Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Profesores: Pablo Guarda - Juan Antonio Carrasco

Métodos de Optimización

Taller 5: Análisis de sensibilidad

Abril 18, 2019

Problemas

1. **(30% ≈ 40min)** Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 60x_1 + bx_2 + 20x_3 \\
\text{s.a} & \\
 & \begin{array}{rl}
8x_1 + 6x_2 + x_3 & \leq 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 & \leq 20 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 & \leq a \\
x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
\end{array}
$$

   Se le indica que considere la base $[h_1,x_3,x_1]$ en que h1 corresponde a la variable de holgura de la primera restricción.

   (a) **(10%)** Determine el rango de a y b para el cual la base es óptima y única

   (b) **(10%)** Determine el rango de a y b para el cual la base es óptima pero no única

   (c) **(10%)** Determine el rango de a y b para el cual la solución asociada es degenerada. En este caso identifique todas las restricciones activas en la solución asociada (elija una solución degenerada si es que encuentra más de una)

2. **(30% ≈ 40min)** Una empresa de Ingeniería Civil Hidráulica provee tres tipos de tuberías con tamaño estándar para conducción de agua potable: asbestos, hierro y hormigón. La producción de éstas se basa en dos recursos principales limitados, R1 y R2. Producir tuberías de hierro aumenta en 2 unidades la disponibilidad de R1, mientras que producir tuberías de asbestos aumenta en 1 unidad la disponibilidad de R2. Por otro lado, producir tuberías de hormigón y asbesto disminuye en 2 y 1 unidades la disponibilidad de R1, respectivamente; mientras que producir tuberías de hierro y hormigón disminuye en 3 y 1 unidades la disponibilidad de R2, respectivamente. Considere que inicialmente hay una disponibilidad de 10 unidades de R1 y 6 unidades de R2, y los precios en el mercado de tuberías de hierro, hormigón y asbesto son de \$3, \$7 y \$2, respectivamente.

   (a) **(10%)** Plantee el problema de optimización para planificar la producción de tuberías de la empresa, indicando supuestos, variables de decisión, función objetivo y restricciones

   (b) **(10%)** Determine la solución óptima del problema por medio del algoritmo simplex

   (c) **(10%)** Producto de dinámicas del mercado, el precio de las tuberías de hormigón cambia a \$p. Determine el rango de valores que puede tener p para que la base óptima encontrada en (b) no cambie.

3. **(40% $\approx$ 70min)** Una fábrica produce dos tipos de planchas de aluminio pintado y requiere determinar la cantidad a producir de cada tipo. Producir una plancha del tipo 1 requiere 7 m2 de aluminio bruto, 0.3 lts de pintura y 15 min de trabajo. El costo por plancha de tipo 1 (en aluminio y pintura) para el fabricante es de \$400 y el precio unitario de venta es de \$1200. Producir una plancha del tipo 2 requiere 14 m2 de aluminio bruto, 0.3 lts de pintura y 5 min de trabajo. El costo por plancha de tipo 2 es \$900 y el precio unitario de venta es de \$1500. El fabricante maneja un stock diario máximo de 630 m^2 de aluminio bruto y al menos 15 lts de pintura. Trabajará solo y dispone de 10 hrs cada día. El fabricante no dispone de un trabajo alternativo para las horas no utilizadas en fabricar planchas de aluminio ¿Cuánto es lo óptimo a producir de modo de maximizar la utilidad?

   (a) **(5%)** Formule el PPL para determinar el plan de producción óptimo de la fábrica

   (b) **(5%)** Identifique la solución óptima del problema con Octave

   (c) **(10%)** Realice un análisis de sensibilidad respecto a la máxima variación posible que pueden tener los ingresos netos de cada tipo de plancha de modo que la solución no cambie. Utilice el enfoque gráfico y matricial para determinar el rango de valores.

   (d) **(10%)** Para el rango encontrado en (c), grafique con Octave los ingresos totales de la fábrica para todos los valores posibles de costos de la plancha 1 y 2.

