MATH 603, Feuille 2
Systèmes différentielles et exponentielle de matrices

Exercice 1. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Résoudre le système différentiel $X' = A\,X + B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

(1) On suppose que A est antisymétrique et on considère une solution réelle du système différentiel $X' = AX$. Soit $Y = {}^tXX = ||X||^2$. Montrer que Y est une constante.

(2) On suppose que la norme de toute solution réelle du système différentiel $X' = AX$ est constante.

(a) Justifier que la matrice $B = {}^tA + A$ est diagonalisable.

(b) Montrer que ${}^tXBX = 0$.

(c) Soient λ une valeur propre de B et X_0 un vecteur propre associé à λ. Montrer que $\lambda = 0$. *On pourra considérer X une solution réelle du système de Cauchy : $X' = AX$ et $X(0) = X_0$*

(d) En déduire que A est antisymétrique.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = A + B$.

(1) Déterminer e^A, e^B, e^V et e^C.

(2) A-t-on $e^A\,e^B = e^C$?

Exercice 6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Résoudre le problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$ avec $X(0) = X_0$ et déterminer e^A.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ puis en déduire e^A.

Exercice 8.

(1) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$, et la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Résoudre le problème de Cauchy $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ en posant
$$v = x + z,\ w = x - z,\ r = y + u, s = y - u.$$

(2) En déduire e^A. On ne calculera pas les valeurs propres de A.

Exercice 9. On considère les matrices réelles suivantes
$$A = \begin{pmatrix} -9 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la matrice e^{tT}.

(2) En remarquant que $PTP^{-1} = A$, déterminer la solution du système différentiel $Y' = AY$ vérifiant $Y(0) = Y_0$.

Exercice 10. On considère les matrices suivantes
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer $(A + I_3)^3$. En déduire $\mathrm{e}^{t(A+I_3)}$ puis e^{tA}.

(2) Déterminer la solution du système différentiel $Y'(t) = A\,Y(t)$ vérifiant $Y(0) = Y_0$.

(3) Déterminer la solution générale du système différentiel $Y'(t) = A\,Y(t) + B(t)$.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et D la matrice diagonale avec les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale.

(1) Construire un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré plus petit que n, tel que $Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

(2) Montrer que $e^D = Q(D)$ et en déduire que $e^A = Q(A)$.

Exercice 12. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & -t^2 \\ t^2 & \sin(t) \end{pmatrix}$.

(1) En remarquant que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \sin(t)\ I_2 + t^2\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer $\mathrm{e}^{A(t)}$.

(2) Vérifier, par un calcul, que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^{A(t)})' = A'(t)\ \mathrm{e}^{A(t)}$.

(3) Justifier, sans faire de calcul, le résultat précédent.

(4) On considère le système différentiel $(G) \left\{ \begin{array}{lcccc} x' & = & \cos(t)\ x & - & 2t\ y \\ y' & = & 2t\ x & + & \cos(t)\ y. \end{array} \right.$

Expliquer pourquoi (G) admet, pour toute condition initiale, une solution globale unique sur $\mathbb{R}$. Déterminer la solution générale de (G).

Exercice 13. On considère le système différentiel réel du premier ordre défini sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{lcccccc} x' & = & \dfrac{1}{t}\ x & - & 2t\ y & + \cos(t^2), \\ y' & = & 2t\ x & + & \dfrac{1}{t}\ y & + \sin(t^2). \end{array} \right.$$

On note (E_0) le système différentiel homogène associé à (E).

(1) On définit la fonction complexe z par : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$. Montrer que (E_0) est équivalent à une équation différentielle linéaire complexe en z. En déduire la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Déterminer la solution générale du système différentiel (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14. On considère le système différentiel (E)

$$x' = (3t-1)x + (t-1)y,$$
$$y' = -(t+2)x + (t-2)y.$$

(1) Vérifier que (E) admet une solution non triviale de la forme $Y_1(t) = (\psi(t), -\psi(t))$ où ψ est une fonctions scalaire à déterminer.

(2) Déterminer une solution Y_2 de (E) indépendante de Y_1 de la forme $Y_2(t) = \phi(t)Y_1(t)+(0, z(t))$ où ϕ et z sont deux fonctions scalaires à déterminer.

(3) En déduire la solution générale de (E).

Exercice 15. Pour $t > 0$, on considère $A(t) = \begin{pmatrix} 2t + \dfrac{1}{t} & 0 & \dfrac{1}{t} - t \\ t - \dfrac{1}{t} & 3t & t - \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{2}{t} - 2t & 0 & \dfrac{2}{t} + t \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^3 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer les valeurs propres de A puis une matrice de passage P indépendante de t et une matrice $D(t)$ diagonale telles que $A(t) = PD(t)P^{-1}$.

(2) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, le système $Z' = D(t)Z$.

(3) En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$, du système $Y' = A(t)Y + B(t)$.