



Taller 4: Simplex II

Abril 4, 2019

Problemas

1. **(20% \approx 30min)** Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} & \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Demuestre mediante Simplex, que el problema no admite solución factible.

2. **(30% \approx 60min)** Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & -3x_1 - 2x_2 \geq -20 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

- (a) **(10%)** Determine una solución básica inicial factible (SBIF) para el PPL anterior y escriba el problema de optimización equivalente.
- (b) **(10%)** Determine la solución óptima para la formulación equivalente del problema de optimización encontrada en (a) (ayuda: utilice Octave).
- (c) **(10%)** Determine la solución óptima del problema de optimización original con Octave. ¿Coincide con la solución encontrada en (b)? Fundamente

3. **(50% \approx 75min)** La empresa Tesla está produciendo tres tipos de vehículos: automóviles, buses y camionetas. Si la empresa dedicara toda su capacidad de producción para automóviles, podría producir 3000 al día. En cambio, si dedicara toda la producción a buses o camionetas, produciría 600 o 1,000 por día, respectivamente.

El cronograma de producción es para una semana (5 días hábiles). Además, la producción de la semana debe almacenarse en containers antes de que los los productos sean distribuidos. Almacenar 1 automóvil requiere 40 m^3 . Almacenar 1 bus requiere 210 m^3 . Almacenar 1 camioneta requiere 45 m^3 . El espacio total de almacenamiento disponible es de $400,000\text{ m}^3$. Debido a acuerdos comerciales, la empresa tiene que entregar al menos 5,000 automóviles y 400 buses por semana.

El departamento de ventas de la empresa estima que la demanda semanal por automóviles, buses y camionetas no superará las 10,000, 1,000 y 2,000 unidades, por lo que la empresa no quiere producir más que esas cantidades. El beneficio neto unitario por la venta de automóviles, buses y camionetas es de US\$ 4,000, US\$ 6,000 y US\$ 10,000, respectivamente.

- (a) **(20%)** Formule el PPL para determinar un programa de producción semanal que maximice el beneficio neto total de la empresa. Defina en su respuesta todos los elementos relevantes para la formulación del modelo
- (b) **(20%)** Encuentre una solución básica inicial factible para el PPL (ayuda: formule el problema de optimización de la Fase I de Simplex y luego encuentre el valor óptimo con Octave)
- (c) **(10%)** Determine la solución óptima del PPL con Octave.

Solución problema 1

Demuestre mediante Simplex, que el problema no admite solución factible.

Por la restricción de tipo \geq , no es trivial encontrar una SBIF para el PPL. Por ello, resolveremos el problema de optimización de la Fase 1 de Simplex.

Para que exista SBIF, el valor óptimo de la función objetivo del problema de la Fase 1 (suma de variables artificiales) debe ser igual a 0, y las variables artificiales deben quedar fuera de la base (iguales a 0). Si esta condición no se cumple, el problema no admite solución factible.

Entonces procederemos a resolver el problema de optimización de la fase 1 y lo dejaremos en formato estándar. Para ello, se introducirán variables de holguras en las dos restricciones (x_3 y x_4) y una variable artificial (y_1) en la primera restricción. La variable de holgura x_3 tiene signo negativo puesto que la restricción es de tipo \geq y la constante del lado derecho es positiva.

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & y_1 \\ \text{s.a} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, y_1 \geq 0\end{array}$$

Para resolver por Simplex, primero transformamos el problema de minimización a uno de maximización equivalente ($\text{Min } z = \text{Max } -z$).

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & -y_1 \\ \text{s.a} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, y_1 \geq 0\end{array}$$

Para las iteraciones no es necesario trabajar con la función objetivo del problema original, puesto que el foco solo está en analizar si el problema admite solución factible. Las tablas de cada iteración de Simplex son presentadas a continuación:

Iteración 0

	M	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	b
	f_1	1	1	-1	0	1	4
	f_2	1	2	0	1	0	2
FOA	-1	1	1	-1	0	0	0

Iteración 1

	M	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	b
	f_1	0	-1	-1	-1	1	2
	f_2	1	2	0	1	0	2
FOA	-1	0	-1	-1	-1	0	-2

En la iteración 2, se alcanza el vértice óptimo del problema artificial. Sin embargo, la variable artificial es básica y el valor óptimo de la función objetivo es distinto de 0 ($z^* = 2$). Por ello, se concluye que el problema no admite solución factible.

Solución problema 2

a) Determine una solución básica inicial factible (SBIF) para el PPL anterior y escriba el problema de optimización equivalente.

Para facilitar la resolución, primero transformamos la primera restricción del PPL a una de tipo \leq

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Luego, dejamos el PPL en formato estándar. Notar que la variable de holgura de la tercera restricción tiene signo negativo puesto que la restricción es de tipo \geq y la constante del lado derecho es positiva.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 20 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5\end{array}$$

A diferencia de los PPL revisados en el taller anterior, la SBIF típica donde las variables de decisión del problema original son 0 ($x_1 = x_2 = 0$) no satisface la tercera restricción (la variable x_5 sería igual a -2). Por ello, introduciremos una variable artificial (y_1) en dicha restricción y luego realizaremos la fase 1 de Simplex para determinar una SBIF:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 20 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 + y_1 = 2 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5\end{array}$$

El problema de optimización de la Fase 1 transformado a uno de maximización ($\text{Min } y_1 = \text{Max } -y_1$) es:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & -y_1 \\ \text{s.a} & \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 20 \\ & x_1 + 2x_2 - x_5 + y_1 = 2 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ & y_1 \geq 0\end{array}$$

En dos iteraciones se obtiene una SBIF para el problema original

Iteración 0 (SBIF problema artificial):

	M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
	f_1	3	2	1	0	0	0	20
	f_2	2	3	0	1	0	0	20
	f_3	1	2	0	0	-1	1	2
FO	-1	1	1	0	0	0	0	0
FOA	-1	0	0	0	0	0	0	0

Iteración 1:

	M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
	f_1	2	0	1	0	1	-1	18
	f_2	1/2	0	0	1	3/2	-3/2	17
	f_3	1/2	1	0	0	-1/2	1/2	1
FO	-1	1/2	0	0	0	1/2	-1/2	-1
FOA	-1	0	0	0	0	0	-1	0

A partir de la tabla obtenida en la iteración 1 se puede responder a lo solicitado.

SBIF problema original:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 18$$

$$x_4 = 17$$

$$x_5 = 0$$

Formulación algebraica equivalente:

$$\text{Max} \quad 1 - 1/2x_1 + 1/2x_5$$

s.a

$$2x_1 + x_3 + x_5 = 18$$

$$1/2x_1 + x_4 + 3/2x_5 = 17$$

$$1/2x_1 + x_2 - 1/2x_5 = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$$

b) Determine la solución óptima para la formulación equivalente del problema de optimización encontrada en (a) (ayuda: utilice Octave).

```
In [ ]: clear
```

```
In [5]: A=[2 0 1 0 1;1/2 0 0 1 3/2;1/2 1 0 0 -1/2];  
        b=[18;17;1]';  
        c=[1/2 0 0 0 1/2];  
        lb=[0 0 0 0 0];  
        ub=[];  
        ctype='SSS';  
        vtype='CCCCC';  
        param.msglev=2;  
        glpk(c, A, b, lb, ub, ctype, vtype, s=-1, param)
```

```
*      0: obj = -0.000000000e+00 inf = 0.000e+00 (2)
```

```
*      3: obj = 7.000000000e+00 inf = 0.000e+00 (0)
```

```
ans =
```

```
4.00000
```

```
4.00000
```

```
0.00000
```

```
0.00000
```

```
10.00000
```

Solución óptima

- Variables de decisión: $x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 10$
- En la formulación inicial del problema de fase 1 la función objetivo tiene una constante igual a 1. Por ello, hay que sumar 1 al valor entregado por el optimizador ($7+1=8$)

c) Determine la solución óptima del problema de optimización original con Octave. ¿Coincide con la solución encontrada en (b)? Fundamente

```
In [8]: clear
```

```
In [2]: A=[3 2;2 3;1 2];
        b=[20;20;2];
        c=[1 1];
        lb=[0 0];
        ub=[];
        ctype='UUL';
        vtype='CC';
        param.msglev=2;
        glpk(c, A, b, lb, ub, ctype, vtype, s=-1, param)

0: obj = -0.000000000e+00 inf = 2.000e+00 (1)
1: obj = 1.000000000e+00 inf = 0.000e+00 (0)
* 3: obj = 8.000000000e+00 inf = 0.000e+00 (0)
ans =

4.0000
4.0000
```

Solución optima

- Función objetivo: 8
- Variables de decisión: $x_1 = 4, x_2 = 4$

Se verifica que la solución coincide con la parte b)

Solución problema 3

a) Formule el PPL para determinar un programa de producción semanal que maximice el beneficio neto total de la empresa. Defina en su respuesta todos los elementos relevantes para la formulación del modelo

Supuestos

- Las variables de decisión pueden tomar valores no enteros
- La cantidad de unidades producidas de cada tipo de vehículo, es directamente proporcional al tiempo utilizado para producir cada uno

Variables de decisión

- x_1 : cantidad de automóviles producidos a la semana
- x_2 : cantidad de buses producidos a la semana
- x_3 : cantidad de camionetas producidas a la semana

Función objetivo

$$\text{Max } 4000x_1 + 6000x_2 + 10000x_3$$

Restricciones

1) Capacidad máxima de producción

$$\frac{x_1}{3000} + \frac{x_2}{600} + \frac{x_3}{1000} \leq 5$$

2) Capacidad máxima de almacenamiento

$$40x_1 + 210x_2 + 45x_3 \leq 400000$$

3) Compromisos de venta

$$x_1 \geq 5000 \text{ (automóviles)}$$

$$x_2 \geq 400 \text{ (buses)}$$

4) Demanda

$$x_1 \leq 10000 \text{ (automóviles)}$$

$$x_2 \leq 1000 \text{ (buses)}$$

$$x_3 \leq 2000 \text{ (camionetas)}$$

5) No negatividad

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

PPL

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 4000x_1 + 6000x_2 + 10000x_3 \\ \text{s.a} & \\ & \frac{x_1}{3000} + \frac{x_2}{600} + \frac{x_3}{1000} \leq 5 \\ & 40x_1 + 210x_2 + 45x_3 \leq 400000 \\ & \quad x_1 \geq 5000 \\ & \quad x_2 \geq 400 \\ & \quad x_1 \leq 10000 \\ & \quad x_2 \leq 1000 \\ & \quad x_3 \leq 2000 \\ & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

b) Encuentre una solución básica inicial factible para el PPL (ayuda: formule el problema de optimización de la Fase I de Simplex y luego encuentre el valor óptimo con Octave)

Las dos restricciones de compromiso de venta dificultan encontrar una SBIF. Por ello, agregaremos una variable artificial a cada una y luego realizaremos la fase 1 de Simplex iterando simultáneamente con la función del objetivo problema original (FO) y del problema artificial (FOA).

Problema original formato estándar:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & 4000x_1 + 6000x_2 + 10000x_3 \\
 \text{s.a} & \\
 & \frac{x_1}{3000} + \frac{x_2}{600} + \frac{x_3}{1000} + x_4 = 5 \\
 & 40x_1 + 210x_2 + 45x_3 + x_5 = 400000 \\
 & \quad x_1 - x_6 + y_1 = 5000 \\
 & \quad x_2 - x_7 + y_2 = 400 \\
 & \quad \quad x_1 + x_8 = 10000 \\
 & \quad \quad x_2 + x_9 = 1000 \\
 & \quad \quad x_3 + x_{10} = 2000 \\
 & \quad \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 10 \\
 & \quad y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

Problema de optimización de la fase 1 (de maximización equivalente):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & -y_1 - y_2 \\
 \text{s.a} & \\
 & \frac{x_1}{3000} + \frac{x_2}{600} + \frac{x_3}{1000} + x_4 = 5 \\
 & 40x_1 + 210x_2 + 45x_3 + x_5 = 400000 \\
 & \quad x_1 - x_6 + y_1 = 5000 \\
 & \quad x_2 - x_7 + y_2 = 400 \\
 & \quad \quad x_1 + x_8 = 10000 \\
 & \quad \quad x_2 + x_9 = 1000 \\
 & \quad \quad x_3 + x_{10} = 2000 \\
 & \quad \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 10 \\
 & \quad y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

Solución óptima con Octave:

```
In [1]: clear
```

```
In [2]: %Vector de costos de función objetivo
```

```
c=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]
```

```
%Matriz de restricciones
```

```
A=[1/3000 1/600 1/1000 1 0 0 0 0 0 0 0 0; 40 210 45 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 1 0; 0 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 1;
1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
```

```
%Vector con lado derecho de restricciones
```

```
b=[5;400000;5000;400;10000;1000;2000]
```

```
%Límite inferior variables
```

```
lb=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

```
%Límite superior variables
```

```
ub=[]
```

```
%Tipo de restricciones
```

```
ctype='SSSSSS'
```

```
%Tipo de variables
```

```
vtype='CCCCCCCCCCCC'
```

```
%Opción para el tipo de output del optimizador
```

```
param.msglev=2;
```

```
c =
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
```

```
A =
```

```
Columns 1 through 6:
```

0.00033	0.00167	0.00100	1.00000	0.00000	0.00000
40.00000	210.00000	45.00000	0.00000	1.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000

```
Columns 7 through 12:
```

0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

```
b =
```

```
5
400000
5000
400
10000
1000
2000
```

```
lb =
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
ub = [] (0x0)
```

```
ctype = SSSSSSS
```

```
vtype = CCCCCCCCCC
```

```
In [3]: #Ejecución del optimizador
```

```
glpk(c, A, b, lb, ub, ctype, vtype, s=1, param)
```

```
0: obj = 0.000000000e+00 inf = 3.423e+03 (2)
```

```
2: obj = 5.400000000e+03 inf = 0.000e+00 (0)
```

```
* 4: obj = 0.000000000e+00 inf = 0.000e+00 (0)
```

```
ans =
```

```
5000.00000
400.00000
0.00000
2.66667
116000.00000
0.00000
0.00000
5000.00000
600.00000
2000.00000
0.00000
0.00000
```

Solución optima

- Función objetivo: 0

- Variables de decisión del problema original: $x_1 = 5000, x_2 = 400, x_3 = 0$
- Variables de holgura: $x_4 = 2.67, x_5 = 116000, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 5000, x_9 = 600, x_{10} = 2000$
- Variables artificiales: $y_{\{1\}} = 0, y_{\{2\}} = 0$

c) Determine la solución óptima del PPL con Octave.

In [4]: clear

In [5]: *%Vector de costos de función objetivo*

```
c=[4000 6000 10000]
```

```
%Matriz de restricciones
```

```
A=[1/3000 1/600 1/1000; 40 210 45;1 0 0;0 1 0;1 0 0;0 1 0;0 0 1]
```

```
%Vector con lado derecho de restricciones
```

```
B=[5;400000;5000; 400; 10000;1000;2000]
```

```
%Límite inferior variables
```

```
lb=[0,0,0]
```

```
%Límite superior variables
```

```
ub=[]
```

```
%Tipo de restricciones
```

```
ctype='UULLUUU'
```

```
%Tipo de variables
```

```
vartype='CCC'
```

```
%Opción para el tipo de output del optimizador
```

```
param.msglev=2;
```

c =

```
4000    6000   10000
```

A =

```
0.00033    0.00167    0.00100
40.00000   210.00000   45.00000
1.00000    0.00000    0.00000
0.00000    1.00000    0.00000
1.00000    0.00000    0.00000
0.00000    1.00000    0.00000
0.00000    0.00000    1.00000
```

B =

```
5
400000
5000
400
10000
1000
2000
```

```
lb =
```

```
0 0 0
```

```
ub = [] (0x0)
```

```
ctype = UULLUUU
```

```
vartype = CCC
```

```
In [6]: #Ejecución del optimizador
```

```
glpk(c=c,A=A,B=B,lb=lb,ub=ub,ctype=ctype,vartype=vartype,s=-1,param=param)
```

```
* 0: obj = 2.240000000e+07 inf = 0.000e+00 (3)
```

```
* 2: obj = 4.500000000e+07 inf = 0.000e+00 (0)
```

```
ans =
```

```
5650.00
```

```
400.00
```

```
2000.00
```

Solución optima

- Función objetivo: 45000000
- Variables de decisión: $x_1 = 5650$, $x_2 = 400$, $x_3 = 2000$