   (e) **(10%)** Realice un análisis de sensibilidad respecto a la máxima variación posible de aluminio, pintura y trabajo, tal que no cambie la solución actual. Utilice el enfoque matricial y gráfico para determinar el rango de valores.

   (f) **(20%) (Bonus)** Para el rango encontrado en (e), determine (con Octave) el precio sombra del aluminio, pintura y mano de obra (por minuto). Además, verifique que el precio sombra se mantiene constante dentro del rango de valores en el cual no cambia la base óptima.

Solucion problema 1

Para responder a las preguntas primero transformaremos el problema a formato estándar. La notación de las variables de holgura es consistente con la utilizada en el enunciado de la pregunta

Formato estándar:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 60x_1 + bx_2 + 20x_3 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{array}{rcl}
8x_1 + 6x_2 + x_3 + h_1 & = & 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + h_2 & = & 20 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + h_3 & = & a \\
x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3 & \geq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

A partir de la base dada, derivaremos todas las matrices y vectores para realizar el análisis de sensibilidad de las soluciones de un PPL. Sin embargo, el foco de la pregunta es evaluar la optimalidad y factibilidad de la base entregada. El orden de las columnas de los vectores y matrices de variables básicas sigue el mismo orden del enunciado (h_1,x_3,x_1).

Vector de variables básicas

$$x_B = \begin{bmatrix} h_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Vector de variables no básicas

$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Vectores de costos de variables básicas y no básicas en función objetivo

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix}$$

$$c_N = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Submatrices asociadas a variables básicas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Submatriz asociadas a variables no básicas

$$N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lado derecho de restricciones

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ a \end{bmatrix}$$

a) Determine el rango de a y b para el cual la base es óptima y única

i) Condición de optimalidad:

$$r_N = c_N - c_B B^{-1} N \leq 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\leq 0 \\ \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35 & 10 & 10 \end{bmatrix} &\leq 0 \\ \begin{bmatrix} b-35 & -10 & -10 \end{bmatrix} &\leq 0 \end{aligned}$$

Entonces, la condición para que la base sea óptima es $b \leq 35$.

ii) Condición de factibilidad:

$$x_B^* = B^{-1} b \geq 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ a \end{bmatrix} &\geq 0 \\ \begin{bmatrix} 88 - 8a \\ 40 - 4a \\ -10 + 1.5a \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

Así se derivan 3 restricciones para a

$$\begin{aligned} a &\leq 11 \\ a &\leq 10 \\ a &\geq 20/3 \end{aligned}$$

Finalmente, la condición para que la solución sea factible es:

$$20/3 \leq a \leq 10$$

Notar que no es necesario imponer condiciones sobre las variables no básicas, dado que son 0 en el óptimo.

iii) Condición de unicidad de la solución:

$$r_N = c_N - c_B B^{-1} N < 0$$
$$\begin{bmatrix} b - 35 & -10 & -10 \end{bmatrix} < 0$$

Por lo cual, la condición para que la solución óptima sea única es $b < 35$.

Finalmente, las condiciones para que la base sea óptima y única son las siguientes:

$$20/3 \leq a \leq 10$$
$$b < 35$$

b) Determine el rango de a y b para el cual la base es óptima pero no única

Para que existan múltiples soluciones, el costo reducido de una variable no básica debe ser igual a 0. De esta forma, la condición para b se debe cumplir en igualdad

$$20/3 \leq a \leq 10$$
$$b = 35$$

c) Determine el rango de a y b para el cual la solución asociada es degenerada. En este caso identifique todas las restricciones activas en la solución asociada (elija una solución degenerada si es que encuentra más de una)

Independiente de si la solución es o no degenerada, las restricciones (2) y (3) son activas puesto que las variables de holgura h_2 y h_3 son no básicas en el óptimo.

Para que una solución sea degenerada, el valor de alguna variable básica debe ser 0 en el óptimo. Entonces evaluaremos la condición de factibilidad asociada a las variables básicas:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 - 8a \\ 40 - 4a \\ -10 + 1.5a \end{bmatrix} \geq 0$$

Para $a = 10$, la variable básica x_3 es igual a 0. Para $a = 20/3$ la variable básica x_1 es igual a 0. En ambos casos, se produce una solución degenerada.

Solucion problema 2

Parte a)

Supuestos

- Todo lo que se produce se vende
- Las variables de decisión pueden tomar valores no enteros

Variables de decisión

- x_1: cantidad de tuberías de asbesto
- x_2: cantidad de tuberías de hierro
- x_3: cantidad de tuberías de hormigón

Función objetivo

Max $2x_1 + 3x_2 + 7x_3$

Restricciones

- Disponibilidad de recursos

  $x_1 + 2x_3 \leq 10 + 2x_2$ (R1)
  $3x_2 + x_3 \leq 6 + x_1$ (R2)

- No negatividad

  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

PPL

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Max} & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 & & \\
\text{s.a} & & & \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_3 & \leq & 10 \\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 6 \\
& x_1,x_2,x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Parte b)

Problema en formato estándar:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Max} & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 & & \\
\text{s.a} & & & \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 10 \\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 & = & 6 \\
& x_1,x_2,x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

No es necesario realizar la fase 1 de Simplex puesto que es trivial encontrar una SBIF para inicializar el algoritmo.

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 10, x_5 = 6$$

Las iteraciones de Simplex son las siguientes:

Iteración 0

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
f_1	1	-2	2	1	0	10
f_2	-1	3	1	0	1	6
-1	2	3	7	0	0	0

Iteración 1

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
f_1	1/2	-1	1	1/2	0	5
f_2	-3/2	4	0	-1/2	1	1
-1	-3/2	10	0	-7/2	0	-35

Iteración 2

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
f_1	1/8	0	1	3/8	1/4	21/4
f_2	-3/8	1	0	-1/8	1/4	1/4
-1	9/4	0	0	-9/4	-5/2	-75/2

Iteración 3

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
f_1	1	0	8	3	2	42
f_2	0	1	3	1	1	16
-1	0	0	-18	-9	-7	-132

Solución óptima:

$$x_1^* = 42, x_2^* = 16, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 0$$

c) Producto de dinámicas del mercado, el precio de las tuberías de hormigón cambia a \$p. Determine el rango de valores que puede tener p para que la base óptima encontrada en (b) no cambie.

Para responder esta pregunta tendremos que desarrollar el análisis de sensibilidad con el enfoque matricial. Así definimos los vectores y matrices relevantes para el análisis:

Vector de variables básicas

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vector de variables no básicas

$$x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Vectores de costos de variables básicas y no básicas en función objetivo

$$c_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_N = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Submatrices asociadas a variables básicas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Submatriz asociadas a variables no básicas

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lado derecho de restricciones

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Se pide realizar un análisis de sensibilidad con el costo asociado a una variable no básica. Para ello analizamos la condición de optimalidad asociada a los costos reducidos de variables no básicas:

$$r_N = c_N - c_B B^{-1} N \leq 0$$

Para el análisis de sensibilidad de una variable no básica solo se requiere analizar la condición asociada a su costo reducido. Definimos $c_3 = p$ y luego analizamos la condición para el costo reducido de x_3:

$$\begin{aligned} c_3 - c_B B^{-1} N_3 &\leq 0 \\ p - \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &\leq 0 \\ p - \begin{bmatrix} 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &\leq 0 \\ p - 25 &\leq 0 \end{aligned}$$

De esta forma, concluimos que la base óptima no cambiaría para $p \leq 25$.

Solucion problema 3

Parte a)

Supuestos

- Todo lo que se produce se vende
- Las variables de decisión pueden tomar valores no enteros

Variables de decisión

- x_1: cantidad de planchas de aluminio tipo 1
- x_2: cantidad de planchas de aluminio tipo 2

Función objetivo

Max $(1200 - 400)x_1 + (1500 - 900)x_2$

Restricciones

- Disponibilidad de recursos

  $7x_1 + 14x_2 \leq 630$ (Aluminio bruto)
  $0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 15$ (Pintura)
  $15x_1 + 5x_2 \leq 600$ (Trabajo)

- No negatividad

  $x_1, x_2 \geq 0$

PPL

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 800x_1 + 600x_2 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{array}{rcl}
7x_1 + 14x_2 & \leq & 630 \\
0.3x_1 + 0.3x_2 & \geq & 15 \\
15x_1 + 5x_2 & \leq & 600 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

Para responder las preguntas posteriores dejaremos el PPL en formato estándar:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 800x_1 + 600x_2 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{array}{rcl}
7x_1 + 14x_2 + x_3 & = & 630 \\
0.3x_1 + 0.3x_2 - x_4 & = & 15 \\
15x_1 + 5x_2 + x_5 & = & 600 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

b) Identifique la solución óptima del problema con Octave

```
In [2]: clear % eliminar todas las variables creadas previamente
        clc % limpiar consola
```

Optimizador de Octave.

Variables de decisión:

x_1: cantidad de planchas de aluminio tipo 1 x_2: cantidad de planchas de aluminio tipo 2

Ejecución de optimizador

```
In [3]: %Vector de costos de función objetivo
        c=[800 600 0 0 0]
        %Matriz de restricciones
        A=[7 14 1 0 0; 0.3 0.3 0 -1 0;15 5 0 0 1]
        %Vector con lado derecho de restricciones
        b=[630;15;600]
        %Límite inferior variables
        lb=[0,0,0,0,0]
        %Límite superior variables
        ub=[]
        %Tipo de restricciones
        ctype='SSS'
        %Tipo de variables
        vartype='CCCCC'
        %Opción para el tipo de output del optimizador
        param.msglev=2;
```

```
c =

   800   600     0     0     0

A =

    7.00000   14.00000    1.00000    0.00000    0.00000
    0.30000    0.30000    0.00000   -1.00000    0.00000
   15.00000    5.00000    0.00000    0.00000    1.00000

b =

   630
    15
   600

lb =

   0   0   0   0   0
```

```
ub = [](0x0)
ctype = SSS
vartype = CCCCC
```

```
In [4]: #Ejecución del optimizador
        [xOpt,fOpt]= glpk(c=c,A=A,B=b,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
      0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   4.518e+01 (1)
      2: obj =   3.200000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
*     3: obj =   4.200000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
xOpt =

   30.00000
   30.00000
    0.00000
    3.00000
    0.00000

fOpt =  42000
```

Solución óptima

- Función objetivo: 42000
- Variables: $x_1 = 30$, $x_2 = 30$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$

c) Realice un análisis de sensibilidad respecto a la máxima variación posible que pueden tener los ingresos netos de cada tipo de plancha de modo que la solución no cambie. Utilice el enfoque gráfico y matricial para determinar el rango de valores.

i) Enfoque gráfico

* Realizar de forma personal y verificar consistencia con análisis matricial

ii) Método matricial

Definimos los vectores y matrices relevantes para el análisis de sensibilidad:

Vector de variables básicas

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Vector de variables no básicas

$$x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Vectores de costos de variables básicas y no básicas en función objetivo

$$c_B = \begin{bmatrix} 800 & 600 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Submatrices asociadas a variables básicas

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/35 & 0 & 2/25 \\ 3/35 & 0 & -1/25 \\ 3/175 & -1 & 3/250 \end{bmatrix}$$

Submatriz asociadas a variables no básicas

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lado derecho de restricciones

$$b = \begin{bmatrix} 630 \\ 15 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Para el análisis de sensibilidad de variables básicas se requiere analizar todas las condiciones asociadas a los costos reducidos de las variables no básicas. A diferencia del análisis de sensibilidad para las variables no básicas, los costos de variables básicas estarán acotados inferior y superiormente. La condición evaluada es la siguiente:

$$c_N - c_B B^{-1} N \leq 0$$

Definamos c_1 y c_2 como el valor del ingreso neto asociado a x_1 y x_2 y evaluemos la condición anterior:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/35 & 0 & 2/25 \\ 3/35 & 0 & -1/25 \\ 3/175 & -1 & 3/250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &\leq 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/35c_1 + 3/35c_2 & 0 & 2/25c_1 - 1/25c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &\leq 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/35c_1 + 3/25c_2 & 2/25c_1 - 1/25c_2 \end{bmatrix} &\leq 0
\end{aligned}$$

De esta forma, las condiciones para c_1 y c_2 son las siguientes:

$$\begin{aligned}
1/35c_1 - 3/25c_2 &\leq 0 \\
-2/25c_1 + 1/25c_2 &\leq 0
\end{aligned}$$

Para el análisis de sensibilidad del ingreso neto asociado a a plancha de aluminio tipo 1, dejamos libre c_1 y fijamos $c_2 = 600$, con lo cual:

$$\begin{aligned}
1/35c_1 - 3/25 \cdot 600 \leq 0 &\rightarrow c_1 \leq 1800 \\
-2/25c_1 + 1/25 \cdot 600 \leq 0 &\rightarrow c_1 \geq 300
\end{aligned}$$

Así, para que la base óptima se mantenga ante cambios en los ingresos netos asociados a la plancha de aluminio tipo 1 se debe cumplir que $\$300 \leq c_1 \leq \$1800$.

***Realizar el análisis de sensibilidad de los ingresos netos asociados a la planta de aluminio tipo 2 de forma personal**

d) Para el rango encontrado en (c), grafique con Octave los ingresos totales de la fábrica para todos los valores posibles de costos de la plancha 1 y 2.

```
In [1]: clear % eliminar todas las variables creadas previamente
        clc % limpiar consola
```

Función objetivo

```
In [2]: function z = funcionobjetivo(x1,x2,c1)

            z = c1*x1+600*x2;

        end
```

```
In [3]: solOpt = [30,30] % x1,x2
```

