MATH 603, Feuille 1
Équations différentielles d'odre 1

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' - 4y = 3$.
(2) $y' + y = \sin(t)$.
(3) $y' + y = (t^2 - 2t + 2)e^t$.
(4) $y' + y = \cos(t)\, e^{-t}$.
(5) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $(1 + t^2)\ y' + 2\,t\,y = e^t + t$.
(2) $\cos(t)\,y' - \sin(t)\ y = 1, \quad t \in]-\pi/2, \pi/2[$.
(3) $y' - \dfrac{2}{t+1}\,y = (t+1)^2$.
(4) $t^2\ y' + (1 - t)\ y = 1$.
(5) $\sqrt{|t|}\,y' - y = 1$.
(6) $t\ y' - y = \dfrac{2t+1}{t^2+1}$.
(7) $(t+1)\ y' + y = (t+1)\sin(t)$.

Exercice 3. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

(1) $y' + \dfrac{1}{2}\ y = \dfrac{1}{2}(t-1)y^3$.
(2) $ty' + y - ty^3 = 0$.

Exercice 4. Résoudre les équations de Ricatti suivantes :

(1) $t^2\ (y' + y^2) = t\ y - 1$. Vérifier que $\dfrac{1}{t}$ est solution particulière.
(2) $(1 - t^3)\ y' + t^2\ y + y^2 - 2t = 0$. Vérifier que t^2 est solution particulière.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $t^2\ y' = e^y$.
(2) $y' + 1 = e^t\,e^y$. On pourra poser $z = y + t$.
(3) $ty'\ (2y - t) = y^2$. On pourra poser $z = \dfrac{y}{t}$ pour t différent de 0.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle

$$(F) \;\; y' = 2\,|t|\,\mathrm{e}^{t^2-y}.$$

(1) Soient $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Peut-on affirmer l'existence d'une solution de (F) vérifiant $y(t_0) = y_0$? Si oui, cette solution sera-t-elle unique ?

(2) Montrer que les solutions de (F) sur $[0, +\infty[$ sont de la forme $y(t) = \ln(\mathrm{e}^{t^2} + C)$ où $C \in \mathbb{R}$.

(3) Déterminer les valeurs de C pour lesquelles la solution de (F) est globale sur $[0, +\infty[$.

(4) Déterminer les solutions maximales de (F) sur $[0, +\infty[$.

(5) Déterminer les solutions maximales de (F) sur $]-\infty, 0]$.

(6) Déterminer les solutions maximales de (F) sur $\mathbb{R}$.

(7) Déterminer la solution de (F) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 7. On considère le système de Cauchy réel suivant :

$$(PC) \;\; \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & t\,\cos(y), \\ y(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

(1) Montrer que (PC) admet une unique solution globale notée y.

(2) Déterminer l'expresssion analytique de la solution y.