
Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270095

Mireia Besalú
Joana Villalonga

7. Funciones polinómicas

Índice

7.1. Funciones lineales	186
7.1.1. Definición y ejemplos	186
7.1.2. Representación gráfica	187
7.2. Funciones afines	188
7.2.1. Definición y ejemplos	188
7.2.2. Representación gráfica	189
7.2.3. Propiedades	191
7.3. Funciones cuadráticas	192
7.3.1. Definición y ejemplos	192
7.3.2. Representación gráfica	193
7.4. Funciones polinómicas.....	199
7.4.1. Definición y ejemplos	199

Una función polinómica es toda aquella función que tiene por expresión algebraica uno polinomio. El estudio de las funciones polinómicas se hace según el grado del polinomio, y por lo tanto tiene sentido empezar por las funciones que tienen por expresión un polinomio de grado 1, es decir, cuando en la expresión algebraica de la función la variable aparece una sola vez multiplicada por ella misma. Empecemos, pues, analizando estos casos particulares de funciones polinómicas.

7.1. Funciones lineales

7.1.1. Definición y ejemplos

Una **función lineal o de proporcionalidad directa** es aquella función cuya expresión es el producto de un número por la variable. En otras palabras, se dice que f es una función lineal (o de proporcionalidad directa) si

$$f(x) = ax$$

donde a es un número real cualquiera. El número que multiplica la variable, a , se denomina **razón de proporcionalidad**.

¿Qué caracteriza una función lineal?
La expresión algebraica de una función lineal o de proporcionalidad directa es producto de un polinomio de grado 1 sin término independiente, es decir, del tipo $f(x) = ax$. El número a recibe el nombre de pendiente de la recta e informa de su inclinación. La gráfica correspondiente es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Ejemplo. Funciones lineales y razón de proporcionalidad.

$g(x) = 2x$, es una función lineal con razón de proporcionalidad 2.

$h(x) = 4x$, es una función lineal con razón de proporcionalidad 4.

$s(x) = -3x$, es una función lineal con razón de proporcionalidad -3.

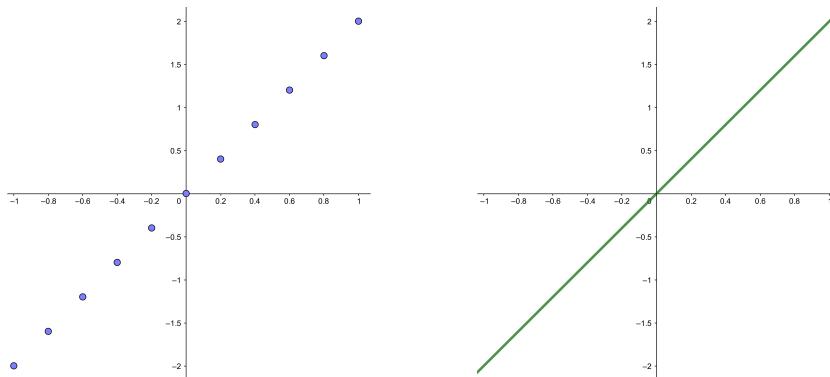
Para estudiar la forma de la gráfica de una función lineal, se puede crear, en primer lugar, una mesa de la función. De este modo, al representar los puntos de la mesa se obtiene la gráfica asociada. Lo exemplificamos con la función $f(x) = 2x$.

Ejemplo

Una tabla de valores asociada a la función $f(x) = 2x$ es la que aparece en el margen. Al representar los puntos que contiene esta tabla en el plan cartesiano se obtiene la primera de las dos gráficas que hay a continuación. Al observar esta gráfica de puntos, se puede deducir, de manera casi directa, donde dibujar todos los puntos de la gráfica de la función. El resultado de este hecho da una recta que pasa por el origen de coordenadas, tal como muestra la gráfica de la derecha. Esta segunda gráfica corresponde a la gráfica de $f(x) = 2x$.

x	$f(x)$
-1	-2
-0.8	-1.6
-0.4	-1.2
-0.2	-0.8
0.2	-0.4
0.4	0.8
0.6	1.2
0.8	1.6
1	2

Tabla de la función $f(x) = 2x$



7.1.2. Representación gráfica

La gráfica de cualquier función lineal es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Esto se debe de al hecho que cualquier función lineal es de la forma $f(x) = ax$, donde a es un número real no nulo. Al buscar la imagen del 0, se obtiene $f(0) = a \cdot 0 = 0$. En consecuencia, la imagen del 0 siempre es 0 y, por lo tanto, el punto $(0, 0)$ pertenece siempre a la gráfica de la función.

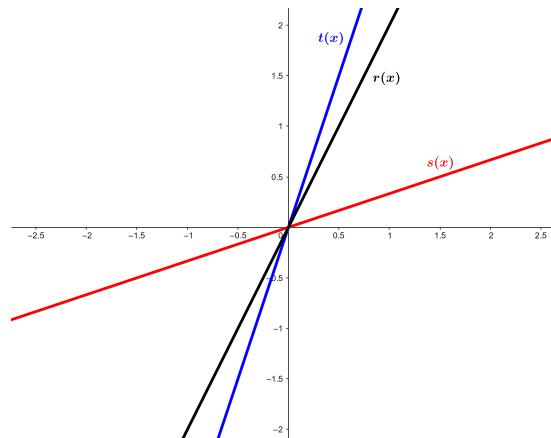
Así, para dibujar una función lineal cualquiera del tipo $f(x) = ax$, sólo hay que seguir estos pasos:

- 1) Se encuentra la imagen de un valor cualquiera x_0 del dominio de la función que no sea el 0, pues ya sabemos que la imagen del 0 es $f(0) = 0$.
- 2) Se marca el punto P que corresponde a este par ordenado en el plan cartesiano: $(x_0, f(x_0))$.
- 3) Se traza la recta que pasa por el punto $(0, 0)$ y por el punto P anterior. Esta recta se corresponde con la gráfica de la función lineal.

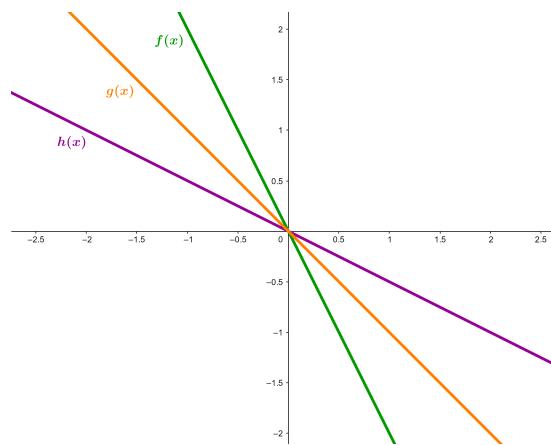
La gráfica de cualquier función se tiene que interpretar mirándola de izquierda a derecha. Dicho esto, al dibujar varias funciones lineales, como por ejemplo $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -\frac{1}{2}x$, $t(x) = 3x$, $s(x) = \frac{1}{3}x$ y $r(x) = 2x$, se puede observar como varía la **pendiente** (o inclinación) de las rectas. En particular, se tiene que:

- Si la razón de proporcionalidad es positiva, la recta crece con más rapidez cuanto

mayor es la razón. Este hecho se observa al comparar las gráficas de las funciones $t(x) = 3x$, $s(x) = \frac{1}{3}x$ y $r(x) = 2x$, tal como muestra la imagen siguiente:



- Si la razón de proporcionalidad es negativa, la recta decrece con más rapidez cuanto más pequeña (más negativa) es la razón. Este hecho se observa al comparar las gráficas de las funciones $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x$, tal como muestra la imagen siguiente:



Atendida la relación que hay entre la razón de proporcionalidad y la pendiente de la gráfica, la razón de proporcionalidad también se denomina **pendiente de la recta**.

7.2. Funciones afines

7.2.1. Definición y ejemplos

Una **función afín** es aquella función cuya expresión algebraica es producto de un polinomio de primer grado, es decir, de la forma

$$f(x) = ax + b$$

donde a y b son dos números reales cualesquiera. El coeficiente de la variable, a , se denomina **pendiente**, como en el caso de la función lineal. El otro número, b , se denomina **término independiente** u ordenada en su origen. De acuerdo con esta

¿Qué caracteriza una función afín?
La expresión algebraica de una función afín es un polinomio de grado 1, es decir, del tipo $f(x) = ax + b$. El número a recibe el nombre de pendiente de la recta e informa de su inclinación. El número b se denomina término independiente e informa del corte con el eje Y. La gráfica de una función afín es una recta.

expresión, la única diferencia que hay entre una función afín y una función lineal es que la función afín añade el término independiente b .

Ejemplo. Funciones afines y sus elementos.

$g(x) = 3x - 2$ es una función afín con pendiente 3 y término independiente -2.

$h(x) = 2x - 7$ es una función afín con pendiente 2 y término independiente -7.

7.2.2. Representación gráfica

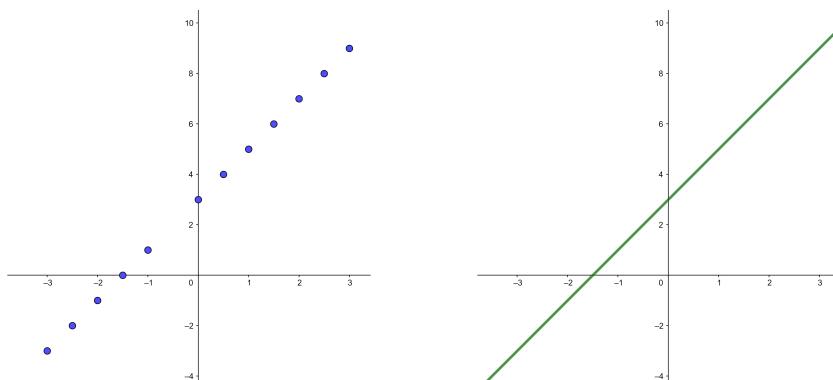
Al representar diferentes puntos de una función afín, se puede llegar a deducir la forma de su gráfica.

Por ejemplo, consideramos la función $f(x) = 2x + 3$ y calculamos una tabla de valores de la función como la del margen. Entonces, la representación gráfica resultante es la gráfica de puntos que muestra la primera de las dos imágenes que hay a continuación. A partir de esta gráfica de puntos se puede deducir la gráfica completa de la función considerada, $f(x) = 2x + 3$. Se trata de una recta que no pasa por el origen de coordenadas, tal como muestra la segunda de las dos imágenes de debajo.

Ejemplo

x	$f(x)$
-3	-3
-2.5	-2
-2	-1
-1.5	0
-1	1
-0.5	2
0	3
0.5	4
1	5
1.5	6
2	7
2.5	8
3	9

Tabla de la función $f(x) = 2x + 3$



Así, conocido el hecho que acabamos de observar, es posible representar una función afín a partir de su expresión algebraica. Si $f(x) = ax + b$ es la expresión general de una función afín, los pasos a seguir para representarla gráficamente se pueden resumir así:

- 1) Se buscan dos pares ordenados P y Q: $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ que pertenezcan a la gráfica de la función.
- 2) Se representan los puntos P y Q en el plano cartesiano.
- 3) Se unen los puntos dibujados mediante una recta.

Esta recta resultante corresponde a la gráfica de la función afín $f(x) = ax + b$.

En la gráfica de toda función afín $f(x) = ax + b$ se distinguen dos puntos de manera destacada. Estos son los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Más concretamente:

- El punto intersección entre la recta de la función y el eje Y. Este punto es $(0, f(0))$. En particular, como que por definición de la función afín $f(0)$ es el término independiente b de la expresión de la función, el punto intersección es exactamente $(0, b)$.
- El punto intersección entre la recta de la función y el eje X. Este punto se puede encontrar calculando la antíimagen del 0, es decir, x tal que $f(x) = 0$. Si \bar{x} es la solución de esta ecuación, el punto de intersección con el eje de abscisas será $(\bar{x}, 0)$. Más concretamente, como que $f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$, y por tanto el punto es exactamente $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Ejemplo. Puntos de corte de una función.

Consideramos la función $f(x) = 3x - 2$. Entonces:

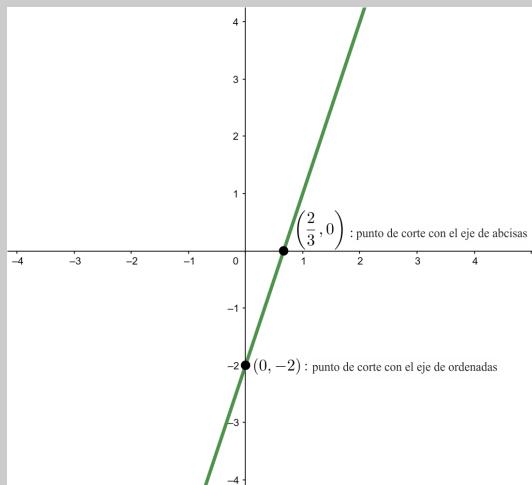
La intersección de $f(x)$ con el eje Y es $(0, f(0)) = (0, -2)$.

La función $f(x)$ corta al eje X en un punto tal que su coordenada de ordenadas cumple

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el punto intersección de la función con el eje X es $(\frac{2}{3}, 0)$.

Veamos los puntos de corte en la siguiente gráfica:



Expresión de la función dados dos puntos. A veces es necesario determinar la función afín que pasa por dos puntos determinados.

Dada la expresión general de una función afín, $f(x) = ax + b$, sabemos que a indica la pendiente de la función y b su término independiente. Si queremos encontrar la expresión algebraica de $f(x)$, tenemos que encontrar los dos valores, a y b . Para conseguirlo, es necesario definir un sistema de ecuaciones que habrá que resolver posteriormente. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo. Cómo encontrar una función afín a partir de dos puntos.

Queremos encontrar una función afín de forma que su gráfica contenga los puntos del plano $(1, -1)$ y $(-2, -7)$.

Dado que el punto $(1, -1)$ es de la gráfica de la función: $f(1) = -1$. Dado que buscamos $f(x) = ax + b$, $a \cdot 1 + b = -1$.

Dado que el punto $(-2, -7)$ es de la gráfica de la función, $f(-2) = -7$. Por el mismo razonamiento que antes, $a \cdot (-2) + b = -2a + b = -7$.

Hay que resolver el sistema de ecuaciones que surge de las dos condiciones anteriores

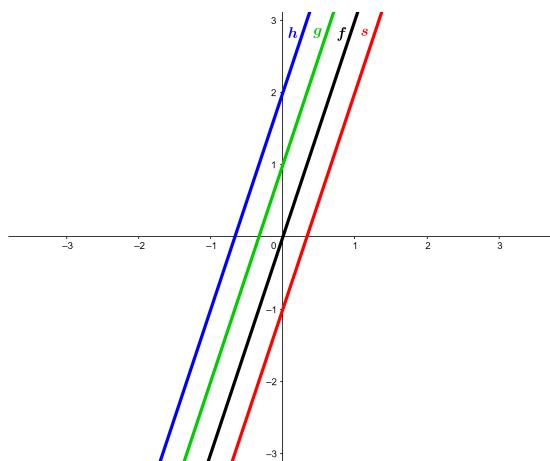
$$\begin{cases} a + b &= -1 \\ -2a + b &= -7 \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene que las soluciones del sistema son $a = 2$ y $b = -3$. Solo hay que sustituir el valores de a y b hallados en la expresión general $f(x) = ax + b$, de donde resulta

$$f(x) = 2x - 3$$

7.2.3. Propiedades

Al comparar la gráfica de varias funciones afines que tienen la misma pendiente, se observa que todas ellas son rectas paralelas. Así se visualiza en la figura siguiente, que presenta las gráficas de las funciones $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 1$, $h(x) = 3x + 2$ y $s(x) = 3x - 1$.



Que las rectas sean paralelas significa que la única modificación gráfica que tiene lugar al modificar el término independiente de una función consiste en desplazar paralelamente la recta. A su vez, puede observarse que una función lineal no es más que una función afín en la que el término independiente es 0. Dicho de otro modo, se trata de la correspondiente función afín que pasa por el origen.