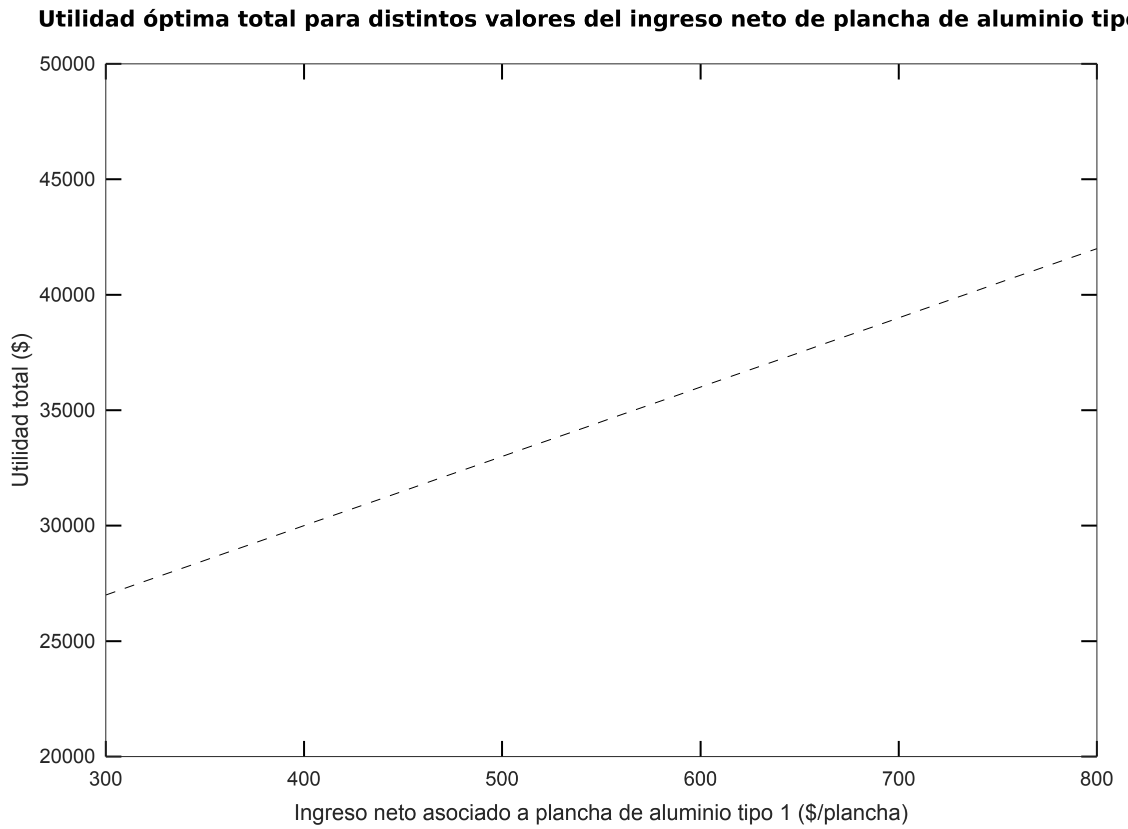
```
solOpt =

   30   30
```

Utilidad óptima total para distintos valores de los ingresos netos asociados a la plancha de aluminio tipo 1

```
In [4]: x1 = linspace(300,1800); %Rango de valores de input para las funciones

        c1 = plot(x1,funcionobjetivo(solOpt(1),solOpt(2),x1),'--k');
        hold on
        title ('Utilidad óptima total para distintos valores del ingreso neto de plancha de alum
        xlabel ('Ingreso neto asociado a plancha de aluminio tipo 1 ($/plancha)')
        ylabel ('Utilidad total ($)')
        xlim([300 800])
        ylim([20000 50000])
        hold off
```



Con el optimizador de octave se verificará lo que ocurre para valores de ingresos netos fuera o dentro del rango utilizado para graficar

Parámetros optimizador

In [5]:
```
%Matriz de restricciones
A=[7 14 1 0 0; 0.3 0.3 0 -1 0;15 5 0 0 1]
%Vector con lado derecho de restricciones
b=[630;15;600]
%Límite inferior variables
lb=[0,0,0,0,0]
%Límite superior variables
ub=[]
%Tipo de restricciones
ctype='SSS'
%Tipo de variables
vartype='CCCCC'
%Opción para el tipo de output del optimizador
param.msglev=2;
```

```
A =
```

```
     7.00000   14.00000    1.00000    0.00000    0.00000
     0.30000    0.30000    0.00000   -1.00000    0.00000
    15.00000    5.00000    0.00000    0.00000    1.00000

b =

   630
    15
   600

lb =

   0   0   0   0   0

ub = [](0x0)
ctype = SSS
vartype = CCCCC
```

A continuación se verificará que para ingresos netos de la plancha 1 que están dentro del rango encontrado, la base óptima no cambia.

i) $c_1 = 1799$

```
In [6]: %Vector de costos de función objetivo
        c=[1799 600 0 0 0]
        #Ejecución del optimizador
        [xOpt,fOpt]= glpk(c=c,A=A,B=b,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
c =

   1799    600      0      0      0

      0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   4.518e+01 (1)
      2: obj =   4.199000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
*     3: obj =   7.197000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
xOpt =

   30.00000
   30.00000
    0.00000
    3.00000
    0.00000

fOpt =  71970
```

ii) $c_1 = 301$

```
In [7]: %Vector de costos de función objetivo
        c=[301 600 0 0 0]
        #Ejecución del optimizador
        [xOpt,fOpt]= glpk(c=c,A=A,B=b,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
c =

   301   600     0     0     0

      0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   4.518e+01 (1)
      2: obj =   2.701000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
*     3: obj =   2.703000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
xOpt =

   30.00000
   30.00000
    0.00000
    3.00000
    0.00000

fOpt =  27030.00000
```

- Ahora se verificará que para ingreso netos de la plancha 1 fuera del rango encontrado, la base óptima cambia.

iii) $c_1 = 1801$

```
In [8]: c=[1801 600 0 0 0]
        #Ejecución del optimizador
        [xOpt,fOpt]= glpk(c=c,A=A,B=b,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
c =

   1801    600      0      0      0

      0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   4.518e+01 (1)
      2: obj =   4.201000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
*     4: obj =   7.203500000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
xOpt =

    35.00000
    15.00000
   175.00000
     0.00000
     0.00000

fOpt =  72035
```

Si el ingreso neto es mayor a 1800 (1801 > 1800), x_4 sale de la base y x_3 entra a la base Es decir, respecto al caso original, la restricción 2 se vuelve activa y la restricción 1 deja de ser activa

iv) $c_1 = 299$

```
In [9]: c=[299 600 0 0 0]
        #Ejecución del optimizador
        [xOpt,fOpt]= glpk(c=c,A=A,B=b,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
c =

   299   600     0     0     0

      0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   4.518e+01 (1)
      2: obj =   2.699000000e+04 inf =   0.000e+00 (0)
xOpt =

    10.00000
    40.00000
     0.00000
     0.00000
   250.00000

fOpt =  26990
```

Si el ingreso neto es menor a 300 (299 < 300), x_4 sale de la base y x_5 entra a la base Es decir, respecto al caso original, la restricción 2 se vuelve activa y la restricción 3 deja de ser activa

*** Repita el ejercicio de forma personal para los ingresos netos asociados a la plancha de aluminio tipo 2**

Parte e)

i) Enfoque gráfico

* Realizar de forma personal y verificar consistencia con análisis matricial

ii) Método matricial

Para el análisis de sensibilidad asociado a la disponibilidad de recursos de las restricciones del PPL, basta verificar el cumplimiento de la siguiente condición:

$$x_B^* = B^{-1}b \geq 0$$

Sustituimos con los valores determinados en (b) y dejamos los parámetros de disponibilidad de recursos libres (b_1,b_2,b_3):

$$\begin{bmatrix} -1/35 & 0 & 2/25 \\ 3/35 & 0 & -1/25 \\ 3/175 & -1 & 3/250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} -1/35b_1 + 2/25b_3 \\ 3/35b_1 - 1/25b_3 \\ 3/175b_1 - b_2 + 3/250b_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

Para evaluar la máxima variación de cada recurso sin que cambie la base óptima, se realizará un análisis *ceteris paribus.*

Aluminio bruto (b_1):

Fijamos $b_2 = 15$, $b_3 = 600$

$$\begin{aligned} -1/35b_1 + 2/25b_3 \geq 0 &\rightarrow b_1 \leq 1680 \\ 3/35b_1 - 1/25b_3 \geq 0 &\rightarrow b_1 \geq 280 \\ 3/175b_1 - b_2 + 3/250b_3 \geq 0 &\rightarrow b_1 \geq 455 \end{aligned}$$

Con esto se concluye que $455 \leq b_1 \leq 1680$

*Realizar el análisis para la pintura y mano de obra de forma personal.

f) (Bonus) Para el rango encontrado en (e), determine (con Octave) el precio sombra del aluminio, pintura y mano de obra (por minuto). Además, verifique que el precio sombra se mantiene constante dentro del rango de valores en el cual no cambia la base óptima.

El precio sombra del aluminio es 28.57$ por metro cuadrado. Demuestre de forma personal cómo determinar este valor con Octave. Haga el mismo ejercicio para el precio sombra de la pintura y la mano de obra.