USMB, Math 405, année 2023-2024

TP

Indications. Le compte-rendu doît être en format notebook JUPYTER. Les raisonments sont à rédiger dans des cellules-texte MARKDOWN/LATEX alors que les calculs sont à faire en SAGE.

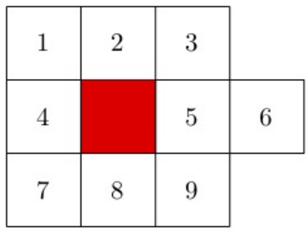
Exercice 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Montrez que $1 \in \mathrm{Sp}(M)$.

Exercice 2. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $d \in \mathbb{R}^n$ un vecteur stochastique. Montrez que Md est un vecteur stochastique. Déduisez-en qu'une chaîne de Markov est une suite de vecteurs stochastiques.

Exercice 3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique regulière. Montrez que $M_{i\bullet} \neq \mathbf{0}$ Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Indication: contraposition.

Exercice 4. Le fameux mathematicien russe Andrey Markov (1856-1922)

vivait dans une maison sont le sous-sol comptait 9 pièces:



Dans ce sous-sol vivait une souris hyperactive dont les déplacements empêchaient Andrey de dormir, ce qui lui donnait du temps pour réfléchir... Comme il ne pouvait pas lire dans les pensées du rongeur, il élabora une théorie probabiliste sur les déplacements de ce dernier.

1. Déterminez la matrice stochastique M représentant les changements de pièce de la souris. $M_{i,j}$ est la probablité que la souris passe de la pièce $\#j$ à la pièce $\#i$), sachant que la souris
   i. ne peut pas passer d'une pièce à l'autre par un *coin*;
   ii. les changements sont *équiprobables* (c'est à dire les changements de pièce physiquement possibles ont la même probabilité).
2. Supposons que Andrei a emmenagé le 13/4/1882 et que la souris change (ou pas) de pièce précisément à minuit. Quelle est la probabilité que la souris se trouve dans la pièce $\#i$ le 28/4/1882. Justifiez votre calcul. Indication: la loi de probabilité conditionelle.
3. Montrez que M est régulière.
4. Calculez le vecteur d'état stationnaire. Indication: Perron-Frobenius I & II.