De acuerdo con esto último, se distinguen tres **tipos de funciones afines** según el valor de su *pendiente*. Estas son:

- Las funciones afines que crecen a medida que se desplaza la vista hacia la derecha. Se identifican como **funciones crecientes** y se corresponden con las que tienen *la pendiente positiva*. Es decir, $f(x) = ax + b$ amb $a > 0$.
- De manera similar, pero en sentido inverso, las funciones afines que decrecen a medida que desplazamos la vista hacia la derecha. Estas funciones se denominan **funciones decrecientes** y se corresponden con las que tienen *la pendiente negativa*. Es decir, $f(x) = ax + b$ con $a < 0$.
- Finalmente, las funciones afines que son paralelas al eje X. Son **funciones constantes** y se corresponden con las que tienen *la pendiente nula*. Es decir, $f(x) = ax + b$ con $a = 0$.

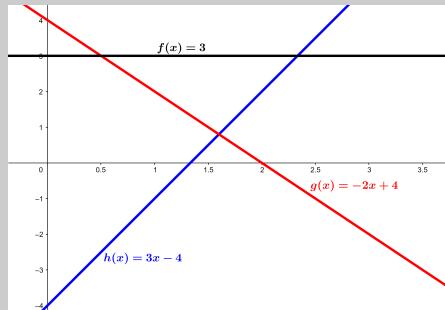
Ejemplo. Tipo de funciones afines.

Función afín constante: $f(x) = 3$, tiene pendiente 0.

Función afín creciente: $h(x) = 3x - 4$, tiene pendiente $3 > 0$.

Función afín decreciente: $g(x) = -2x + 4$, tiene pendiente $-2 < 0$.

Las gráficas correspondientes a estas funciones son



De acuerdo con las definiciones anteriores, una función afín es **creciente** cuando, a medida que aumenta el valor de la variable, x , también aumenta el valor de la imagen de la función, y .

Por el contrario, una función es **decreciente** cuando, a medida que aumenta el valor de la x , disminuye el valor de la y .

Finalmente, una función es **constante** cuando el valor de la imagen, y , no cambia al variar el valor de la variable, x . Una función constante no es creciente ni decreciente.

7.3. Funciones cuadráticas

7.3.1. Definición y ejemplos

La expresión de una función cuadrática corresponde a un polinomio de segundo grado con una única variable. Es decir, es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ (si $a = 0$ entonces tenemos una función afín y no cuadrática).

¿Qué caracteriza una función cuadrática?

La expresión algebraica de una función cuadrática es un polinomio de grado 2. Su representación gráfica es una parábola y los puntos esenciales de ella son el eje de simetría, el vértice y las ramas.

a es el coeficiente de segundo grado, b el coeficiente de primer grado y c el término independiente.

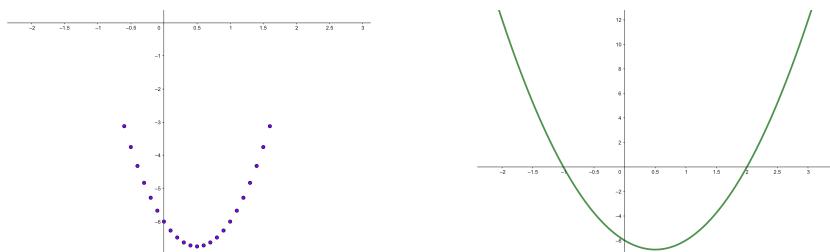
Ejemplo. Funciones cuadráticas.

$f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ es una función cuadrática con término de segundo grado 3, término de primero 2 y término independiente -2.

$g(x) = x^2 + 5$ es una función cuadrática con término de segundo grado 5 y término independiente 5. No tiene término de primer grado.

Para representar una función cuadrática, en primer lugar conviene construir una tabla de valores con algunos de los valores de la función. Veámoslo con un ejemplo. Ejemplo

En el margen hay una tabla que corresponde a la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ no se han incluido más valores en la tabla porque sería demasiado extensa). Al representar los puntos que contiene esta tabla, se obtiene la gráfica de la izquierda. A partir de esta gráfica no es complicado deducir que la representación completa de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ en el intervalo $[-2, 3]$ es la que presenta la figura de la derecha.



Como en los casos anteriores, observamos que, una vez representados los puntos de una tabla de valores de la función, no es complicado deducir la representación de todos los puntos en los que la función es definida, y se da lugar así a la gráfica de la función. En el caso de las funciones cuadráticas, la gráfica resultante es una curva.

Ejemplo

x	$f(x)$
-0.6	-3.12
-0.5	-3.75
-0.4	-4.32
-0.3	-4.83
-0.2	-5.28
-0.1	-5.67
0	-6
0.1	-6.27
0.2	-6.48
0.3	-6.63
0.4	-6.72
0.5	-6.75
0.6	-6.72
0.7	-6.63
0.8	-6.48
0.9	-6.27
1	-6
1.1	-5.67
1.2	-5.28
1.3	-4.83
1.4	-4.32
1.5	-3.75
1.6	-3.12

Tabla de la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

7.3.2. Representación gráfica

Como se acaba de ver, la gráfica de una función cuadrática es una curva. Esta curva recibe el nombre de **parábola**.

Elementos principales de una parábola. Toda parábola presenta unos elementos destacados. Iremos definiendo cuáles son estos elementos y a la vez viéndolos con un ejemplo concreto a partir de la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

- **El eje de simetría.** Toda parábola es siempre simétrica respecto a una recta, que recibe el nombre de *eje de simetría*. De manera general, si $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ es la expresión de la función cuadrática, entonces $x = -\frac{b}{2a}$ es la ecuación de la recta que define el eje de simetría de la función.

De acuerdo con la tabla de valores de la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ anterior, el valor de esta función f cuando $x = 0.5$ es -6.75 . Al estudiar las imágenes de los valores de x de la función f , observamos que este es el único punto de la función en el que el valor de la imagen no se consigue por otros valores de x . En cambio, sí que se repiten para cualquier otro valor de x .

x	$f(x)$
-0.5	-3.75
-0.4	-4.32
-0.3	-4.83
-0.2	-5.28
-0.1	-5.67
0	-6
0.1	-6.27
0.2	-6.48
0.3	-6.63
0.4	-6.72

x	$f(x)$
1.5	-3.75
1.4	-4.32
1.3	-4.83
1.2	-5.28
1.1	-5.67
1	-6
0.9	-6.27
0.8	-6.48
0.7	-6.63
0.6	-6.72

Está claro, pues, que a ambos lados de los $x = 0.5$, los valores de la función f se van repitiendo. Este hecho se puede visualizar dibujando una recta perpendicular al eje X, que pase por el punto $x = 0.5$. Al dibujar esta recta se ve claramente que la parte de la gráfica que queda a la izquierda de esta recta es la imagen reflejada de la parte derecha, y se muestra así la *simetría* de la función.

- **El vértice.** La intersección entre la parábola y el eje de simetría es un punto que recibe del nombre de vértice *de la parábola*. En particular, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ es la expresión general de toda función cuadrática, el vértice de la parábola tiene como coordenada de abscisas $x = -\frac{b}{2a}$. Entonces, el punto será producto del par ordenado:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right)$$

Seguimos con la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Hemos visto que el vértice de la parábola está en el punto de coordenadas $(0.5, -6.75)$.

Realizamos la comprobación analítica: por ser $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, tenemos $a = 3$, $b = -3$ y $c = -6$. Por lo tanto, la coordenada x del vértice es $x = -\frac{-3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} = 0.5$, tal como habíamos observado anteriormente.

- **Las ramas.** A partir del vértice de la parábola, esta se desarrolla en dos trazos simétricos a ambos lados, cada uno de los cuales se denomina *rama*. Ambas ramas pueden dirigirse hacia arriba o bien hacia abajo.

En particular, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ es la expresión general de una función cuadrática, se tiene que:

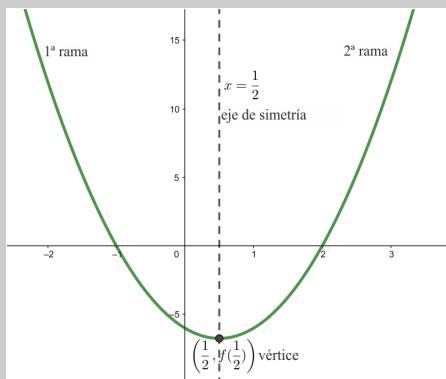
- Si $a > 0$, las dos ramas de la parábola se dirigen hacia arriba, y la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ y creciente en el intervalo $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

- Si $a < 0$, las dos ramas de la parábola se dirigen hacia abajo, y la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, y decreciente en el intervalo $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

En el caso del ejemplo, donde $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$:

- Las dos ramas de la parábola se dirigen hacia arriba.
- La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a}) = (-\infty, \frac{1}{2})$ y es creciente en el intervalo $(-\frac{b}{2a}, +\infty) = (\frac{1}{2}, +\infty)$

Así, en la gráfica de la función se observa, junto con los demás elementos descritos:



Junto con el vértice, otros puntos importantes de una parábola son las *intersecciones* de la parábola con los ejes coordenados.

- Toda parábola tiene una única intersección con el eje Y. Para encontrarla, basta con calcular la imagen de $x = 0$. Entonces, el punto de intersección es $(0, f(0))$. Si tenemos en cuenta que $f(x) = ax^2 + bx + c$, vemos que será el punto $(0, c)$.

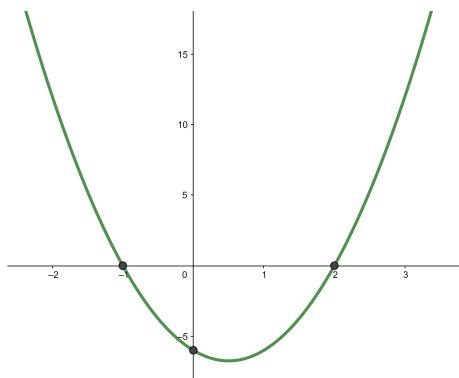
La imagen de 0 para la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ es $f(0) = -6$. Por lo tanto, la intersección de la parábola con el eje Y es el punto $(0, -6)$.

- Para encontrar la intersección de la parábola con el eje X, se tiene que igualar la función a 0. Es decir, tiene que resolverse la ecuación de segundo grado $f(x) = 0$, denominada *ecuación asociada a la función cuadrática*. De manera general, estos puntos se pueden escribir $(\bar{x}, 0)$, donde $\bar{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son las soluciones de la ecuación asociada a la función (si tiene).

La intersección de la parábola con el eje de abscisas, se halla resolviendo $f(x) = 0$.

En el caso de la función del ejemplo, $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, significa resolver $3x^2 - 3x - 6 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $x = -1$ y $x = 2$. Por lo tanto, la parábola corta el eje X en los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

La imagen siguiente muestra todos los puntos de corte de la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ con los ejes.



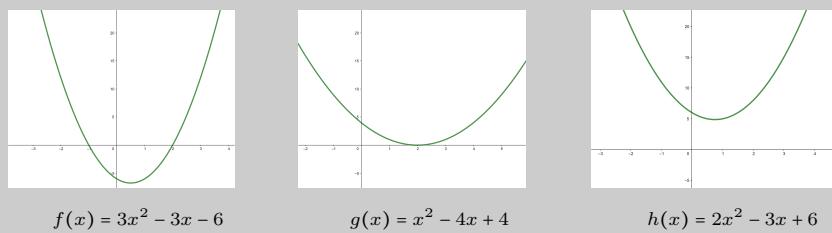
Como acabamos de ver, las intersecciones de una función cuadrática con el eje X se corresponden con las soluciones de la ecuación asociada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Dado que una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución en función de su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, una parábola podrá tener dos, una o ninguna intersección con el eje X según si la ecuación asociada tiene dos, una o cero soluciones. En particular, pues, se concluye que una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene:

- dos puntos de corte con el eje X si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
- un punto de corte, que resulta doble, con el eje X si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- ningún punto de corte con el eje X si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Ejemplo. Puntos de corte de una función cuadrática con el eje X.

Veamos un ejemplo de una función cuadrática que corta el eje X en dos puntos, otra en un punto y una tercera que no corta nunca el eje X.

- A la izquierda, $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Esta función corta el eje X en dos puntos porque la ecuación $3x^2 - 3x - 6 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -1$ y $x = 2$.
- En el centro, $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Esta función corta el eje X en un solo punto porque la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene una única solución: $x = 2$.
- A la derecha, $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$. Esta función no corta el eje X porque la ecuación $2x^2 - 3x + 6 = 0$ no tiene ninguna solución.



También concluimos que si una parábola corta en dos puntos el eje X, la ecuación de segundo grado asociada a la función cuadrática tiene dos soluciones; si corta en un único punto, la ecuación tiene una única solución, y si no corta en ningún punto, la ecuación no tiene ninguna solución.

Representación de una parábola. Dada la expresión de una función cuadrática, puede obtenerse la representación gráfica en el plano cartesiano siguiendo unos pasos concretos. Veamos qué son mediante un ejemplo concreto.

Suponemos que queremos representar gráficamente la función cuadrática $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$. Entonces:

- 1) Se encuentra el vértice de la parábola, que tiene como coordenada $x = -\frac{b}{2a}$.

Dada la función $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$, su vértice tiene coordenada:

$$x = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

La imatge corresponent serà producte de:

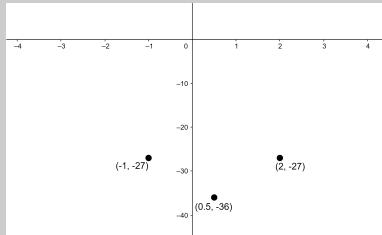
$$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 35 = 1 - 2 - 35 = -36$$

Por lo tanto, el vértice está en el punto de coordenadas:

$$\left(\frac{1}{2}, -36\right)$$

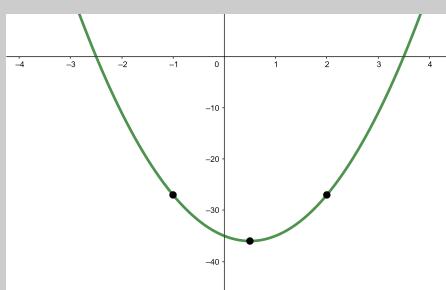
- 2) Se encuentran diferentes pares de puntos de la función que tengan la coordenada x equidistante respecto a la coordenada x del vértice, y se representan estos puntos junto con el vértice. Basta con representar dos puntos equidistantes del vértice para hacernos una idea de la forma de la parábola.

Dos números equidistantes de $\frac{1}{2}$ pueden ser el -1 y el 2 . Sus imágenes son $f(-1) = f(2) = -27$, que coinciden por ser las imágenes de dos valores equidistantes a la coordenada x del vértice.



- 3) Se unen estos puntos con una curva parabólica; el vértice no debe tener forma puntiaguda, sino redondeada. Además, las ramas de la parábola tienen que elevarse o dirigirse hacia abajo según si el término de segundo grado es positivo o negativo, respectivamente, de modo que siempre se vayan abriendo.

La gráfica de la parábola de la función del ejemplo $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$ es



Modificaciones en la expresión algebraica y efectos en la expresión gráfica.

Modificar los coeficientes de una función cuadrática comporta cambios en la parábola resultante. Si $ax^2 + bx + c$ es la expresión general de una ecuación de segundo grado, estos pasos se pueden resumir en los aspectos siguientes:

- La modificación del término independiente, c , de una función cuadrática provoca el desplazamiento vertical de toda la parábola asociada: si el término aumenta, la parábola sube, y si el término disminuye, la parábola baja.

Ejemplo. Modificación del término independiente.

