Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Profesores: Pablo Guarda - Juan Antonio Carrasco

Taller 3: Simplex I

Abril 4, 2019

Problemas

1. **(60%)** La tabla de abajo presenta la lista y cantidad de ingredientes necesarios para preparar las porciones de panqueques y queques que se indican en paréntesis.

Panqueques (40 unidades)	**Queque (medio kilo)**
2 tazas de harina	2 tazas de harina
3 huevos	3 huevos
Media taza de agua fría	Media taza de agua fría
4 tazas de leche fría	1 taza de leche fría
Media taza de azúcar flor	1 taza de azúcar flor
125 gramos de mantequilla	250 gramos de mantequilla

Las utilidades netas por la venta de panqueques y queques es \$60 por panqueque y \$50 por cada 10 gramos de queque. La disponibilidad de los ingredientes es la siguiente:

- 10 tazas de harina, aproximadamente,
- 1 docena de huevos
- 2 litros de leche (8 tazas approx.)
- 1 kilo de azúcar flor (6 tazas approx.)
- 750 gramos de mantequilla y
- El agua es ilimitada.

(a) **(12%)** Formule el modelo de programación lineal para determinar cuántos panqueques cocinar, y cuántos gramos de queque hornear, de forma que la utilidad neta total del fabricante sea máxima. Defina en su respuesta todos los elementos relevantes para la formulación del modelo.

(b) **(12%)** Resuelva el problema mediante el método gráfico. Identifique en el gráfico (i)la región factible del problema, (ii) las restricciones, y (iii) el vértice y la curva de nivel de la función objetivo para la cual se alcanza la solución óptima (ayuda: creé un script en GNU Octave).

(c) **(12%)** Verifique el valor óptimo identificado en la parte de anterior utilizado el Solver de Microsoft Excel y de GNU Octave.

(d) **(12%)** Resuelva el problema con Simplex. En cada etapa del algoritmo, escriba la tabla correspondiente y la formulación algebraica equivalente del problema original.

(e) **(12%)** Relacione la solución encontrada mediante Simplex y el método gráfico. En particular, (i) describa los vértices que se visitan en cada iteración del algoritmo y fundamente por qué se sigue ese orden (ii) indique las restricciones que están activas en cada iteración del algoritmo.

2. **(40%)** Considere el siguiente problema de programación lineal

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\
\text{s.a} & \\
& \begin{array}{rcll}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq & 10 & \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 12 & \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 8 & \\
x_i & \geq & 0 & \forall i \in \{1,2,3\}
\end{array}
\end{array}
$$

(a) **(15%)** Identifique todos los puntos factibles que son candidatos a óptimo en el problema de optimización (ayuda: cree un script en Octave)

(b) **(15%)** Determine la solución óptima del problema anterior desarrollando a mano todas las iteraciones del método simplex. Verifique su respuesta mediante la herramienta Solver de GNU Octave

(c) **(10%)** Con la tabla obtenida en la última iteración del algoritmo simplex, indique cuáles son las restricciones activas y las holguras asociadas a cada restricción del problema.

Solucion problema 1

Parte a)

Supuestos

- Las variables de decisión pueden tomar valores no enteros
- Se vende todo lo que se produce

Variables de decisión

- x_1: Unidades de panqueques producidos
- x_2: Gramos de queque producidos

Función objetivo

Max $60x_1 + 5x_2$

Restricciones

1) Disponibilidad de ingredientes

$$
\begin{aligned}
\frac{2x_1}{40} + \frac{2x_2}{500} &\leq 10 \qquad \text{(Harina [tazas])}\\
\frac{3x_1}{40} + \frac{3x_2}{500} &\leq 12 \qquad \text{(Huevos [unidades])}\\
\frac{4x_1}{40} + \frac{x_2}{500} &\leq 8 \qquad \text{(Leche [tazas])}\\
\frac{0.5x_1}{40} + \frac{0.5x_2}{500} &\leq 6 \qquad \text{(Azúcar flor [tazas])}\\
\frac{125x_1}{40} + \frac{250x_2}{500} &\leq 750 \qquad \text{(Mantequilla [gramos])}
\end{aligned}
$$

2) No negatividad

$x_1, x_2 \geq 0$

b) Resuelva el problema mediante el metodo gráfico. Identifique (i) la región factible del problema, (ii) las restricciones, y (iii) el vértice y la curva de nivel de la función objetivo para la cual se alcanza la solución óptima (ayuda: cree un script en GNU Octave).

```
In [1]: clear % eliminamos todas las variables creadas previamente en Octave/Matlab
```

i) Variables de decisión:

x_1: Unidades de panqueques producidos x_2: Gramos de queque producidos

ii) Restricciones

Disponibilidad de Harina

```
In [2]: function x2 = harina(x1)

            %Aplicamos un truco para evitar despejar ecuaciones a mano. Considere una ecuación d
            a1 = 2/40;
            a2 = 2/500;
            c = 10;
            x2 = (c-a1*x1)/a2;

        end
```

Disponibilidad de huevos

```
In [3]: function x2 = huevos(x1)

            a1 = 3/40;
            a2 = 3/500;
            c = 12;
            x2 = (c-a1*x1)/a2;

        end
```

Disponibilidad de leche

```
In [4]: function x2 = leche(x1)

            a1 = 4/40;
            a2 = 1/500;
            c = 8;
            x2 = (c-a1*x1)/a2;

        end
```

Disponibilidad de azucar

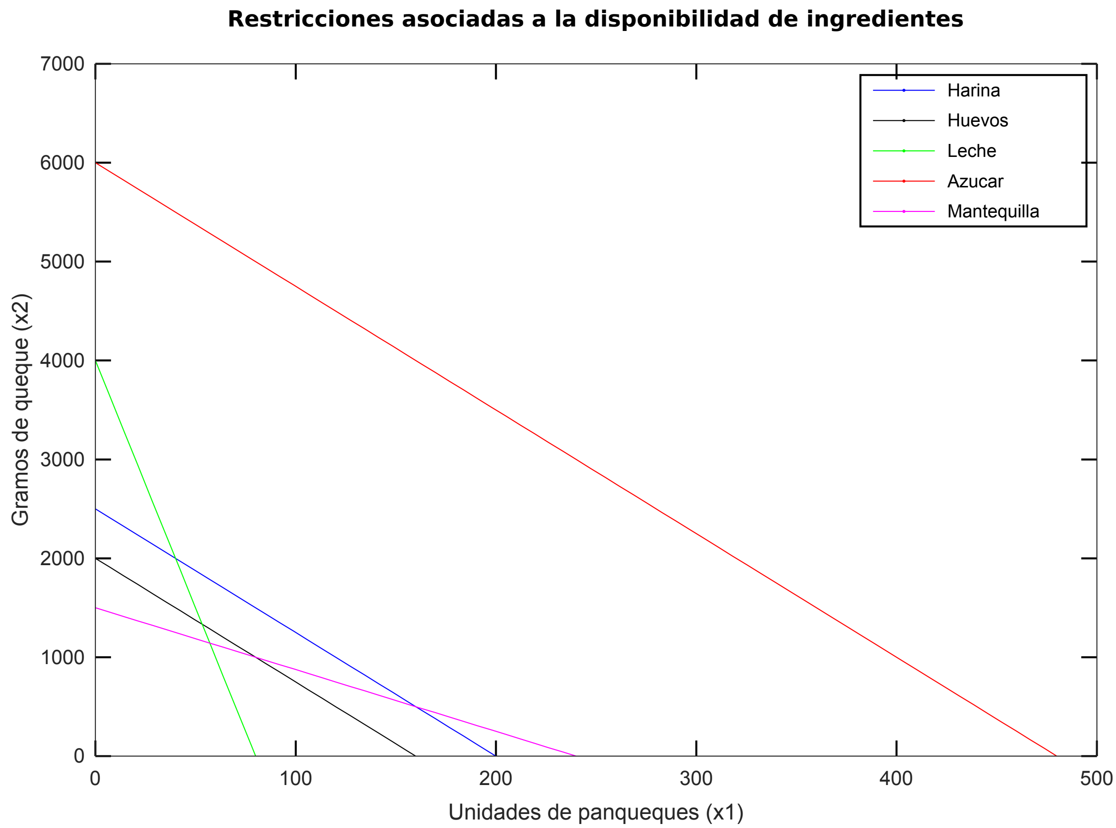
```
In [5]: function x2 = azucar(x1)

            a1 = 0.5/40;
            a2 = 0.5/500;
            c = 6;
            x2 = (c-a1*x1)/a2;

        end
```

Disponibilidad de mantequilla

```
In [6]: function x2 = mantequilla(x1)

            a1 = 125/40;
            a2 = 250/500;
            c = 750;
            x2 = (c-a1*x1)/a2;

        end
```

Gráfico restricciones

```
In [7]: x1 = linspace(0,700); %Rango de valores de input de las funciones

        plot(x1,harina(x1),'b') %color azul para disponibilidad de harina
        hold on
        plot(x1,huevos(x1),'k') %color negro para disponibilidad de huevos
        hold on
        plot(x1,leche(x1),'g') %color verde para disponibilidad de leche
        hold on
        plot(x1,azucar(x1),'r') %color rojo para disponibilidad de azucar
        hold on
        plot(x1,mantequilla(x1),'m') %color morado para disponibilidad de mantequilla
        title ('Restricciones asociadas a la disponibilidad de ingredientes')
        xlabel ('Unidades de panqueques (x1)')
        ylabel ('Gramos de queque (x2)')
        ylim([0 7000])
        xlim([0 500])
        legend('Harina','Huevos', 'Leche', 'Azucar', 'Mantequilla') %Legenda del grafico
        hold off
```



iii) Región factible

- Los vértices de la región factible son 4 y corresponden a intersecciones entre distintos pares de restricciones (incluidas las de no negatividad).
- El primer vértice es el origen (0,0) que denominaremos 'v1'. Los vertices 'v2','v3','v4', son definidos según el sentido del reloj.

Vértices

```
In [8]: v1 =  [0,0]

v1 =

   0   0



In [9]: v2 = [0,mantequilla(x1 = 0)] % intersección restricción de mantequilla con eje vertical

v2 =
```

```
       0   1500
```

```
In [10]: v3 = (inv([125/40 250/500; 4/40 1/500])*[750;8])' % Interseccion restricciones de mante
```

```
v3 =

     57.143   1142.857
```

```
In [11]: v4 = (inv([4/40 1/500;0 1])*[8;0])' % intersección restricción de leche con eje horizon
```

```
v4 =

   80    0
```

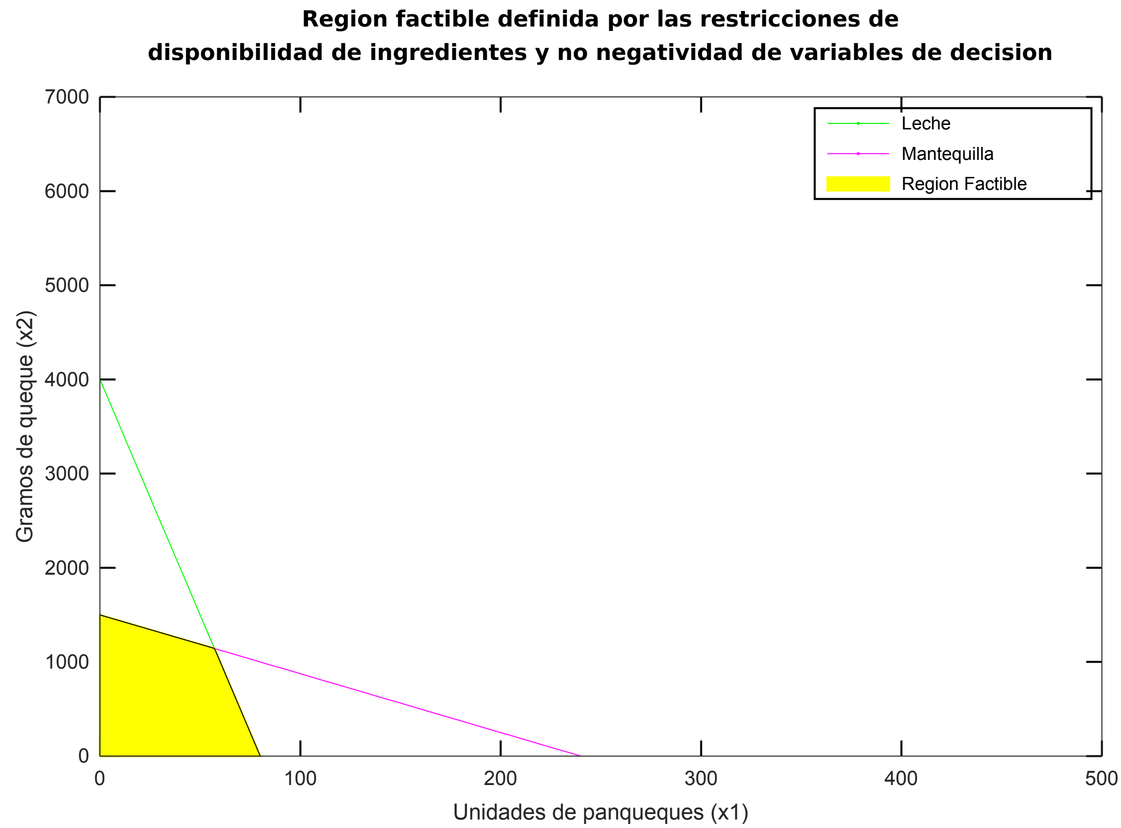
Creamos una matriz de dos columnas con las coordenadas x e y de los vertices

```
In [12]: v = [v1;v2;v3;v4]
```

```
v =

      0.00000      0.00000
      0.00000   1500.00000
     57.14286   1142.85714
     80.00000      0.00000
```

Gráfico

```
In [13]: %Solo graficamos restricciones que definen espacio factible (asociadas a mantequilla y

         x1 = linspace(0,700); %Rango de valores de input para las funciones

         plot(x1,leche(x1),'g') %color verde para disponibilidad de leche
         hold on
         plot(x1,mantequilla(x1),'m') %color morado para disponibilidad de mantequilla
         fill(v(:,1),v(:,2),'y') % color amarillo para region factible
         title ({'Region factible definida por las restricciones de' 'disponibilidad de ingredie
         xlabel ('Unidades de panqueques (x1)')
         ylabel ('Gramos de queque (x2)')
         ylim([0 7000])
         xlim([0 500])
         legend('Leche','Mantequilla','Region Factible') %Legenda del grafico
         hold off
```



iv) Solución óptima

Curva de nivel función objetivo

```
In [14]: function x2 = curvadenivel(z,x1)

             #Aplicamos nuevamente truco para evitar error en despeje algebraico: z = c1*x1 + c2
             c1 = 60;
             c2 = 5;
             x2 = (z-c1*x1)/c2;

         end
```

```
In [15]: function z = funcionobjetivo(x1,x2)

             z = 60*x1+5*x2;

         end
```

```
In [16]: funcionobjetivo(v2(1),v2(2))
```

```
ans =  7500
```

```
In [17]: funcionobjetivo(v3(1),v3(2))
```

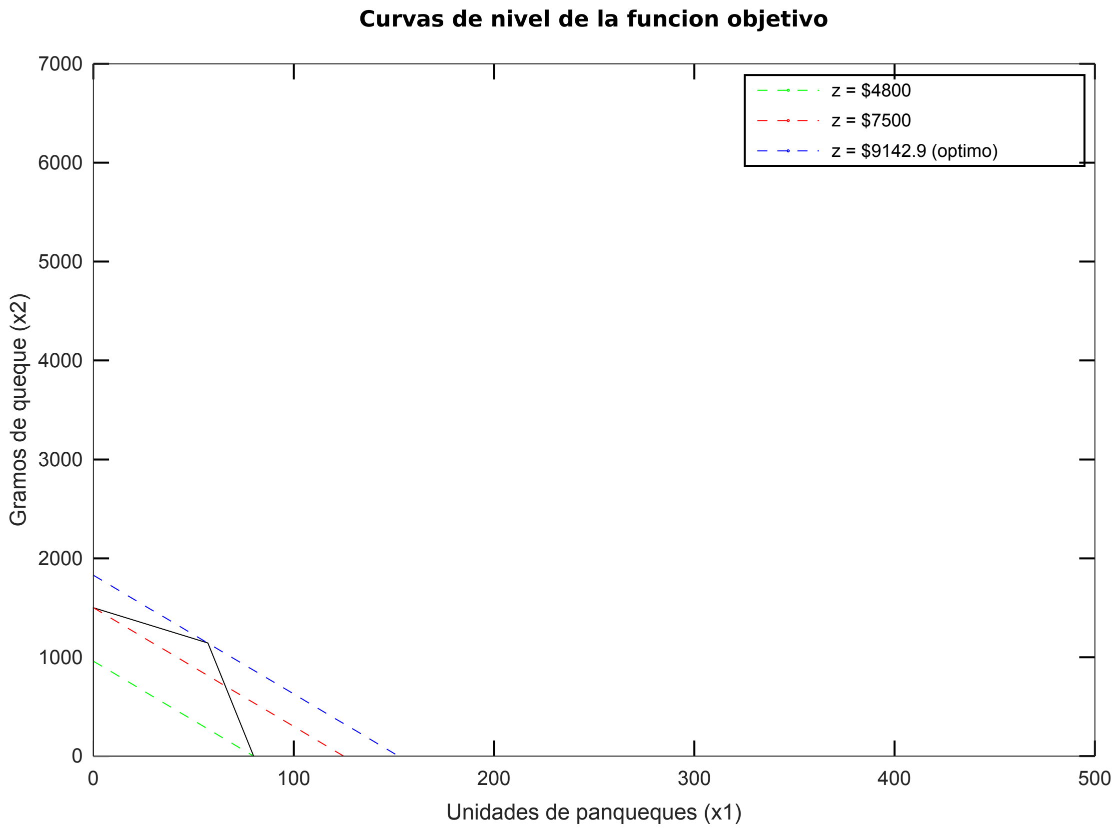
```
ans =  9142.9
```

```
In [18]: funcionobjetivo(v4(1),v4(2))
```

```
ans =  4800
```

Gráfico de las curvas de nivel en los vértices

```
In [19]: x1 = linspace(0,700); %Rango de valores de input para las funciones


         fill(v(:,1),v(:,2),'w','EdgeColor','k')
         hold on
         c1 = plot(x1,curvadenivel(funcionobjetivo(v4(1),v4(2)),x1),'--g'); %Curva de nivel en e
         hold on
         c2 = plot(x1,curvadenivel(funcionobjetivo(v2(1),v2(2)),x1),'--r'); %Curva de nivel en e
         hold on
         c3 = plot(x1,curvadenivel(funcionobjetivo(v3(1),v3(2)),x1),'--b'); %Curva de nivel en e
         hold on
         title ('Curvas de nivel de la funcion objetivo')
         xlabel ('Unidades de panqueques (x1)')
         ylabel ('Gramos de queque (x2)')
         ylim([0 7000])
         xlim([0 500])
         legend([c1 c2 c3], 'z = $4800','z = $7500','z = $9142.9 (optimo)')
         hold off
```



Valor optimo

```
In [20]: vopt = v3 #Variables de decisión en vértice óptimo (v3)
```

```
vopt =

     57.143   1142.857
```

```
In [21]: FOopt = funcionobjetivo(vopt(1),vopt(2)) #Utilidad óptima en vértice óptimo (v3)
```

```
FOopt =  9142.9
```

c) Verifique el valor óptimo identificado en la parte de anterior utilizado el Solver de Microsoft Excel y de GNU Octave.

Matriz de restricciones

```
In [22]: A=[2/40 2/500; 3/40 3/500;4/40 1/500;0.5/40 0.5/500; 125/40 250/500]
```

```
A =

   0.0500000   0.0040000
   0.0750000   0.0060000
   0.1000000   0.0020000
   0.0125000   0.0010000
   3.1250000   0.5000000
```

Lado derecho restricciones

```
In [23]: b=[10 12 8 6 750]
```

```
b =

    10    12     8     6   750
```

Ponderadores función objetivo

```
In [24]: c=[60 5]
```

```
c =

   60    5
```

Parámetros del optimizador

```
In [25]: lb=[0,0];
         ub=[];
         ctype='UUUUU';
         vtype='CC';
         param.msglev=2;
```

Optimización

Solución óptima continua

```
In [26]: glpk(c, A, b, lb, ub,ctype,vtype,s=-1,param)
```

```
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (2)
*     2: obj =   9.142857143e+03 inf =   0.000e+00 (0)
ans =

     57.143
   1142.857
```

- Función objetivo: $9143
- Variables de decisión: $x_1 = 57.143$, $x_2 = 1142.857$
- Así verificamos que la solución coincide con la encontrada por medio del método gráfico

Solución óptima entera

```
In [27]: vtype='II';
         glpk(c, A, b, lb, ub,ctype,vtype,s=-1,param)
```

```
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (2)
*     3: obj =   9.142857143e+03 inf =   0.000e+00 (0)
Long-step dual simplex will be used
+     3: mip =     not found yet <=              +inf        (1; 0)
#     3: obj =   9.142857143e+03 inf =   0.000e+00 (0)
Solution found by heuristic: 9135
+     3: mip =   9.135000000e+03 <=     tree is empty   0.0% (0; 1)
ans =

     57
   1143
```

- Función objetivo: $9135
- Variables de decisión: $x_1 = 57$, $x_2 = 1143$

Parte d)

Formulación estandar del PPL:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Min} & 60x_1 + 5x_2 & & & \\
\text{s.a} & & & & \\
& \dfrac{2x_1}{40} + \dfrac{2x_2}{500} + x_3 & = & 10 & \\
& \dfrac{3x_1}{40} + \dfrac{3x_2}{500} + x_4 & = & 12 & \\
& \dfrac{4x_1}{40} + \dfrac{x_2}{500} + x_5 & = & 8 & \\
& \dfrac{0.5x_1}{40} + \dfrac{0.5x_2}{500} + x_6 & = & 6 & \\
& \dfrac{125x_1}{40} + \dfrac{250x_2}{500} + x_7 & = & 750 & \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \forall i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}
\end{array}$$

Una alternativa (poco conveniente) es aplicar Simplex utilizando la formulación estándar del PPL que incluye todas las restricciones del problema. Los resultados de cada iteración de Simplex son presentados en las tablas de abajo:

Iteración 0								
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
f1	1/20	1/250	1	0	0	0	0	10
f2	3/40	3/500	0	1	0	0	0	12
f3	1/10	1/500	0	0	1	0	0	8
f4	1/80	1/1000	0	0	0	1	0	6
f5	25/8	1/2	0	0	0	0	1	750
-1	60	5	0	0	0	0	0	0

Iteración 1								
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
f1	0	3/1000	1	0	-1/2	0	0	6
f2	0	9/2000	0	1	-3/4	0	0	6
f3	1	1/50	0	0	10	0	0	80
f4	0	3/4000	0	0	-1/8	1	0	5
f5	0	7/16	0	0	-125/4	0	1	500
-1	0	19/5	0	0	-600	0	0	-4800

Iteración 2								
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
f1	0	0	1	0	-2/7	0	-6/875	18/7
f2	0	0	0	1	-3/7	0	-9/875	6/7
f3	1	0	0	0	80/7	0	-8/175	400/7
f4	0	0	0	0	-1/14	1	-3/1750	29/7
f5	0	1	0	0	-500/7	0	16/7	8000/7
-1	0	0	0	0	-2300/7	0	-304/35	-64000/7

Una alternativa más conveniente es utilizar solo las restricciones que definen el espacio factible del problema de optimización. Esto reduce el número de columnas (variables de holgura) y filas (restricciones) de la tabla en cada iteración. Como se observó del análisis gráfico, solo las restricciones asociadas a la leche y la mantequilla definen el espacio factible que contiene los candidatos a vertice óptimo del problema. La formulación del PPL en formato estándar en este caso es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 60x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{4x_1}{40} + \frac{x_2}{500} + x_5 &= 8 \\ \frac{125x_1}{40} + \frac{250x_2}{500} + x_7 &= 750 \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,5,7\} \end{aligned}$$

Los resultados de las iteraciones de Simplex son presentados en las tablas de abajo:

Iteración 0					
M	x1	x2	x5	x7	b
f3	1/10	1/500	1	0	8
f5	25/8	1/2	0	1	750
-1	60	5	0	0	0

Iteración 1					
M	x1	x2	x5	x7	b
f3	1	1/50	10	0	80
f5	0	7/16	-125/4	1	500
-1	0	19/5	-600	0	-4800

Iteración 2					
M	x1	x2	x5	x7	b
f3	1	0	80/7	-8/175	400/7
f5	0	1	-500/7	16/7	8000/7
-1	0	0	-2300/7	-304/35	-64000/7

En ambos casos, el valor de las variables básicas y de la función objetivo en el vertice óptimo son idénticos:

$$x_1 = 400/7 = 57{,}1$$

$$x_2 = 8000/7 = 1142.9$$

$$z^* = 64000/7 = 9142.9$$

.

La formulación algebraica equivalente del problema original cambia en cada iteración de Simplex y se deduce directamente de las tablas obtenidas en cada iteración.

Parte e)

Vértices visitados en cada iteración:

I0: $(x_1,x_2) = (0{,}0)$

I1: $(x_1,x_2) = (80{,}0)$

I2: $(x_1,x_2) = (400/7 = 57{,}1{,}8000/7 = 9142.9)$

Restricciones activas en cada iteración:

I0: No negatividad panqueques ($x_1 \geq 0$) y queques ($x_2 \geq 0$)

I1: Disponibilidad leche y no negatividad queques ($x_2 \geq 0$)

I2: Disponibilidad leche y mantequilla

El método Simplex se inicializó (iteración 0) en el origen ($(x_1,x_2) = (0{,}0)$). Este vértice corresponde a la solución básica inicial factible (SBIF) del algoritmo. Para la iteración 1, se optó de forma arbitraria visitar el vértice donde se producía el mayor crecimiento de x_1 (con mayor costo reducido). En la iteración 1, el costo reducido de la variable no básica x_2 fue positivo, sugiriendo que no se había alcanzado el valor óptimo. Luego, se realizó la iteración 2, donde se alcanzó el vértice óptimo. En la iteración 2, la decisión no fue arbitraria puesto que solo había una dirección posible en la cual la función objetivo mejoraba. Como se esperaba, la solución obtenida con Simplex coincide con la solución obtenida con el método gráfico.

Solucion problema 2

Parte a)

**Tarea para la casa

Parte b)

Formulación estándar:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\
\text{s.a} \quad & \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5,6\}
\end{aligned}$$

Los resultados de cada iteración de Simplex son presentados en las tablas de abajo:

Iteración 0							
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
f1	1	3	2	1	0	0	10
f2	3	4	2	0	1	0	12
f3	2	1	2	0	0	1	8
-1	5	9	7	0	0	0	0

Iteración 1							
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
f1	-5/4	0	1/2	1	-3/4	0	1
f2	3/4	1	1/2	0	1/4	0	3
f3	5/4	0	3/2	0	-1/4	1	5
-1	-7/4	0	5/2	0	-9/4	0	-27

Iteración 2							
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
f1	-5/2	0	1	2	-3/2	0	2
f2	2	1	0	-1	1	0	2
f3	5	0	0	-3	2	1	2
-1	9/2	0	0	-5	3/2	0	-32

Iteración 3							
M	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
f1	0	0	1	1/2	-1/2	1/2	3
f2	0	1	0	1/5	1/5	-2/5	6/5
f3	1	0	0	-3/5	2/5	1/5	2/5
-1	0	0	0	-23/10	-3/10	-9/10	-169/5

Los resultados obtenidos con el optimizador de Octave son presentados a continuación:

```
In [1]: clear
```

```
In [2]: c=[5 9 7 0 0 0]
        A=[1 3 2 1 0 0; 3 4 2 0 1 0; 2 1 2 0 0 1]
        b=[10;12;8]
        lb=[0,0,0,0,0,0]'
        ub=[]
        ctype='UUU'
        vtype='CCCCCC'
        param.msglev=2;
```

```
c =

   5   9   7   0   0   0

A =

   1   3   2   1   0   0
   3   4   2   0   1   0
   2   1   2   0   0   1

b =

   10
   12
    8

lb =

   0
   0
   0
   0
   0
   0

ub = [](0x0)
ctype = UUU
vtype = CCCCCC
```

```
In [3]: glpk(c, A, b, lb, ub,ctype,vtype,s=-1,param)
```

```
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (3)
*     3: obj =   3.380000000e+01 inf =   0.000e+00 (0)
```

```
ans =

   0.40000
   1.20000
   3.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
```

Solución optima

- Función objetivo: 33.8
- Variables de decisión: \$x_1 = 0.4, x_2 = 1.2, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 \$

Parte c)

Tabla óptima en la última iteración

M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
A_1	0	0	1	1/2	-1/2	1/2	3
A_2	0	1	0	1/5	1/5	-2/5	6/5
A_3	1	0	0	-3/5	2/5	1/5	2/5
-1	0	0	0	-23/10	-3/10	-9/10	-169/5

Las variables de holgura asociadas a las restricciones A_1, A_2 y A_3 del problema original son x_4, x_5 y x_6 y todas alcanzan el valor 0 en el óptimo (variables no básicas). De esta forma, las tres restricciones son activas en el óptimo.