

# Análisis de dipolos y el fenómeno de polarización

Monzón, J.

Marroquín, P.

## I. RESUMEN

El principal objetivo de estudio fue modelar y analizar gráficamente distintas situaciones electrostáticas que involucran dipolos y polarización. Se calcularon analíticamente las expresiones matemáticas requeridas para los escenarios de estudio en una bitácora paralela y se implementaron programas de simulación en lenguaje Python para representar gráficamente los resultados. Tras el análisis de resultados, para los casos de polarización, se determinó que la densidad superficial de carga ligada en una superficie interna siempre presenta un valor mayor y de signo opuesto a la densidad externa de manera que se equilibre la carga neta. En lo referente al campo y desplazamiento eléctrico en los medios dieléctricos se determinó que para los casos analizados, siempre se encontró una tendencia de disminución a medida que se aleja del centro de la distribución. Por otra parte, en lo referente los dipolos, se determinó que el campo eléctrico y potencial eléctrico mostraron comportamientos particularmente sobresalientes pero siempre fundamentados acorde a los parámetros físicos y matemáticos de la teoría.

## II. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la electrostática, suele plantearse como objetivo principal determinar la fuerza que actúa sobre una carga de prueba debido a una distribución de carga específica. Estas distribuciones pueden ser cuerpos que se encuentran en el espacio que cuentan con carga eléctrica propia, o bien, cuerpos que debido a algún fenómeno externo se comportan como si estuviesen cargados.

Para determinar dicha fuerza, puede emplearse una variedad de métodos, principalmente mediante el campo eléctrico y el potencial eléctrico. Estos pueden ser calculados de diversas formas y, para configuraciones poco accesibles, suele utilizarse la expansión multipolar para realizar aproximaciones del potencial. Esta técnica suele basarse en una suma de infinitos términos. En particular, el segundo término de la expansión, denominado dipolo, es de suma relevancia de estudio dado que puede asociarse a los dipolos eléctricos, los cuales por su cuenta pueden constituir distribuciones de carga con características particulares.

Cuando el estudio de un sistema implica el análisis de dichos fenómenos a nivel macroscópico se requiere la implementación de la polarización. De manera que a través de ésta puedan estudiarse los efectos

de los campos eléctricos en las cargas eléctricas de los materiales de forma simplificada. Tales fenómenos ocurren en materiales conocidos como dieléctricos. A partir de dicho análisis se derivan conceptos relevantes de investigación tales como la carga ligada de polarización, el desplazamiento eléctrico y el estudio de dieléctricos lineales.

## III. OBJETIVOS

### Generales

- Realizar el análisis numerico y grafico de sistemas de dipolos, multipolos y arreglos de medios dieléctricos.

### Específicos

- Realizar análisis gráficos de los campos eléctricos y potenciales de dipolos eléctricos.
- Modelar medios polarizados a través de densidades de carga ligada de polarización.
- Analizar cómo la polarización de un medio dieléctrico afecta a un campo eléctrico.

## IV. MARCO TEÓRICO

La expansión multipolar es una herramienta de alta versatilidad dado que permite aproximar potenciales a largas distancias de una distribución específica con relativa facilidad. Matemáticamente, se expresa a esta expansión en términos de potencias de  $1/r$ , el inverso de la distancia desde el origen hasta el punto de prueba:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_V \frac{(r')^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \alpha) \rho(\vec{r}') dV' \quad (1)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  [1]. Las variables primadas corresponden a la distribución, y las no primadas al punto de prueba. Se hace énfasis en el hecho que esto solo aplicará al estar muy alejado de la configuración debido que para la deducción de (1) es necesaria una expansión binomial cuya convergencia dependerá de dicho factor. Para puntos que no cumplan con esta condición de distancia, se requiere la integración de cada elemento de carga de la distribución para hallar el potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2)$$

En particular, en (1) cuando  $n = 1$  se tendrá el término dipolar de la expansión. En sí, la contribu-

ción de dicho término suele resumirse en el momento dipolar  $\vec{p}$  de la distribución. La magnitud  $\vec{p}$  puede explorarse para distintas configuraciones de carga, sin embargo la más común es el dipolo eléctrico perfecto [1]. Todo ello surge a partir del concepto de dipolo eléctrico *real*, que consiste de dos cargas de igual magnitud  $q$  y signo opuesto separadas una distancia  $d$  conocida, cuando se toman los límites  $q \rightarrow \infty$  y  $d \rightarrow 0$ . Para un dipolo perfecto [2], el potencial vendrá dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3)$$

Y para hallar su campo, puede utilizarse la relación:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (4)$$

A partir de (3), (4) y con base en el principio de superposición, es posible calcular tanto el potencial como el campo eléctrico de configuraciones conformadas por más de un solo dipolo eléctrico perfecto que no necesariamente se encuentre en el origen del sistema de coordenadas, o bien distribuciones que consisten de un solo dipolo perfecto cuya orientación no es la misma que la del eje  $z$  [1].

La materia está conformada de moléculas eléctricamente neutras con configuraciones aleatorias dentro de los materiales. Cuando las moléculas de un material no conductor están en presencia de un campo eléctrico, se genera un minúsculo desplazamiento de las cargas eléctricas de las moléculas de manera que se induce un momento dipolar eléctrico sobre éstas. Por consiguiente cada una de éstas se comporta como un dipolo eléctrico [2]. Un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico experimenta un torque que hace rotar el dipolo en la dirección del campo eléctrico. Dicha rotación alinea las moléculas dentro del material. Tal alineación deja una carga superficial neta en las fronteras del material. A dicha carga se le denomina carga inducida o carga ligada de polarización. Cuando un material alcanza dicho estado se dice que es un material polarizado. Todo material aislante que sea susceptible a efectos de polarización se denomina dieléctrico [2].

La polarización se genera por el comportamiento de moléculas, es decir, de fenómenos microscópicos. Sin embargo, abordar la polarización desde una perspectiva microscópica conlleva un alto grado de complejidad. Entonces para hacer referencia al fenómeno de manera macroscópica se define una magnitud denominada *polarización* [1], la cual es una magnitud vectorial que es igual al momento dipolar total por unidad de volumen

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_{tot}}{V}. \quad (5)$$

Cuando un material está polarizado, implica que presenta una carga inducida en su superficie [1]. Dicha

densidad de carga ligada superficial de polarización se define como

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}. \quad (6)$$

Asimismo, en la parte interna del material, se genera una densidad volumétrica de polarización de la forma

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}. \quad (7)$$

Adicionalmente se introduce el concepto de *desplazamiento eléctrico* [1] el cual se define como

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}. \quad (8)$$

Por otra parte, cabe mencionar la polarización en un dieléctrico es un efecto producido específicamente debido a la presencia de un campo eléctrico. Por lo cual ante la ausencia de éste, el material regresa a su estado natural [1]. Ello indica que entre el campo eléctrico y la polarización existe una relación de proporcionalidad. En algunos materiales dicha proporcionalidad está establecida de forma particular, éstos se denominan dieléctricos lineales y están descritos por la relación

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_o \vec{E}. \quad (9)$$

donde  $\chi_e$  representa la susceptibilidad eléctrica, la cual es una constante positiva adimensional propia de cada material [1]. Por consiguiente en dichos materiales es posible representar

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (10)$$

donde  $\epsilon_r$  se conoce como constante dieléctrica. De manera que

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_o \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (11)$$

donde  $\epsilon$  se conoce como permitividad dieléctrica del medio [1].

## V. MARCO METODOLÓGICO

Se implementaron programas de simulación en lenguaje Python empleando las librerías Matplotlib y Numpy para la elaboración de gráficas y manejo de arreglos numéricos. Se elaboró una bitácora (véase anexos) de los cálculos y resoluciones analíticas de los problemas y escenarios de estudio. Las expresiones resultantes se citan a continuación.

En lo que se refiere a dipolos, se trabajó en primer lugar con momentos dipolares orientados en la dirección de los ejes de coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y  $z$ . En anexos, las expresiones (40) a (45) obtenidas a partir de (3) y (4) describen su potencial y campo eléctrico. Por otro lado, se tuvo un dipolo que contaba con un ángulo  $\alpha$  respecto del eje  $z$ . Utilizando las mismas expresiones que el caso anterior, se obtuvieron las ecuaciones (38) y (39) para su campo eléctrico y su potencial con  $\beta = 0$ .

Luego de esto, se determinó tanto el potencial como el campo eléctrico de 2 dipolos separados una distancia  $a$  paralelos al eje  $z$ . El cálculo se

basó en aplicar a cada dipolo individualmente las expresiones (3) y (4) y luego se empleó el principio de superposición para obtener el resultado final observado en las ecuaciones (46) a (51) del anexo.