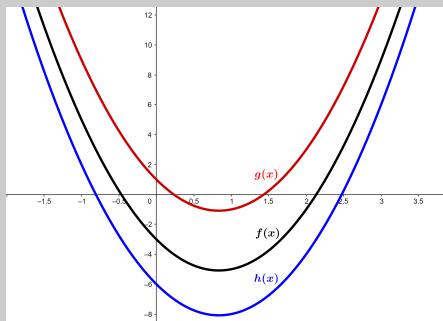
Representamos las funciones

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 3$$

$$g(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

$$h(x) = 3x^2 - 5x - 6$$

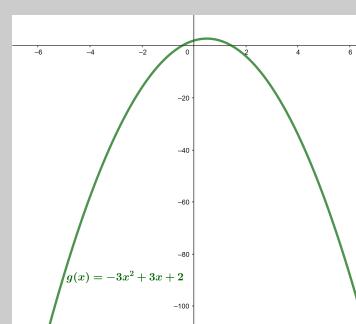
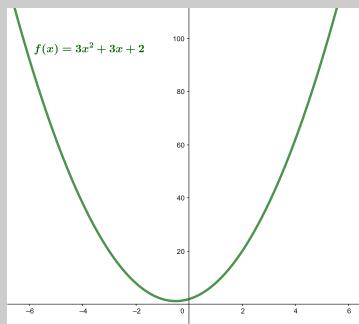
Al compararlas observamos que al aumentar el término independiente la parábola sube, y en caso contrario baja.



- El coeficiente del término de grado 2, a , puede tener signo positivo o negativo. Si el coeficiente es positivo, las ramas de la parábola se dirigen hacia arriba, y si es negativo, se dirigen hacia abajo.

Ejemplo. Signo término de segundo grado.

Representamos las funciones $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$, a la izquierda, y $g(x) = -3x^2 + 3x + 2$, a la derecha. En el primer caso, las ramas de parábola se abren hacia arriba, y en el segundo caso se abren hacia abajo.



- La modificación en valor absoluto del coeficiente del término de grado 2, a , también produce un cambio regular en la parábola: si en valor absoluto este coeficiente disminuye, las ramas de la parábola se separan, y, en cambio, si en valor absoluto

! Los cambios más evidentes al modificar los coeficientes de la expresión de una función cuadrática son: al aumentar el término independiente de la función, la parábola se desplaza hacia arriba; al cambiar de signo el coeficiente de grado 2, se invierten las ramas de la parábola; al aumentar, en valor absoluto, el coeficiente de grado 2, las ramas de la parábola tienden a cerrarse.

el coeficiente aumenta, las ramas de la parábola se acercan. Hay que recordar que el punto donde se encuentra el vértice también cambia al modificarse a .

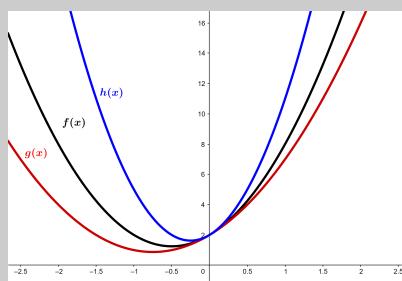
Ejemplo. Valor absoluto del término de segundo grado. Representamos las funciones

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

$$h(x) = 6x^2 + 3x + 2$$

Al compararlas, observamos que la parábola de la función $h(x)$, que es la función con coeficiente de grado dos mayor, $|6| > |3| > |2|$, es la parábola menos abierta, y por lo tanto con las ramas más juntas. En cambio, la parábola de la función $g(x)$, con el valor absoluto de coeficiente de segundo grado menor, es la parábola más abierta, es decir, con las ramas más separadas.

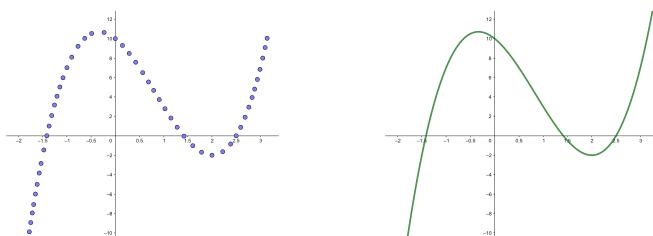


7.4. Funciones polinómicas

7.4.1. Definición y ejemplos

Una **función polinómica** de grado n es cualquier función que tiene por expresión algebraica un polinomio de grado n . A menudo se denomina simplemente polinomio. Las funciones afines y las funciones cuadráticas son ejemplos de funciones polinómicas de grado 1 y grado 2 respectivamente. Ahora bien, también hay funciones polinómicas de mayor grado: un ejemplo de función polinómica de grado 3 es $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$.

Para hacer la gráfica de una función polinómica, podemos crear una tabla de valores con un buen número finito de puntos y, posteriormente, representarlos en el plano cartesiano, tal como se ha hecho anteriormente en el estudio de las funciones lineales, afines y cuadráticas. Una vez dibujada la gráfica de puntos asociada a la tabla de valores, puede deducirse la forma que toma la curva asociada a la función. De acuerdo con este procedimiento, la representación de una tabla de valores asociada a la función (que no añadimos porque es demasiado extensa) de la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$ y la gráfica dibujada de un solo trazo en el intervalo $[-2, 3]$ son:



¿Qué caracteriza una función polinómica?

La expresión algebraica de una función polinómica de grado n es un polinomio. Por eso, se puede hablar simplemente de polinomio. En la gráfica de una función polinómica pueden diferenciarse dos elementos: las ramas y la parte central. En la parte central la función polinómica se pliega varias veces, como máximo, tantas como el grado del polinomio.

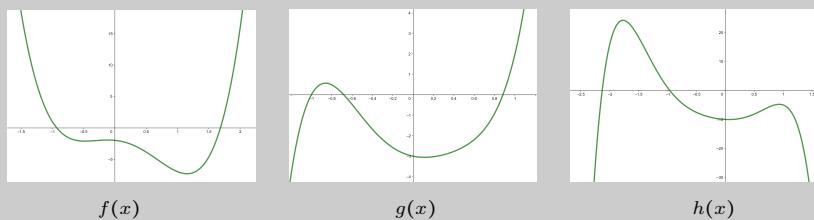
Ejemplo. Funciones polinómicas.

$f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2$ es una función polinómica de grado 4.

$g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$ es una función polinómica de grado 5.

$h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$ es una función polinómica de grado 6.

Las gráficas de estas tres funciones son, respectivamente:



En la gráfica de una función polinómica pueden diferenciarse normalmente dos partes: las ramas y la parte central.

- Las **ramas** son los dos brazos laterales en los que se desarrolla la función. Nunca llegan a ser completamente rectos, a pesar de que pueden parecerlo cuando el dominio representado es muy grande. Pueden dirigirse ambas hacia arriba, ambas hacia abajo, o bien una rama hacia arriba y la otra hacia abajo. Si se representa la gráfica de un polinomio en un intervalo mayor, la forma de las ramas prácticamente no varía, es decir, las ramas de una gráfica nos dan una idea de cómo sigue la gráfica de una función polinómica más allá de la parte representada.

Recuperamos las gráficas de las tres funciones polinómicas del ejemplo anterior,

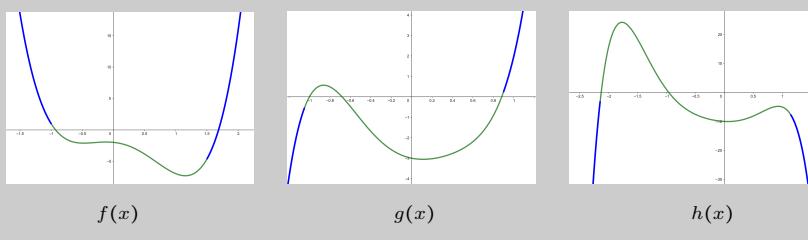
$$f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2$$

$$g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$$

$$h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$$

y marcamos las ramas. Observamos que:

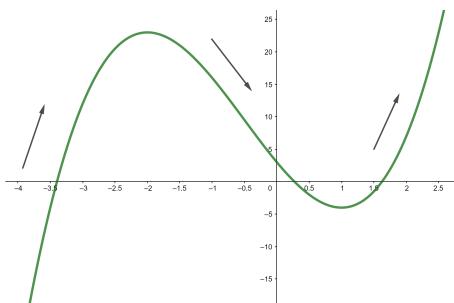
- Las ramas de la función $f(x)$ se dirigen las dos hacia arriba, y, como se definirá posteriormente, presenta 3 pliegues en la parte central.
- Las ramas de la función $g(x)$ se dirigen una hacia abajo y la otra, hacia arriba, y la función presenta 2 pliegues tal com se definirá posteriormente.
- Las ramas la función $h(x)$ se dirigen las dos hacia abajo, y la función presenta 3 pliegues tal com se definirá posteriormente.



Ciertas características permiten conocer hacia dónde tienen que dirigirse las ramas de una función polinómica. Son:

- La rama de la derecha se dirige hacia arriba cuando el coeficiente de grado máximo es positivo, y hacia abajo cuando es negativo.
- La rama de la izquierda se dirige hacia abajo cuando el polinomio es de grado par y el coeficiente de grado máximo es negativo, o bien cuando el polinomio es de grado impar y el coeficiente de grado máximo es positivo. En caso contrario, el extremo de la izquierda se dirige hacia arriba.
- La parte **central** es la parte en la que la gráfica se pliega varias veces. El número de pliegues depende del grado del polinomio: cuanto mayor es el grado más *pliegues* puede presentar la gráfica correspondiente. El máximo número de pliegues de una función polinómica es su grado menos uno. Así, un polinomio de grado 1 no puede tener ningún pliegue. En cambio, un polinomio de grado 2 tiene exactamente un pliegue, un polinomio de grado 3 puede tener dos pliegues, y uno de grado 4, tres pliegues como máximo...

Dado que la gráfica de cualquier función tiene que leerse de izquierda a derecha, al analizar la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$ que presenta la imagen de debajo, comprobamos que al principio la función se dirige hacia arriba, después hacia abajo y, finalmente, otra vez hacia arriba.



Este hecho nos lleva a hablar de la **monotonía** de una función, es decir, del crecimiento y decrecimiento de una función. Con rigor, se dice que:

- Una función $f(x)$ es **creciente** cuando, a medida que aumenta la variable x , el valor de la imagen de función, $y = f(x)$, también aumenta.
- Una función $f(x)$ es decreciente cuando, a medida que aumenta la variable x , el valor de la imagen de la función, $y = f(x)$, disminuye.

Ejemplo. Monotonía de una función polinómica.

Consideremos la función polinómica anterior

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$$

De acuerdo con su representación gráfica, la función es creciente cuando x es menor que -2 , es decreciente entre -2 y 1 , y vuelve a ser creciente a partir de $x = 1$.

- La gráfica de una función polinómica también presenta *puntos destacados*. Estos son:

- Los **extremos**. Este término hace referencia a los máximos y mínimos de la función. Se denomina **máximo relativo** (o local) de una función el punto en que la función pasa de ser creciente a ser decreciente. El valor de la función en este punto es más grande que el de cualquiera otro punto de la gráfica que sea cercano. Se denomina **mínim relativo** (o local) de una función aquel punto en que la función pasa de ser decreciente a ser creciente. El valor de la función en este punto es menor que el de cualquiera otro punto de la gráfica que sea cercano.

En la gráfica de la función anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, podemos observar que un máximo relativo se encuentra en el punto $(-2, f(-2)) = (-2, 23)$ mientras que un mínimo se encuentra en el punto $(1, f(1)) = (1, -4)$.

- La **intersección con el eje Y**. Hay sólo un punto de intersección entre la gráfica de cualquier polinomio y el eje Y. Este punto es el que tiene coordenada $x = 0$ y, por lo tanto, se trata del punto del plano $(0, f(0))$.

Dada la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$, el punto de intersección de esta función con el eje Y es $(0, f(0)) = (0, 10)$.

Observad que el vértice de una función cuadrática coincide con su máximo o mínimo.

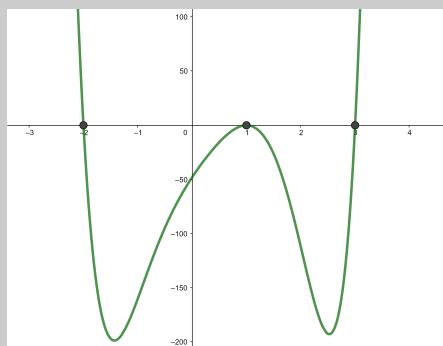
- La **intersección con el eje X**. Puede haber un número de intersecciones con el eje X igual al grado del polinomio como máximo. Así mismo, no siempre se llega a este número. Para encontrar los puntos de intersección con el eje X, se tiene que resolver la ecuación asociada a la función $f(x) = 0$, operación que puede ser complicada. Los valores de x que cumplen $f(x) = 0$ se denominan **raíces del polinomio**. Un polinomio que tiene raíces se descompone como producto de polinomios, algunos de los cuales son de grado 1.

El polinomio $f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4$ tiene como raíces $x = 1$, $x = 3$ y $x = -2$.

Entonces, su descomposición es

$$f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4 = 2(x-1)^2(x-3)(x+2)(2x^2+x+4)$$

La gráfica de la función lo muestra así: la función corta al eje X en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = -2$, y en el punto $x = 1$ no cruza al eje X ya que es una raíz doble.



Resumen

Funciones polinómicas

Una función polinómica es la que tiene por expresión un polinomio. En general, se suelen estudiar según el grado del polinomio. Se distinguen:

Funciones afines

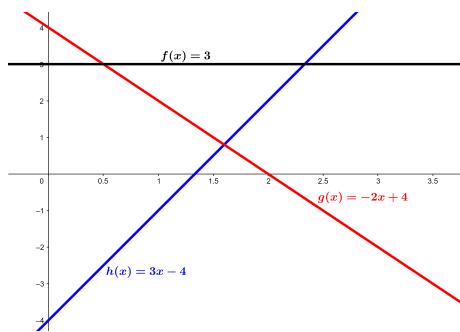
Definición. Una **función afín** es una función polinómica cuya expresión es un polinomio de grado 1 y, por lo tanto, del tipo $f(x) = ax + b$, en donde a se denomina **pendiente de la recta** y b **término independiente**.

Representación gráfica. La gráfica de una función lineal es una recta.

Elementos. Dada la expresión general de cualquier función afín, $f(x) = ax + b$, se definen:

- La *pendiente de la recta*: a , informa de su inclinación.
- Los *puntos de corte con los ejes*:
 - Corte con el eje Y: $(0, b)$.
 - Corte con el eje X: $(-\frac{b}{a}, 0)$.
- La *monotonía* (crecimiento y decrecimiento):
 - La función es creciente si $a > 0$.
 - La función es constante si $a = 0$.
 - La función es decreciente si $a < 0$.

Ejemplo

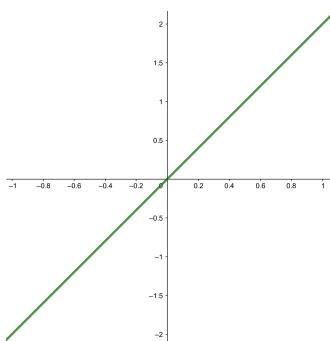


Particularidades. Un tipo especial de funciones afines son las funciones lineales.

Una función lineal es una función afín en la que el término independiente es 0. Por lo tanto, es de la forma

$$f(x) = ax$$

Su representación es una recta que pasa por el origen. Un ejemplo es la recta correspondiente a la función $f(x) = 2x$, tal como se visualiza en el ejemplo de la derecha.



