

Capítulo 1

Introducción

Preliminares

Basándonos en Campercholi y Vaggione 2015

2.1. Definibilidad por fórmulas abiertas

TEOREMA 1 (Los embeddings preservan fórmulas abiertas). *Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras y $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ una función. Son equivalentes:*

1. γ es un embedding de A en B .
2. Para toda fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ y para cada \bar{a} de A vale que:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$)

Sea γ un embedding de A en B , sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula abierta y $\bar{a} \in A^n$, el caso base sale directo ya que los homomorfismos preservan términos. Veamos los casos inductivos:

Sea $\varphi(\bar{x}) = \neg\varphi_1(\bar{x})$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$:

$$\mathbf{A} \models \neg\varphi_1[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \not\models \varphi_1[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{B} \not\models \varphi_1[\gamma(\bar{a})] \text{ sii } \mathbf{B} \models \neg\varphi_1[\gamma(\bar{a})]$$

Sea $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1 \eta \varphi_2)(\bar{x})$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$:

$$\mathbf{A} \models (\varphi_1 \eta \varphi_2)[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \models \varphi_1[\bar{a}] \text{''} \eta \text{''} \mathbf{A} \models \varphi_2[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \models \varphi_1[\gamma(\bar{a})] \text{''} \eta \text{''} \mathbf{B} \models \varphi_2[\gamma(\bar{a})] \text{ sii } \mathbf{B} \models (\varphi_1 \eta \varphi_2)[\gamma(\bar{a})]$$

$2 \Rightarrow 1$)

Supongamos que para toda fórmula abierta $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y cada $\bar{a} \in A^m$ vale que:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

- Veamos que γ es inyectiva:

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \gamma(a') \\ \mathbf{B} &\models (x_1 \equiv x_2)[\gamma(a), \gamma(a')] \\ \mathbf{A} &\models (x_1 \equiv x_2)[a, a'] \\ a &= a' \end{aligned}$$

- Veamos que γ es un homomorfismo:

Sea $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\models (c \equiv x_1)[c^{\mathbf{A}}] \\ \mathbf{B} &\models (c \equiv x_1)[\gamma(c^{\mathbf{A}})] \\ c^{\mathbf{B}} &= \gamma(c^{\mathbf{A}}) \end{aligned}$$

Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}
(a_1, \dots, a_n) &\in r^{\mathbf{A}} \\
\mathbf{A} &\models r(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \\
\mathbf{B} &\models r(x_1, \dots, x_n)[\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)] \\
(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)) &\in r^{\mathbf{B}} \\
\text{Sea } f &\in \mathcal{F}_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1})[a_1, \dots, a_n, f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)] \\
\mathbf{B} &\models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1})[\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n), \gamma(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))] \\
f^{\mathbf{B}}(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)) &= \gamma(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))
\end{aligned}$$

■ Veamos que γ es embedding:

Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}
(\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)) &\in r^{\mathbf{B}} \\
\mathbf{B} &\models r(x_1, \dots, x_n)[\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n)] \\
\mathbf{A} &\models r(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \\
(a_1, \dots, a_n) &\in r^{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2. Si \mathbf{A} es una subestructura de \mathbf{B} y $\varphi(\bar{x})$ es una fórmula abierta, entonces para cada $\bar{a} \in A^n$ vale que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathbf{A} una subestructura de \mathbf{B} y $\varphi(\bar{x})$ una fórmula abierta.

Como \mathbf{A} es subestructura es cerrada sobre r, f y $c^{\mathbf{B}} \in A$

Sea $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que para todo $x \in A$, $\gamma(x) = x$. Como $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, es directo que γ es un embedding. Entonces por el Teorema 1, $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$

Finalmente, por definición de γ :

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{a}]$$

□

NOTACIÓN 3. Dado un conjunto de fórmulas Δ , escribiremos $\Delta(\bar{x})$ para anunciar que cada una de las fórmulas en Δ tiene sus variables libres contenidas en la tupla \bar{x} , y que consideramos cada $\delta \in \Delta(\bar{x})$ declarada $\delta = \delta(\bar{x})$. Si \mathbf{A} es una estructura y \bar{a} es una tupla de elementos de A , escribiremos $\mathbf{A} \models \Delta[\bar{a}]$ cuando $\mathbf{A} \models \delta[\bar{a}]$ para cada $\delta \in \Delta(\bar{x})$.

DEFINICIÓN 4. Sea \mathbf{A} una estructura y sean $a_1, \dots, a_n \in A$. Definimos el diagrama abierto para a_1, \dots, a_n en \mathbf{A} como:

$$\Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}(x_1, \dots, x_n) := \{\alpha \mid \alpha \text{ es abierta y } \mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]\}$$

TEOREMA 5. Sea \mathbf{A} una estructura y $b_1, \dots, b_n \in B$, son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}[\bar{b}]$
2. Hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Veamos $1 \Rightarrow 2$:

Supongamos que $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}[\bar{b}]$

Si α fórmula abierta y $\mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \models \alpha[\bar{b}]$

Tomo $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n] : t \in T^\tau, a_1, \dots, a_n \in \bar{a}\}$ y $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[b_1, \dots, b_n] : t \in T^\tau, b_1, \dots, b_n \in \bar{b}\}$

Defino

$$\begin{aligned} \gamma &: A' \rightarrow B' \\ \gamma(t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]) &= t^{\mathbf{B}}[b_1, \dots, b_n] \end{aligned}$$

Es claro que γ es un homomorfismo.

- Veamos que γ es inyectivo

Sean $a'_1, a'_2 \in A'$ tales que $a'_1 \neq a'_2$

$$\begin{aligned} (2.1.1) \quad & a'_1 \neq a'_2 \\ & t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \neq t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \\ & \mathbf{A} \models \neg(t_1 \equiv t_2)[\bar{a}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.1.2) \quad & \mathbf{B} \models \neg(t_1 \equiv t_2)[\bar{b}] \\ & t_1^{\mathbf{B}}[\bar{b}] \neq t_2^{\mathbf{B}}[\bar{b}] \\ & \gamma(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) \neq \gamma(t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) \end{aligned}$$

- Veamos que γ es sobreyectivo

Sea $b' \in B'$

$$\begin{aligned} b' &\in B' \\ t^{\mathbf{B}}[\bar{b}] &\in B' \end{aligned}$$

Tomo $t^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = a'$

$$\gamma(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathbf{B}}[\bar{b}]$$

Por lo tanto γ es un isomorfismo y $\gamma(a_j) = \gamma(x_j^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]) = x_j^{\mathbf{B}}[b_1, \dots, b_n] = b_j$.

Ahora veamos $2 \Rightarrow 1$:

Supongamos que hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

Entonces, es claro que γ es un embedding de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$.

Por el Teorema 1 para toda fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ y cada $\bar{a} \in A'$

$$\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

Por el Teorema 2 como $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ es subestructura de \mathbf{A} , $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ lo es de \mathbf{B} y φ es abierta

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$$

Por lo tanto si α es abierta y $\mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \models \alpha[\bar{b}]$

Finalmente, $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$ □

DEFINICIÓN 6. Dos fórmulas $\alpha(\bar{x})$ y $\beta(\bar{x})$ se dicen *equivalentes* sobre una familia de estructuras \mathcal{K} si para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y cada \bar{a} de A vale que

$$\mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \beta[\bar{a}].$$

TEOREMA 7 (Modulo equivalencia sobre una estructura finita, la cantidad de fórmulas en x_1, \dots, x_n es finita). *Sea \mathcal{K} una clase finita de estructuras finitas, y sean x_1, \dots, x_n variables.*

Hay un conjunto finito de fórmulas $\Sigma(\bar{x})$ tal que para toda fórmula $\varphi(\bar{x})$ hay $\sigma(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ tal que $\varphi(\bar{x})$ y $\sigma(\bar{x})$ son equivalentes sobre \mathcal{K} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$. Veamos primero que las fórmulas son finitas modulo equivalencia. Sea $\varphi(\bar{x})$ defino $T_{\varphi\mathcal{K}} = \{\bar{a} \in A_1^n \mid \mathbf{A}_1 \models \varphi[\bar{a}]\} \times \dots \times \{\bar{a} \in A_m^n \mid \mathbf{A}_m \models \varphi[\bar{a}]\}$ y supongamos φ equivalente ψ en \mathcal{K} , entonces

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) \in T_{\varphi\mathcal{K}} \Leftrightarrow (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) \in T_{\psi\mathcal{K}}$ para cada $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) \in A_1^n \times \dots \times A_m^n$ lo que significa que $T_{\varphi\mathcal{K}} = T_{\psi\mathcal{K}}$. Entonces basta con contar los subconjuntos de $A_1^n \times \dots \times A_m^n$, como $|A_1^n \times \dots \times A_m^n| = |A_1|^n \dots |A_m|^n$ y cada A_i era finito, es claro que $A_1^n \times \dots \times A_m^n$ es finito. Por lo tanto $\mathcal{P}(A^n)$ también lo es.

Ahora veamos que existe $\Sigma(\bar{x})$. Sean $T_1, \dots, T_k \subseteq A_1^n \times \dots \times A_m^n$ tales que existe $\varphi_i(\bar{x})$ tal que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \models \varphi_i[T_i]$ y sea $\psi(\bar{x})$, tomo $T_{\psi\mathcal{K}}$ y como T_1, \dots, T_k es la sucesión de todos los subconjuntos que se definen con una fórmula, hay un j tal que $T_j = T_{\psi\mathcal{K}}$. Entonces, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \models \psi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_j[\bar{a}]$. \square

TEOREMA 8. *Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras finitas y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces existe una fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ tal que para todo $\bar{b} \in B^n$ son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$
2. Hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Tomo $\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})$ que es una fórmula, por el Teorema 7.

Es claro que $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})[\bar{b}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$

Entonces por Teorema 5, hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$ \square

DEFINICIÓN 9. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden y $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Diremos que R es *definible* en una familia \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras cuando exista una \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y todas $a_1, \dots, a_n \in A$

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \iff \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ son lenguajes de primer orden, para una \mathcal{L}' -estructura \mathbf{A} , usaremos $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ para indicar el reducto de \mathbf{A} al lenguaje \mathcal{L} . Si \mathbf{A}, \mathbf{B} son \mathcal{L} -estructuras, usaremos $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ para expresar que \mathbf{A} es subestructura de \mathbf{B} .

Sean:

$$Fo(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula}\}$$

$$E(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula existencial}\}$$

$$E^+(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula existencial positiva}\}$$

$$Op(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula abierta}\}$$

$$Op^+(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula abierta positiva}\}$$

$$\pm At(\mathcal{L}) = At(\mathcal{L}) \cup \{\neg\alpha : \alpha \in At(\mathcal{L})\}$$

$$At(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}\text{-fórmulas atómicas}\}$$

DEFINICIÓN 10. Dados A, B conjuntos, $R^A \subseteq A^n$, $R^B \subseteq B^n$, diremos que una función $\gamma : A \rightarrow B$ preserva R si para toda tupla $(a_1, \dots, a_n) \in A_0$ tenemos que si $(a_1, \dots, a_n) \in R^A$ implica que $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \in R^A$.

TEOREMA 11. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Hay una fórmula en $\text{Op}(\mathcal{L})$ que define R en \mathcal{K} .
2. Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todas $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$, todo isomorfismo $\sigma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ preserva R .

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Sea $\varphi(\bar{x})$ la fórmula que define R en \mathcal{K} , sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ tales que $\sigma : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ sea un isomorfismo. Sea $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \cap A_0$ veamos que $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}_0}$. Como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \Rightarrow \bar{a} \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, por Teorema 2, $\mathbf{A}_0 \models \varphi[\bar{a}]$ y como \mathbf{A}_0 y \mathbf{B}_0 son isomorfos por σ , $\mathbf{B}_0 \models \varphi[\sigma(\bar{a})]$. Nuevamente por Teorema 2 $\mathbf{B} \models \varphi[\sigma(\bar{a})]$ y como por hipótesis φ define a R en \mathcal{K} , $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

$2 \Rightarrow 1$) Sea $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x}) \right) \right)$, la cual es fórmula por el Teorema 7. Veamos que para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$ sii $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$:

\Rightarrow) Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces en particular para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})[\bar{b}]$. Por Teorema 8, hay un isomorfismo $\gamma : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$. Entonces por hipótesis γ preserva R . Finalmente como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$ o sea que $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

\Leftarrow) Supongamos $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x}) \right) \right) = \dots \vee \dots \vee \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}} \alpha(\bar{x}) \right)$, evidentemente $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}[\bar{b}]$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$. \square

2.2. Definibilidad por fórmulas abiertas positivas y conjunción de atómicas

TEOREMA 12. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras y $h : A \rightarrow B$ una función, son equivalentes:

1. h es un homomorfismo de \mathbf{A} en \mathbf{B} .
2. Para toda fórmula atómica $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y para cada \bar{a} de A vale que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \implies \mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})].$$

3. Para toda fórmula abierta positiva¹ $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y para cada \bar{a} de A vale que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \implies \mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})].$$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Directo, ya que los homomorfismos preservan términos.

$2 \Rightarrow 1$) Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}] \Rightarrow \mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})]$ con φ atómica. Veamos que h es homomorfismo.

Sea $c \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{A} \models (c \equiv x_1) [c^{\mathbf{A}}] \Rightarrow \mathbf{B} \models (c \equiv x_1) [h(c^{\mathbf{A}})] \Leftrightarrow c^{\mathbf{B}} = h(c^{\mathbf{A}})$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbf{A} \models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1}) [a_1, \dots, a_n, f^{\mathbf{A}}(\bar{a})]$$

$$\mathbf{B} \models (f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{n+1}) [h(a_1), \dots, h(a_n), h(f^{\mathbf{A}}(\bar{a}))]$$

$$f^{\mathbf{B}}(h(\bar{a})) = h(f^{\mathbf{A}}(\bar{a}))$$

¹Una fórmula es positiva si no tiene ocurrencias de $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\bar{a} \in r^{\mathbf{A}} \Rightarrow \mathbf{A} \models r(\bar{x})[\bar{a}] \Rightarrow \mathbf{B} \models r(\bar{x})[h(\bar{a})] \Rightarrow h(\bar{a}) \in r^{\mathbf{B}}$$

2 \Rightarrow 3) Rutina.

3 \Rightarrow 2) Directo ya que toda atómica es abierta positiva. \square

DEFINICIÓN 13. Sea \mathbf{A} una estructura y sean $a_1, \dots, a_n \in A$. Definimos el diagrama atómico positivo de \bar{a} en \mathbf{A} como

$$\Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+(x_1, \dots, x_n) := \{\alpha \mid \alpha \text{ es atómica y } \mathbf{A} \models \alpha[\bar{a}]\}.$$

TEOREMA 14. Sean \mathbf{B} una estructura y $b_1, \dots, b_n \in B$, son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+[\bar{b}]$.
2. Hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

DEMOSTRACIÓN. 1 \Rightarrow 2) Defino $h : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$, como

$$h(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathbf{B}}[\bar{b}]$$

El cual es se ve fácilmente que es un homomorfismo que cumple $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

2 \Rightarrow 1) Supongamos que hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$, entonces como $\mathbf{A} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+[\bar{a}]$, por el Teorema 12 $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+[h(\bar{a})]$, entonces $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+[\bar{b}]$ \square

TEOREMA 15. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras finitas y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces existe una fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ tal que para todo $\bar{b} \in B^n$ son equivalentes:

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$
2. Hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Tomo $\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+} \alpha(\bar{x})$ que es una fórmula, por el Teorema 7.

Es claro que $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+[\bar{b}]$

Entonces por Teorema 14, hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$ \square

TEOREMA 16. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Hay una \mathcal{L} -fórmula abierta positiva que define R en \mathcal{K} .
2. Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todas $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$, todo homomorfismo $h : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ preserva R .

DEMOSTRACIÓN. Veamos 1 \Rightarrow 2:

Sea $\varphi(\bar{x})$ la fórmula abierta positiva que define R en \mathcal{K} , sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ tales que $h : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ sea un homomorfismo. Sea $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \cap A_0$ veamos que $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}_0}$:

$\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \Rightarrow \bar{a} \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, por Teorema 2, $\mathbf{A}_0 \models \varphi[\bar{a}]$ y como h es un homomorfismo de \mathbf{A}_0 en \mathbf{B}_0 y φ es abierta positiva por Teorema 12, $\mathbf{B}_0 \models \varphi[h(\bar{a})]$. Nuevamente por Teorema 2 $\mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{a})]$ y como por hipótesis φ define a R en \mathcal{K} , $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

Veamos 2 \Rightarrow 1:

Sea $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+} \alpha(\bar{x}) \right) \right)$, la cual es fórmula por el Teorema 7. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$:

\Rightarrow) Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces en particular para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{A}, \bar{a}}^+[\bar{b}]$. Por Teorema 15, hay un homomorfismo $h : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que

$h(\bar{a}) = \bar{b}$. Entonces por hipótesis h preserva R . Finalmente como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, entonces $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$ o sea que $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

\Leftarrow) Supongamos $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces $\varphi = \dots \vee \dots \vee \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}^+} \alpha(\bar{x}) \right)$, evidentemente $\mathbf{B} \models \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}^+[\bar{b}]$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$. \square

DEFINICIÓN 17. Sean A_1, \dots, A_m, B conjuntos, $R^{A_i} \subseteq A_i^n$ para cada $i \in [1, m]$, $R^B \subseteq B^n$ y $h : D \subseteq A_1 \times \dots \times A_m \rightarrow B$ una función. Diremos que h *preserva* R si dados

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, \bar{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in D$$

tales que

$$(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in [1, m]$$

se tiene que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^B$.

LEMA 18. Sean $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ estructuras y $\varphi = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ con ψ una conjunción de fórmulas atómicas. Entonces son equivalentes:

1. Para todo $i = 1, \dots, m$ se da que $\mathbf{A}_i \models \varphi[a_{1i}, \dots, a_{ni}]$
2. $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$, con $\bar{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jm})$

DEMOSTRACIÓN. Rutina. \square

TEOREMA 19. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Para cada $m \geq 1$, para todas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, para cada $\mathbf{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, todo homomorfismo $h : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .
2. Hay una conjunción finita de \mathcal{L} -fórmulas atómicas que define R en \mathcal{K} .

DEMOSTRACIÓN. $2 \Rightarrow 1$) Sea $\varphi(\bar{x})$ conjunción de atómicas que define a R en \mathcal{K} . Sean $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, y $h : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ un homomorfismo. Sean

$$\bar{s}_1 = (s_{11}, \dots, s_{1m}), \dots, \bar{s}_n = (s_{n1}, \dots, s_{nm}) \in \mathbf{S}$$

tales que

$$(s_{1i}, \dots, s_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Veamos que $(h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)) \in R^B$. Como $(s_{1i}, \dots, s_{ni}) \in R^{A_i}$ y φ define a R en \mathcal{K} , tenemos que

$$\mathbf{A}_i \models \varphi[s_{1i}, \dots, s_{ni}] \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Luego, por el Lema 18,

$$\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \varphi[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n].$$

Como φ es abierta y $\mathbf{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, el Teorema 2 implica que $\mathbf{S} \models \varphi[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n]$, y aplicando el Teorema 12 obtenemos que $\mathbf{B} \models \varphi[h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)]$. Finalmente, como φ define a R en \mathcal{K} y $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, concluimos que $(h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)) \in R^B$.

$1 \Rightarrow 2$) Supongamos $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, R n -aria. Sean $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ tales que $\bar{x}_i = \left(x_{i1}^1, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_1}|}^1, \dots, x_{i1}^m, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_m}|}^m \right)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\bigcup R^{A_j} = \left\{ \left(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j \right) \text{ con } i \in \{1, |R^{\mathbf{A}_j}|\} \right\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea

$$\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}^+} \alpha(\bar{x})$$

. Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$ y veamos que $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Como $\mathbf{B} \models \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}[b_1, \dots, b_n]$, por Teorema 14 hay h homomorfismo de $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}}$ en $\langle b_1, \dots, b_n \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{x}_i) = b_i$. Como por hipótesis h preserva R , entonces como $(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j) \in R^{\mathbf{A}_j}$, $(h(\bar{x}_1), \dots, h(\bar{x}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, que es exactamente $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Ahora supongamos $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$ y veamos que $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$, entonces hay algún j tal que $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}$ y hay algún k y algún j tal que

$$(x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j) = (b_1, \dots, b_n)$$

. Entonces como $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{B}^{|R^{\mathbf{B}}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|} \models \varphi[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ por Teorema 18 $\mathbf{B} \models \varphi[x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j]$, por lo tanto $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$. \square

TEOREMA 20. *Sea \mathbf{A} una estructura finita y $a_1, \dots, a_n \in A$. Entonces hay una fórmula existencial $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para toda estructura \mathbf{B} y para todo $\bar{b} \in B^n$ los siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$.
2. Hay un embedding $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Sean a'_1, \dots, a'_m tales que $\langle a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y sea

$$\varphi = \exists y_1, \dots, y_m \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right)$$

que es fórmula por el Teorema 7.

Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces existen $b'_1, \dots, b'_m \in B$ tales que $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{b}']$ por Teorema 5 hay un isomorfismo $\gamma : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}, \bar{a}') = (\bar{b}, \bar{b}')$, y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de \mathbf{A} en \mathbf{B} tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$.

Supongamos que hay un embedding $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$, por lo tanto $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S} \leq \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Como $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, por ser γ un isomorfismo $\mathbf{S} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y entonces $\mathbf{S} \models \varphi[\bar{b}]$. Por lo tanto existe \bar{b}' en $S \subseteq B$ tal que $\mathbf{S} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{b}']$. Como $\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ es una fórmula abierta, por Teorema 2, $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{b}']$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$ \square

TEOREMA 21. *Sea \mathbf{A} una estructura finita y $a_1, \dots, a_n \in A$. Entonces hay una fórmula existencial positiva $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para toda estructura \mathbf{B} y para todo $\bar{b} \in B^n$ los siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$.
2. Hay un homomorfismo $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Sean a'_1, \dots, a'_m tales que $\langle a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y sea

$$\varphi = \exists y_1, \dots, y_m \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}}^+ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right)$$

que es fórmula por el Teorema 7.

Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$, entonces existen $b'_1, \dots, b'_m \in B$ tales que $\mathbf{B} \models \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}}^+ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{b}']$ por Teorema 14 hay un homomorfismo $h : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}, \bar{a}') =$

(\bar{b}, \bar{b}') , y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, h es un homomorfismo de \mathbf{A} en \mathbf{B} tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

Supongamos que hay un homomorfismo $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$. Como $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$, entonces $\mathbf{A} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[\bar{a}, \bar{a}']$ y por Teorema 12 $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[h(\bar{a}), h(\bar{a}')]]$. Entonces $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[\bar{b}, \bar{b}']$, por lo que claramente $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$. \square

TEOREMA 22. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Hay una \mathcal{L} -fórmula que define R en \mathcal{K} .*
2. *Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo $\gamma : \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Sea φ existencial que define a R en \mathcal{K} , y sea $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un isomorfismo. Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y como φ define a R en \mathcal{K} , entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

$2 \Rightarrow 1$) Para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, cada $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, tomo \bar{a}' tal que $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$. Ahora tomo $\delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, que es fórmula por Teorema 7. Ahora tomo

$$\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} (\exists \bar{y} \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y})) \right)$$

Sea $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces como $\varphi = \dots \vee \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{B}, (\bar{b}, \bar{b}')}(\bar{x}, \bar{y}) \vee \dots$, y como $\mathbf{B} \models \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{B}, (\bar{b}, \bar{b}')}(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{b}']$, $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

Sea $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$. Entonces para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, y algún $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$ tales que $\mathbf{B} \models \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}]$. Entonces hay un \bar{z} en \mathbf{B} tal que $\mathbf{B} \models \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{z}]$. Como $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}^+[\bar{b}, \bar{z}]$, por Teorema 5 hay $\gamma : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ isomorfismo tal que $(\gamma(\bar{a}), \gamma(\bar{a}')) = (\bar{b}, \bar{z})$ y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de \mathbf{A} en \mathbf{B} y como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$, $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

Como φ es disyunción de existenciales, por teorema puede ser convertida en una fórmula existencial. \square

TEOREMA 23. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Hay una \mathcal{L} -fórmula existencial que define R en \mathcal{K} .*
2. *Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo embedding $\gamma : \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Sea φ existencial que define a R en \mathcal{K} , y sea $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un embedding. Entonces $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S} \leq \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{S} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$. Como φ es de la forma $\varphi = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ con ψ abierta, existe un \bar{s} tal que $\mathbf{S} \models \psi[\gamma(\bar{a}), \bar{s}]$. Como ψ es abierta y $\mathbf{S} \leq \mathbf{B}$, por el Teorema 2 $\mathbf{B} \models \psi[\gamma(\bar{a}), \bar{s}]$. Entonces $\mathbf{B} \models \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y como φ define a R en \mathcal{K} , entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

$2 \Rightarrow 1$) Para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, cada $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, tomo \bar{a}' tal que $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Ahora tomo $\delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, que es fórmula por Teorema 7. Ahora tomo

$$\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} (\exists \bar{y} \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')}(\bar{x}, \bar{y})) \right)$$

Sea $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces como $\varphi = \dots \vee \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{B}, (\bar{b}, \bar{b}')}(\bar{x}, \bar{y}) \vee \dots$, y como $\mathbf{B} \models \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{B}, (\bar{b}, \bar{b}')}(\bar{x}, \bar{y})[\bar{b}, \bar{b}']$, $\mathbf{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

Sea $\mathbf{B} \models \varphi [b_1, \dots, b_n]$. Entonces para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, y algún $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$ tales que $\mathbf{B} \models \exists \bar{y} \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')} (\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}]$. Entonces hay un \bar{z} en \mathbf{B} tal que $\mathbf{B} \models \delta_{\mathbf{A}, (\bar{a}, \bar{a}')} (\bar{x}, \bar{y}) [\bar{b}, \bar{z}]$. Como $\mathbf{B} \models \Delta_{(\bar{a}, \bar{a}'), \mathbf{A}} [\bar{b}, \bar{z}]$, por Teorema 5 hay $\gamma : \langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} \rightarrow \langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}}$ isomorfismo tal que $(\gamma(\bar{a}), \gamma(\bar{a}')) = (\bar{b}, \bar{z})$ y como $\langle \bar{a}, \bar{a}' \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b}' \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de \mathbf{A} en \mathbf{B} y como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$, $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

Como φ es disyunción de existenciales, por teorema puede ser convertida en una fórmula existencial. \square

TEOREMA 24. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Hay una \mathcal{L} -fórmula existencial positiva que define R en \mathcal{K} .
2. Para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo homomorfismo $\gamma : \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .

DEMOSTRACIÓN. Igual a la prueba del Teorema 23, tomando el diagrama abierto positivo. \square

TEOREMA 25. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n -ario. Para una clase finita \mathcal{K} de \mathcal{L}' -estructuras, los siguientes son equivalentes:

1. Para cada $m \geq 1$, para todas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, todo homomorfismo $h : (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R .
2. Hay una \mathcal{L} -fórmula primitiva positiva que define R en \mathcal{K} .

DEMOSTRACIÓN. $2 \Rightarrow 1$) Sea $\varphi = \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ primitiva positiva que define a R en \mathcal{K} . Sean $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $h : (\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ un homomorfismo. Sean

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, \bar{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \in S$$

tales que

$$(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Veamos que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$. Como $(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i}$ y φ define a R en \mathcal{K} , tenemos que

$$\mathbf{A}_i \models \varphi [a_1, \dots, a_{ni}] \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Luego, por el Lema 18,

$$\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \varphi [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n].$$

Entonces hay $b_1, \dots, b_k \in A_1 \times \dots \times A_m$, tales que

$$\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_m \models \psi [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, b_1, \dots, b_k].$$

Como ψ es abierta positiva, aplicando el Teorema 12 obtenemos que $\mathbf{B} \models \varphi [h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)]$. Finalmente, como φ define a R en \mathcal{K} y $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, concluimos que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$.

$1 \Rightarrow 2$) Supongamos $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, R n -aria. Sean $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ tales que $\bar{x}_i = \left(x_{i1}^1, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_1}|}^1, \dots, x_{i1}^m, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_m}|}^m \right)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\bigcup R^{A_j} = \left\{ \left(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j \right) \text{ con } i \in \{1, |R^{A_j}|\} \right\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sean $\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$, tales que $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k \rangle^{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}} =$

$\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$. Sea

$$\varphi = \exists \bar{y} \bigwedge_{\alpha \in \Delta^+} \bigwedge_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k)} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$$

. Supongamos $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$ y veamos que $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces hay b'_1, \dots, b'_k tal que $\mathbf{B} \models \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k)} [b_1, \dots, b_n, b'_1, \dots, b'_k]$,

por Teorema 14 hay h homomorfismo de $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_k \rangle_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}}$ en $\langle b_1, \dots, b_n, b'_1, \dots, b'_k \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{x}_i) = b_i$ y $h(\bar{x}'_i) = b'_i$, claramente h es un homomorfismo de $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ en \mathbf{B} . Como por hipótesis h preserva R , entonces como $(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j) \in R^{\mathbf{A}_j}$, $(h(\bar{x}_1), \dots, h(\bar{x}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, que es exactamente $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Ahora supongamos $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$ y veamos que $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$, entonces hay algún j tal que $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}$ y hay algún k y algún j tal que

$$(x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j) = (b_1, \dots, b_n)$$

. Entonces como $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \dots \times \mathbf{B}^{|R^{\mathbf{B}}|} \times \dots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|} \models \varphi[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ por Teorema 18 $\mathbf{B} \models \varphi[x_{1k}^j, \dots, x_{nk}^j]$, por lo tanto $\mathbf{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$. \square

Algoritmo de la Constelación

Una clase \mathcal{K} de estructuras será *disjunta* si dadas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$ si y solo si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. La clase \mathcal{K} será *normal* si es disjunta, finita y cada una de las estructuras en \mathcal{K} finita.

3.1. Preprocesamiento

LEMA 26. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, \mathcal{K} una clase finita de \mathcal{L}' -estructuras finitas y $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{K}$, con $\mathbf{A} \neq \tilde{\mathbf{A}}$, tales que hay un \mathcal{L} -isomorfismo $\gamma : A \rightarrow \tilde{A}$. Entonces para toda $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ y toda \mathcal{L} -fórmula φ son equivalentes:

1. φ define a R en \mathcal{K} .
2. γ es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo y φ define a R en $\mathcal{K} - \{\tilde{\mathbf{A}}\}$.

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Trivial.

$2 \Rightarrow 1$) $\tilde{\mathbf{A}} \models R[\bar{a}]$ sii $\mathbf{A} \models R[\gamma^{-1}(\bar{a})]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\gamma^{-1}(\bar{a})]$ sii $\tilde{\mathbf{A}} \models \varphi[\bar{a}]$. \square

Independientemente del tipo de definibilidad que uno quiera chequear el Lema 26 sugiere que uno puede comenzar por reducir \mathcal{K} eliminando copias de estructuras $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfas.

Algorithm 1 Preprocesamiento

```

1: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  do
2:   for  $\mathbf{B} \in \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$  do
3:     if hay  $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$   $\mathcal{L}$ -isomorfismo then
4:       if  $\gamma$  es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
5:          $\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{B}\}$ 
6:       else
7:         return  $\gamma$   $\triangleright R$  no es definible y  $\gamma$  es contraejemplo
8:       end if
9:     end if
10:  end for
11: end for
12: return  $\mathcal{K}$   $\triangleright \mathcal{K}$  sin estructuras  $\mathcal{L}$ -isomorfas

```

Notar que los isomorfismos revisados por este algoritmo deben ser necesariamente revisados para comprobar definibilidad en cualquiera de los formatos. La ventaja de chequear estos en primer lugar es que podría reducirse la clase \mathcal{K} en el proceso.

Se obtiene una pequeña ganancia al chequear por \mathcal{L} -isomorfismos y recién descubierto uno de estos comprobar si es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo. Observar además que, para poder aplicar los teoremas de definibilidad de las secciones 2.1 y 2.2, habría que verificar que cada uno de los \mathcal{L} -isomorfismos entre estructuras de \mathcal{K} preserven R y vemos que basta con chequear sólo uno.

3.2. Definibilidad abierta

Dados \mathcal{F}_0 y \mathcal{F} dos conjuntos de funciones, diremos que \mathcal{F}_0 genera a \mathcal{F} si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ hay $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_0$ (quizás repetidas) tales que $f = f_1 \circ \dots \circ f_n$.

Dado un conjunto \mathcal{K} de estructuras definimos los siguientes conjuntos:

$$\text{iso}(\mathcal{K}) = \{\gamma : \gamma \text{ isomorfismo de } \mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B} \text{ con } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}\}$$

$$\text{sub iso}(\mathcal{K}) = \{\gamma : \gamma \text{ isomorfismo de } \mathbf{A}_0 \text{ en } \mathbf{B}_0 \text{ con } \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{K})\}$$

$$\text{hom}(\mathcal{K}) = \{\gamma : \gamma \text{ homomorfismo de } \mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B} \text{ con } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}\}$$

$$\text{sub hom}(\mathcal{K}) = \{\gamma : \gamma \text{ homomorfismo de } \mathbf{A}_0 \text{ en } \mathbf{B}_0 \text{ con } \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{K})\}$$

LEMA 27. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden tales que $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ es un símbolo de relación n -ario y \mathcal{K} un conjunto normal de \mathcal{L}' -estructuras. Entonces si cada $\gamma \in \text{sub iso}(\mathcal{K}_{\mathcal{L}})$ preserva R , R es definible por una \mathcal{L} -fórmula abierta en \mathcal{K} .

DEMOSTRACIÓN. Directo del Teorema 11. \square

TEOREMA 28. Sea \mathcal{K} un conjunto normal de \mathcal{L} -estructuras donde no hay estructuras isomorfas. Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K})$ tal que contiene exactamente un representante por cada tipo de isomorfismo en $\mathcal{S}(\mathcal{K})$. Sea $\mathcal{F} \subseteq \text{sub iso}(\mathcal{K})$ tal que:

- para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ se tiene que $\text{aut}(\mathbf{S}) \subseteq \mathcal{F}$,
- para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{S}(\mathcal{K}) - \mathcal{S}$ hay $\gamma, \gamma^{-1} \in \mathcal{F}$ para algún isomorfismo γ de \mathbf{A} en el representante del tipo de isomorfismo de \mathbf{A} en \mathcal{S} .

Entonces \mathcal{F} genera $\text{sub iso}(\mathcal{K})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma \in \text{sub iso}(\mathcal{K})$, entonces $\gamma : \mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}$ isomorfismo, con $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

Si $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \in \mathcal{S}$, como no hay estructuras isomorfas en \mathcal{S} , $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$, por lo tanto $\gamma \in \text{aut}(\mathbf{A}_0) \subseteq \mathcal{F}$.

Si $\mathbf{A}_0 \in \mathcal{S}$ pero $\mathbf{B}_0 \notin \mathcal{S}$, entonces \mathbf{A}_0 es el representante de \mathbf{B}_0 en \mathcal{S} , y por lo tanto hay un isomorfismo $\delta : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ tal que $\delta, \delta^{-1} \in \mathcal{F}$. Claramente $\delta\gamma = \lambda \in \text{aut}(\mathbf{A}_0) \subseteq \mathcal{F}$, por lo tanto $\gamma = \delta^{-1}\lambda$.

Si $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \notin \mathcal{S}$, hay $\mathbf{C}_0 \in \mathcal{S}$ que es representante de \mathbf{A}_0 y \mathbf{B}_0 . Luego hay $\delta : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{C}_0$ y $\delta' : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{C}_0$ tales que $\delta, \delta^{-1}, \delta', \delta'^{-1} \in \mathcal{F}$. Claramente $\delta'\gamma\delta^{-1} = \lambda \in \text{aut}(\mathbf{C}_0) \subseteq \mathcal{F}$, por lo tanto $\gamma = \delta'^{-1}\lambda\delta$. \square

COROLARIO 29. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden tales que $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ es un símbolo de relación n -ario y \mathcal{K} un conjunto normal de \mathcal{L}' -estructuras. Supongamos \mathcal{F} es como en el Teorema 28 para la familia $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Entonces si cada $\gamma \in \mathcal{F}$ preserva R , se tiene que R es definible por una \mathcal{L} -fórmula abierta en \mathcal{K} .

DEMOSTRACIÓN. Directa ya que composición de funciones que preservan, preserva y Lema 27. \square

El Teorema 28 sugiere un subconjunto de isomorfismos que bastan para revisar definibilidad abierta a través del Corolario 29.

En el Algoritmo 2 vamos recorriendo \mathcal{F} , para esto recorremos las estructuras en \mathcal{K} y buscamos isomorfismos con los representantes en \mathcal{S} y los revisamos por preservación. Si no encontramos un representante lo agregamos a \mathcal{S} y también revisamos por preservación sus automorfismos, luego hacemos lo mismo con sus subestructuras y luego continuamos con la siguiente estructura en \mathcal{K} .

Notar que en las líneas 10 y 24 que no se necesita revisar si los automorfismos son $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -automorfismos ya que, como se recorren todos su inversa también es revisada por preservación.

Además, una vez que una subestructura resulta ser $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfa a un representante en \mathcal{S} , sabemos que todas sus subestructuras ya tienen representante en \mathcal{S} y que los isomorfismos internos preservan. Esto permite disminuir la cantidad de subestructuras a revisar, como se ve en la línea 20.

Algorithm 2 Constelación abierta

```

1:  $\mathcal{S} = \emptyset$ 
2: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ , desde la mayor a la menor cardinalidad do
3:   if hay un  $\gamma : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{A}$   $\mathcal{L}$ -isomorfismo, con  $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$  then
4:     if  $\gamma$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
5:       return  $\gamma$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
6:     end if
7:   else
8:      $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{\mathbf{A}\}$ 
9:     for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$  do
10:      if  $\alpha$  no preserva  $R$  then
11:        return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\alpha$  es contraejemplo
12:      end if
13:    end for
14:     $\text{Sub} = [\mathbf{C} : \mathbf{C} \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{A}\}, \text{ de la mayor a menor cardinalidad}]$ 
15:    for  $\mathbf{B} \in \text{Sub}$  do
16:      if hay un  $\gamma : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}$   $\mathcal{L}$ -isomorfismo, con  $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$  then
17:        if  $\gamma$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
18:          return  $\gamma$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
19:        end if
20:         $\text{Sub} = [\mathbf{C} : \mathbf{C} \in \text{Sub} \text{ tal que } C \not\subseteq B]$ 
21:      else
22:         $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{\mathbf{B}\}$ 
23:        for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$  do
24:          if  $\alpha$  no preserva  $R$  then
25:            return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\alpha$  es contraejemplo
26:          end if
27:        end for
28:      end if
29:    end for
30:  end if
31: end for
32: return  $\mathcal{S}$   $\triangleright R$  es abierta-definible

```

3.3. Definibilidad de primer orden

Luego de haber aplicado el Algoritmo 1 para preprocesamiento, solo basta con revisar los automorfismos para $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$.

3.4. Definibilidad existencial-positiva

Por el Teorema 24, luego de aplicar el Algoritmo 1 de preprocesamiento, solo basta con revisar los homomorfismos entre $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

Algorithm 3 Constelación para primer orden

```

1:  $\mathcal{K}_0 = \emptyset$ 
2: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  do
3:    $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{A}\}$ 
4:    $\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$ 
5:   for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$  do
6:     if  $\alpha$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -automorfismo then
7:       return  $\alpha \triangleright R$  no es definible en primer orden y  $\alpha$  es contraejemplo
8:     end if
9:   end for
10: end for
11: return  $\mathcal{K}_0$   $\triangleright R$  es definible en primer orden

```

Algorithm 4 Constelación existencial-positiva

```

1: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$  do
2:   for  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$  do
3:     if hay un  $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$   $\mathcal{L}$ -homomorfismo then
4:       if  $h$  no preserva  $R$  then
5:         return  $h \triangleright R$  no es existencial-positiva definible y  $h$  es
contraejemplo
6:       end if
7:     end if
8:   end for
9: end for
10: return  $\mathcal{K}$   $\triangleright R$  es existencial positiva definible

```

3.5. Definibilidad abierta-positiva

TEOREMA 30. *Sea \mathcal{K} un conjunto normal de \mathcal{L} -estructuras donde no hay estructuras isomorfas. Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{K})$ tal que contiene exactamente un representante por cada tipo de isomorfismo en $\mathbb{S}(\mathcal{K})$. Sea $\mathcal{H} \subseteq \text{sub hom}(\mathcal{K})$ tal que:*

- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ con \mathcal{F} como en el Teorema 28,
- para cada $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{S}$ todo $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ homomorfismo sobreyectivo esta en \mathcal{H} .

Entonces \mathcal{H} genera $\text{sub hom}(\mathcal{K})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $h \in \text{sub hom}(\mathcal{K})$, entonces $h : \mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}$ homomorfismo, con $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

Si $\mathbf{A}_0, h(\mathbf{A}_0) \in \mathcal{S}$, h es homomorfismo sobreyectivo entre estructuras de \mathcal{S} , por lo que $h \in \mathcal{H}$.

Si $\mathbf{A}_0 \in \mathcal{S}$ pero $h(\mathbf{A}_0) \notin \mathcal{S}$, hay \mathbf{S} representante de $h(\mathbf{A}_0)$ en \mathcal{S} y un isomorfismo $\delta : h(\mathbf{A}_0) \rightarrow \mathbf{S}$ tal que $\delta, \delta^{-1} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Luego $\delta^{-1}h = f$ donde f es un homomorfismo claramente sobreyectivo de \mathbf{A}_0 en \mathbf{S} , por lo que $f \in \mathcal{H}$. Finalmente $h = \delta f$.

Si $\mathbf{A}_0, h(\mathbf{A}_0) \notin \mathcal{S}$, hay respectivos $\mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \mathcal{S}$ representantes de \mathbf{A}_0 y $h(\mathbf{A}_0)$. Luego hay $\delta : \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{S}$ y $\delta' : h(\mathbf{A}_0) \rightarrow \mathbf{S}'$ tales que $\delta, \delta^{-1}, \delta', \delta'^{-1} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Luego $\delta' h \delta^{-1} = f$ donde f es un homomorfismo claramente sobreyectivo de \mathbf{S} en \mathbf{S}' , por lo que $f \in \mathcal{H}$. Finalmente $h = \delta'^{-1} f \delta$.

□

TEOREMA 31 (Las estructuras finitas cumplen la propiedad de Cantor-Bernstein). *Dadas \mathbf{A} y \mathbf{B} estructuras finitas, si hay $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ homomorfismos inyectivos entonces hay un $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} estructuras finitas y $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ homomorfismos inyectivos. Notar que gf es una permutación de \mathbf{A} , y como \mathbf{A} es finito hay $k \geq 1$ tal que $(gf)^k = \text{Id}_A$. Luego como $g^{-1} = f(gf)^{k-1}$ vemos que g^{-1} es homomorfismo. \square

Por el Teorema 16, luego de aplicar el Algoritmo1 de preprocesamiento y el Algoritmo 2 de definibilidad abierta.

Algorithm 5 Constelación abierta-positiva

```

1:  $\mathcal{S} = \emptyset$ 
2: for  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ , desde la mayor a la menor cardinalidad do
3:    $\text{bihomos} = \{\gamma : \gamma \text{ isomorfismo biyectivo de } \mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B} \text{ con } \mathbf{B} \in \mathcal{S}\}$ 
4:   for  $\gamma \in \text{bihomos}$  do
5:     if  $\gamma$  es un  $\mathcal{L}$ -isomorfismo, con  $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$  then
6:       if  $\gamma$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
7:         return  $\gamma$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
8:       end if
9:     else
10:      if  $\gamma$  no preserva  $R$  then
11:        return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\alpha$  es contraejemplo
12:      end if
13:       $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{\mathbf{A}\}$ 
14:      agregarSubestructuras( $\mathbf{A}, \mathcal{S}$ )
15:    end if
16:  end for
17:  if  $\text{bihomos} = \emptyset$  then
18:     $\text{bihomos} = \{\gamma : \gamma \text{ isomorfismo biyectivo de } \mathbf{B} \text{ en } \mathbf{B} \text{ con } \mathbf{B} \in \mathcal{S}\}$ 
19:    agregarSubestructuras( $\mathbf{A}, \mathcal{S}$ )
20:  end if
21: end for
22: return  $\mathcal{S}$   $\triangleright R$  es abierta-definible

```

3.6. Detección de homomorfismos

3.6.1. CSP. Como aparece en Wikipedia 2016, un CSP (constraint satisfaction problem) es definido como la terna $\langle X, D, C \rangle$, donde

$X = \{X_1, \dots, X_n\}$ es un conjunto de variables

$D = \{D_1, \dots, D_n\}$ es un conjunto con los respectivos dominios de los valores

$C = \{C_1, \dots, C_m\}$ es un conjunto de restricciones

Cada variable X_i se mueve en los valores del respectivo dominio no vacío D_i . Cada restricción $C_j \in C$ es un par $\langle t_j, R_j \rangle$, donde t_j es una k -upla de variables y R_j es una relación k -aria en el correspondiente dominio de cada variable. Una valuación sobre las variables es una función desde un subconjunto de las variables a un particular conjunto de valores en los correspondientes dominios de valores. Una valuación v satisface la restricción $\langle t_j, R_j \rangle$ si los valores asignados a las variables t_j satisfacen la relación R_j .

Algorithm 6 Procedimiento

```

1: procedure AGREGARSUBESTRUCTURAS( $\mathbf{A}, \mathcal{S}$ )
2:   for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$  do
3:     if  $\alpha$  no preserva  $R$  then
4:       return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\alpha$  es contraejemplo
5:     end if
6:   end for
7:    $\text{Sub} = [\mathbf{A}_0 : \mathbf{A}_0 \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{A}\}, \text{ de la mayor a menor cardinalidad}]$ 
8:   for  $\mathbf{A}_0 \in \text{Sub}$  do
9:     for  $\mathbf{C} \in \mathcal{S}$  do
10:       $\text{bihomos} = \{\gamma : \gamma \text{ isomorfismo biyectivo de } \mathbf{A}_0 \text{ en } \mathbf{C}\}$ 
11:      for  $\gamma \in \text{bihomos}$  do
12:        if  $\gamma$  es un  $\mathcal{L}$ -isomorfismo then
13:          if  $\gamma$  no es un  $\mathcal{L} \cup \{R\}$ -isomorfismo then
14:            return  $\gamma \triangleright R$  no es abierta-definible y  $\gamma$  es contraejemplo
15:          end if
16:           $\text{Sub} = [\mathbf{C} : \mathbf{C} \in \text{Sub} \text{ tal que } C \not\subseteq B]$ 
17:        else
18:           $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{\mathbf{B}\}$ 
19:          for  $\alpha \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$  do
20:            if  $\alpha$  no preserva  $R$  then
21:              return  $\alpha$   $\triangleright R$  no es abierta-definible y  $\alpha$  es
contraejemplo
22:            end if
23:          end for
24:        end if
25:      end for
26:    end for
27:  end for
28: end procedure

```

Una valuación es consistente si no viola ninguna de las restricciones. Una valuación es completa si incluye todas las variables. Una valuación es solución si es consistente y completa. En ese caso diremos que la valuación resuelve el CSP.

La ventaja de utilizar CSP es que hay múltiples circunstancias en las que uno de estos problemas se pueden resolver muy eficientemente, y pensamos continuar nuestro trabajo buscando maneras de aprovechar estas propiedades.

3.6.2. CSP para calcular homomorfismos. Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} \mathcal{L} -estructuras, queremos encontrar homomorfismos de \mathbf{A} en \mathbf{B} . Bastaría con tomar

$$X = \{X_i : i \in A\}$$

$$D = B^{|A|}$$

$$C = C^R \cup C^f$$

Donde C^R es tal que para cada $R \in \mathcal{L}$ n -aria, para cada $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$, se da que $((X_{a_1}, \dots, X_{a_n}), R^{\mathbf{B}}) \in C^R$ y C^f es tal que para cada $f \in \mathcal{L}$ n -aria, para cada $(a_1, \dots, a_n, a') \in \text{graph}(f^{\mathbf{A}})$, se da que $((X_{a_1}, \dots, X_{a_n}, X_{a'}), \text{graph}(f^{\mathbf{B}})) \in C^f$. Donde $\text{graph}(f^{\mathbf{A}})$ es el gráfico de la función definido como $\text{graph}(f^{\mathbf{A}}) = \{(x_1, \dots, x_n, f^{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in A^n\}$.

Supongamos que $V : X \rightarrow B$ es una valuación solución de (X, D, C) , entonces el homomorfismo γ determinado por V será $\gamma(a) = V(X_a)$.

Si además quisiéramos que el homomorfismo fuera inyectivo, bastaría con agregar una restricción $((X_1, \dots, X_m), \text{para todo par } (i, j) \text{ con } i \neq j \text{ y } i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ se da que } X_i \neq X_j)$, donde X_1, \dots, X_m son todas las variables en X . Para que fuera sobreyectivo bastaría agregar $((X_1, \dots, X_m), \bigcup_{i=1}^m \{X_i\} = B)$.

LEMA 32. *Sea \mathbf{A} una estructura finita, entonces todo endomorfismo inyectivo de \mathbf{A} es un automorfismo de \mathbf{A} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea γ un endomorfismo inyectivo de \mathbf{A} . Como A es finito tenemos que γ es sobre y además $\gamma^{-1} = \gamma^k$ para algún $k \geq 1$. \square

3.7. Generación de subestructuras

Dada una \mathcal{L} -estructura \mathbf{A} , generamos sus subestructuras recorriendo $\mathcal{P}(A)$, desde la mayor a la menor cardinalidad filtrando aquellos $A_0 \in \mathcal{P}(A)$ que no son cerrados bajo \mathcal{L} .

Además cuando detectamos que una subestructura \mathbf{A}_0 ya tiene representante en \mathcal{S} durante nuestros algoritmos, disminuimos los subconjuntos a chequear, revisando solo $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A_0)$, ya que si \mathbf{A}_0 tiene representante en \mathcal{S} , entonces cada subestructura de \mathbf{A}_0 tiene representante en \mathcal{S} .

Dado que conocemos implementaciones de este problema mucho mas eficientes, como por ejemplo la del Universal Algebra Calculator, pensamos mejorar en el futuro el algoritmo para generación de subestructuras que hemos estado utilizando durante este trabajo.

Álgebras de Lindenbaum

4.1. Definiciones e ideas básicas

Dada una aridad n , una \mathcal{L} -estructura \mathbf{A} y un fragmento de primer orden $f \in \{Fo(\mathcal{L}), E(\mathcal{L}), E^+(\mathcal{L}), Op(\mathcal{L}), Op^+(\mathcal{L})\}$, llamaremos *álgebra de Lindenbaum* al álgebra de relaciones de aridad n definibles en f sobre \mathbf{A} .

Notar que dado $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ un conjunto de formulas, si es cerrado bajo equivalencia lógica para \wedge, \vee (resp. \neg) entonces el conjunto de álgebras definibles por Σ es cerrado bajo \cap, \cup (resp. c).

TEOREMA 33 (Teorema de representación de Stone). *Toda álgebra de Boole finita \mathbf{A} es isomorfa al álgebra definida por $\mathcal{P}(At)$ donde $At \subseteq A$ es el conjunto de átomos en \mathbf{A} .*

TEOREMA 34 (Teorema de representación de Birkhoff). *Todo reticulado distributivo finito \mathbf{L} es isomorfo al reticulado de conjuntos descendientes del poset de elementos join-irreducibles en \mathbf{L} .*

TEOREMA 35. *Dada una \mathcal{L} -estructura \mathbf{A} y un conjunto de homomorfismos H sobre ella*

4.2. Preorden y algoritmo

4.3. Algoritmos para calcular álgebras

4.4. Ejemplos y aplicación

LEMA 36. *Sea \mathbf{L} un reticulado y R una relación binaria no vacía sobre L preservada por endomorfismos en \mathbf{L} . Entonces vale que $\Delta^L \subseteq R$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto es una consecuencia directa de que para cada $a \in L$ la función de L en L que vale constantemente a es un endomorfismo. \square

TEOREMA 37 (Teorema del filtro primo). *Sea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x \notin P$ y $F \subseteq P$.*

LEMA 38. *Sea \mathbf{L} un reticulado distributivo y R una relación binaria no vacía sobre L preservada por endomorfismos en \mathbf{L} . Si hay $(a, b) \in R$ tal que $a \not\leq b$ (respectivamente $b \not\leq a$), entonces $\{(x, y) : x \geq y\} \subseteq R$ (respectivamente $\{(x, y) : x \leq y\} \subseteq R$).*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $(a, b) \in R$ tal que $a \not\leq b$, y sean $c, d \in L$ tales que $c \geq d$. Veremos que $(c, d) \in R$. Por el Teorema 37 hay un filtro primo P que contiene al filtro generado por a y además $b \notin P$. Definimos $h : L \rightarrow L$ por

$$h(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in P, \\ d & \text{si } x \notin P. \end{cases}$$

Es fácil ver que h es un endomorfismo. Finalmente como $(a, b) \in R$ y h preserva R , $(h(a), h(b)) = (c, d) \in R$. \square

TEOREMA 39. Sea \mathbf{L} un reticulado distributivo y R una relación binaria sobre L definible por un fórmula existencial positiva en \mathbf{L} . Se da una de las siguientes:

- $R = \Delta$,
- $R = \{(x, y) : x \leq y\}$,
- $R = \{(x, y) : x \geq y\}$,
- $R = \{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x \geq y\}$,
- $R = L \times L$.

DEMOSTRACIÓN. Si $R \subseteq \Delta$, por el Lema 36 $R = \Delta$.

Si $R \subseteq \{(x, y) : x \leq y\}$, pero $R \not\subseteq \Delta$, hay $(a, b) \in R$ tales que $a < b$, entonces $a \not\geq b$ y por el Lema 38 $R = \{(x, y) : x \leq y\}$. Análogo para $R \subseteq \{(x, y) : x \geq y\}$.

Si $R \not\subseteq \{(x, y) : x \leq y\}$ y $R \not\subseteq \{(x, y) : x \geq y\}$, aplicando dos veces el Lema 38 $\{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x \geq y\} \subseteq R$. Si además $(a, b) \in R$ pero $a \not\leq b$ y $a \not\geq b$, tomo $(c, d) \in R$, si son comparables ya esta están en R por lo anterior. Si son incomparables aplico dos veces el Teorema 37 y tomo dos filtros primos P y Q tales que $a \in P$ pero $b \notin P$ y $b \in Q$ pero $a \notin Q$. Ahora definimos la siguiente función

$$h(x) = \begin{cases} c \vee d & \text{si } x \in P \cup Q \\ c & \text{si } x \in P - Q \\ d & \text{si } x \in Q - P \\ c \wedge d & \text{si } x \notin P \text{ y } x \notin Q \end{cases}$$

que fácilmente puede verse que es un endomorfismo. Por lo tanto como $(a, b) \in R$ y h preserva R , $(h(a), h(b)) = (c, d) \in R$. Por lo tanto $R = L \times L$. \square

Documentación de Definability

5.1. Introducción

Definability es un paquete que desarrollamos para SageMath, un software matemático licenciado bajo la GPL. Nuestro paquete implementa los algoritmos vistos en las secciones anteriores y permite dada una clase de estructuras, decidir definibilidad o generar las álgebras de Lindenbaum de relaciones definibles.

Nuestro paquete se basa en parte en las librerías desarrolladas por Peter Jipsen para utilizar Minion y Universal Algebra Calculator desde SageMath.

El paquete se desarrolla en <https://github.com/pablogventura/tesis>.

5.2. Instalación

5.2.1. Requerimientos.

- SageMath 6.7 o superior.
- Minion 1.8 o superior.
- LADR versión de noviembre de 2009, (interfaz de línea de comandos de Prover9, Mace4, y otros programas)

5.2.2. Instalación del paquete en SageMath.

5.3. Entrada de estructuras

5.4. Chequeo de definibilidad

5.5. Generación de álgebras de Lindenbaum

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Bibliografía

- Campercholi, Miguel y Diego Vaggione (2015). *Semantical conditions for the definability of functions and relations*. eprint: 1506.07501. URL: <http://www.arxiv.org/abs/1506.07501>.
- Wikipedia (2016). *Constraint satisfaction problem* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [En línea, visitado el 11 de Enero de 2016]. URL: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Constraint%20satisfaction%20problem&oldid=695651340>.