A continuación, para estas 3 configuraciones (tomando los dipolos orientados en x, y & z como una sola) se graficó tanto potencial como campo eléctrico en el espacio. Para el potencial se utilizó la librería `plotly.graph_objects` dado que esta permite realizar las gráficas de superficies equipotenciales. Para el campo, se utilizó `mpl.toolkits.mplot3d` para graficar campos vectoriales.

Por último en la sección de dipolos, se trabajó con una distribución cuya densidad de carga fue:

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta \quad (12)$$

Primero fue necesario realizar una expansión multipolar de esta densidad y determinar qué términos de la misma sobreviven. De esto, se obtuvo que el potencial a largas distancias fue (52).

Adicionalmente, se deseó conocer la expresión para el potencial cerca del origen. Debido a esto, se empleó la expresión (2) expandiendo el denominador de la integral, y se demostró que (53) representa el potencial a cortas distancias del origen.

Con esta información, se trabajaron únicamente gráficas de potencial eléctrico para la distribución, utilizando las ya mencionadas librerías y técnicas.

En lo referente a la análisis de medios dieléctricos, se supuso un cilindro dieléctrico muy largo de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  con una polarización de la forma

$$\vec{P} = ke \frac{-s^2}{\alpha o} \quad (13)$$

tal que  $k = 10^{-6} C/m^2$ ,  $a = 4 m$  y  $b = 8 m$ .

A partir de ello se determinaron las densidades de carga ligada superficial y volumétrica resultando en las expresiones (15), (16) y (17). Y se dedujo que la carga neta de polarización es cero en la expresión (21). Adicionalmente se determinó y graficó el campo eléctrico en función de la distancia radial respecto del eje de simetría de acuerdo con las expresiones (18), (19) y (20).

Por otra parte, se supuso una esfera conductora de carga  $Q$  con un radio  $a$ . Dicha esfera es rodeada por un cascarón esférico de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  hecho de un material dieléctrico lineal de constante dieléctrica  $\epsilon_r$ . Dicho cascarón es rodeado por otro cascarón esférico dieléctrico de radio interno  $b$  y radio externo  $2b$  cuya polarización está dada por

$$\vec{P} = -kr\hat{r} \quad (14)$$

tal que  $Q = -1 \mu C$ ,  $a = 2,23 \times 10^{-4} m$ ,  $b = 4,46 \times 10^{-4} m$  y  $\epsilon_r = 2,28$  suponiendo benzeno como

medio.

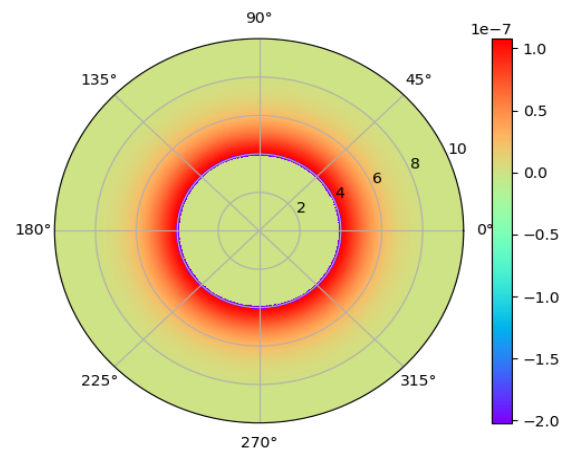
Se determinaron las expresiones correspondientes al desplazamiento eléctrico en cada una de las regiones. Siendo éstas: (22) para la región  $0 < r < a$ ; (24) para la región  $a \leq r < b$ ; (33) para la región  $b \leq r \leq 2b$  y (35) para la región  $r > 2b$ . Asimismo, se determinaron las expresiones correspondientes al campo eléctrico en cada una de las regiones. Siendo éstas: (23) para la región  $0 < r < a$ ; (25) para la región  $a \leq r < b$ ; (34) para la región  $b \leq r \leq 2b$  y (36) para la región  $r > 2b$ . Y se graficaron ambas magnitudes con respecto a la distancia radial del centro de la esfera.

De igual forma, se determinaron las expresiones correspondientes la carga ligada superficial interna y externa de cada esfera. Para el cascarón dieléctrico lineal se dedujo (28) para la superficie interna y (29) para la superficie externa. Para segundo el cascarón dieléctrico se dedujo (30) para la superficie interna y (31) para la superficie externa. Y se determinaron las cargas volumétricas de polarización siendo (27) para el cascarón dieléctrico lineal y (32) para el segundo cascarón dieléctrico.

## VI. RESULTADOS

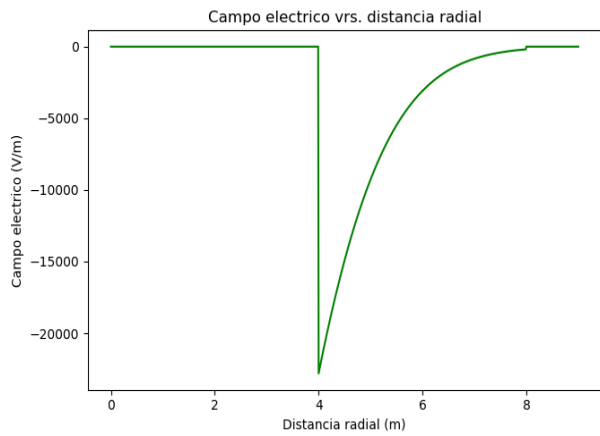
Véase anexos para la deducción referente a las expresiones empleadas para la elaboración de los siguientes gráficos.

### Problema: Dieléctrico cilíndrico

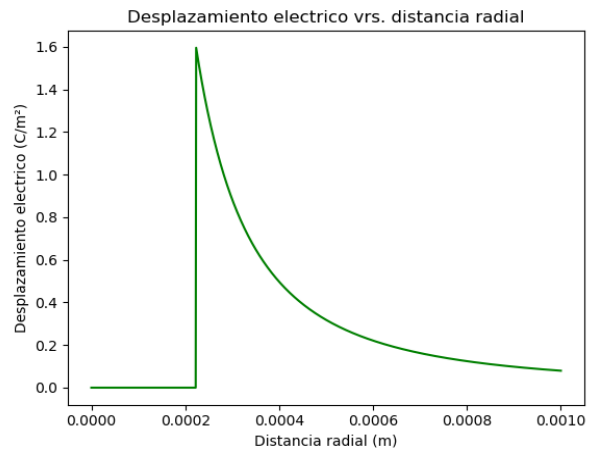


**Figura 1.** Mapa de color densidades de carga ligada en cilindro dieléctrico. Véase expresiones (15), (16) y (17) de acuerdo a la región.

Se determinó que la carga neta de polarización para la distribución fue  $0 C$ , véase expresión (21).

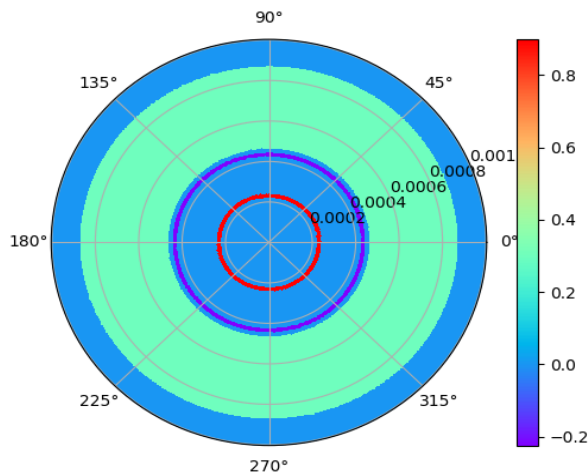


**Figura 2.** Gráfico campo eléctrico en función de distancia radial en cilindro dieléctrico. Véase expresiones (18), (19) y (20) de acuerdo con la región.

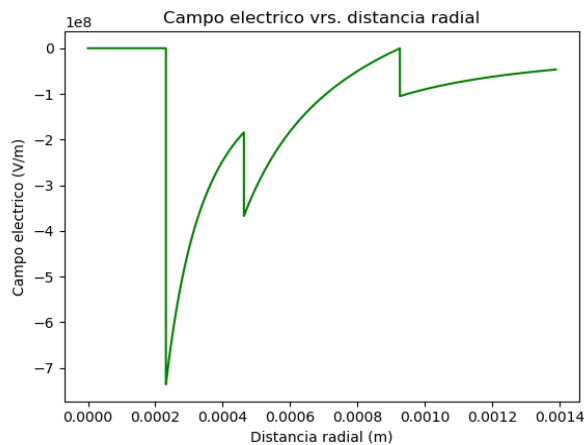


**Figura 5.** Gráfico desplazamiento eléctrico en función de distancia radial en cascarones esféricos dieléctricos. Véase expresiones (22), (24), (33) y (35) de acuerdo a la región.

### Problema: Dieléctrico esférico



**Figura 3.** Mapa de color densidades de carga ligada en cascarones esféricos dieléctricos. Véase expresiones (27), (28), (29), (30), (31) y (32) de acuerdo a la región.

