Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Profesores: Pablo Guarda - Juan Antonio Carrasco

Métodos de Optimización

Taller 2: Programación Lineal

Marzo 28, 2019

Problemas

1. **(40%)** ENAP desea producir y vender dos tipos de gasolina: corriente y especial. Para ello utiliza dos tipos de petróleo crudo: liviano y pesado, que tienen un costo de US$15 y US$20 por barril, respectivamente. La densidad [kg/lt] del petróleo liviano y pesado es 0,65 y 0,85 respectivamente. El octanaje del petróleo liviano y pesado es 70 y 102, respectivamente. Además, la empresa sabe que la disponibilidad máxima de petróleo liviano y pesado con la que puede contar es de 800 y 600 barriles respectivamente.

   Las especificaciones exigidas para los productos finales: gasolina corriente y especial, y los precios de venta se muestra en la tabla de abajo.

Combustible	Densidad (kg/lt)	Octanaje	Precio (US$/barril)
Gasolina corriente	Min = 0,7 - Max = 0,75	85	25
Gasolina especial	Min = 0,7 - Max = 0,75	94	30

   Por último, considere que cada barril puede contener 40kg de petróleo liviano, o 50 kg de petróleo pesado, o 60 lt de gasolina

   (a) **(20%)** Formule un modelo de programación lineal para determinar qué tipos de mezclas utilizar para cada combustible y cuál debe ser el nivel de producción, de manera que se obtenga la mayor utilidad posible.

   (b) **(20%)** Utilice la herramienta Solver de Microsoft Excel para determinar la solución óptima del problema

2. **(30%)** Una empresa transnacional exportadora de frutas que opera en América del Sur desea determinar un plan de distribución de la fruta desde las plantas empacadores hasta los centros de distribución para el periodo de verano. Las plantas se encuentran ubicadas en Rancagua, San Pablo y Bogotá. El mercado se ha agrupado en cuatro regiones, como se muestra en la figura de abajo, siendo cada una de ellas atendida por un distribuidor. Los centros de distribución están localizados en Santiago, Rio de Janeiro, Quito y Caracas.

En la tabla de abajo se señalan los costos unitarios de transporte en M$, los requerimientos de cada región y la producción de fruta en las plantas, para el periodo de verano.

	Costos de Transporte (M$/ton)				Producción (ton)
	Destinos				
Orígenes	Santiago	Rio de Janeiro	Quito	Caracas	
Rancagua	3	20	30	35	300
San Pablo	15	5	35	40	250
Bogotá	45	25	10	12	200
Requerimientos (ton)	120	300	80	200	

(a) **(10%)** Formule un modelo de programación lineal que permita minimizar el costo total de transporte del problema de distribución de la empresa. Indique los supuestos usados para formular el problema, así como las variables de decisión, función objetivo y restricciones

(b) **(10%)** Utilice la herramienta Solver de Microsoft Excel para determinar la solución óptima del problema

(c) **(10%)** Generalice la solución del problema de programación lineal para m orígenes y n destinos.

3. **(30%)** Una fábrica puede producir dos tipos de aceite para automóviles: normal y premium. Para obtener cada uno de estos productos se agregan tres tipos de aditivo: K1, H4 y SP a un aceite base. La cantidad de aditivo que requiere cada tipo de aceite y la cantidad disponible de cada aditivo se muestra en la tabla de abajo:

	Cantidad de aditivo (cm^3/lt)		**Disponibilidad (cm^3)**
Aditivo	Normal	Premium	
K1	0,02	0,01	100
H4	0,03	0,02	70
SP	0,02	0,05	50
Precio ($/lt)	800	2.000	

(a) **(10%)** Formule un modelo de programación lineal que permita decidir la cantidad de cada uno de los dos tipos de aceite que es conveniente producir, de modo que no se exceda la disponibilidad de los aditivos y se maximice el ingreso total. Indique los supuestos usados para formular el problema, así como las variables de decisión, función objetivo y restricciones

