Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Profesores: Pablo Guarda - Juan Antonio Carrasco

Métodos de Optimización

Taller 4: Simplex II
Abril 4, 2019

Problemas

1. **(20% ≈ 30min)** Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rl} x_1 + x_2 & \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Demuestre mediante Simplex, que el problema no admite solución factible.

2. **(30% ≈ 60min)** Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rl} -3x_1 - 2x_2 & \geq -20 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 & \geq 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

(a) **(10%)** Determine una solución básica inicial factible (SBIF) para el PPL anterior y escriba el problema de optimización equivalente.

(b) **(10%)** Determine la solución óptima para la formulación equivalente del problema de optimización encontrada en (a) (ayuda: utilice Octave).

(c) **(10%)** Determine la solución óptima del problema de optimización original con Octave. ¿Coincide con la solución encontrada en (b)? Fundamente

3. **(50% $\approx$ 75min)** La empresa Tesla está produciendo tres tipos de vehículos: autómoviles, buses y camionetas. Si la empresa dedicara toda su capacidad de producción para automóviles, podría producir 3000 al día. En cambio, si dedicara toda la producción a buses o camionetas, produciría 600 o 1,000 por día, respectivamente.

   El cronograma de producción es para una semana (5 días hábiles). Además, la producción de la semana debe almacenarse en containers antes de que los los productos sean distribuidos. Almacenar 1 automóvil requiere 40 m^3. Almacenar 1 bus requiere 210 m^3. Almacenar 1 camioneta requiere 45 m^3. El espacio total de almacenamiento disponible es de 400,000 m^3. Debido a acuerdos comerciales, la empresa tiene que entregar al menos 5,000 automóviles y 400 buses por semana.

   El departamento de ventas de la empresa estima que la demanda semanal por automóviles, buses y camionetas no superará las 10,000, 1,000 y 2,000 unidades, por lo que la empresa no quiere producir más que esas cantidades. El beneficio neto unitario por la venta de automóviles, buses y camionetas es de US$ 4,000, US$ 6,000 y US$ 10,000, respectivamente.

   (a) **(20%)** Formule el PPL para determinar un programa de producción semanal que maximice el beneficio neto total de la empresa. Defina en su respuesta todos los elementos relevantes para la formulación del modelo

   (b) **(20%)** Encuentre una solución básica inicial factible para el PPL (ayuda: formule el problema de optimización de la Fase I de Simplex y luego encuentre el valor óptimo con Octave)

   (c) **(10%)** Determine la solución óptima del PPL con Octave.

Solución problema 1

Demuestre mediante Simplex, que el problema no admite solución factible.

Por la restricción de tipo $\geq$, no es trivial encontrar una SBIF para el PPL. Por ello, resolveremos el problema de optimización de la Fase 1 de Simplex. Para que exista SBIF, el valor óptimo de la función objetivo del problema de la Fase 1 (suma de variables artificiales) debe ser igual a 0, y las variables artificiales deben quedar fuera de la base (iguales a 0). Si esta condición no se cumple, el problema no admite solución factible. Ahora procederemos a resolver el problema de optimización de la fase 1 y lo dejaremos en formato estándar. Para ello, se introducirán variables de holguras en las dos restricciones y una variable artificial (y_1) en la primera restricción:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & y_1 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + y_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, y_1 &\geq 0 \end{aligned}
\end{array}
$$

Notar que para evitar confusión entre las variables de la función de objetivo original y de la artificial, utilizaremos x_4 y x_5 como variables de holgura (y no x_3 y x_4). La variable de holgura x_4 tiene signo negativo puesto que la restricción es de tipo $\geq$ y la constante del lado derecho es positiva. Para resolver por Simplex, primero transformamos el problema de minimización a uno de maximización equivalente (Min z = Max -z).

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & -y_1 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + y_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, y_1 &\geq 0 \end{aligned}
\end{array}
$$

Para las iteraciones no es necesario trabajar con la función objetivo del problema original, puesto que en la pregunta solo se pide analizar si el problema admite solución factible. Las tablas de cada iteración de Simplex son presentadas a continuación:

Iteración 0

	M	x_1	x_2	x_4	x_5	y_1	b
	f_1	1	1	-1	0	1	4
	f_2	1	2	0	1	0	2
FOA	-1	1	1	-1	0	0	4

Iteración 1

	M	x_1	x_2	x_4	x_5	y_1	b
	f_1	0	-1	-1	-1	1	2
	f_2	1	2	0	1	0	2
FOA	-1	0	-1	-1	-1	0	2

En la iteración 2, se alcanza el vértice óptimo del problema artificial. Sin embargo, la variable artificial es básica y el valor óptimo de la función objetivo es distinto de 0 ($z^* = -2$). Por ello, se concluye que el problema no admite solución factible.

Solución problema 2

a) Determine una solución básica inicial factible (SBIF) para el PPL anterior y escriba el problema de optimización equivalente.

Para facilitar la resolución, primero transformamos la primera restricción del PPL a una de tipo $\leq$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 20 \\ x_1 + 2x_2 & \geq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

Luego, dejamos el PPL en formato estándar. Notar que la variable de holgura de la tercera restricción tiene signo negativo puesto que la restricción es de tipo $\geq$ y la constante del lado derecho es positiva.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcll} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 20 & \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 20 & \\ x_1 + 2x_2 - x_5 & = & 2 & \\ x_i & \geq & 0 & \forall i = 1,2,3,4,5 \end{array} \end{array}$$

A diferencia de los PPL revisados en el taller anterior, la SBIF típica donde las variables de decisión del problema original son 0 ($x_1 = x_2 = 0$) no satisface la tercera restricción (la variable x_5 sería igual a -2). Por ello, introduciremos una variable artificial (y_1) en dicha restricción y luego realizaremos la fase 1 de Simplex para determinar una SBIF:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcll} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 20 & \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 20 & \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + y_1 & = & 2 & \\ x_i & \geq & 0 & \forall i = 1,2,3,4,5 \end{array} \end{array}$$

El problema de optimización de la Fase 1 transformado a uno de maximización (Min y_1 = Max $-y_1$) es:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & -y_1 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcll} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 20 & \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 20 & \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + y_1 & = & 2 & \\ x_i & \geq & 0 & \forall i = 1,2,3,4,5 \\ y_1 & \geq & 0 & \end{array} \end{array}$$

En dos iteraciones se obtiene una SBIF para el problema original

Iteración 0 (SBIF problema artificial):

	M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
	f_1	3	2	1	0	0	0	20
	f_2	2	3	0	1	0	0	20
	f_3	1	2	0	0	-1	1	2
FO	-1	1	1	0	0	0	0	0
FOA	-1	0	0	0	0	0	0	0

Iteración 1:

	M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
	f_1	2	0	1	0	1	-1	18
	f_2	1/2	0	0	1	3/2	-3/2	17
	f_3	1/2	1	0	0	-1/2	1/2	1
FO	-1	1/2	0	0	0	1/2	-1/2	-1
FOA	-1	0	0	0	0	0	-1	0

A partir de la tabla obtenida en la iteración 1 se puede responder a lo solicitado.

SBIF problema original:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 18$$
$$x_4 = 17$$
$$x_5 = 0$$

Formulación algebraica equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 1 - 1/2x_1 + 1/2x_5 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcll} 2x_1 + x_3 + x_5 & = & 18 & \\ 1/2x_1 + x_4 + 3/2x_5 & = & 17 & \\ 1/2x_1 + x_2 - 1/2x_5 & = & 1 & \\ x_i & \geq & 0 & \forall i = 1,2,3,4,5 \end{array} \end{array}$$

b) Determine la solución óptima para la formulación equivalente del problema de optimización encontrada en (a) (ayuda: utilice Octave).

```
In [ ]: clear
```

```
In [5]: A=[2 0 1 0 1;1/2 0 0 1 3/2;1/2 1 0 0 -1/2];
        b=[18;17;1]';
        c=[1/2 0 0 0 1/2];
        lb=[0 0 0 0 0];
        ub=[];
        ctype='SSS';
        vtype='CCCCC';
        param.msglev=2;
        glpk(c, A, b, lb, ub,ctype,vtype,s=-1,param)
```

```
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (2)
*     3: obj =   7.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (0)
ans =

    4.00000
    4.00000
    0.00000
    0.00000
   10.00000
```

Solución optima

- Variables de decisión: $x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 10$
- En la formulación inicial del problema de fase 1 la función objetivo tiene una constante igual a 1. Por ello, hay que sumar 1 al valor entregado por el optimizador (7+1=8)

c) Determine la solución óptima del problema de optimización original con Octave. ¿Coincide con la solución encontrada en (b)? Fundamente

```
In [8]: clear
```

```
In [2]: A=[3 2;2 3;1 2];
        b=[20;20;2];
        c=[1 1];
        lb=[0 0];
        ub=[];
        ctype='UUL';
        vtype='CC';
        param.msglev=2;
        glpk(c, A, b, lb, ub,ctype,vtype,s=-1,param)
```

```
      0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   2.000e+00 (1)
      1: obj =   1.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (0)
*     3: obj =   8.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (0)
ans =

   4.0000
   4.0000
```

Solución optima

- Función objetivo: 8
- Variables de decisión: $x_1 = 4, x_2 = 4$

Se verifica que la solución coincide con la parte b)

Solución problema 3

a) Formule el PPL para determinar un programa de producción semanal que maximice el beneficio neto total de la empresa. Defina en su respuesta todos los elementos relevantes para la formulación del modelo

Supuestos

- Las variables de decisión pueden tomar valores no enteros
- La cantidad de unidades producidas de cada tipo de vehículo, es directamente proporcional al tiempo utilizado para producir cada uno

Variables de decisión

- x_1: cantidad de automóviles producidos a la semana
- x_2: cantidad de buses producidos a la semana
- x_3: cantidad de camionetas producidas a la semana

Función objetivo

Max $4000x_1 + 6000x_2 + 10000x_3$

Restricciones

1) Capacidad máxima de producción

   $\frac{x_1}{3000} + \frac{x_2}{600} + \frac{x_3}{1000} \leq 5$

2) Capacidad máxima de almacenamiento

   $40x_1 + 210x_2 + 45x_3 \leq 400000$

3) Compromisos de venta

   $x_1 \geq 5000$ (automóviles)
   $x_2 \geq 400$ (buses)

4) Demanda

   $x_1 \leq 10000$ (automóviles)
   $x_2 \leq 1000$ (buses)
   $x_3 \leq 2000$ (camionetas)

5) No negatividad

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

PPL

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 4000x_1 + 6000x_2 + 10000x_3 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{array}{rl}
\dfrac{x_1}{3000} + \dfrac{x_2}{600} + \dfrac{x_3}{1000} & \leq 5 \\
40x_1 + 210x_2 + 45x_3 & \leq 400000 \\
x_1 & \geq 5000 \\
x_2 & \geq 400 \\
x_1 & \leq 10000 \\
x_2 & \leq 1000 \\
x_3 & \leq 2000 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
\end{array}
$$

b) Encuentre una solución básica inicial factible para el PPL (ayuda: formule el problema de optimización de la Fase I de Simplex y luego encuentre el valor óptimo con Octave)

Las dos restricciones de compromiso de venta dificultan encontrar una SBIF. Por ello, agregaremos una variable artificial a cada una y luego realizaremos la fase 1 de Simplex iterando simultáneamente con la función del objetivo problema original (FO) y del problema artificial (FOA).

Problema original formato estándar:

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & 4000x_1 + 6000x_2 + 10000x_3 & & \\
\text{s.a} & & & \\
 & \dfrac{x_1}{3000} + \dfrac{x_2}{600} + \dfrac{x_3}{1000} + x_4 & = 5 & \\
 & 40x_1 + 210x_2 + 45x_3 + x_5 & = 400000 & \\
 & x_1 - x_6 + y_1 & = 5000 & \\
 & x_2 - x_7 + y_2 & = 400 & \\
 & x_1 + x_8 & = 10000 & \\
 & x_2 + x_9 & = 1000 & \\
 & x_3 + x_{10} & = 2000 & \\
 & x_i & \geq 0 & \forall i = 1,..,10 \\
 & y_1, y_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Problema de optimización de la fase 1 (de maximización equivalente):

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & -y_1 - y_2 & & \\
\text{s.a} & & & \\
 & \dfrac{x_1}{3000} + \dfrac{x_2}{600} + \dfrac{x_3}{1000} + x_4 & = 5 & \\
 & 40x_1 + 210x_2 + 45x_3 + x_5 & = 400000 & \\
 & x_1 - x_6 + y_1 & = 5000 & \\
 & x_2 - x_7 + y_2 & = 400 & \\
 & x_1 + x_8 & = 10000 & \\
 & x_2 + x_9 & = 1000 & \\
 & x_3 + x_{10} & = 2000 & \\
 & x_i & \geq 0 & \forall i = 1,..,10 \\
 & y_1, y_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Solución óptima con Octave:

In [1]:
```
clear
```

In [2]:
```
%Vector de costos de función objetivo
c=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
%Matriz de restricciones
A=[1/3000 1/600 1/1000 1 0 0 0 0 0 0 0 0; 40 210 45 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 1 0; 0 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 1;
1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
%Vector con lado derecho de restricciones
b=[5;400000;5000;400;10000;1000;2000]
%Límite inferior variables
lb=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
%Límite superior variables
ub=[]
%Tipo de restricciones
ctype='SSSSSSS'
%Tipo de variables
vtype='CCCCCCCCCCCC'
%Opción para el tipo de output del optimizador
param.msglev=2;
```

```
c =

   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   1   1

A =

 Columns 1 through 6:

     0.00033     0.00167     0.00100     1.00000     0.00000     0.00000
    40.00000   210.00000    45.00000     0.00000     1.00000     0.00000
     1.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000    -1.00000
     0.00000     1.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000
     1.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000
     0.00000     1.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000
     0.00000     0.00000     1.00000     0.00000     0.00000     0.00000

 Columns 7 through 12:

     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000
     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000
     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     1.00000     0.00000
    -1.00000     0.00000     0.00000     0.00000     0.00000     1.00000
```

```
b =

        5
   400000
     5000
      400
    10000
     1000
     2000

lb =

   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0

ub = [](0x0)
ctype = SSSSSSS
vtype = CCCCCCCCCCCC
```

```
In [3]: #Ejecución del optimizador
        glpk(c, A, b, lb, ub,ctype,vtype,s=1,param)
```

```
      0: obj =   0.000000000e+00 inf =   3.423e+03 (2)
      2: obj =   5.400000000e+03 inf =   0.000e+00 (0)
*     4: obj =   0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (0)
ans =

     5000.00000
      400.00000
        0.00000
        2.66667
   116000.00000
        0.00000
        0.00000
     5000.00000
      600.00000
     2000.00000
        0.00000
        0.00000
```

Solución optima

- Función objetivo: 0

- Variables de decisión del problema original: $x_1 = 5000, x_2 = 400, x_3 = 0$
- Variales de holgura: $x_4 = 2.67, x_5 = 116000, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 5000, x_9 = 600, x_{10} = 2000$
- Variables artificales: $y_{1} = 0, y_{2} = 0 $

c) Determine la solución óptima del PPL con Octave.

In [4]:
```
clear
```

In [5]:
```
%Vector de costos de función objetivo
c=[4000 6000 10000]
%Matriz de restricciones
A=[1/3000 1/600 1/1000; 40 210 45;1 0 0;0 1 0;1 0 0;0 1 0;0 0 1]
%Vector con lado derecho de restricciones
B=[5;400000;5000; 400; 10000;1000;2000]
%Límite inferior variables
lb=[0,0,0]
%Límite superior variables
ub=[]
%Tipo de restricciones
ctype='UULLUUU'
%Tipo de variables
vartype='CCC'
%Opción para el tipo de output del optimizador
param.msglev=2;
```

```
c =

    4000     6000    10000

A =

     0.00033      0.00167      0.00100
    40.00000    210.00000     45.00000
     1.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      1.00000      0.00000
     1.00000      0.00000      0.00000
     0.00000      1.00000      0.00000
     0.00000      0.00000      1.00000

B =

        5
   400000
     5000
      400
    10000
     1000
     2000
```

```
lb =

   0   0   0

ub = [](0x0)
ctype = UULLUUU
vartype = CCC
```

```
In [6]: #Ejecución del optimizador
        glpk(c=c,A=A,B=B,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
*     0: obj =   2.240000000e+07 inf =   0.000e+00 (3)
*     2: obj =   4.500000000e+07 inf =   0.000e+00 (0)
ans =

   5650.00
    400.00
   2000.00
```

Solución optima

- Función objetivo: 45000000
- Variables de decisión: $x_1 = 5650, x_2 = 400, x_3 = 2000$