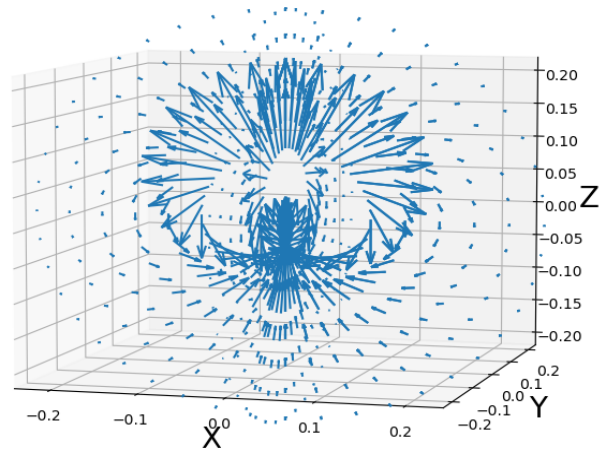


**Figura 4.** Gráfico campo eléctrico en función de distancia radial en cascarones esféricos dieléctricos. Véase expresiones (23), (25), (34) y (36) de acuerdo a la región.

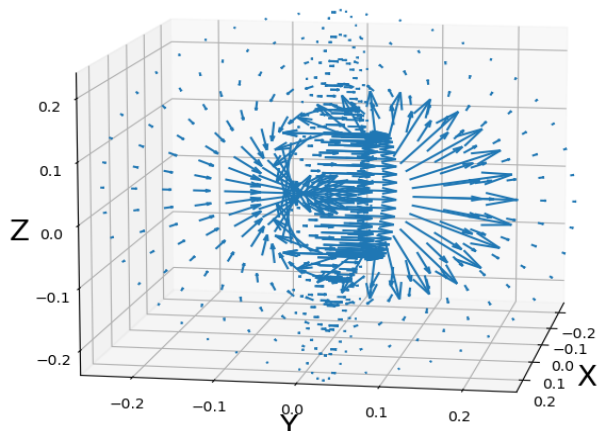
Se determinó que el valor requerido de  $b$  para obtener un valor de  $100 \text{ mV/m}$  fue de  $4,46 \times 10^{-4} \text{ m}$ , véase expresión (37).

### Campos vectoriales de dipolos

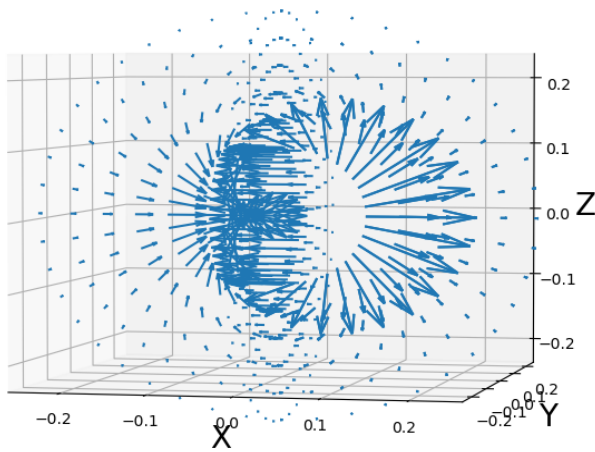
Problema: Dipolos orientados en la dirección de los ejes



**Figura 6.** Campo eléctrico dipolo orientado en el eje z. Véase expresión (41). Se utilizó  $p_0 = 0,09 \times 10^{-12} \text{ Cm}$ .

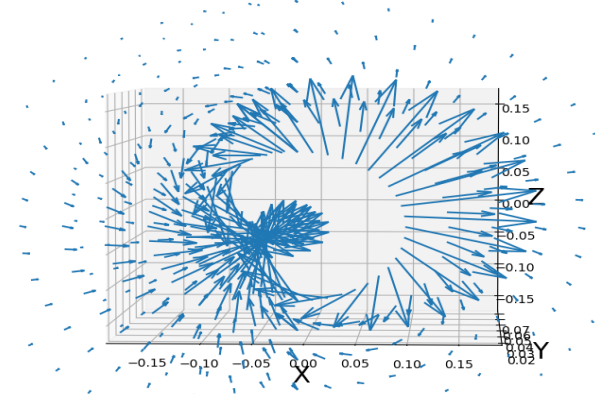


**Figura 7.** Campo eléctrico dipolo orientado en el eje y. Véase expresión (45). Se utilizó  $p_0 = 0,09 \times 10^{-12} \text{ Cm}$ .

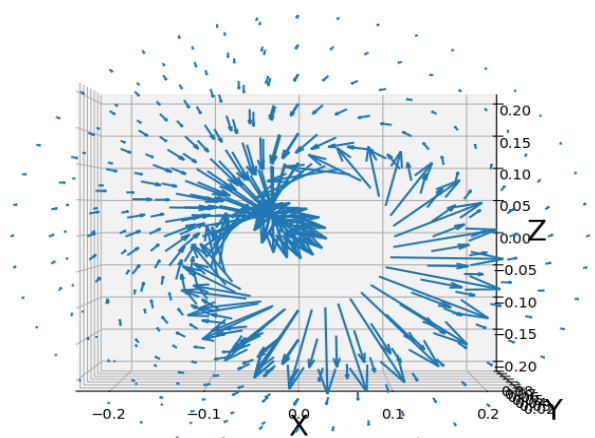


**Figura 8.** Campo eléctrico dipolo orientado en el eje  $x$ . Véase expresión (43). Se utilizó  $p_0 = 0,09 \times 10^{-12} Cm$ .

**Problema:** Dipolo con ángulo  $\alpha$  respecto del eje  $z$

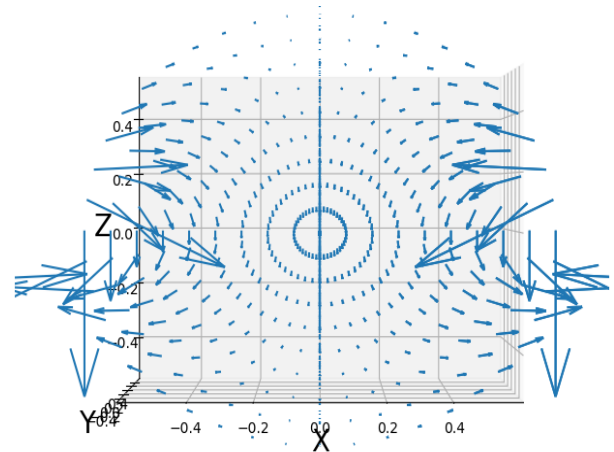


**Figura 9.** Campo eléctrico dipolo con ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  respecto al eje  $z$ . Véase expresión (39) con  $\beta = 0$ . Se utilizó  $p_0 = 0,09 \times 10^{-12} Cm$ .

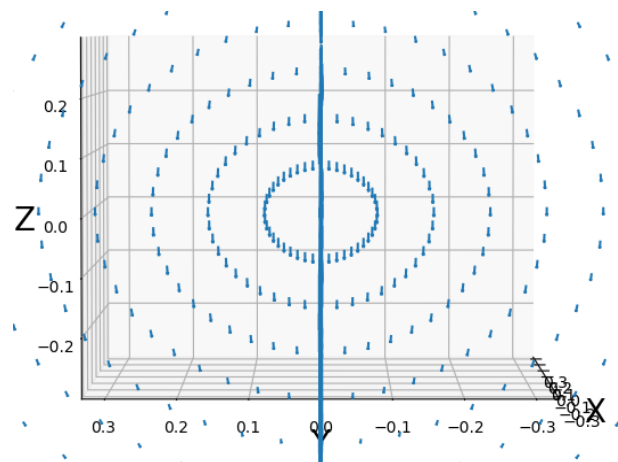


**Figura 10.** Campo eléctrico dipolo con ángulo  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  respecto al eje  $z$ . Véase expresión (39) con  $\beta = 0$ . Se utilizó  $p_0 = 0,09 \times 10^{-12} Cm$ .

**Problema:** Dipolos paralelos al eje  $z$  separados una distancia  $a$



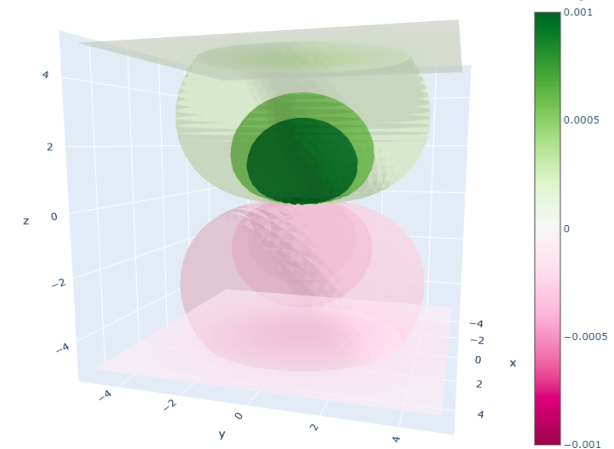
**Figura 11.** Campo eléctrico dipolos paralelos al eje  $z$  en plano  $xz$ . Véase expresiones (48), (49) y (51). Se utilizó  $p_1 = p_2 = 100 \times 10^{-12} Cm$ ,  $a = 2$ .



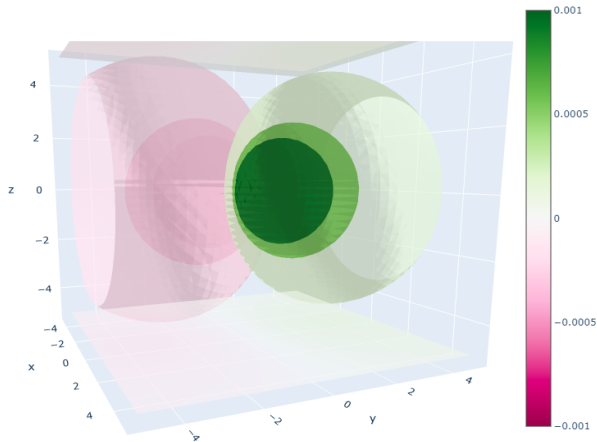
**Figura 12.** Campo eléctrico dipolos paralelos al eje  $z$  en plano  $yz$ . Véase expresiones (48), (49) y (51). Los parámetros fueron los mismos que la figura 11.

## Potencial de dipolos

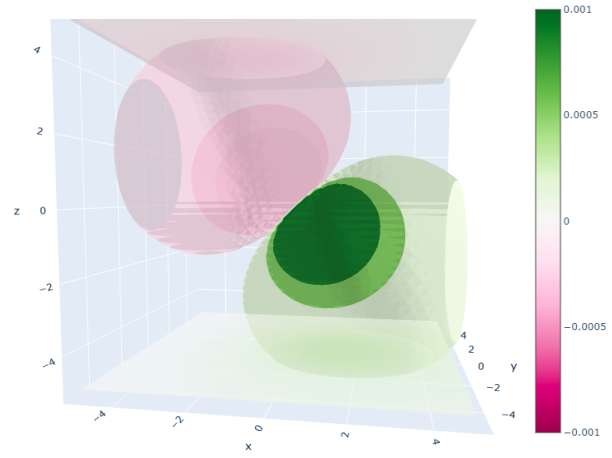
**Problema:** Dipolos orientados en la dirección de los ejes



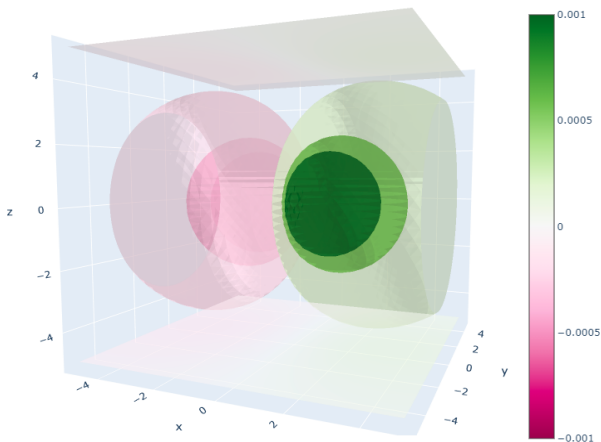
**Figura 13.** Superficies equipotenciales dipolo orientado en el eje  $z$ . Véase expresión (40). Se utilizó  $p_0 = 1 \times 10^{-12} Cm$ .



**Figura 14.** Superficies equipotenciales dipolo orientado en el eje  $y$ . Véase expresión (44). Se utilizó  $p_0 = 1 \times 10^{-12} Cm$ .

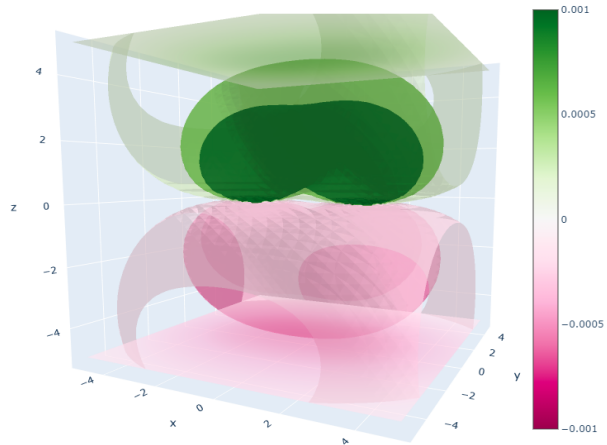


**Figura 17.** Superficies equipotenciales dipolo con ángulo  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  respecto del eje  $z$ . Véase expresión (38) con  $\beta = 0$ . Se utilizó  $p_0 = 1 \times 10^{-12} Cm$ .



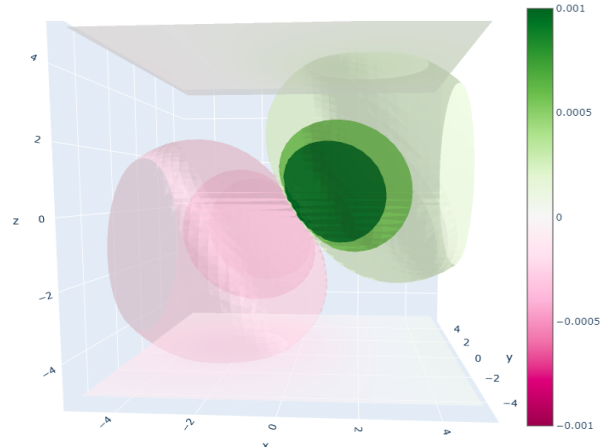
**Figura 15.** Superficies equipotenciales dipolo orientado en el eje  $x$ . Véase expresión (42). Se utilizó  $p_0 = 1 \times 10^{-12} Cm$ .

**Problema:** Dipolos paralelos al eje  $z$  separados una distancia  $a$



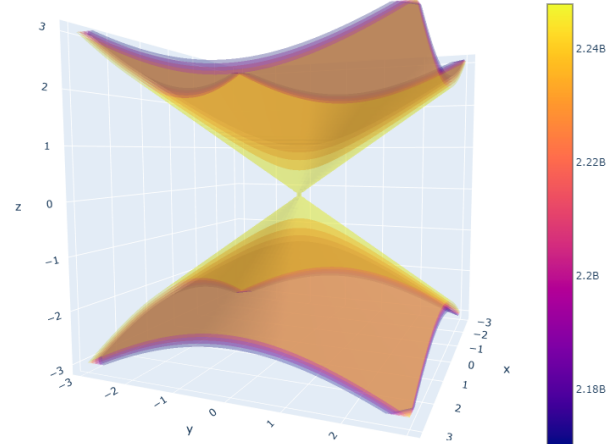
**Figura 16.** Superficies equipotenciales para dipolos paralelos al eje  $z$ . Véase expresiones (46), (47) y (50). Se utilizó  $p_1 = p_2 = 1 \times 10^{-12} Cm$  y  $a = 4$

**Problema:** Dipolo con ángulo  $\alpha$  respecto del eje  $z$



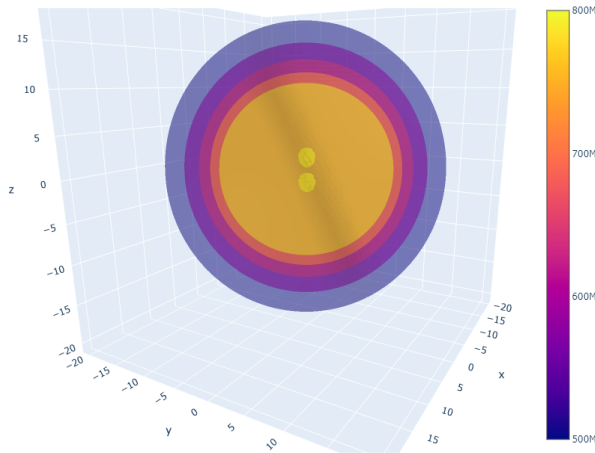
**Figura 16.** Superficies equipotenciales dipolo con ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  respecto del eje  $z$ . Véase expresión (38) con  $\beta = 0$ . Se utilizó  $p_0 = 1 \times 10^{-12} Cm$ .

**Problema:** Distribución dada de en car- (12)



**Figura 17.** Superficies equipotenciales cerca del origen para densidad (12). Véase expresión (53).





**Figura 18.** Superficies equipotenciales lejos del origen para densidad (12). Véase expresión (52)

## VII. Discusión de Resultados

Se realizaron diversos análisis con respecto de los resultados gráficos obtenidos. En lo referente a los problemas con polarización, en la figura 1 se observó que la carga superficial interna del cilindro fue la única región con un valor negativo. Esto dado que por propiedades de los dieléctricos la carga neta debe ser equivalente a cero, por lo que dicha densidad negativa equilibra el valor de la carga neta. Se determinó que la carga neta de polarización para la distribución fue  $0\text{ C}$ . Nótese que la densidad volumétrica inicia con un valor positivo que decae gradualmente hasta ser aproximadamente cero. Cabe mencionar que el valor de la densidad superficial externa es aproximadamente cero, de manera que no se observa una línea divisoria tan drástica como en la densidad interna. En lo referente a la figura 2, se observó que el campo eléctrico muestra un comportamiento negativo decreciente únicamente dentro de las dimensiones del cilindro. Cabe mencionar que de acuerdo con las propiedades de dieléctricos, se observa que el campo eléctrico es cero fuera de la región polarizada.

Por otra parte, en lo referente a la figura 3 se observó que al estar trabajando con un conductor con carga negativa, la densidad superficial del dieléctrico lineal es positiva en la parte interna y negativa en la parte externa. Nótese que por ser un dieléctrico lineal, se observa que la densidad volumétrica es cero en dicha región. Se observó que dada la forma de la polarización en (14) y las dimensiones utilizadas, implicó que las densidades superficiales del segundo cascarón dieléctrico son aproximadamente cero. Nótese que la densidad volumétrica del segundo cascarón se observa constante dentro de dicha región, concordando con la expresión (32). Cabe destacar que evaluar una distancia de  $2b = 8,92 \times 10^{-4}\text{ m}$  el campo eléctrico se acerca al valor de  $100\text{ mV/m}$ , el cual (dadas las dimensiones del gráfico) se observa que está apenas por encima del valor cero.

En adición al análisis del dieléctrico esférico, en la figura 4 se observa que el campo eléctrico en la primera región es cero, como se esperaba dentro de un conductor. En la región con dieléctrico lineal, se observó que el campo eléctrico decaía con mayor rapidez en comparación con el dieléctrico no lineal, esto posiblemente debido al valor relativamente alto de la constante dieléctrica del benceno. Cabe mencionar que dado que en el escenario hay una carga libre  $Q$ , entonces sí existe un campo eléctrico fuera de la región polarizada. En la figura 5 se observa que el desplazamiento eléctrico está dado por una única función en todo el espacio de acuerdo con lo esperado por la carga libre del conductor en el centro de la distribución.

Con respecto a los resultados de los dipolos, puede observarse en las figuras 6, 7 y 8 que el campo eléctrico mostró el comportamiento característico de esta configuración, tanto en magnitudes de los vectores como en su dirección, independientemente de la orientación que se le diera al momento dipolar. En efecto, cerca del origen las magnitudes fueron grandes con flechas más largas, y la dirección siempre mostró el patrón de circulación que nace de la punta del vector  $\vec{p}$  y que termina en su cola. Estos aspectos de magnitud y dirección se mantuvieron también cuando se contó incluso con un ángulo de inclinación respecto del eje  $z$  como se observa en las figuras 9 y 10.

Para los 2 dipolos paralelos al eje  $z$ , puede observarse en las figuras 11 y 12 que el campo en el espacio entre ellos fue poco influenciado en las cercanías de cada dipolo individual. Esto es de esperarse dado que la magnitud el campo eléctrico de un dipolo disminuye rápidamente con la distancia. Es notable que en las cercanías del punto medio del arreglo, los vectores tienden a ser verticales hasta que en el centro pierden su componente horizontal. Esto hace sentido dado que se tiene que los dipolos tienen un momento dipolar de misma magnitud, y dado que están orientados en la misma dirección, sucederá que en medio de ellos las componentes horizontales del campo desvanecerán y las verticales se duplicarán.

El comportamiento del potencial de las distribuciones también fue de sumo interés de análisis. Para los dipolos individuales orientados en los ejes, o bien, orientados con cierto ángulo respecto del eje  $z$ , pudo verse que las superficies equipotenciales generadas se asemejan a esferas aplanadas que encierran la punta del momento dipolar para potenciales positivos, y su cola para negativos, como sería de esperarse, dado que el dipolo perfecto es una idealización de una configuración simétrica que es el dipolo físico que como ya se mencionó, tiene una carga positiva y una negativa de igual magnitud, hace sentido entonces que de un lado se tengan solamente potenciales positivos y del otro negativos, y que estos sean

simétricos. Para los dipolos paralelos también se vio esta simetría, solamente que en esta ocasión las superficies tuvieron una forma que se asemeja a riñones.

Con respecto al potencial de la distribución localizada con densidad dada por (12), puede notarse en la figura 17 que para puntos cercanos al origen, las superficies equipotenciales toman forma de hiperboloides de 2 hojas que a medida que se incrementa el potencial, tienden a ser un cono, como se observa en la superficie de color amarillo. Para puntos alejados del origen, las superficies se asemejan más a esferas. En general, se observa que el potencial de esta configuración, se esté cerca o lejos del origen, contará con cierta simetría, la cual vendrá siendo sugerida por la misma densidad en (12). En esta expresión, al tenerse  $\sin^2 \theta$  implica que existirá simetría alrededor de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , lo cual se ve claramente en las gráficas.

### VIII. CONCLUSIONES

En lo referente a la densidad superficial de carga ligada en dieléctricos, se determinó que la densidad interna siempre presenta un valor mayor y de signo opuesto a la densidad externa de manera que se equilibre la carga neta.

En lo referente a la densidad volumétrica de carga ligada en dieléctricos, se determinó su valor en el espacio siempre tiende a compensar las cargas ligadas superficiales de manera que la carga total sea nula.

En lo referente al campo y desplazamiento eléctrico en los medios dieléctricos se determinó que para los casos analizados, siempre se encontró una tendencia de disminución a medida que se aleja del centro de la distribución.

Con respecto a los dipolos, se observó que independientemente de la orientación que tengan en el espacio, tanto el campo eléctrico como el potencial mostrarán patrones en su comportamiento. Al tenerse 2 dipolos paralelos, fue sobresaliente la simetría que se mantuvo en medio de estos para ambas variables.

Por otro lado, para la distribución con densidad dada por (12), el aspecto más sobresaliente fue la simetría que hubo alrededor de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  debida a como se distribuía la carga en el espacio.

En general, puede concluirse que el realizar gráficas de campos eléctricos y potenciales eléctricos ayuda significativamente a visualizar cómo se comporta una configuración de cargas dada. Las expresiones deducidas difícilmente proveen esta información debido a su complejidad, por lo cual esta clase de análisis es muy valiosa.

### IX. RECOMENDACIONES

Se recomienda utilizar diversas alternativas para los valores de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $\alpha_o$  en los problemas de polarización de manera que se evalúe para distintos órdenes de magnitud.

Se recomienda utilizar un valor negativo para la carga del conductor esférico dado que facilita la visualización del mapa de color.

Para enriquecer el análisis de dipolos, se recomendaría utilizar también un ángulo  $\phi$  además del ángulo  $\theta = \alpha$ , dado que esto permitiría que la dirección general del momento dipolar no estuviera limitada al eje x.

### X. BIBIOGRAFÍA

[1] Griffiths, D. (2013). Introduction to Electromagnetism (Edition 4). Pearson Education. pp. 167-202.

[2] Reitz, F. (2010). Fundamentos de la teoría electromagnética (Edition 4). Addison-Wesley. pp. 127-139.

[3] Serway, R. A., Jewett, J. W. (2005). Física para Ciencias e Ingeniería (6ta Edición ed., Vol. 1). México DF: Thomson Learning. pp. 452-458.

[4] Young, H., Freedman, R. (2013). Física Universitaria (12<sup>a</sup> Edición ed. Vol. 2). Pearson Education. pp. 896-898.

### XI. PROGRAMA DE IMPLEMENTACIÓN

Enlace a código de implementación disponible en:  
[https://github.com/pablofermarroquin/TEM1\\_Proyecto](https://github.com/pablofermarroquin/TEM1_Proyecto)



# ANEXO

## Bitácora de cálculos

Julio Monzón      Pablo Marroquín

Teoría electromagnética 1

### 1. Polarización

#### Inciso A: Cilindro

Densidad de carga superficial

$$\vec{P} = ke^{-s^2/\alpha_o} \hat{s}$$
$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Radio  $a$

$$\sigma_a = ke^{-s^2/\alpha_o} \hat{s} \cdot (-\hat{s}) \quad |s = a$$
$$\sigma_a = -ke^{-a^2/\alpha_o} \quad (15)$$

Radio  $b$

$$\sigma_b = ke^{-s^2/\alpha_o} \hat{s} \cdot (\hat{s}) \quad |s = b$$
$$\sigma_b = ke^{-b^2/\alpha_o} \quad (16)$$

Densidad de carga volumétrica

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$
$$\rho_p = -\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (ske^{-s^2/\alpha_o})$$
$$\rho_p = -\frac{ke^{-s^2/\alpha_o}}{s} \left(1 - \frac{2s^2}{\alpha_o}\right) \quad (17)$$

**Campo eléctrico** Por ley de Gauss

$s < a$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{q_{enc1}}{\epsilon_o}$$
$$q_{enc1} = 0 \quad C$$
$$\vec{E} = 0 \quad V/m \quad (18)$$

$$a \leq s \leq b$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{q_{enc2}}{\epsilon_o}$$

$$q_{enc2} = \sigma_a(2\pi aL) + q_1$$

$$q_1 = \int_V \rho_p dV$$

$$q_1 = \int_a^s \int_0^L \int_0^{2\pi} -\frac{ke^{-s^2/\alpha_o}}{s} \left(1 - \frac{2s^2}{\alpha_o}\right) s d\phi dz ds$$

$$q_1 = 2\pi L \int_s^a -ke^{-s^2/\alpha_o} \left(1 - \frac{2s^2}{\alpha_o}\right) ds$$

$$q_1 = \frac{2\pi kL}{\alpha_o} \int_a^s (2s^2 - \alpha_o)(e^{-s^2/\alpha_o}) ds$$

$$q_1 = \frac{2\pi kL}{\alpha_o} \int_a^s 2s^2(e^{-s^2/\alpha_o}) ds + \frac{-2\pi kL}{\alpha_o} \int_a^s \alpha_o(e^{-s^2/\alpha_o}) ds$$

Realizando la segunda integral por partes

$$q_1 = \frac{2\pi kL}{\alpha_o} \int_a^s 2s^2(e^{-s^2/\alpha_o}) ds - 2\pi kL s e^{-s^2/\alpha_o} \Big|_a^s - \frac{2\pi kL}{\alpha_o} \int_a^s (2s^2 e^{-s^2/\alpha_o}) ds$$

Nótese que las dos integrales se cancelan por ser iguales con signo distinto

$$q_1 = -2\pi kL s e^{-s^2/\alpha_o} \Big|_a^s$$

$$q_1 = 2\pi Lk(ae^{-a^2/\alpha_o} - se^{-s^2/\alpha_o})$$

$$q_{enc2} = -ke^{-a^2/\alpha_o}(2\pi aL) + 2\pi Lk(-se^{-s^2/\alpha_o} + ae^{-a^2/\alpha_o})$$

$$q_{enc2} = 2\pi Lk(-se^{-s^2/\alpha_o})$$

$$E(2\pi Ls) = \frac{q_{enc2}}{\epsilon_o}$$

$$E(2\pi Ls) = \frac{2\pi Lk(-se^{-s^2/\alpha_o})}{\epsilon_o}$$

$$\vec{E} = \frac{-ke^{-s^2/\alpha_o}}{\epsilon_o} \quad V/m \tag{19}$$

$$s > b$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{q_{enc3}}{\epsilon_o}$$

$$q_{enc3} = \sigma_a(2\pi aL) + q_2 + \sigma_b(2\pi bL)$$

$$q_2 = \int_a^b \int_0^L \int_0^{2\pi} -\frac{ke^{-s^2/\alpha_o}}{s} \left(1 - \frac{2s^2}{\alpha_o}\right) s \, d\phi dz ds$$

Reutilizando la antiderivada del inciso anterior

$$q_2 = -2\pi kLse^{-s^2/\alpha_o} \Big|_a^b$$

$$q_2 = 2\pi Lk(ae^{-a^2/\alpha_o} - be^{-b^2/\alpha_o})$$

$$q_{enc3} = -ke^{-a^2/\alpha_o}(2\pi aL) + 2\pi Lk(ae^{-a^2/\alpha_o} - be^{-b^2/\alpha_o}) + ke^{-b^2/\alpha_o}(2\pi bL)$$

$$q_{enc3} = 0 \quad C$$

$$\vec{E} = 0 \quad V/m \quad (20)$$

**Carga neta de polarización**

$$Q = q_{enc3} = 0 \quad C \quad (21)$$

**Inciso B: Esfera**

Esfera conductora

$r < a$

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{S} = q_{enc1}$$

$$q_{enc1} = 0 \quad C$$

$$D = 0 \quad C/m^2 \quad (22)$$

$$E = 0 \quad V/m \quad (23)$$

Cascarón dieléctrico lineal

$$a < r < b$$

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{S} = q_{enc1}$$

$$q_{enc1} = Q \quad C$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad C/m^2 \quad (24)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_o \epsilon_r} \hat{r} \quad V/m \quad (25)$$

$$P = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \hat{r} \quad C/m^2 \quad (26)$$

Por ser dieléctrico lineal

$$\rho_p = \nabla \cdot P = 0 \quad C/m^3 \quad (27)$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \hat{s} \cdot (-\hat{s}) \quad |r = a$$

$$\sigma_a = -\frac{Q}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad C/m^2 \quad (28)$$

$$\sigma_b = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \hat{s} \cdot (\hat{s}) \quad |r = b$$

$$\sigma_b = \frac{Q}{4\pi b^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \quad C/m^2 \quad (29)$$

Cascarón dieléctrico con polarización

$$b < r < 2b$$

$$\vec{P} = -kr \hat{r}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\sigma_b = (-kr) \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \quad |r = b$$

$$\sigma_b = kb \quad C/m^2 \quad (30)$$

$$\sigma_{2b} = (-kr) \hat{r} \cdot (\hat{r}) \quad |r = 2b$$

$$\sigma_{2b} = -2kb \quad C/m^2 \quad (31)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot P = \frac{-1}{r^2} \partial_r(r^2 P) \quad C/m^3$$

$$\rho_p = 3k \quad C/m^3 \quad (32)$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad C/m^2 \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
D &= E\epsilon_o + P \\
E &= \frac{D - P}{\epsilon_o} \\
E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} - \frac{-kr}{\epsilon_o} \\
E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} + \frac{kr}{\epsilon_o} \hat{r} \quad V/m
\end{aligned} \tag{34}$$

$$r > 2b$$

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{S} = q_{enc2} = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad C/m^2 \tag{35}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_o} \hat{r} \quad V/m \tag{36}$$

Cálculo de b para  $100 \times 10^{-3} \text{ V/m}$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} + \frac{kr}{\epsilon_o} \\
0 &= 4\pi k r^3 - 4\pi\epsilon_o E r^2 + Q \\
0 &= 4\pi k (2b)^3 - 4\pi\epsilon_o E (2b)^2 + Q \\
&\text{donde} \\
E &= 100 \times 10^{-3} \text{ V/m} \\
k &= 0,1 \text{ C/m}^3 \\
Q &= 1 \times 10^{-6} \text{ C} \\
\epsilon_o &= 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/Nm^2 \\
&\text{Utilizando calculadora para polinomio de grado 3} \\
b &= 4,46 \times 10^{-4} \text{ m}
\end{aligned} \tag{37}$$

## 2. Dipolos

**Dipolo orientado en  $x$ ,  $y$  &  $z$ , con magnitud  $p_0$**

Se considera el momento dipolar:

$$\vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}$$

El cual, reescrito en coordenadas esféricas con  $\theta = \alpha$  y  $\phi = \beta$  es:

$$\vec{p} = p_0 [\sin \alpha \cos \beta \hat{i} + \sin \alpha \sin \beta \hat{j} + \cos \alpha \hat{k}]$$

Recordar que para un dipolo:

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow V = p_0 \left[ \frac{\sin \alpha \cos \beta \sin \theta \cos \phi + \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \sin \phi + \cos \alpha \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right] V \quad (38)$$

Para el campo Eléctrico, recordar que  $\vec{E} = -\nabla V$ :

$$\vec{E} = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[ \frac{\sin \alpha \cos \beta \sin \theta \cos \phi + \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \sin \phi + \cos \alpha \cos \theta}{r^2} \right]$$

Dado que el gradiente es un operador lineal, sea:

$$A = \sin \alpha \cos \beta \nabla \left[ \frac{\sin \theta \cos \phi}{r^2} \right]$$

$$B = \sin \alpha \sin \beta \nabla \left[ \frac{\sin \theta \sin \phi}{r^2} \right]$$

$$C = \cos \alpha \nabla \left[ \frac{\cos \theta}{r^2} \right]$$

Utilizando el gradiente en esféricas se determinan los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$A = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{r^3} [-2 \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}]$$

$$B = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{r^3} [-2 \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}]$$

$$C = \frac{\cos \alpha}{r^3} [-2 \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}]$$

Por lo tanto, el campo eléctrico será:

$$\vec{E} = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} [A + B + C] V/m \quad (39)$$

Si el dipolo está orientado en la dirección del eje z,  $\alpha = 0$  y:

$$V = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (40)$$

$$\vec{E} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \quad (41)$$

Si el dipolo está orientado en la dirección del eje x,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y  $\beta = 0$ :

$$V = \frac{p_0 \sin \theta \cos \phi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (42)$$

$$\vec{E} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \sin \theta \cos \phi \hat{r} - \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} + \sin \phi \hat{\phi}] \quad (43)$$

Si el dipolo está orientado en la dirección del eje y,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y  $\beta = \frac{\pi}{2}$ :



$$V = \frac{p_0 \sin \theta \sin \phi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (44)$$

$$\vec{E} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \sin \theta \sin \phi \hat{r} - \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} - \cos \phi \hat{\phi}] \quad (45)$$

### Dipolo con ángulo respecto al eje z

Para el caso donde solo se considera un dipolo con un ángulo  $\alpha$  respecto al eje  $z$ , se utilizan las ecuaciones para el potencial y el campo anteriores y se trabaja con  $\beta = 0$ .

### Dipolos paralelos al eje $z$ , separados una distancia $a$

Para este caso, se tomó que los dipolos se encontrarían sobre el eje  $x$ , a una distancia de  $a/2$  del origen, como se ve en la figura 1.

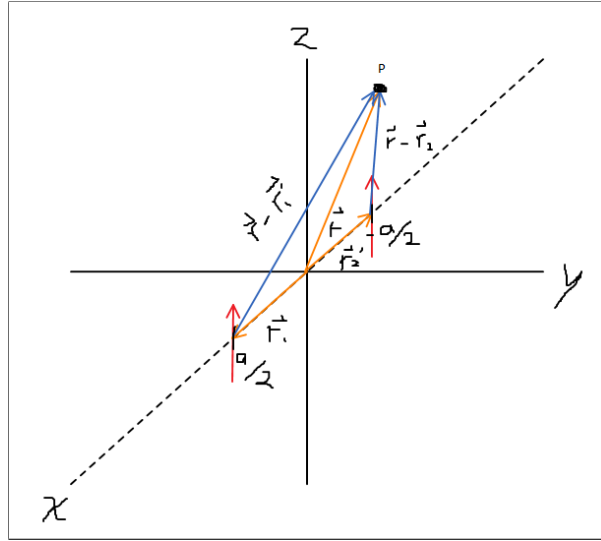


Figura 1: Sistema de coordenadas

Nótese que si P no se encuentra sobre el eje habrá que considerar que no se puede utilizar solamente la ley de cosenos con  $\theta$  para obtener  $|\vec{r} - \vec{r}_1|$ . En particular, hay que considerar la proyección de P en el plano como se observa en la figura 2.

Aquí los lados  $c_1, c_2$  representan la proyección del vector  $|\vec{r} - \vec{r}_1|$  correspondiente sobre el plano xy. Puede utilizarse la ley de cosenos para determinar que:

$$c_1^2 = r^2 \sin^2 \theta + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi$$

$$c_2^2 = r^2 \sin^2 \theta + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi$$

Ahora bien, con esto, y sabiendo que la componente en  $z$  de  $P$  es  $r \cos \theta$ , puede utilizarse el teorema de Pitágoras para hallar  $|\vec{r} - \vec{r}_1|$ . Como ejemplo, el triángulo que se forma para  $p_1$  es el de la figura 3.

De aquí resulta entonces que:

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi}$$

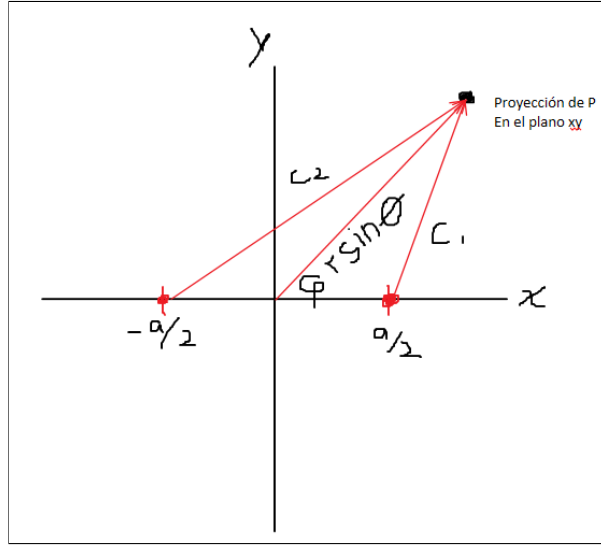


Figura 2: Proyección de P sobre el plano xy

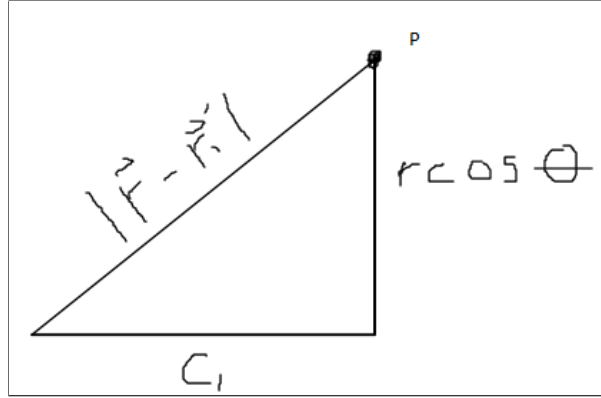


Figura 3: Triángulo rectángulo para hallar  $|\vec{r} - \vec{r}'|$

Debido al desplazamiento respecto al origen, el potencial de un dipolo en esta situación vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r} - \vec{p} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

El último paso debido a que los vectores de las fuentes de potencial son perpendiculares a los momentos dipolares, por lo tanto su producto punto es cero. Para  $\vec{p}_1$ :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= p_1 \hat{k}, \vec{r} = r \hat{r} \\ \Rightarrow V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 r \cos \theta}{(r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (46)$$

Y para  $\vec{p}_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= p_2 \hat{k}, \vec{r} = r \hat{r} \\ \Rightarrow V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_2 r \cos \theta}{(r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (47)$$

Por otro lado, para hallar el campo producido por la configuración, primero es necesario conocer el campo particular de cada dipolo, utilizando de nuevo la relación  $\vec{E} = -\nabla V$ . Para  $\vec{p}_1$ :

$$\vec{E}_1 = -\frac{p_1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[ \frac{r \cos \theta}{(r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \right]$$

De donde, luego de aplicar el operador gradiente en coordenadas esféricas, surge que:

$$\vec{E}_1 = -\frac{p_1}{4\pi\epsilon_0(r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} [A\hat{r} + B\hat{\theta} + C\hat{\phi}] \quad (48)$$

Donde:

$$A = \cos \theta - \frac{3/2r \cos \theta (2r - a \sin \theta \cos \phi)}{r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi}$$

$$B = -\sin \theta + \frac{3/2ar \cos^2 \theta \cos \phi}{r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi}$$

$$C = \frac{-3/2ar \cos \theta \sin \phi}{r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \sin \theta \cos \phi}$$

Similarmente, el campo producido por  $\vec{p}_2$  será:

$$\vec{E}_2 = -\frac{p_2}{4\pi\epsilon_0(r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} [D\hat{r} + E\hat{\theta} + F\hat{\phi}] \quad (49)$$

Donde:

$$D = \cos \theta - \frac{3/2r \cos \theta (2r + a \sin \theta \cos \phi)}{r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi}$$

$$E = -\sin \theta - \frac{3/2ar \cos^2 \theta \cos \phi}{r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi}$$

$$F = \frac{3/2ar \cos \theta \sin \phi}{r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \sin \theta \cos \phi}$$

Finalmente, del principio de superposición se concluye entonces que:

$$V_{Total} = V_1 + V_2 \quad (50)$$

$$\vec{E}_{Total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (51)$$

### Expansión multipolar con densidad de carga dada

Se conoce una distribución localizada de carga con densidad:

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta$$

En primer lugar, se solicita una una expansión multipolar para escribir el potencial como una expansión finita de los polinomios de Legendre. Recordemos que:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V (r')^n P_n(\cos \alpha) \rho(\vec{r}') dV'$$

es la expresión de la expansión multipolar donde las coordenadas primadas pertenecen a la distribución y  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ . Considere solamente la integral de la expresión:

$$\int_V (r')^n P_n(\cos \alpha) \rho(\vec{r}') dV'$$

$V$  puede ser una esfera de radio  $R$ . Sin embargo, hay que notar que el término de  $e^{-r}$  rápidamente hace que la densidad de carga sea cero lejos del origen. Por ende, puede integrarse sobre todo el espacio sin tener pérdida de generalidad. Se tiene entonces que la integral será:

$$\frac{1}{64\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty (r')^n P_n(\cos \alpha) (r')^2 e^{-r'} \sin^2 \theta' \cdot (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$$

En particular, puede aprovecharse la integral de  $\theta'$  para determinar qué términos de la expansión sobreviven. Considere un punto sobre el eje  $z$ . Bajo estas condiciones,  $\alpha = \theta'$  y la integral de  $\theta'$  será:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin^3 \theta' P_n(\cos \theta') d\theta' \\ &= \int_0^\pi \sin^2 \theta' P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta' &= (1 - \cos^2 \theta') = -(\cos^2 \theta' - 1) = -\frac{2}{3} \left( \frac{3 \cos^2 \theta' - 3}{2} \right) = -\frac{2}{3} \left( \frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} - 1 \right) \\ &= -\frac{2}{3} (P_2(\cos \theta') - P_0(\cos \theta')) \end{aligned}$$

Entonces la integral de  $\theta'$  será:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \int_0^\pi (P_2(\cos \theta') - P_0(\cos \theta')) P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \\ & -\frac{2}{3} \int_0^\pi P_2(\cos \theta') P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' + \frac{2}{3} \int_0^\pi P_0(\cos \theta') P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \end{aligned}$$

Debido a que los polinomios de Legendre conforman un sistema de funciones ortogonales, las integrales anteriores solamente existirán para  $n = 0$  y  $n = 2$ . De lo contrario, dará como resultado 0. Con esto en mente, solamente habrá que hacer la expansión multipolar considerando estos 2 valores de  $n$ :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^3} \int_V (r')^2 P_2(\cos \alpha) \rho(\vec{r}') dV' \right)$$

Es decir, se conservan tanto el monopolo como el cuadripolo de la expansión. Aquí ya no se asume que se está midiendo sobre el eje  $z$ , por ende  $\alpha \neq \theta'$ . Para encontrar  $\cos \alpha$  considere a los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k} \\ \vec{r}' &= r'\hat{r}' = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + r' \cos \theta' \hat{k} \\ \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' &= rr' (\sin \theta \sin \theta' \cos \phi \cos \phi' + \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta') = rr' \cos \alpha \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \sin \theta \sin \theta' \cos \phi \cos \phi' + \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta' \end{aligned}$$

Para el monopolo se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{64\pi r} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty (r')^4 e^{-r'} \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Estas son integrales iteradas, así que su resultado será el producto de las integrales individuales de  $r'$ ,  $\theta'$  y  $\phi'$ . Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\phi' &= 2\pi \\ \int_0^\pi \sin^3 \theta' d\theta' &= \frac{4}{3} \\ \int_0^\infty (r')^4 e^{-r'} dr' &= 24\end{aligned}$$

De esto, se obtiene que el aporte monopolar de la expansión será:

$$\frac{1}{64\pi r} * 2\pi * \frac{4}{3} * 24 = \frac{1}{r}$$

En lo que se refiere al cuadripolo, se tiene:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{r^3} \int_V (r')^2 P_2(\cos \alpha) \rho(\vec{r'}) dV' \\ &= \frac{1}{64\pi r^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty (r')^6 e^{-r'} P_2(\cos \alpha) \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\phi'\end{aligned}$$

De nuevo se tienen integrales iteradas. Las integral de  $r'$  vendrá siendo 720. Posteriormente se trabaja con la de  $\theta'$ :

$$\begin{aligned}& \int_0^\pi \sin^3 \theta' P_2(\cos \alpha) d\theta' \\ &= \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta' \cos^2 \alpha d\theta' - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta' d\theta'\end{aligned}$$

La segunda de estas integrales da como resultado  $\frac{2}{3}$ . Para la primer integral, se tiene lo siguiente:

$$\cos^2 \alpha = [\sin \theta \sin \theta' \cos \phi \cos \phi' + \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta']^2$$

Lo cual, luego de expandir y multiplicar por  $\sin^3 \theta'$  e integrar respecto de  $\theta'$  y multiplicar por  $\frac{3}{2}$ , se obtiene:

$$\frac{8}{5} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \phi' + \frac{16}{5} \sin^2 \theta \cos \phi \cos \phi' \sin \phi \sin \phi' + \frac{8}{5} \sin^2 \theta \sin^2 \phi \sin^2 \phi' + \frac{2}{5} \cos^2 \theta$$

Por lo que la integral de  $\theta'$  es:

$$\frac{8}{5} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \phi' + \frac{16}{5} \sin^2 \theta \cos \phi \cos \phi' \sin \phi \sin \phi' + \frac{8}{5} \sin^2 \theta \sin^2 \phi \sin^2 \phi' + \frac{2}{5} \cos^2 \theta - \frac{2}{3}$$

Esto es tomado como argumento de la integral de  $\phi'$ . Así que luego de integrar respecto de esta variable de 0 a  $2\pi$  se obtiene:

$$\frac{8\pi}{5} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{8\pi}{5} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{4\pi}{5} \cos^2 \theta - \frac{4\pi}{3}$$

Lo cual luego de simplificar es:

$$-\frac{8\pi}{15} P_2(\cos \theta)$$

Por lo tanto, el término cuadripolar será:

$$\frac{1}{64\pi r^3} * 720 * -\frac{8\pi}{15} P_2(\cos \theta) = -\frac{6}{r^3} P_2(\cos \theta)$$

Por ende, la expansión multipolar de esta densidad será:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} P_2(\cos \theta) \right] \quad (52)$$

Además de esto, se solicita una expresión explícita para el potencial en cualquier punto, incluyendo cercanías del origen. Aquí la expansión multipolar ya no aplica debido a que  $r$  no es necesariamente mucho mayor que  $r'$ . Similarmente, no se puede resolver como un problema de valores en la frontera dado que  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Por ende, solamente queda calcular el potencial utilizando:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

El volumen de integración de nuevo será todo el espacio por la misma razón que el caso anterior. Para el valor de  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  considere la figura 4.

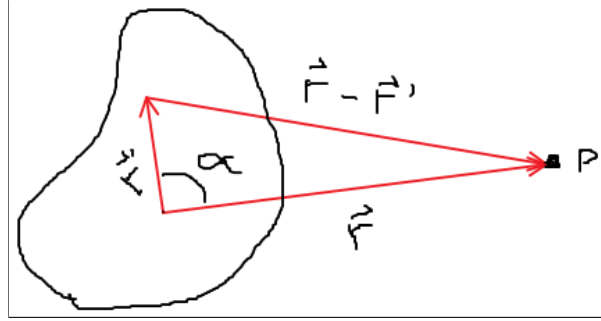


Figura 4: Diagrama a considerar

De aquí puede observarse que debido a la ley de cosenos:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha} \\ &= r' \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - \frac{2r}{r'} \cos \alpha} \\ &= r' \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right) \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \alpha\right)} \\ \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r'} \left(1 + \left(\frac{r}{r'}\right) \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \alpha\right)\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Para puntos muy cercanos al origen, a esto último se le podrá aplicar una expansión binomial:

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{r}{r'}\right) \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \alpha\right)\right)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r'}\right) \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \alpha\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{r'} - 2 \cos \alpha\right)^2 + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{r}{r'}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

Para términos con potencias mayores de  $\frac{r}{r'}$  el resultado será muy pequeño y serán despreciables. Con esto en mente, se tiene que:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r'} \left[ 1 + \left(\frac{r}{r'}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2}\right) \right] dV'$$



$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{64\pi} \int_V r' e^{-r'} \sin^2 \theta' dV' + \frac{r}{64\pi} \int_V e^{-r'} \sin^2 \theta' \cos \alpha dV' + \frac{r^2}{64\pi} \int_V \frac{e^{-r'}}{r'} \sin^2 \theta' P_2(\cos \alpha) dV' \right]$$

Para la primera integral:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty (r')^3 e^{-r'} \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\phi'$$

De nuevo, integrales iteradas. La integral de  $r'$  vale 6, la de  $\theta'$  es  $\frac{4}{3}$  y la de  $\phi'$  es  $2\pi$  de aquí que el valor de la integral será:

$$6 * \frac{4}{3} * 2\pi = 16\pi$$

La segunda integral es:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty (r')^2 e^{-r'} \sin^3 \theta' \cos \alpha dr' d\theta' d\phi'$$

Considere las integrales de  $\theta'$  y  $\phi'$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta' [\sin \theta \sin \theta' \cos \phi \cos \phi' + \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta'] d\theta' d\phi'$$

Nótese entonces que será cero, dado que se integra  $\sin^3 \theta' \cos \theta'$  de 0 a  $\pi$  en el tercer sumando y  $\cos \phi'$  y  $\sin \phi'$  de 0 a  $2\pi$  en los primeros 2. Queda solamente entonces la tercera integral:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r' e^{-r'} \sin^3 \theta' P_2(\cos \alpha) dr' d\theta' d\phi'$$

La integral de  $r'$  vale 1. Queda entonces:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta' P_2 \cos \alpha d\theta' d\phi'$$

Del inciso anterior se sabe que esta integral tiene un valor de:

$$-\frac{8\pi}{15} P_2(\cos \alpha)$$

Por lo que:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{64\pi} (16\pi) + \frac{r}{64\pi} (0) + \frac{r^2}{64\pi} \left( -\frac{8\pi}{15} P_2(\cos \alpha) \right) \right] \Rightarrow$$

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \alpha) \right] \quad (53)$$