Funciones cuadráticas

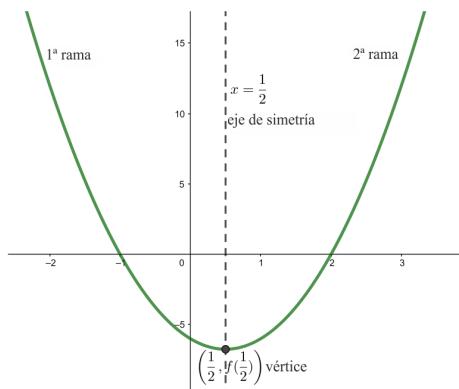
Definición. Una función cuadrática es una función cuya expresión es un polinomio de grado 2. Es decir, es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Representación gráfica. Su representación es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

Elementos. Dada la expresión general de cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se definen:

- El *eje de simetría* de la parábola: recta $x = -\frac{b}{2a}$.
- El *vértice* de la parábola: punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)$.
- Las *ramas* de la parábola: se dirigen hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.
- Los *puntos de corte* de la función con los ejes:
 - Corte con el eje Y: el punto $(0, f(0))$.
 - Corte con el eje X: los puntos $(\bar{x}, 0)$, donde \bar{x} es solución de la ecuación de segundo grado asociada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Puede haber:
 - Dos: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
 - Uno: si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
 - Ninguno: si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
- La *monotonía* (crecimiento y decrecimiento):
 - Si $a > 0$: es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ y creciente en el intervalo $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
 - Si $a < 0$: es creciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ y decreciente en el intervalo $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Ejemplo



Funciones polinómicas

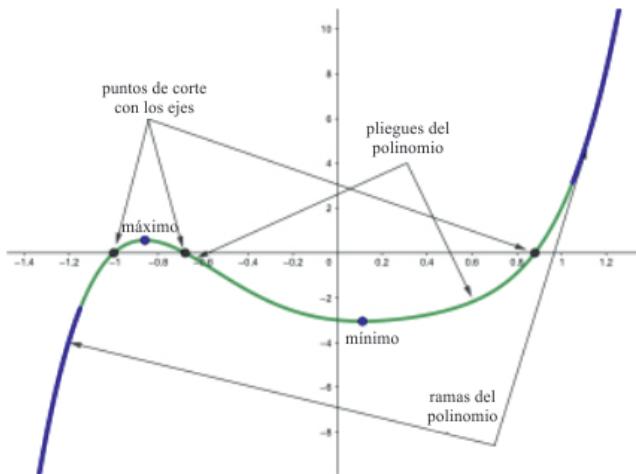
Definición. Una función polinómica es una función cuya expresión es un polinomio. A menudo, se denomina simplemente polinomio.

Representación gráfica. La gráfica de una función polinómica es una curva. En esta curva se distinguen dos zonas principales: las *ramas* y la parte *central*.

Elementos. Dada una función polinómica cualquiera $f(x)$, se definen:

- Las **ramas**. Son los dos brazos laterales en los que se desarrolla la función.
 - La rama de la derecha se dirige hacia arriba cuando el coeficiente de grado máximo es positivo, y hacia abajo cuando es negativo.
 - La rama de la izquierda se dirige hacia abajo cuando el polinomio es de grado parejo y el coeficiente de grado máximo es negativo, o bien cuando el polinomio es de grado impar y el coeficiente de grado máximo es positivo. En caso contrario, el extremo de la izquierda se dirige hacia arriba.
- La **parte central** es la parte en la que la gráfica se pliega varias veces. El máximo de pliegues de una función polinómica es su grado menos 1.
- Los **puntos de corte**:
 - Corte con el eje Y: el punto $(0, f(0))$.
 - Corte con el eje X: los puntos $(\bar{x}, 0)$, on \bar{x} es solución de la ecuación asociada a la función $f(x) = 0$.
- Los **extremos**: son los puntos máximos y mínimos relativos (o locales) de la función.

Ejemplo



Ejercicios resueltos

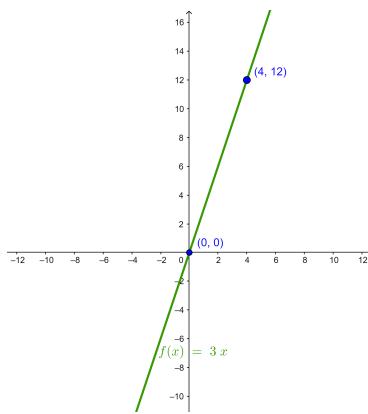
1. Una función lineal cumple que $f(4) = 12$. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función? Represéntala gráficamente.

Solución:

Para ser una función lineal, tiene que ser de la forma $f(x) = ax$. Por lo tanto, $f(4) = 12$. Si $x = 4$ resulta $a \cdot x = 12$, de donde obtenemos $a = \frac{12}{4} = 3$.

Por lo tanto, la expresión de la función lineal buscada es $f(x) = 3x$.

Su representación gráfica es una recta que pasa por el centro de coordenadas y el punto $(4, 12)$, tal como muestra la imagen:



2. Una función afín cumple $f(2) = 5$ y $f(0) = 1$. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función? Represéntala gráficamente.

Solución:

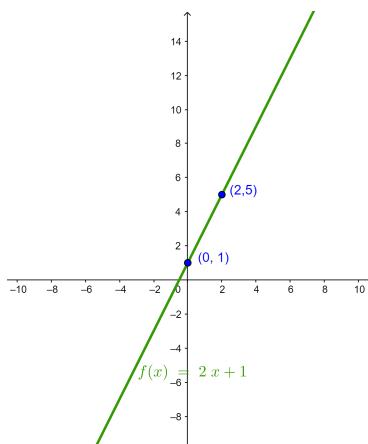
Para ser una función afín, tiene que ser de la forma $f(x) = ax + b$. Por lo tanto:

- $f(2) = 5$, esto quiere decir $a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$
- $f(0) = 1$, esto quiere decir $a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1$

De la segunda condición tenemos $b = 1$. Sustituyendo este valor b en la primera condición, resulta $2a + b = 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Por lo tanto, la expresión algebraica de la función lineal afín es $f(x) = 2x + 1$.

La gráfica de esta función es, pues, una recta que pasa por los puntos $(2, 5)$ y $(0, 1)$, tal como muestra la imagen.



3. ¿Hay alguna función afín que cumpla a la vez que $f(2) = -4$ y $f(-5) = -10$?

Solución:

Para ser una función afín, esta tiene que ser de la forma $f(x) = ax + b$ que, de acuerdo con las condiciones del enunciado, tiene que cumplir a la vez:

- $f(2) = -4$, esto quiere decir $a \cdot 2 + b = -4 \Rightarrow b = -4 - 2a$

- $f(-5) = -10$, esto quiere decir $a \cdot (-5) + b = -10 \Rightarrow b = -10 + 5a$

Igualando las dos expresiones de b obtenemos

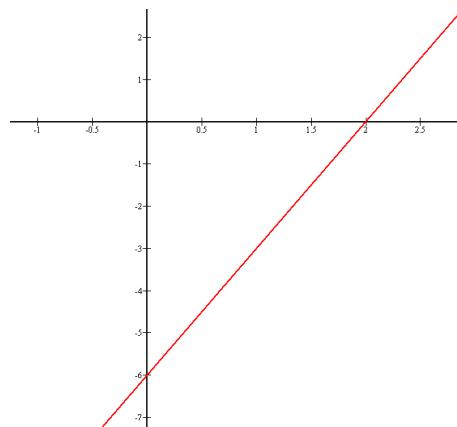
$$-4 - 2a = -10 + 5a \Rightarrow -2a - 5a = -10 + 4 \Rightarrow -7a = -6 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$$

Sustituyendo este valor de a en una de las dos condiciones iniciales, por ejemplo la primera, obtenemos

$$b = -4 - 2a = -4 - 2 \cdot \frac{6}{7} = \frac{-28 - 12}{7} = -\frac{40}{7}$$

Por lo tanto, sí que existe una función afín que cumple las condiciones, y es $f(x) = \frac{6}{7}x - \frac{40}{7}$.

4. Determina la expresión de la función afín que describe esta gráfica:



Solución:

Observemos que la gráfica de la función es una recta que pasa por los puntos $(0, -6)$ y $(2, 0)$. Esto quiere decir $f(0) = -6$ y $f(2) = 0$. Dado que se trata de una función afín, tiene que ser de la forma $f(x) = ax + b$. Por lo tanto, tiene que cumplirse a la vez:

- $f(0) = -6 \Rightarrow a \cdot 0 + b = -6 \Rightarrow b = -6$
- $f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a = -b$

De la primera condición, encontramos que $b = -6$. Al sustituir este valor de b en la segunda condición, resulta

$$2a = -b \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Por lo tanto, la expresión de la función afín que determina la gráfica es $f(x) = 3x - 6$.

5. Encuentra el vértice de la parábola $f(x) = 3x^2 - x + 1$.

Solución:

Sabemos que una parábola es la forma de la gráfica correspondiente a cualquier función cuadrática, que puede escribirse de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. En este caso, sabemos que el vértice de la parábola tiene como coordenada de abscisas $x = -\frac{b}{2a}$.

Entonces, en este caso identificamos $a = 3$, $b = -1$ y $c = 1$ y, usando la fórmula del vértice para cualquier parábola, resulta

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

y su imagen es

$$f(x) = f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3 - 6 + 36}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Por lo tanto, el punto del plano donde está el vértice es

$$(x, f(x)) = \left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

6. Encuentra la expresión de una parábola que cumpla a la vez estas condiciones: $f(1) = 2$, $f(-2) = 11$ y $f(0) = 1$.

Solución:

Para ser una parábola, esta tiene que ser de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces, se obtiene, por las condiciones del enunciado:

- $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$
- $f(-2) = 11 \Rightarrow 4a - 2b + c = 11$
- $f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

De la tercera condición, se puede asegurar $c = 1$. Sustituyendo este valor de c en las dos primeras condiciones, podemos encontrar a y resolviendo b un sistema de dos ecuaciones y

dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 4a - 2b + 1 = 11 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por igualación:

De la primera ecuación resulta $b = 1 - a$ y de la segunda $b = \frac{11 - 1 - 4a}{-2} = 2a - 5$. Igualando las expresiones para b , resulta

$$1 - a = 2a - 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

Encontrado el valor de a lo sustituimos en la primera ecuación para encontrar el valor de b :

$$b = 1 - a = 1 - 2 = -1$$

Por lo tanto, la expresión de la función buscada es $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

7. Encuentra la expresión de una parábola, $f(x)$, que tenga una raíz en $x = 2$, su vértice esté en $x = -1$ y su imagen valga -27 .

Solución:

Toda parábola es producto de una expresión cuadrática que podemos escribir de manera general

$$f(x) = ax^2 + bx + c = C(x - x_1)(x - x_2)$$

donde a , b , c y C son valores reales concretos y x_1 y x_2 son las raíces del polinomio de segundo grado asociado a la función cuadrática.

De manera general, también sabemos que las raíces del polinomio asociado a la función son las abscisas de puntos equidistantes al vértice de la parábola que la función representa.

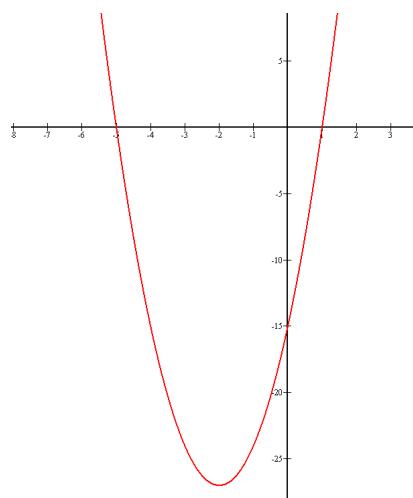
Según lo que sabemos, y dadas las condiciones del enunciado, trabajaremos con la segunda expresión de toda función cuadrática: $f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces, y C un valor real por determinar.

Por el enunciado, sabemos que el vértice está en y que una de las raíces está en $x = 2$. Esto quiere decir en particular que las raíces equidistan 3 unidades del vértice $x = 2 = -1 + 3$. Por lo tanto, la otra raíz, que también estará a la misma distancia del vértice, tiene que estar en $-1 - 3 = -4$. Por ello, deducimos que la función es producto de una expresión del tipo $x = -1 - 3 = -4$. Para determinar el valor C , utilizamos el valor que toma la función en el vértice:

$$f(-1) = -27 \Rightarrow C(-1 - 2)(-1 + 4) = -27 \Rightarrow -9C = -27 \Rightarrow C = 3$$

Por lo tanto, concluimos que: $f(x) = 3(x - 2)(x + 4)$.

8. Encuentra la expresión de esta parábola.



Solución:

Observamos que la función pasa por los puntos $(-5, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -15)$. Esto quiere decir que $f(-5) = 0$, $f(1) = 0$ y $f(0) = -15$. Dado que se trata de la representación de una función cuadrática, tiene que ser de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Por lo tanto, se tiene que cumplir:

- $f(-5) = 0 \Rightarrow 25a - 5b + c = 0$
- $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
- $f(0) = -15 \Rightarrow c = -15$

Por la tercera condición, $c = -15$. Al sustituir este valor de c en las dos primeras ecuaciones,

se trata de resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, y resulta

$$\begin{cases} 25a - 5b = 15 \\ a + b = 15 \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene $b = \frac{15 - 25a}{-5} = 5a - 3$, y de la segunda $b = 15 - a$. Igualando las dos expresiones de b resulta

$$5a - 3 = 15 - a \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

Sustituyendo este valor en la segunda condición, resulta $b = 15 - a = 15 - 3 = 12$. Por lo tanto, la expresión de la función es $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.

De manera alternativa, la expresión cuadrática de la función puede escribirse

$$f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)$$

donde x_1 y x_2 son las raíces del polinomio. Del hecho que $f(-5) = 0$ y $f(1) = 0$, tenemos que

-5 y 1 son las raíces del polinomio asociado a la función. Por lo tanto $f(x) = C(x+5)(x-1)$.

Por otro lado, dado que $f(0) = -15$, significa que $-15 = -5C$, de donde resulta $C = 3$.

Por lo tanto, $f(x) = 3(x-1)(x+5)$.

Ejercicios para practicar con las soluciones

9. Un kilogramo de patatas cuesta 56 céntimos. Determina la función que define el coste de las patatas según los kilogramos comprados, representa la función en el plano cartesiano y contesta las siguientes preguntas:

- (a) ¿Cuál es el $\text{Dom}(f)$?
- (b) ¿Qué precio tendrán 3.5 kg de patatas?
- (c) Si se tiene un único billete de 5€, ¿cuál es la cantidad máxima de patatas que puede comprarse (sin dejar nada a deber)?

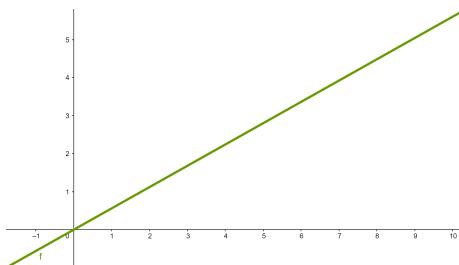
10. La tarifa de una empresa de mensajería con entrega a domicilio es de 12€ por tasa fija más 5€ por cada kilogramo que se envía. Se pide:

- (a) Encuentra la expresión algebraica de la función *Precio del envío* según su peso en kilogramos.
- (b) ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función?
- (c) Representa la función gráficamente.
- (d) ¿Cuánto costará enviar un paquete de 750 gramos?
- (e) ¿Cuál es el peso máximo que puede enviarse si solo se tiene un billete de 50€?

11. La longitud de la circunferencia y el área del círculo se expresan en función del radio. Escribe las dos expresiones algebraicas y dibuja las gráficas correspondientes. ¿Qué tipo de funciones son? ¿Para qué valor del radio coinciden numéricamente la longitud y el área? ¿Cuál es el valor de la longitud y el área, en este caso?

Soluciones:

9. La expresión de la función es $f(x) = 0.56x$, donde x representa la cantidad de kilogramos. La gráfica es

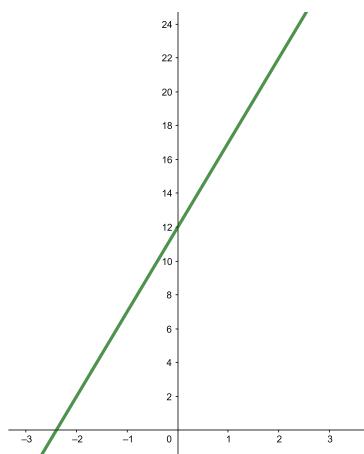


- (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- (b) 1.96 €
- (c) 8.93 kilogramos

10. (a) La expresión de la función es $y = 5x + 12$, donde x son los kilogramos que se envían.

- (b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
- (c) 15 €
- (d) 7.6 kilogramos

La gráfica es



11. Las expresiones algebraicas, son $l(r) = 2\pi r$, que es una función lineal, y $a(r) = \pi r^2$, que es una función cuadrática. La longitud y el radio coincidirán numéricamente cuando $l(r) = a(r)$, por lo tanto cuando $r = 0$, que no tiene sentido físico, y $r = 2$. En este segundo caso, $l(2) = a(2) = 4\pi \cong 12.57$. Las gráficas son:

