

Capítulo 1

Introducción

Preliminares

2.1. Definibilidad por fórmulas abiertas

TEOREMA 1 (Los embeddings preservan fórmulas abiertas). *Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras y $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ una función. Son equivalentes:*

1. γ es un embedding de A en B .
2. Para toda fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ y para cada \bar{a} de A vale que:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$)

Sea γ un embedding de A en B , sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula abierta y $\bar{a} \in A^n$, el caso base sale directo ya que los homomorfismos preservan términos. Veamos los casos inductivos:

Sea $\varphi(\bar{x}) = \neg \varphi_1(\bar{x})$ con $\varphi_1 \in F_k^T$:

$$\mathbf{A} \models \neg \varphi_1[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \not\models \varphi_1[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{B} \not\models \varphi_1[\gamma(\bar{a})] \text{ sii } \mathbf{B} \models \neg \varphi_1[\gamma(\bar{a})]$$

Sea $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1 \eta \varphi_2)(\bar{x})$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^T$:

$$\mathbf{A} \models (\varphi_1 \eta \varphi_2)[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \models \varphi_1[\bar{a}] \text{ " } \eta \text{ " } \mathbf{A} \models \varphi_2[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \models \varphi_1[\gamma(\bar{a})] \text{ " } \eta \text{ " } \mathbf{B} \models \varphi_2[\gamma(\bar{a})] \text{ sii } \mathbf{B} \models (\varphi_1 \eta \varphi_2)[\gamma(\bar{a})]$$

$2 \Rightarrow 1$)

Supongamos que para toda fórmula abierta $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y cada $\bar{a} \in A^m$ vale que:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

- Veamos que γ es inyectiva:

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \gamma(a') \\ \mathbf{B} &\models (x_1 \equiv x_2)[\gamma(a), \gamma(a')] \\ \mathbf{A} &\models (x_1 \equiv x_2)[a, a'] \\ a &= a' \end{aligned}$$

- Veamos que γ es un homomorfismo:

Sea $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\models (c \equiv x_1)[c^{\mathbf{A}}] \\ \mathbf{B} &\models (c \equiv x_1)[\gamma(c^{\mathbf{A}})] \\ c^{\mathbf{B}} &= \gamma(c^{\mathbf{A}}) \end{aligned}$$

Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) &\in r^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{A} &\models r(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \\ \mathbf{B} &\models r(x_1, \dots, x_n)[\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)] \\ (\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)) &\in r^{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1})[a_1, \dots, a_n, f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)] \\ \mathbf{B} &\models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1})[\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n), \gamma(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))] \\ f^{\mathbf{B}}(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)) &= \gamma(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))\end{aligned}$$

■ Veamos que γ es embedding:

Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)) &\in r^{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B} &\models r(x_1, \dots, x_n)[\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)] \\ \mathbf{A} &\models r(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \\ (a_1, \dots, a_n) &\in r^{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2. Si \mathbf{A} es una subestructura de \mathbf{B} y $\varphi(\bar{x})$ es una fórmula abierta, entonces para cada $\bar{a} \in A^n$ vale que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathbf{A} una subestructura de \mathbf{B} y $\varphi(\bar{x})$ una fórmula abierta.

Como \mathbf{A} es subestructura es cerrada sobre r, f y $c^{\mathbf{B}} \in A$

Sea $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que para todo $x \in A$, $\gamma(x) = x$. Como $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, es directo que γ es un embedding. Entonces por el Teorema 1, $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$

Finalmente, por definición de γ :

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$$

□

NOTACIÓN 3. Dado un conjunto de fórmulas Δ , escribiremos $\Delta(\bar{x})$ para anunciar que cada una de las fórmulas en Δ tiene sus variables libres contenidas en la tupla \bar{x} , y que consideramos cada $\delta \in \Delta(\bar{x})$ declarada $\delta = \delta(\bar{x})$. Si \mathbf{A} es una estructura y \bar{a} es una tupla de elementos de A , escribiremos $\mathbf{A} \models \Delta[\bar{a}]$ cuando $\mathbf{A} \models \delta[\bar{a}]$ para cada $\delta \in \Delta(\bar{x})$.

DEFINICIÓN 4. Sea \mathbf{A} una estructura y sean $a_1, \dots, a_n \in A$. Definimos el diagrama abierto para a_1, \dots, a_n en \mathbf{A} como:

$$\Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}(x_1, \dots, x_n) := \{\alpha \mid \alpha \text{ es abierta y } \mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]\}$$

TEOREMA 5. Sea \mathbf{A} una estructura y $b_1, \dots, b_n \in B$, son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}[\bar{b}]$
2. Hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Veamos $1 \Rightarrow 2$:

Supongamos que $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}[\bar{b}]$

Si α fórmula abierta y $\mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \models \alpha[\bar{b}]$

Tomo $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n] : t \in T^r, a_1, \dots, a_n \in \bar{a}\}$ y $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[b_1, \dots, b_n] : t \in T^r, b_1, \dots, b_n \in \bar{b}\}$

Defino

$$\begin{aligned}\gamma &: A' \rightarrow B' \\ \gamma(t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]) &= t^{\mathbf{B}}[b_1, \dots, b_n]\end{aligned}$$

Es claro que γ es un homomorfismo.

- Veamos que γ es inyectivo

Sean $a'_1, a'_2 \in A'$ tales que $a'_1 \neq a'_2$

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} a'_1 &\neq a'_2 \\ t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}] &\neq t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \\ \mathbf{A} &\models \neg(t_1 \equiv t_2)[\bar{a}] \end{aligned}$$

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &\models \neg(t_1 \equiv t_2)[\bar{b}] \\ t_1^{\mathbf{B}}[\bar{b}] &\neq t_2^{\mathbf{B}}[\bar{b}] \\ \gamma(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) &\neq \gamma(t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) \end{aligned}$$

- Veamos que γ es sobreyectivo

Sea $b' \in B'$

$$\begin{aligned} b' &\in B' \\ t^{\mathbf{B}}[\bar{b}] &\in B' \end{aligned}$$

Tomo $t^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = a'$

$$\gamma(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathbf{B}}[\bar{b}]$$

Por lo tanto γ es un isomorfismo y $\gamma(a_j) = \gamma(x_j^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]) = x_j^{\mathbf{B}}[b_1, \dots, b_n] = b_j$.

Ahora veamos $2 \Rightarrow 1$:

Supongamos que hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

Entonces, es claro que γ es un embedding de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$.

Por el Teorema 1 para toda fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ y cada $\bar{a} \in A'$

$$\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

Por el Teorema 2 como $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ es subestructura de \mathbf{A} , $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ lo es de \mathbf{B} y φ es abierta

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$$

Por lo tanto si α es abierta y $\mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \models \alpha[\bar{b}]$

Finalmente, $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$ □

DEFINICIÓN 6. Dos fórmulas $\alpha(\bar{x})$ y $\beta(\bar{x})$ se dicen *equivalentes* sobre una familia de estructuras \mathcal{K} si para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y cada \bar{a} de A vale que

$$\mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}] \iff \mathbf{A} \models \beta[\bar{a}].$$

TEOREMA 7 (Modulo equivalencia sobre una estructura finita, la cantidad de fórmulas en x_1, \dots, x_n es finita). *Sea \mathbf{A} una estructura finita, y sean x_1, \dots, x_n variables.*

Hay un conjunto finito de fórmulas $\Sigma(\bar{x})$ tal que para toda fórmula $\varphi(\bar{x})$ hay $\sigma(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ tal que $\varphi(\bar{x})$ y $\sigma(\bar{x})$ son equivalentes sobre \mathbf{A} .

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que las fórmulas son finitas modulo equivalencia. Sea $\varphi(\bar{x})$ defino $T_{\varphi\mathbf{A}} = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]\}$ y supongamos φ equivalente ψ en \mathbf{A} , entonces

$$\bar{a} \in T_{\varphi\mathbf{A}} \Leftrightarrow \bar{a} \in T_{\psi\mathbf{A}} \text{ para cada } \bar{a} \in A^n$$

lo que significa que $T_{\varphi\mathbf{A}} = T_{\psi\mathbf{A}}$. Entonces basta con contar los subconjuntos de A^n , como $\#A^n = (\#A)^n$ y A era finito, es claro que A^n es finito. Por lo tanto $\mathcal{P}(A^n)$ también lo es.

Ahora veamos que existe $\Sigma(\bar{x})$. Sean $T_1, \dots, T_k \subseteq A^n$ tales que existe $\varphi_i(\bar{x})$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_i[T_i]$ y sea $\psi(\bar{x})$, tomo $T_{\psi\mathbf{A}}$ como T_1, \dots, T_k es la sucesión de todos los subconjuntos que se definen con una fórmula, hay un j tal que $T_j = T_{\psi\mathbf{A}}$. Entonces, $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_j[\bar{a}]$ \square

TEOREMA 8. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras finitas y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces existe una fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ tal que para todo $\bar{b} \in B^n$ son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$
2. Hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Tomo $\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})$ que es una fórmula, por el Teorema 7.

Es claro que $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})[\bar{b}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$

Entonces por Teorema 5, hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$ \square

DEFINICIÓN 9. Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden y $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Diremos que R es *definible* en una familia \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras cuando exista una \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y todas $a_1, \dots, a_n \in A$

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \iff \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ son lenguajes de primer orden, para una \mathcal{L}' -estructura \mathbf{A} , usaremos $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ para indicar el reducto de \mathbf{A} al lenguaje \mathcal{L} . Si \mathbf{A}, \mathbf{B} son \mathcal{L} -estructuras, usaremos $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ para expresar que \mathbf{A} es subestructura de \mathbf{B} .

Sean

$$At(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}\text{-fórmulas atómicas}\}$$

$$\pm At(\mathcal{L}) = At(\mathcal{L}) \cup \{\neg\alpha : \alpha \in At(\mathcal{L})\}$$

$$Op(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula abierta}\}$$

DEFINICIÓN 10. Dados A, B conjuntos, $R^A \subseteq A^n$, $R^B \subseteq B^n$, diremos que una función $\gamma : A \rightarrow B$ preserva R si para toda tupla $(a_1, \dots, a_n) \in A_0$ tenemos que si $(a_1, \dots, a_n) \in R^A$ implica que $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \in R^A$.

TEOREMA 11. Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Hay una fórmula en $Op(\mathcal{L})$ que define R en \mathcal{K} .
2. Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todas $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$, todo isomorfismo $\sigma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ preserva R .

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Sea $\varphi(\bar{x})$ la fórmula que define R en \mathcal{K} , sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ tales que $\sigma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ sea un isomorfismo. Sea $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \cap A_0$ veamos que $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}_0}$. Como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \Rightarrow \bar{a} \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, por Teorema 2, $\mathbf{A}_0 \models \varphi[\bar{a}]$ y como \mathbf{A}_0 y \mathbf{B}_0 son isomorfos por σ , $\mathbf{B}_0 \models \varphi[\sigma(\bar{a})]$. Nuevamente por Teorema 2 $\mathbf{B} \models \varphi[\sigma(\bar{a})]$ y como por hipótesis φ define a R en \mathcal{K} , $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

$2 \Rightarrow 1$) Sea $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} (\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} (\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})))$, la cual es fórmula por el Teorema 7. Veamos que para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$ sii $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$:

\Rightarrow) Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi [\bar{b}]$, entonces en particular para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x}) [\bar{b}]$. Por Teorema 8, hay un isomorfismo $\gamma : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$. Entonces por hipótesis γ preserva R . Finalmente como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$ o sea que $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

\Leftarrow) Supongamos $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} (\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} (\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x}))) = \dots \vee \dots \vee (\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}} \alpha(\bar{x}))$, evidentemente $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}} [\bar{b}]$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi [\bar{b}]$. \square

2.2. Definibilidad por fórmulas abiertas positivas y conjunción de atómicas

TEOREMA 12. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras y $h : A \rightarrow B$ una función, son equivalentes:

1. h es un homomorfismo de \mathbf{A} en \mathbf{B} .
2. Para toda fórmula atómica $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y para cada \bar{a} de A vale que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \implies \mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})].$$

3. Para toda fórmula abierta positiva¹ $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y para cada \bar{a} de A vale que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \implies \mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})].$$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Directo, ya que los homomorfismos preservan términos.

$2 \Rightarrow 1$) Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Rightarrow \mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})]$ con φ atómica. Veamos que h es homomorfismo.

Sea $c \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{A} \models (c \equiv x_1) [c^{\mathbf{A}}] \Rightarrow \mathbf{B} \models (c \equiv x_1) [h(c^{\mathbf{A}})] \Leftrightarrow c^{\mathbf{B}} = h(c^{\mathbf{A}})$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbf{A} \models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1}) [a_1, \dots, a_n, f^{\mathbf{A}}(\bar{a})]$$

$$\mathbf{B} \models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1}) [h(a_1), \dots, h(\bar{a}_n), h(f^{\mathbf{A}}(\bar{a}))]$$

$$f^{\mathbf{B}}(h(\bar{a})) = h(f^{\mathbf{A}}(\bar{a}))$$

Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\bar{a} \in r^{\mathbf{A}} \Rightarrow \mathbf{A} \models r(\bar{x}) [\bar{a}] \Rightarrow \mathbf{B} \models r(\bar{x}) [h(\bar{a})] \Rightarrow h(\bar{a}) \in r^{\mathbf{B}}$$

$2 \Rightarrow 3$) Rutina.

$3 \Rightarrow 2$) Directo ya que toda atómica es abierta positiva. \square

DEFINICIÓN 13. Sea \mathbf{A} una estructura y sean $a_1, \dots, a_n \in A$. Definimos el diagrama atómico positivo de \bar{a} en \mathbf{A} como

$$\Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+(x_1, \dots, x_n) := \{\alpha \mid \alpha \text{ es atómica y } \mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]\}.$$

TEOREMA 14. Sean \mathbf{B} una estructura y $b_1, \dots, b_n \in B$, son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+ [\bar{b}]$.
2. Hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Defino $h : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$, como

$$h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathbf{B}}[\bar{b}]$$

El cual es se ve fácilmente que es un homomorfismo que cumple $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

$2 \Rightarrow 1$) Supongamos que hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$, entonces como $\mathbf{A} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+ [\bar{a}]$, por el Teorema 12 $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+ [h(\bar{a})]$, entonces $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+ [\bar{b}]$ \square

¹Una fórmulas es positiva si no tiene ocurrencias de $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

TEOREMA 15. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras finitas y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces existe una fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ tal que para todo $\bar{b} \in B^n$ son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$
2. Hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Tomo $\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}^+} \alpha(\bar{x})$ que es una fórmula, por el Teorema 7.

Es claro que $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}^+[\bar{b}]$

Entonces por Teorema 14, hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$ \square

TEOREMA 16. Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Hay una \mathcal{L} -fórmula abierta positiva que define R en \mathcal{K} .
2. Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todas $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$, todo homomorfismo $h : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ preserva R .

DEMOSTRACIÓN. Veamos $1 \Rightarrow 2$:

Sea $\varphi(\bar{x})$ la fórmula abierta positiva que define R en \mathcal{K} , sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ tales que $h : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ sea un homomorfismo. Sea $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \cap A_0$ veamos que $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}_0}$:

$\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \Rightarrow \bar{a} \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, por Teorema 2, $\mathbf{A}_0 \models \varphi[\bar{a}]$ y como h es un homomorfismo de \mathbf{A}_0 en \mathbf{B}_0 y φ es abierta positiva por Teorema 12, $\mathbf{B}_0 \models \varphi[h(\bar{a})]$. Nuevamente por Teorema 2 $\mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})]$ y como por hipótesis φ define a R en \mathcal{K} , $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

Veamos $2 \Rightarrow 1$:

Sea $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}^+} \alpha(\bar{x}) \right) \right)$, la cual es fórmula por el Teorema 7. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$:

\Rightarrow) Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces en particular para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}^+[\bar{b}]$. Por Teorema 15, hay un homomorfismo $h : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$. Entonces por hipótesis h preserva R . Finalmente como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, entonces $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$ o sea que $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

\Leftarrow) Supongamos $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces $\varphi = \dots \vee \dots \vee \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}^+} \alpha(\bar{x}) \right)$, evidentemente $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}^+[\bar{b}]$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$. \square

DEFINICIÓN 17. Sean A_1, \dots, A_m, B conjuntos, $R^{A_i} \subseteq A_i^n$ para cada $i \in [1, m]$, $R^B \subseteq B^n$ y $h : D \subseteq A_1 \times \dots \times A_m \rightarrow B$ una función. Diremos que h preserva R si dados

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, \bar{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in D$$

tales que

$$(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in [1, m]$$

se tiene que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^B$.

LEMA 18. Dadas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ estructuras y $\varphi = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ con ψ una conjunción de fórmulas atómicas. Entonces son equivalentes:

1. Para todo $i = 1, \dots, m$ se da que $\mathbf{A}_i \models \varphi[a_{1i}, \dots, a_{ni}]$
2. $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$, con $\bar{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jm})$

DEMOSTRACIÓN. Rutina. \square

TEOREMA 19. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Para cada $m \geq 1$, para todas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, para cada $\mathbf{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, todo homomorfismo $h : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .*
2. *Hay una conjunción finita de \mathcal{L} -fórmulas atómicas que define R en \mathcal{K} .*

DEMOSTRACIÓN. $2 \Rightarrow 1$) Sea $\varphi(\bar{x})$ conjunción de atómicas que define a R en \mathcal{K} . Sean $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, y $h : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ un homomorfismo. Sean

$$\bar{s}_1 = (s_{11}, \dots, s_{1m}), \dots, \bar{s}_n = (s_{n1}, \dots, s_{nm}) \in S$$

tales que

$$(s_{1i}, \dots, s_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Veamos que $(h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$. Como $(s_{1i}, \dots, s_{ni}) \in R^{A_i}$ y φ define a R en \mathcal{K} , tenemos que

$$\mathbf{A}_i \models \varphi[s_1, \dots, s_{ni}] \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Luego, por el Lema 18,

$$\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \varphi[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n].$$

Como φ es abierta y $\mathbf{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, el Teorema 2 implica que $\mathbf{S} \models \varphi[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n]$, y aplicando el Teorema 12 obtenemos que $\mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)]$. Finalmente, como φ define a R en \mathcal{K} y $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, concluimos que $(h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$.

$1 \Rightarrow 2$) Supongamos $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, R n -aria. Sean $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ tales que $\bar{x}_i = \left(x_{i1}^1, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_1}|}^1, \dots, x_{i1}^m, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_m}|}^m \right)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\bigcup R^{\mathbf{A}_j} = \left\{ \left(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j \right) \text{ con } i \in \{1, |R^{\mathbf{A}_j}|\} \right\}$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Sea

$$\varphi = \bigwedge_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}} \alpha(\bar{x})$$

. Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$ y veamos que $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Como $\mathbf{B} \models \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}[b_1, \dots, b_n]$, por Teorema 14 hay homomorfismo de $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}}$ en $\langle b_1, \dots, b_n \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{x}_i) = b_i$. Como por hipótesis h preserva R , entonces como $(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j) \in R^{\mathbf{A}_j}$, $(h(\bar{x}_1), \dots, h(\bar{x}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, que es exactamente $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Ahora supongamos $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$ y veamos que $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$, entonces hay algún j tal que $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}$ y hay algún k y algún j tal que

$$(x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j) = (b_1, \dots, b_n)$$

. Entonces como $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{B}^{|R^{\mathbf{B}}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|} \models \varphi[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ por Teorema 18 $\mathbf{B} \models \varphi[x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j]$, por lo tanto $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$. \square

TEOREMA 20. *Sea \mathbf{A} una estructura finita y $a_1, \dots, a_n \in A$. Entonces hay una fórmula existencial $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para toda estructura \mathbf{B} y para todo $\bar{b} \in B^n$ los siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$.
2. Hay un embedding $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Sean a'_1, \dots, a'_m tales que $\langle a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y sea

$$\varphi = \exists y_1, \dots, y_m \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right)$$

que es fórmula por el Teorema 7.

Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces existen $b'_1, \dots, b'_m \in B$ tales que $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{b}']$ por Teorema 5 hay un isomorfismo $\gamma : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}, \bar{a}') = (\bar{b}, \bar{b}')$, y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de \mathbf{A} en \mathbf{B} tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$.

Supongamos que hay un embedding $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$, por lo tanto $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S} \leq \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Como $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, por ser γ un isomorfismo $\mathbf{S} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y entonces $\mathbf{S} \models \varphi[\bar{b}]$. Por lo tanto existe \bar{b}' en $S \subseteq B$ tal que $\mathbf{S} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{b}']$. Como $\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ es una fórmula abierta, por Teorema 2, $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{b}']$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$ \square

TEOREMA 21. Sea \mathbf{A} una estructura finita y $a_1, \dots, a_n \in A$. Entonces hay una fórmula existencial positiva $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para toda estructura \mathbf{B} y para todo $\bar{b} \in B^n$ los siguientes son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$.
2. Hay un homomorfismo $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Sean a'_1, \dots, a'_m tales que $\langle a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y sea

$$\varphi = \exists y_1, \dots, y_m \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}}^+ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right)$$

que es fórmula por el Teorema 7.

Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces existen $b'_1, \dots, b'_m \in B$ tales que $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}}^+ \alpha(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{b}']$ por Teorema 14 hay un homomorfismo $h : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}, \bar{a}') = (\bar{b}, \bar{b}')$, y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, h es un homomorfismo de \mathbf{A} en \mathbf{B} tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

Supongamos que hay un homomorfismo $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$. Como $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, entonces $\mathbf{A} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[\bar{a}, \bar{a}']$ y por Teorema 12 $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[h(\bar{a}), h(\bar{a}')]$. Entonces $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[\bar{b}, \bar{b}']$, por lo que claramente $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$. \square

TEOREMA 22. Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Hay una \mathcal{L} -fórmula existencial que define R en \mathcal{K} .
2. Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo embedding $\gamma : \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .

DEMOSTRACIÓN. 1 \Rightarrow 2) Sea φ existencial que define a R en \mathcal{K} , y sea $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un embedding. Entonces $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S} \leq \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{S} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$. Como φ es de la forma $\varphi = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ con ψ abierta, existe un \bar{s} tal que $\mathbf{S} \models \psi[\gamma(\bar{a}), \bar{s}]$. Como ψ es abierta y $\mathbf{S} \leq \mathbf{B}$, por el Teorema 2 $\mathbf{B} \models \psi[\gamma(\bar{a}), \bar{s}]$. Entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y como φ define a R en \mathcal{K} , entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

$2 \Rightarrow 1$) Para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, cada $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, tomo \bar{a}' tal que $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Ahora tomo $\delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, que es fórmula por Teorema 7. Ahora tomo

$$\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} (\exists \bar{y} \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y})) \right)$$

Sea $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces como $\varphi = \dots \vee \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{B}, (\bar{b}, \bar{b}')}(\bar{x}, \bar{y}) \vee \dots$, y como $\mathbf{B} \models \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{B}, (\bar{b}, \bar{b}')}(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{b}']$, $\mathbf{B} \models \varphi [\bar{b}]$.

Sea $\mathbf{B} \models \varphi [b_1, \dots, b_n]$. Entonces para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, y algún $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$ tales que $\mathbf{B} \models \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}]$. Entonces hay un \bar{z} en \mathbf{B} tal que $\mathbf{B} \models \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{z}]$. Como $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}} [\bar{b}, \bar{z}]$, por Teorema 5 hay $\gamma : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ isomorfismo tal que $(\gamma(\bar{a}), \gamma(\bar{a}')) = (\bar{b}, \bar{z})$ y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de \mathbf{A} en \mathbf{B} y como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$, $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

Como φ es disyunción de existenciales, por teorema puede ser convertida en una fórmula existencial. \square

TEOREMA 23. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Hay una \mathcal{L} -fórmula existencial positiva que define R en \mathcal{K} .*
2. *Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo homomorfismo $\gamma : \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .*

DEMOSTRACIÓN. Igual a la prueba del Teorema 22, tomando el diagrama abierto positivo. \square

TEOREMA 24. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Para cada $m \geq 1$, para todas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo homomorfismo $h : (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .*
2. *Hay una \mathcal{L} -fórmula primitiva positiva que define R en \mathcal{K} .*

DEMOSTRACIÓN. $2 \Rightarrow 1$) Sea $\varphi = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ primitiva positiva que define a R en \mathcal{K} . Sean $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $h : (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ un homomorfismo. Sean

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, \bar{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in S$$

tales que

$$(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Veamos que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$. Como $(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i}$ y φ define a R en \mathcal{K} , tenemos que

$$\mathbf{A}_i \models \varphi [a_1, \dots, a_{ni}] \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Luego, por el Lema 18,

$$\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \varphi [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n].$$

Entonces hay $b_1, \dots, b_k \in A_1 \times \dots \times A_m$, tales que

$$\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \psi [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, b_1, \dots, b_k].$$

Como ψ es abierta positiva, aplicando el Teorema 12 obtenemos que $\mathbf{B} \models \varphi [h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)]$. Finalmente, como φ define a R en \mathcal{K} y $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, concluimos que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$.

1 \Rightarrow 2) Supongamos $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, R n -aria. Sean $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ tales que $\bar{x}_i = \left(x_{i1}^1, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_1}|}^1, \dots, x_{i1}^m, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_m}|}^m \right)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\bigcup R^{\mathbf{A}_j} = \left\{ \left(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j \right) \text{ con } i \in \{1, |R^{\mathbf{A}_j}|\} \right\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sean $\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$, tales que $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k \rangle_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}} = \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$. Sea

$$\varphi = \exists \bar{y} \bigwedge_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k)}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$$

. Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$ y veamos que $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces hay b'_1, \dots, b'_k tal que $\mathbf{B} \models \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k)} [b_1, \dots, b_n, b'_1, \dots, b'_k]$,

por Teorema 14 hay h homomorfismo de $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k \rangle_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}}$ en $\langle b_1, \dots, b_n, b'_1, \dots, b'_k \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{x}_i) = b_i$ y $h(\bar{x}'_i) = b'_i$, claramente h es un homomorfismo de $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ en \mathbf{B} . Como por hipótesis h preserva R , entonces como $(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j) \in R^{\mathbf{A}_j}$, $(h(\bar{x}_1), \dots, h(\bar{x}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, que es exactamente $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Ahora supongamos $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$ y veamos que $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$, entonces hay algún j tal que $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}$ y hay algún k y algún j tal que

$$(x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j) = (b_1, \dots, b_n)$$

. Entonces como $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{B}^{|R^{\mathbf{B}}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|} \models \varphi[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ por Teorema 18 $\mathbf{B} \models \varphi[x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j]$, por lo tanto $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$. \square

Algoritmo de la Constelación

3.1. Preprocesamiento

LEMA 25. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, \mathcal{K} una clase finita de \mathcal{L}' -estructuras finitas y $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{K}$, con $\mathbf{A} \neq \tilde{\mathbf{A}}$, tales que hay un \mathcal{L} -isomorfismo $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$. Entonces para toda $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ y toda \mathcal{L} -fórmula φ son equivalentes:

1. φ define a R en \mathcal{K} .
2. γ es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo y φ define a R en $\mathcal{K} - \{\tilde{\mathbf{A}}\}$.

DEMOSTRACIÓN. 1 \Rightarrow 2) Trivial.

2 \Rightarrow 1) $\tilde{\mathbf{A}} \models R[\bar{a}]$ sii $\mathbf{A} \models R[\gamma^{-1}(\bar{a})]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\gamma^{-1}(\bar{a})]$ sii $\tilde{\mathbf{A}} \models \varphi[\bar{a}]$. \square

Independientemente del tipo de definibilidad que uno quiera chequear el Lema 25 sugiere que uno puede comenzar por reducir \mathcal{K} eliminando copias de estructuras $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfas.

Algorithm 1 Preprocesamiento

```

1: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  do
2:   for  $\mathbf{B} \in \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$  do
3:     if hay  $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$   $\mathcal{L}$ -isomorfismo then
4:       if  $\gamma$  es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
5:          $\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{B}\}$ 
6:       else
7:         return  $\gamma$  ▷  $R$  no es definible y  $\gamma$  es contraejemplo
8:       end if
9:     end if
10:  end for
11: end for
12: return  $\mathcal{K}$  ▷  $\mathcal{K}$  sin estructuras  $\mathcal{L}$ -isomorfas

```

Notar que los isomorfismos revisados por este algoritmo deben ser necesariamente revisados para comprobar definibilidad en cualquiera de los formatos. La ventaja de chequear estos en primer lugar es que podría reducirse la clase \mathcal{K} en el proceso.

Se obtiene una pequeña ganancia al chequear por \mathcal{L} -isomorfismos y recién descubierto uno de estos comprobar si es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo. Observar además que, para poder aplicar los teoremas de definibilidad de las secciones 2.1 y 2.2, habría que verificar que cada uno de los \mathcal{L} -isomorfismos entre estructuras de \mathcal{K} preserven R y vemos que basta con chequear sólo uno.

3.2. Definibilidad abierta

Dada \mathcal{K} una familia de \mathcal{L} -estructuras, llamaremos \mathcal{K} -flecha a una terna $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ donde $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $f : \mathcal{D}_f \subseteq A \rightarrow \mathcal{I}_f \subseteq B$. Además, dadas $\alpha = (f, \mathbf{M}, \mathbf{T})$ y $\beta = (g, \mathbf{S}, \mathbf{M})$, \mathcal{K} -flechas tales que $f \circ g$ esté definida, definimos $\alpha \circ \beta = (f \circ g, \mathbf{S}, \mathbf{T})$.

Una \mathcal{K} -constelación será una tupla $(\mathcal{K}, \mathcal{F})$ donde \mathcal{F} será un conjunto de \mathcal{K} -flechas.

Dadas $\mathcal{C}_0 = (\mathcal{K}, \mathcal{F}_0)$ y $\mathcal{C} = (\mathcal{K}, \mathcal{F})$ \mathcal{K} -constelaciones diremos que \mathcal{C}_0 genera a \mathcal{C} si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ hay $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_0$ (quizás repetidas) tales que $f = f_1 \circ \dots \circ f_n$.

Dada \mathcal{K} , definimos $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{open} = (\mathcal{K}, \mathcal{F}^{open})$ con

$$\mathcal{F}^{open} = \{(\gamma, \mathbf{S}, \mathbf{T}) : \gamma \text{ es un isomorfismo entre } \mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S} \text{ y } \mathbf{T}_0 \leq \mathbf{T}\}$$

TEOREMA 26. *Dado \mathcal{L} lenguaje de primer orden, \mathcal{K} una clase finita de \mathcal{L} -estructuras finitas donde no hay estructuras \mathcal{L} -isomorfas.*

Sea P un conjunto de tuplas de \mathcal{L} -estructuras donde para cada tipo de isomorfismo en $S(\mathcal{K})$ hay una única tupla $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A})$ donde $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}$, con \mathbf{A}_0 representante del tipo de isomorfismo y $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Construimos $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}^{open} = (\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{F}}^{open})$ con $\tilde{\mathcal{F}}^{open} = Aut \cup Iso$, donde $Aut = \bigcup_{(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}) \in P} \{(\alpha, \mathbf{S}, \mathbf{S}) : \alpha \in Aut(\mathbf{S}_0)\}$ y Iso es un conjunto de \mathcal{K} -flechas tal que dadas $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}$ con $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ pero $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, hay un único $\gamma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ isomorfismo, tal que $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in Iso$ y $(\gamma^{-1}, \mathbf{B}, \mathbf{A}) \in Iso$.

Entonces $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}^{open}$ genera a $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{open}$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\tilde{\mathcal{F}}^{open} \subseteq \mathcal{F}^{open}$.

Sea $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathcal{F}^{open}$, entonces $\gamma : \mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}$ isomorfismo, con $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

Si \mathbf{A}_0 es maximal respecto a embeddings, entonces $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ y por lo tanto $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A}) \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{open}$.

Si \mathbf{A}_0 no es maximal y supongamos que ni \mathbf{A}_0 , ni \mathbf{B}_0 son representantes en P de su tipo de isomorfismo. Entonces tomo $(\mathbf{C}_0, \mathbf{C}) \in P$ tal que $(\delta, \mathbf{C}, \mathbf{A}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ con $\delta : \mathbf{C}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ isomorfismo y $(\delta', \mathbf{C}, \mathbf{B}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ con $\delta' : \mathbf{C}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ isomorfismo. Como $\delta'^{-1}\gamma\delta = \lambda \in Aut(\mathbf{C}_0)$ y $(\lambda, \mathbf{C}, \mathbf{C}) \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{open}$. Entonces $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\delta', \mathbf{C}, \mathbf{B}) \circ (\lambda, \mathbf{C}, \mathbf{C}) \circ (\delta^{-1}, \mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Si \mathbf{A}_0 no es maximal y supongamos que \mathbf{A}_0 es representante de su tipo de isomorfismo en P , pero \mathbf{B}_0 no, entonces tomo $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}') \in P$, $(\delta, \mathbf{A}', \mathbf{A}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ con $\delta : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ isomorfismo y $(\delta', \mathbf{B}, \mathbf{A}') \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ con $\delta : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ isomorfismo. Como $\delta'\gamma\delta = \lambda \in Aut(\mathbf{A}_0)$ y $(\lambda, \mathbf{A}', \mathbf{A}') \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{open}$. Entonces $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\delta'^{-1}, \mathbf{A}', \mathbf{B}) \circ (\lambda, \mathbf{A}', \mathbf{A}') \circ (\delta^{-1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}')$.

Si \mathbf{A}_0 no es maximal y supongamos que tanto \mathbf{A}_0 como \mathbf{B}_0 son representantes en P de su tipo de isomorfismo. Entonces $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$. Ahora tomo $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}') = (\mathbf{B}_0, \mathbf{A}') \in P$ y $(\delta, \mathbf{A}', \mathbf{A}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ con $\delta : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ isomorfismo y $(\delta', \mathbf{B}, \mathbf{A}') \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ con $\delta : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ isomorfismo. Como $\delta'\gamma\delta = \lambda \in Aut(\mathbf{A}_0)$ y $(\lambda, \mathbf{A}', \mathbf{A}') \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{open}$. Entonces $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\delta'^{-1}, \mathbf{A}', \mathbf{B}) \circ (\lambda, \mathbf{A}', \mathbf{A}') \circ (\delta^{-1}, \mathbf{A}, \mathbf{A}')$. \square

Algorithm 2 Constelación

```

1:  $\mathcal{K}_0 = \emptyset$ 
2:  $\mathcal{E} = \emptyset$ 
3: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ , desde la mayor a la menor cardinalidad do
4:    $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{A}\}$ 
5:    $\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$ 
6:   for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ , desde la menor a la mayor cardinalidad do
7:     if  $\alpha$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -automorfismo then
8:       return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
9:     else
10:       $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\alpha\}$ 
11:    end if
12:  end for
13:  for  $\mathbf{A}_0 \in S_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$  do
14:    if hay un  $\gamma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}$   $\mathcal{L}$ -isomorfismo, con  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$  then
15:      if  $\gamma$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
16:        return  $\gamma$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
17:      else
18:         $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{B}\}$ 
19:         $\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{B}\}$ 
20:         $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\gamma\}$ 
21:        for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$  do
22:          if  $\alpha$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -automorfismo then
23:            return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
24:          else
25:             $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\alpha\}$ 
26:          end if
27:        end for
28:      end if
29:    else if hay un  $\gamma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}$   $\mathcal{L}$ -isomorfismo, con  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}_0 - \{\mathbf{A}_0\}$  then
30:      if  $\gamma$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
31:        return  $\gamma$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
32:      else
33:         $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\gamma\}$ 
34:      end if
35:    else
36:       $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{A}_0\}$ 
37:      for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_0)$  do
38:        if  $\alpha$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -automorfismo then
39:          return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
40:        else
41:           $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\alpha\}$ 
42:        end if
43:      end for
44:    end if
45:  end for
46: end for
47: return  $(\mathcal{K}_0, \mathcal{E})$   $\triangleright R$  es abierta-definible

```

Álgebras de Lindenbaum

4.1. Definiciones e ideas básicas

4.2. Preorden y algoritmo

4.3. Algoritmos para calcular álgebras

4.4. Ejemplos y aplicación

LEMA 27. Sea \mathbf{L} un reticulado y R una relación binaria no vacía sobre L preservada por endomorfismos en \mathbf{L} . Entonces vale que $\Delta^L \subseteq R$.

DEMOSTRACIÓN. Esto es una consecuencia directa de que para cada $a \in L$ la función de L en L que vale constantemente a es un endomorfismo. \square

TEOREMA 28 (Teorema del filtro primo). Sea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x \notin P$ y $F \subseteq P$.

LEMA 29. Sea \mathbf{L} un reticulado distributivo y R una relación binaria no vacía sobre L preservada por endomorfismos en \mathbf{L} . Si hay $(a, b) \in R$ tal que $a \not\leq b$ (respectivamente $b \not\leq a$), entonces $\{(x, y) : x \geq y\} \subseteq R$ (respectivamente $\{(x, y) : x \leq y\} \subseteq R$).

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $(a, b) \in R$ tal que $a \not\leq b$, y sean $c, d \in L$ tales que $c \geq d$. Veremos que $(c, d) \in R$. Por el Teorema 28 hay un filtro primo P que contiene al filtro generado por a y además $b \notin P$. Definimos $h : L \rightarrow L$ por

$$h(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in P, \\ d & \text{si } x \notin P. \end{cases}$$

Es fácil ver que h es un endomorfismo. Finalmente como $(a, b) \in R$ y h preserva R , $(h(a), h(b)) = (c, d) \in R$. \square

TEOREMA 30. Sea \mathbf{L} un reticulado distributivo y R una relación binaria sobre L definible por un fórmula existencial positiva en \mathbf{L} . Se da una de las siguientes:

- $R = \Delta$,
- $R = \{(x, y) : x \leq y\}$,
- $R = \{(x, y) : x \geq y\}$,
- $R = \{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x \geq y\}$,
- $R = L \times L$.

DEMOSTRACIÓN. Si $R \subseteq \Delta$, por el Lema 27 $R = \Delta$.

Si $R \subseteq \{(x, y) : x \leq y\}$, pero $R \not\subseteq \Delta$, hay $(a, b) \in R$ tales que $a < b$, entonces $a \not\geq b$ y por el Lema 29 $R = \{(x, y) : x \leq y\}$. Análogo para $R \subseteq \{(x, y) : x \geq y\}$.

Si $R \not\subseteq \{(x, y) : x \leq y\}$ y $R \not\subseteq \{(x, y) : x \geq y\}$, aplicando dos veces el Lema 29 $\{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x \geq y\} \subseteq R$. Si además $(a, b) \in R$ pero $a \not\leq b$ y $a \not\geq b$, tomo $(c, d) \in R$, si son comparables ya esta están en R por lo anterior. Si son

incomparables aplico dos veces el Teorema 28 y tomo dos filtros primos P y Q tales que $a \in P$ pero $b \notin P$ y $b \in Q$ pero $a \notin Q$. Ahora definimos la siguiente función

$$h(x) = \begin{cases} c \vee d & \text{si } x \in P \cup Q \\ c & \text{si } x \in P - Q \\ d & \text{si } x \in Q - P \\ c \wedge d & \text{si } x \notin P \text{ y } x \notin Q \end{cases}$$

que fácilmente puede verse que es un endomorfismo. Por lo tanto como $(a, b) \in R$ y h preserva R , $(h(a), h(b)) = (c, d) \in R$. Por lo tanto $R = L \times L$. \square

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro