelve el problema sin más que aplicar inducción. Al considerar atentamente esto, se ve que la existencia de subespacio suplementario es una propiedad intrínseca de la estructura del par (E, T), siendo E el subespacio y T la aplicación restringida. De ahí nace la noción de *módulo inyectivo* (o suplementable), propiedad que en este caso se deduce de lo que se llama estructura de $k[T]$-*módulo monógeno de anulador primario*, que tiene sentido también para *módulos sobre un dominio de ideales principales* y extiende la clasificación a este caso.

Como la clasificación de módulos finito generados sobre un dominio de ideales principales no introduce nuevas dificultades, basta con restringirse al caso de endomorfismos y luego comentar la extensión, introduciendo naturalmente el lenguaje del álgebra homológica. No hace falta dar todos los detalles en el caso más general...

En las clases se invierte muchísimo tiempo en las demostraciones (algún profesor dedica *todo* el tiempo a enunciar y demostrar), y es todo en vano porque eso se aprende igual leyéndolo que viéndolo escrito en una pizarra (encima los profesores se equivocan todo el rato, es normal). Luego al año siguiente nadie recuerda nada.

4. Los símbolos. Como las ideas matemáticas viven en la imaginación, la transmisión de ideas de una persona a otra depende fuertemente de los medios que se usan para expresarlas. Cualquiera que intente hacer matemáticas se encontrará con razonamientos escritos llenos de símbolos, y muchas veces incompletos.

De nuevo, el que no esté interesado en lo que se va a estudiar, solo verá símbolos que no dicen nada. Todo profesor de matemáticas debería enfatizar el significado por encima de la notación, por muy bonitas que sean las fórmulas.

5. Mucho trabajo y muchos problemas. La tercera tarea del estudiante es hacer problemas. Los problemas, muchos son idénticos unos a otros, y en realidad están resueltos en general por la teoría, pero nadie lo dice expresamente y no queda claro. Al final parecen cosas separadas, la teoría (el rollo que sueltan y nadie entiende, que se memoriza y se repite) y los problemas (ejercicios que se hacen sin pensar, poniendo unos símbolos delante de otros de la misma forma cada vez), impartidas por profesores diferentes que ni se hablan y usan notaciones y jerga distintas. Los profesores de problemas traicionan sus propias exigencias de rigor usando teoremas que el de teoría no ha demostrado a tiempo, y en ocasiones no se llegan a demostrar, no digamos ya entender, en toda la carrera.

De vez en cuando ponen ejercicios "de pensar", es decir, teoremas no demostrados en clase que se siguen de la materia. Alucina que casi siempre que esto ocurre, los enunciados *son falsos* e imposibles de demostrar. De esto nadie se entera nunca, los alumnos no están capacitados para darse cuenta. Pero al que sí se da cuenta, le da la impresión de que los profesores no tienen ni remota idea de nada más allá de lo que dictan año a año y podría decir cualquiera. Solo se inventan maneras retorcidas de fastidiar al estudiante.

Los problemas en realidad no son problemas, son experimentos en el laboratorio mental de las ideas matemáticas. Es donde surge todo. El matemático Arnold dijo que las matemáticas son como la física, y que separarlas de ese método experimental es lo que ha causado su decadencia. Dio buenos ejemplos de eso en [**1**].

6. Los santos matemáticos. Por culpa de toda la basura que rodea la educación en matemáticas, los auténticos matemáticos (los que ponen nombre a las chorradas que nadie entiende) son temidos y venerados como santos. Casi parece el objetivo final de todo el tinglado: se toma una actividad contemplativa que requiere paciencia y produce creaciones bellas, se la apropian unos pocos que introducen su propio lenguaje y métodos (muchos útiles y muchos inútiles, mezclado todo entre sí) y se vende al público codificada para que nadie consiga entenderla del todo y decir lo que pasa.

El resultado es una secta de torturadores y charlatanes llamados profesores y divulgadores, contra estudiantes aburridos que creen que están ante algo respetable que les supera y de alguna manera les dará trabajo. No merece la pena estudiar matemáticas.

Bibliografía

[1] Vladimir Arnold, On teaching mathematics.