(b) **(10%)** Resuelva el modelo de a) mediante análisis gráfico. Describa las características de la solución óptima, indicando cuales son las restricciones activas del problema, la cantidad de recursos que no son utilizados y la cantidad producida de cada tipo de aceite

(c) **(10%)** Determine, gráficamente, cuanto debe aumentar el precio del aceite normal para que sea conveniente producirlo

Solucion problema 1

Parte a)

Supuestos

- Todo lo que se produce se vende
- El octanaje de la gasolina es igual al promedio ponderado entre el volumen y octanaje de cada tipo de petróleo

Variables de decisión

- x_{11}: cantidad de petróleo liviano utilizado para la producción de gasolina corriente (kg)
- x_{12}: cantidad de petróleo liviano utilizado para la producción de gasolina especial (kg)
- x_{21}: cantidad de petróleo pesado utilizado para la producción de gasolina corriente (kg)
- x_{22}: cantidad de petróleo pesado utilizado para la producción de gasolina especial (kg)

En general, x_{ij} es la cantidad de petróleo tipo i utilizado para la producción de gasolina tipo j, con i = {1:liviano, 2:pesado} y j = {1:corriente,2:especial}

Función objetivo

$$\text{Max } \frac{25}{60}\left(\frac{x_{11}}{0{,}65}+\frac{x_{21}}{0{,}85}\right)+\frac{30}{60}\left(\frac{x_{12}}{0{,}65}+\frac{x_{22}}{0{,}85}\right)-15\left(\frac{x_{11}+x_{12}}{40}\right)-20\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{50}\right)$$

Restricciones

1) Densidad gasolina

$$\frac{x_{11}+x_{21}}{\frac{x_{11}}{0{,}65}+\frac{x_{21}}{0{,}85}} \geq 0{,}7 \quad \text{(densidad mínima gasolina corriente)}$$

$$\frac{x_{11}+x_{21}}{\frac{x_{11}}{0{,}65}+\frac{x_{21}}{0{,}85}} \leq 0{,}75 \quad \text{(densidad máxima gasolina corriente)}$$

$$\frac{x_{12}+x_{22}}{\frac{x_{12}}{0{,}65}+\frac{x_{22}}{0{,}85}} \geq 0{,}7 \quad \text{(densidad mínima gasolina especial)}$$

$$\frac{x_{12}+x_{22}}{\frac{x_{12}}{0{,}65}+\frac{x_{22}}{0{,}85}} \leq 0{,}75 \quad \text{(densidad máxima gasolina especial)}$$

2) Octanaje

$$\frac{70 \cdot \dfrac{x_{11}}{0{,}65} + 102 \cdot \dfrac{x_{21}}{0{,}85}}{\dfrac{x_{11}}{0{,}65} + \dfrac{x_{21}}{0{,}85}} \geq 85 \quad \text{(octanaje mínimo gasolina corriente)}$$

$$\frac{70 \cdot \dfrac{x_{12}}{0{,}65} + 102 \cdot \dfrac{x_{22}}{0{,}85}}{\dfrac{x_{12}}{0{,}65} + \dfrac{x_{22}}{0{,}85}} \geq 94 \quad \text{(octanaje mínimo gasolina especial)}$$

3) Disponibilidad petróleo

$$x_{11} + x_{21} \leq 800 \cdot 40 \quad \text{(Petróleo liviano [lt])}$$
$$x_{12} + x_{21} \leq 600 \cdot 50 \quad \text{(Petróleo pesado [lt])}$$

4) No negatividad

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0$$

Parte b)

Primero expresamos las restricciones del problema como un modelo de programación lineal ($Ax = b$)

$$\text{Max} \qquad \frac{25}{60}\left(\frac{x_{11}}{0{,}65} + \frac{x_{21}}{0{,}85}\right) + \frac{30}{60}\left(\frac{x_{12}}{0{,}65} + \frac{x_{22}}{0{,}85}\right) - 15\left(\frac{x_{11} + x_{12}}{40}\right) - 20\left(\frac{x_{21} + x_{22}}{50}\right)$$

s.a

$$\begin{aligned}
(1 - \tfrac{0.7}{0{,}65})x_{11} + (1 - \tfrac{0{,}7}{0{,}85})x_{21} &\geq 0 \\
(1 - \tfrac{0.75}{0{,}65})x_{11} + (1 - \tfrac{0{,}75}{0{,}85})x_{21} &\leq 0 \\
(1 - \tfrac{0.7}{0{,}65})x_{12} + (1 - \tfrac{0{,}7}{0{,}85})x_{22} &\geq 0 \\
(1 - \tfrac{0.75}{0{,}65})x_{12} + (1 - \tfrac{0{,}75}{0{,}85})x_{22} &\leq 0 \\
(\tfrac{70}{0{,}65} - \tfrac{85}{0{,}65})x_{11} + (\tfrac{102}{0{,}85} - \tfrac{85}{0{,}85})x_{21} &\geq 0 \\
(\tfrac{70}{0{,}65} - \tfrac{94}{0{,}65})x_{12} + (\tfrac{102}{0{,}85} - \tfrac{94}{0{,}85})x_{22} &\geq 0 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 32000 \\
x_{12} + x_{22} &\leq 30000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

El resultado obtenido con la herramienta Solver de Microsoft Excel es el siguiente:

FO	9622.5

Variables de decisión

Petroleo	Gasolina	Variable Decisión	Tipo	Cota	Valor VD
Liviano	Corriente	x11	>=	0	26000.00
Liviano	Especial	x12	>=	0	0.00
Pesado	Corriente	x21	>=	0	30000.00
Pesado	Especial	x22	>=	0	0.00

Restricciones

Descripción	Tipo	Cota	Valor Restricción	Valor Real	Cota Real
Densidad Minima Gasolina Corriente	>=	0	3294.12	0.74	0.70
Densidad Maxima Gasolina Corriente	<=	0	-470.59	0.74	0.75
Densidad Minima Gasolina Especial	>=	0	0.00	#DIV/0!	0.70
Densidad Maxima Gasolina Especial	<=	0	0.00	#DIV/0!	0.75
Octanaje Gasolina Corriente	>=	0	0.00	85.00	85.00
Octanaje Gasolina Especial	>=	0	0.00	#DIV/0!	94.00
Disponibilidad Petroleo Liviano	<=	32000	26000.00	26000.00	32000.00
Disponibilidad Petroleo Pesado	<=	30000	30000.00	30000.00	30000.00

Solucion problema 2

Parte a)

Supuestos

- Las variables de decisión pueden tomar valores no enteros
- Toda la producción que exceda las unidades demandadas se puede almacenar sin costo

Variables de decisión

x_{ij}: cantidad de fruta transportada desde la planta empacadora i al centro de distribución j, para i = {1: Rancagua, 2: San Pablo, 3: Bogotá} y j = {1: Santiago, 2: Rio de Janeiro, 3: Quito, 4: Caracas }.

Función objetivo

Min $3x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 35x_{14} + 15x_{21} + 5x_{22} + 35x_{23} + 40x_{24} + 45x_{31} + 25x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34}$

Restricciones

a) Disponibilidad en las plantas

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 300 \quad \text{(Rancagua)}\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 250 \quad \text{(Santiago)}\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 200 \quad \text{(Bogotá)}
\end{aligned}
$$

b) Cumplimiento de la demanda

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \quad \text{(Santiago)}\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \quad \text{(Rio de Janeiro)}\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80 \quad \text{(Quito}\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200 \quad \text{(Caracas)}
\end{aligned}
$$

c) No negatividad

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3; j = 1,2,3,4$

Parte b)

Primero planteamos el modelo de programación lineal que define el problema de optimización.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Min} & \multicolumn{4}{l}{3x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 35x_{14} + 15x_{21} + 5x_{22} + 35x_{23} + 40x_{24} + 45x_{31} + 25x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34}} \\
\text{s.a} & & & & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq & 300 & \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq & 250 & \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leq & 200 & \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 120 & \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 300 & \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} & = & 80 & \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 200 & \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{1,2,3,4\}
\end{array}
$$

Luego, con la herramienta Solver de Microsoft Excel se encuentra la solución óptima del problema:

FO	7410.0

Variables de decisión

Origen-Destino	Variable Decisión	Tipo	Cota	Valor VD
R-S	x11	>=	0	120
R-R	x12	>=	0	50
R-Q	x13	>=	0	80
R-C	x14	>=	0	0
S-S	x21	>=	0	0
S-R	x22	>=	0	250
S-Q	x23	>=	0	0
S-C	x24	>=	0	0
B-S	x31	>=	0	0
B-R	x32	>=	0	0
B-Q	x33	>=	0	0
B-C	x34	>=	0	200

Restricciones

Descripción	Tipo	Cota	Valor Restricción
Producción Rancagua	<=	300	250
Producción San Pablo	<=	250	250
Producción Bogotá	<=	200	200
Demanda Santiago	>=	120	120
Demanda Rio de Janeir	>=	300	300
Demanda Quito	>=	80	80
Demanda Caracas	>=	200	200

Datos

Origen-Destino	Costos Transporte
R-S	3
R-R	20
R-Q	30
R-C	35
S-S	15
S-R	5
S-Q	35
S-C	40
B-S	45
B-R	25
B-Q	10
B-C	12

Parte c)

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.a} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad = b_j \quad \forall j \in 1...,n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \leq a_i \quad \forall i \in 1...,m \\
& \quad x_{ij} \quad \geq 0 \quad \forall i \in 1...m, \forall j \in 1...n
\end{aligned}
$$

Donde m y n son la cantidad de orígenes y destinos, respectivamente, c_{ij} el costo unitario de transporte entre cada origen i y destino j, a_i la cantidad de producto disponible en el origen i, y b_j la demanda de productos en el destino j.

Solución Problema 3

Parte a)

Supuestos

- Todo lo que se produce se vende

Variables de decisión

x_1: cantidad de aceite normal (litros)
x_2: cantidad de aceite premium (litros)

Función objetivo

$Max\ 800x_1 + 2000x_2$

Restricciones

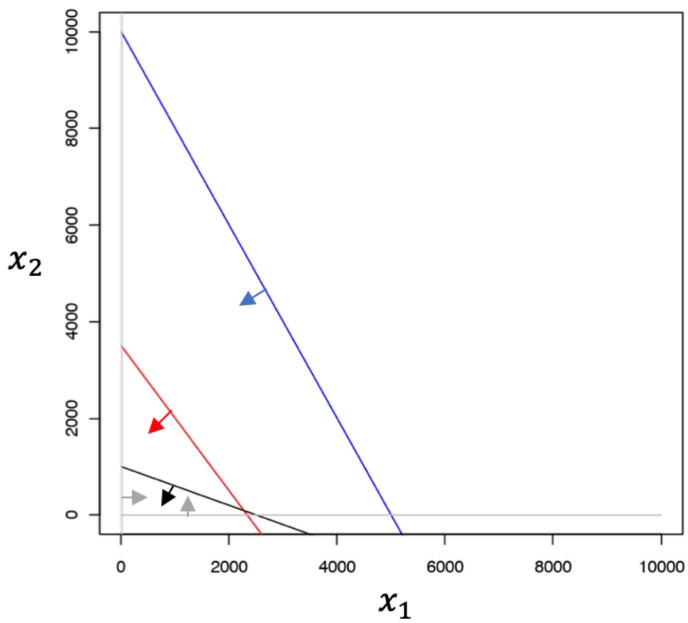
$0{,}02x_1 + 0{,}01x_2 \leq 100$	(Disponibilidad K1)
$0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 \leq 70$	(Disponibilidad H4)
$0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 \leq 50$	(Disponibilidad SP)
$x_1 \geq 0$	Aceite Normal
$x_2 \geq 0$	Aceite Premium

Parte b)

Ecuaciones asociadas a restricciones de disponibilidad

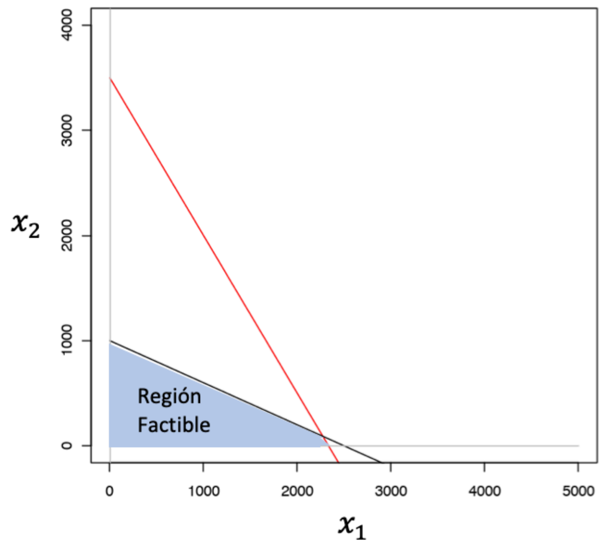
$$x_2 \leq 10000 - 2x_1 \qquad \text{Disponibilidad K1 (Azul)}$$
$$x_2 \leq 3500 - \frac{3}{2}x_1 \qquad \text{Disponibilidad H4 (Roja)}$$
$$x_2 \leq 1000 - \frac{2}{5}x_1 \qquad \text{Disponibilidad SP (Negra)}$$

Las restricciones asociadas a la no negatividad de las variables son la recta vertical (x_1=0) y horizontal (x_2=0) en color gris. Las flechas de cada recta indican el área factible definida por cada restricción.



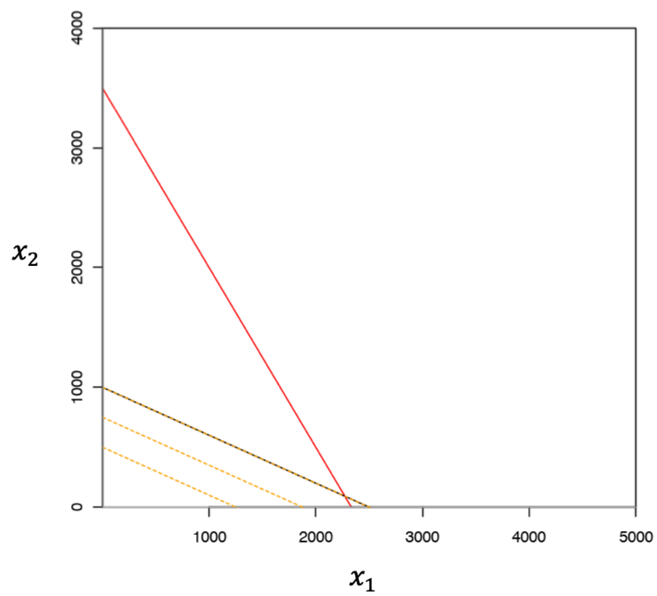
La restricción asociada a K1 (azul) es redundante, solo las otras dos restricciones son relevantes para identificar el óptimo del problema. Estas restricciones son:

$$x_2 \leq 3500 - \frac{3}{2}x_1$$
$$x_2 \leq 1000 - \frac{2}{5}x_1$$



Para determinar el óptimo gráficamente, se pueden trazar curvas de nivel de la función objetivo:

$$x_2 = \frac{z}{2000} - \frac{2}{5}x_1$$



Es fácil notar que hay múltiples/infinitas soluciones óptimas, para las cuales la función objetivo toma el mismo valor. Esto ocurre porque la pendiente de la curva de nivel de la función objetivo, es igual a la pendiente de la restricción asociada al aditivo SP.

Consideremos los casos más extremos.

1. La intersección entre el eje vertical y la restricción del aceite SP:

$$f(x_1 = 0, x_2 = 1000) = 800 \times 0 + 2000 \times 1000 = 2000000$$

$$0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 + h_2 = 70 \qquad \text{(Disponibilidad H4)}$$

Para identificar las holguras h_1 y h_2, se sustituye el valor de x_1 y x_2 en la solución óptima, tal que:

$$0{,}02\ x\ 0 + 0{,}01\ x\ 1000 + h_1 = 100 \rightarrow h_1 = 90$$
$$0{,}03\ x\ 0 + 0{,}02\ x\ 1000 + h_2 = 70 \rightarrow h_2 = 50$$

De esta forma, no se utilizarán 90 litros del aditivo K1 y 50 litros del aditivo H4.

2. La intersección entre las restricciones asociadas a los aceites H4 y SP

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_1 = \frac{25000}{11} \approx 2272,\overline{72}, \mathrm{x}_2 = \frac{1000}{11} \approx 90,\overline{90}\right)$$
$$= 800\ \mathrm{x} \frac{25000}{11} + 2.000\ \mathrm{x}\ \frac{1000}{11} = (800\ x\ 25 + +22000)\ \frac{1000}{11} = 2000000$$

En este caso la única restricción que no es activa es la asociada a K1. Así, la cantidad de litros de aditivo K1 que sobra es:

$$0{,}02\ x\ \frac{25000}{11} + 0{,}01\ x\ \frac{1000}{11} + h_1 = 100 \rightarrow h_1 = 100 - \frac{500 + 10}{11} = \frac{590}{11} \approx 53,\overline{63}$$

Cualquier punto ubicado en el segmento de recta formado por esos puntos alcanzará el mismo valor para la función objetivo y será un punto factible en el problema de optimización. La cantidad de recursos no utilizados variará en cada caso.

Parte c)

Un cambio en la disponibilidad de recursos no afectará la pendiente de las rectas asociadas a las restricciones de cada aditivo pero si cambiará el nivel (o altura) de las rectas. En general, menor disponibilidad de recursos reducirá el espacio factible de soluciones. Abajo están las restricciones del problema asociadas a la disponibilidad de recursos:

$x_2 \leq 10000 - 2x_1$	Disponibilidad K1 (Azul)
$x_2 \leq 3500 - \frac{3}{2}x_1$	Disponibilidad H4 (Roja)
$x_2 \leq 1000 - \frac{2}{5}x_1$	Disponibilidad SP (Negra)

i) Respecto a K1:

De la parte anterior, se observó que K1 es una restricción redundante en el problema. Sin embargo, si la disponibilidad de K1 es tal que pasa a ser activa, entonces cambiará la solución óptima. Es fácil notar que esto comienza a medida que la recta de la restricción se acerca al origen después de pasar por el punto $(x_1, x_2) = (0, 1000)$. Como el cambio es en la disponibilidad de recursos, la pendiente de la restricción se mantiene ($m_2 = -2$) y solo cambia su intercepto.

Restricción original

$$0{,}02x_1 + 0{,}01x_2 \leq 100$$

Definamos Δ_1 como el cambio de la disponibilidad del aditivo K1:

$$0{,}02\ x\ 0 + 0{,}01x\ 1000 \leq 100 - \Delta_1 \rightarrow \Delta_1 \leq 90$$

Es decir, la disponibilidad del recurso K1 puede disminuir como máximo en $\Delta_1 = 90$ cm^3 para que no haya cambio en la solución óptima

$$x_2 \leq 10000 - 2x_1$$

ii) Respecto a H4

Restricción original

$$0{,}03x_1 + 0{,}02x_2 \leq 70$$

Nuevamente identificaremos el punto en el cual la restricción pasa a ser activa. Al igual que para K1, este es el punto $(x_1, x_2) = (0, 1.000)$. Definamos Δ_2 como el cambio de la disponibilidad del aditivo H4:

$$0{,}03\ x\ 0 + 0{,}02\ x\ 1000 \leq 70 - \Delta_2 \rightarrow \Delta_2 \leq 50$$

Es decir, la disponibilidad del recurso H4 puede disminuir como máximo en $\Delta_2 = 50$ cm^3 para que no haya cambio en la solución óptima