Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Profesores: Pablo Guarda - Juan Antonio Carrasco

Métodos de Optimización

Certamen 1
Tiempo: 2.5 horas
Fecha: Abril 25, 2019

Problema 1 (30% ≈ 30min)

Una línea aérea decide incorporar un nuevo avión para vuelos comerciales a su flota. Para habilitarlo necesita determinar el número óptimo de asientos por clase (x_i), la cantidad requerida de azafatas (y_1) y auxiliares de vuelo (y_2), de tal manera que la utilidad sea máxima. Existen 3 tipos de clases: Primera, Ejecutiva y Económica. Por políticas internas se debe ofrecer un mínimo de asientos por clase de 25, 80 y 120 respectivamente. Además un estudio de mercado indicó que la demanda máxima para cada clase es de 45, 100 y 210, por lo que tener un número superior de asientos por clase no tendrá ningún sentido. Por otra parte, el número de azafatas y auxiliares también está acotado. Por un lado, el avión no puede funcionar con menos de 8 azafatas y 2 auxiliares de vuelo; y por límite de espacio no podrán ser más de 18 azafatas y 5 auxiliares de vuelo. Además, para entregar un buen servicio en cada clase, deberá haber al menos 1 azafata por cada 10 pasajeros de Primera, por cada 20 de Ejecutiva y por cada 40 de Económica. También deberá haber un auxiliar de vuelo por cada 100 pasajeros del avión.

El sueldo de cada azafata es de $200 dólares y el de un auxiliar de $120 dólares. El avión dispone de 420 m2 para distribuir los asientos (el espacio para pasillos, cabinas y baños no está incluido), y habrá que considerar que un asiento de Primera ocupa 1,8 m2, uno de Ejecutiva 1,4 m2 y uno de Económica 1m2. El valor de un pasaje en cada una de las clases es de $2.000, $1.300 y $900 dólares respectivamente, mientras que el costo de la comida para cada una de las clases es de $80, $60 y $50 dólares. El costo de mantención del avión es de $75.000 dólares. Finalmente, tras un cuidadoso estudio de servicio e imagen, la línea aérea concluyó que por cada azafata que tuviera por sobre el mínimo, recibirá un beneficio total equivalente a $100 dólares, y por cada auxiliar de vuelo adicional el beneficio sería de $50 dólares; esto debido a que entregarían un mejor servicio y los clientes preferirían viajar en su línea en el futuro.

a) **(10%)** Formule el problema de optimización para maximizar la utilidad de la línea aérea
b) **(5%)** Plantee el problema de optimización que permitiría determinar una SBIF para el PPL
c) **(10%)** Escriba un script en Octave que permita determinar la solución óptima del problema anterior e identificar las restricciones activas en el valor óptimo del PPL
d) **(5%)** Asuma que su script se ejecuta sin errores y arroja el output correcto para determinar la solución óptima del PPL. Indique cuántas variables tomarían el valor cero y cómo identificaría las restricciones activas en el valor óptimo. Explique su razonamiento, de otro modo, no se asignará puntaje.

Problema 2 (30% ≈ 35min)

Una empresa láctea produce 2 tipos de productos. Leche entera con un costo de $40/Kg y un requerimiento de 2 horas-hombre por Kg. Mantequilla con un costo de $60/Kg y 1 hora-hombre por Kg. Se sabe que el precio de mercado de la leche entera es $130/Kg y el de la mantequilla es de $200/Kg.

a) **(5%)** Formule el PPL para determinar el plan de producción óptimo de la empresa. Considere que la empresa cuenta con un capital de $15000 y 400 horas-hombre al mes.

b) **(5%)** Determine la solución óptima del PPL usando el método que estime conveniente.
c) **(5%)** Realice un análisis de sensibilidad respecto a la máxima variación posible que puede tener el precio de la mantequilla para que la solución óptima no cambie
d) **(5%)** Para el rango de valores determinados en (c), grafique los ingresos totales de la empresa en función del precio de la mantequilla. Indique todos los puntos relevantes de la función en el gráfico
e) **(10%)** ¿Cuál sería la máxima disposición a pagar de la empresa por aumentar 1 hora de mano de obra? Determine el rango de valores para el cual su respuesta aplica.

Problema 3 (20% ≈ 25min)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & \leq & 3 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

a) **(5%)** Resuelva el PPL por medio del método gráfico. Indique el valor de la función objetivo y de las variables originales del PPL en el óptimo.
b) **(5%)** Formule el PPL en formato estándar. Luego, identifique todas las soluciones básicas factibles y los vértices del espacio factible asociados a este problema.
c) **(5%)** Determine la solución óptima del problema por medio del algoritmo Simplex.
d) **(5%)** ¿Identifica algunas(s) anomalía (s) asociada (s) a la solución óptima? Fundamente su respuesta con base en lo realizado en las partes anteriores.

Problema 4 (20% ≈ 25min)

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ x_2 + 3x_3 & \leq & 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 10 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

y las siguientes dos bases factibles: $x_{B(1)} = x_1, x_6, x_3$, $x_{B(2)} = x_1, x_2, x_3$. Además se sabe que:

$$B_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_{(2)}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando análisis matricial verifique si estas bases son óptimas o no, y en caso de que al menos una lo sea, calcule la solución óptima del problema.