MATH603, TP1

Université Savoie-MtBlanc, année 2023-2024

K. Worytkiewicz

1 Environment.

Votre environnement de travail est SAGE tournant sur des *notebooks* Jupyter. Vous trouverez docs et matériaux relevants sur MOODLE.

1.1 SAGE sur CoCalc

Pour mémoire vous allez sur `cocalc.com` et vous vous loggez sur votre compte (ou vous en créez un si vous n'en avez plus ou s'il est périmé). Les personnes pour qui c'est nouveau sont priées de se manifester.

1.2 SAGE sur votre ordi

C'est clairement préférable, surtout si vous avez un peu l'habitude d'installer des logiciels. Les personnes qui souhaitent se lancer dans l'aventure peuvent me contacter pour des renseignments supplémentaires et support.

2 Indications et consignes.

Vous êtes encouragés à travailler par binômes. Les travaux sont à déposer sous forme de notebook Jupyter dans la boîte de dépôt sur Moodle, prévue à cet effet. Il est *impératif* que vos noms (ou nom si vous travaillez solo) soient

1. affichés dans la première cellule texte;
2. fassent partie du nom de votre fichier notebook, formatté comme suit:

   `dupont_dupond_math603_tp1.ipynb`

   (en supposant que les noms du binôme sont Dupont et Dupond..).

Soignez les commentaires, c'est une partie très importante du devoir (et influe sur votre note).

3 Tutoriel.

Il vous faut en premier lieu télécharger le tutoriel. Comme vous le constaterez, le nom du fichier contenant le notebook est `m603_tp1_tutoriel.ipynb`. Le processus correct est:

1. téléchargez le notebook dans un répértoire de votre votre espace de travail ou sur votre ordi *directement* à partir du lien (déconseillé de clicker puis sauvegarder depuis votre navigateur, car potentiels problèmes d'accents);
2. si vous avez SAGE sur votre ordi vous avez fini, autrement il vous faut créer un *nouveau projet* dans votre espace CoCalc (c'est votre choix comment vous l'appellez).
3. enregistrer le notebook dans ce nouveau projet de votre espace CoCalc (*upload*).

Étudiez et comprenez bien le tuto, toutes les techiques nécéssaires pour ce TP y sont illustrées. Consultez la doc et/ou expérimentez avant de solliciter une discussion.

4 Exercices.

Dans ce TP vous avez un certain nombre d'equadiffs (ou systèmes d'equadiffs) provenant des feuilles de TD #1 et #2, à résoudre analytiquement en SAGE. Pour chaque equadiff faites un plot de la solution pour au moins 3 différentes valeurs de la constante d'intégration C, puis commentez les résultats.

4.1 Équations différentielles d'ordre 1.

Exercice 1. Résolvez en SAGE les exos 1(1)-1(5) de la feuille de TD #1.

Exercice 2. Résolvez en SAGE les exos 2(1), 2(3), 2(4), 2(6),2(7) de la feuille de TD #1.

Exercice 3. (Équations de Bernouilli)

Résolvez en SAGE les exos 3(1)-3(2) de la feuille de TD #1.

Exercice 4. (Équations de Ricatti)

1. Résolvez en SAGE l'exo 4(1) de la feuille de TD #1. Ici la solution analytique est retournée sous forme *implicite*, vous devrez donc en déduire une fonction de t (voir tuto).

2. Résolvez en SAGE l'exo 4(2) de la feuille de TD #1. Ici le solver natif de SAGE ne sait pas faire par défaut, il vous faut le switch `contrib_ode = True`. La solution de l'equadiff en question sera alors contenue dans une liste (dans ce cas une liste à un élément). Il vous faut donc extraire la solution puis son membre droit, comme au no précédent (par contre il n'y a pas de forme implicite ici, donc pas de `solve` à déployer).

Exercice 5. Résolvez en SAGE les exos 5(1)-5(2) de la feuille de TD #1. Ici on a un concentré des techniques décrites dans le tutotoriel.

4.2 Systèmes différentiels et exponentielle de matrices.

Exercice 6. Résolvez en SAGE les exos 1,2,5,6,7 de la feuille de TD #2.

Exercice 7. Résolvez l'exo 3 de la feuille de TD #2. Indication: comme SAGE ne sait pas le faire toute seule, résolvez le système homogène puis trouvez à la main une solution particulière.

Exercice 8. Résolvez en SAGE l'exo 8.1 de la feuille de TD #2 *directement* (c'est à dire sans faire les substitutions $v = x + z$ etc).

Exercice 9.

1. Écrivez une fonction `solver(A,x)` qui prend en arguments

   – une matrice $A \in \mathcal{M}_2$;

   – un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$

   et retourne une un couple (u_1, u_2) de *fonctions symboliques* qui sont une solution du système différentiel avec matrice-système A et vecteur de conditions initiales x.

2. Testez votre solver avec la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ (de l'exo 3 de la feuille de TD #2) et plottez la solution avec la fonction `plotter` du tutoriel.

Exercice 10. (Dynamique de couple) Nos amants génériques s'appellent Romeo et Juliette, mais ce ne sont pas forcément les mêmes que dans la pièce de Shakespeare:

- Romeo, c'est simple: plus Juliette l'aime plus son amour pour elle est fort;
- Juliette, c'est plus compliqué: aimer Romeo lui fait du bien du coup elle l'aime plus, mais elle réagit avec reserve quand l'amour de Romeo devient trop fort pour elle.

Appellons cette dynamique de couple *relation de type I*.

1. On peut modéliser une relation de type I avec un système linéaire de matrice $C \in \mathcal{M}_2$ tel que $C_{0,0} = 0$. Expliquez le raisonment. Exprimez une forte attraction mutuelle en termes de conditions initiales.
2. Étudiez le cas $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ avec conditions initiales $[4, 6]$.
3. Trouvez des exemples de type I avec une dynamique moins extrême.
4. Modélisez des relations (autres que de type I) décrites par les slogans:
   a) les opposés s'attirent;
   b) l'amour mutuel eternel.