TP2 Math603

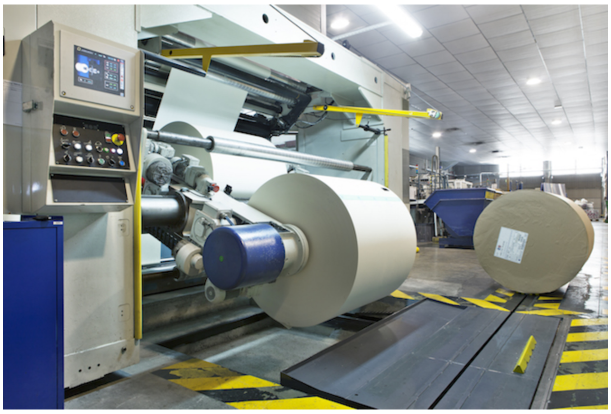
Université Savoie MtBlanc, année 2023-2024

PAR K. WORYTKIEWICZ

14 avril 2025

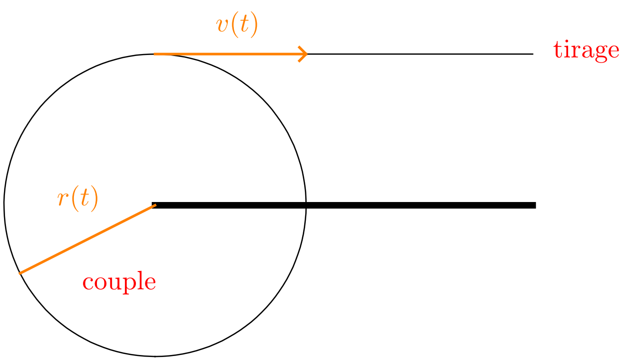
1 La Méthode d'Euler au XXIe siècle

Imprimer un journal à grand tirage requiert nombre de solutions technologiques, entre autres la gestion des rouleaux de papier pouvant peser jusqu'à 10t:



Le papier est déroulé, imprimé puis mis en paquets par une série de machines aux proportions gigantesques. Le premier maillon de la chaîne est le *dérouleur*, alimenté comme le nom le suggère par un rouleau de papier. Un problème majeur pouvant survenir à cet endroit est la rupture du matériau, entraînant un arrêt d'urgence. Afin d'éviter ce problème, il est requis de maintenir le papier sous tension constante.

Schématiquement, on a la situation suivante



La *vitesse tangentielle* $v(t)$ est une quantité connue à tout instant t, reglée manuellement et/ou en programmant le contrôleur du moteur réalisant le tirage du papier. Elle est nulle à l'instant $t = 0$ mais n'est en général pas constante durant le processus. Par contre, le couple nécéssaire à une tension admissible du papier doît être re-ajusté *continuellement*. Ce n'est bien sûr pas possible littéralement, la solution est donc de travailler en *temps discret*: on choisit un *intervalle d'échantillonage* Δt et le temps discret en question est donné par l'ensemble $T := \{n\Delta t | n \in \mathbb{N}\}$. Chaque instant $t \in T$ correspond à une mise à jour du couple en question. Afin de régler le contrôleur du moteur exerçant ce couple, il faut connaître le rayon $r(t)$ pour $t \in T$.

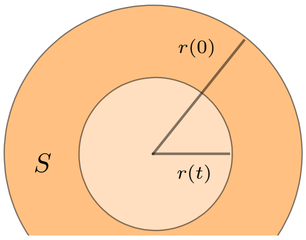
Déterminer $r(t)$ pourraît théoriquement se faire au moyen d'un capteur mesurant cette quantité. Mais il n'existe (toujours) pas de technologie à la fois suffisement précise et au coût suffisement bas à déployer dans ce contexte. Il faut donc *calculer* $r(t)$ *en temps réel*, c'est à dire pour $t \in T$ en respectant l'intervalle d'échantillonage Δt.

Exercice 1.

1. Soit ε l'épaisseur moyenne du papier. Montrez qu'on a

$$r(t) \quad = \quad \sqrt{r(0)^2 - \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^t v(\tau)d\tau} \qquad (*)$$

   Indication: calculez la surface de l'anneau S



   de deux manières différentes.

2. Déduisez de $(*)$ une suite récurrente

$$\begin{aligned} r_0 &:= r(0) \\ r_{n+1} &:= f(r_n) \end{aligned}$$

   en interpolant l'intégrale pour $t \in T$ avec Δt arbitraire mais fixe.

3. Estimez le temps *d'un pas de calcul* de $r(t)$ de votre suite récurrente, en termes de *cycles de processeur*. Dans ce but vous supposerez une architecture x87 (toujours utilisée pour les systèmes embarqués). Une implementation « moderne » comme l'AMD Athlon K7 (les premiers modèles datent de 1999) performe en virgule flottante comme suit

Instruction	Fonction	#Cycles
FADD	Addition	4
FMUL	Multiplication	4
FDIV	Division	$11 - 25$
FSQRT	Racine	35
FLD	Lecture	2
FST	Écriture	2

   (ce sont les instructions relevantes pour cet exo). Quel est votre intervalle d'échantillonnage minimum si votre contrôleur est le K7 vintage 1999, sachant que ce dernier affiche une *fréquence d'horloge* de 500 - 700 MHz (donc 500-700 millions de cycles par seconde).

Exercice 2.

1. Déduisez de $(*)$ l'équation différentielle

$$\frac{dr(t)}{dt} \quad = \quad -\frac{\varepsilon v(t)}{2\pi r(t)} \quad (**)$$

Indication: dérivez les deux côtés de ($*$) et effectuez une substitution évidente. La fonction donnée par ($*$) sera par construction une solution de ($**$).

2. Concevez un solver Euler de ($**$).

3. Estimez le temps *d'un pas de calcul* de $r(t)$ de votre solver Euler en termes de cycles du AMD Athlon K7. Quel est votre intervalle d'échantillonnage minimum?

4. Comparez vos résultats avec la méthode directe de l'exo 1.

5. Implementez et testez un prototype de votre solver.

2 Méthodes Runge-Kutta

Exercice 3.

1. Trouvez une structure de données accomodant un tableau de Butcher.

2. Écrivez une fonction `rk_consistence` qui prend un tableau de Butcher en argument et retourne un booléen renseignant sur sa consistance.

3. Écrivez un solver Runge-Kutta, c'est à dire une fonction `rk` qui prend comme arguments

   – `t0,t1` l'intervalle d'approximation;

   – `h` le pas de maillage;

   – `bTab` un tableau de Butcher;

   – `f` le champ de tangentes donné par l'équa diff $f' = f(t, y)$

   et qui retourne un data set. Les ambitieuses/ambitieux peuvent tenter une solution élégante et écrire un *générateur de solver* qui construit un solver pour un tableau de Butcher donné.

4. Inspecter directement un data set n'est pas vraiment une option. Écrivez un plotter qui le visualise.

Exercice 4. (Zombie Apocalypse) Une fois de plus, les zombies attaquent. Supposons les fonctions

– $h(t)$ representant le nombre d'humains;

– $e(t)$ representant le nombre d'éliminé.e.s;

– $z(t)$ representant le nombre de zombies

à l'instant t. Précisons que les éliminé.e.s sont

– les zombies morts (c'est possible mais il faut que leur cerveau soit détruit);

– les humains morts du fait des zombies (ces personnes peuvent donc ressusciter en tant que zombies);

– les humains morts d'une mort naturelle ou dans des accidents (les zombies n'y sont pour rien).

On suppose constants

- Γ le taux des naissances des humains;
- δ la proportion des humains decedés de causes autres qu'une attaque de zombies;
- ζ la proportion des humains qui peuvent ressusciter en tant que zombies;
- ε la proprtion des zombies éliminés par destruction du cerveau;
- ι la proportion de humains « zombifiés ».

On peut modéliser une telle apocalypse zombie par un système différentiel 3×3 en inconnues h, e et z et constantes Γ, δ, ζ, ε et ι. Ce système ne sera pas linéaire car on aura des termes non-linéaires correspondant aux interactions entre humains et zombies:

- un humain éliminant un.e zombie par destruction du cerveau ($\pm\varepsilon hz$);
- un zombie infectant un humain ($\pm\iota hz$).

1. Modélisez cette apocalypse zombie.
2. Spécialisez votre solver/plotter rk4 générique de l'exo précédent à ce système différentiel.
3. Utilisez votre solver/plotter pour trouver des constantes Γ, δ, ζ, ε et ι telles que
    a) les zombies gagnent et la population humaine est anéantie;
    b) lez zombies gagnent mais les populations humaine et zombie sont anéanties;
    c) lez humains gagnent mais les populations humaine et zombie sont anéanties;
    d) les humains gagnent et la population zombie est anéantie.

3 Précision arbitraire

Exercice 5. Supposons un problème de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Écrivez une fonction SAGE qui calcule l'approximation Taylor d'ordre n du problème de Cauchy en exploitant la substitution symbolique. Testez votre code avec

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ &= t+y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$