Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Preliminares

Basandonos en [**1**]

2.1. Definibilidad por fórmulas abiertas

TEOREMA 1 (Los embeddings preservan fórmulas abiertas). *Sean* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *estructuras y* $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *una función. Son equivalentes:*

1. γ *es un embedding de* A *en* B*.*
2. *Para toda fórmula abierta* $\varphi(\bar{x})$ *y para cada* $\bar{a}$ *de* A *vale que:*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

DEMOSTRACIÓN. 1⇒2)

Sea γ un embedding de A en B, sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula abierta y $\bar{a} \in A^n$, el caso base sale directo ya que los homomorfismos preservan términos. Veamos los casos inductivos:

Sea $\varphi(\bar{x}) = \neg\varphi_1(\bar{x})$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$:

$$\mathbf{A} \vDash \neg\varphi_1[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \nvDash \varphi_1[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{B} \nvDash \varphi_1[\gamma(\bar{a})] \text{ sii } \mathbf{B} \vDash \neg\varphi_1[\gamma(\bar{a})]$$

Sea $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1 \eta \varphi_2)(\bar{x})$ con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$:

$$\mathbf{A} \vDash (\varphi_1\eta\varphi_2)[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\bar{a}]\text{''}\eta\text{''}\mathbf{A} \vDash \varphi_2[\bar{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \vDash \varphi_1[\gamma(\bar{a})]\text{''}\eta\text{''}\mathbf{B} \vDash \varphi_2[\gamma(\bar{a})] \text{ sii } \mathbf{B} \vDash (\varphi_1\eta\varphi_2)[\gamma(\bar{a})]$$

2⇒1)

Supongamos que para toda fórmula abierta $\varphi = \varphi(\bar{x})$ y cada $\bar{a} \in A^m$ vale que:

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

- Veamos que γ es inyectiva:

$$\begin{array}{rcl} \gamma(a) & = & \gamma(a') \\ \mathbf{B} & \vDash & (x_1 \equiv x_2)[\gamma(a), \gamma(a')] \\ \mathbf{A} & \vDash & (x_1 \equiv x_2)[a, a'] \\ a & = & a' \end{array}$$

- Veamos que γ es un homomorfismo:

  Sea $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} & \vDash & (c \equiv x_1)[c^{\mathbf{A}}] \\ \mathbf{B} & \vDash & (c \equiv x_1)[\gamma(c^{\mathbf{A}})] \\ c^{\mathbf{B}} & = & \gamma(c^{\mathbf{A}}) \end{array}$$

  Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_n) &\in r^{\mathbf{A}} \\
\mathbf{A} &\vDash r(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n] \\
\mathbf{B} &\vDash r(x_1, \ldots, x_n)[\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n)] \\
(\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n)) &\in r^{\mathbf{B}}
\end{aligned}$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\vDash (f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_{n+1})[a_1, \ldots, a_n, f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)] \\
\mathbf{B} &\vDash (f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_{n+1})[\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n), \gamma(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))] \\
f^{\mathbf{B}}(\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n)) &= \gamma(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))
\end{aligned}$$

- Veamos que γ es embedding:
  Sea $r \in \mathcal{R}_n$

$$\begin{aligned}
(\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n)) &\in r^{\mathbf{B}} \\
\mathbf{B} &\vDash r(x_1, \ldots, x_n)[\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n)] \\
\mathbf{A} &\vDash r(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n] \\
(a_1, \ldots, a_n) &\in r^{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2. *Si* $\mathbf{A}$ *es una subestructura de* $\mathbf{B}$ *y* $\varphi(\bar{x})$ *es una fórmula abierta, entonces para cada* $\bar{a} \in A^n$ *vale que*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[\bar{a}]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{A}$ una subestructura de $\mathbf{B}$ y $\varphi(\bar{x})$ una fórmula abierta.
Como $\mathbf{A}$ es subestructura es cerrada sobre r,f y $c^{\mathbf{B}} \in A$
Sea $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que para todo $x \in A$, $\gamma(x) = x$. Como $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, es directo que γ es un embedding. Entonces por el Teorema 1, $\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$
Finalmente, por definición de γ:

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[\bar{a}]$$

□

NOTACIÓN 3. Dado un conjunto de fórmulas Δ, escribiremos $\Delta(\bar{x})$ para anunciar que cada una de las fórmulas en Δ tiene sus variables libres contenidas en la tupla $\bar{x}$, y que consideramos cada $\delta \in \Delta(\bar{x})$ declarada $\delta = \delta(\bar{x})$. Si $\mathbf{A}$ es una estructura y $\bar{a}$ es una tupla de elementos de A, escribiremos $\mathbf{A} \vDash \Delta[\bar{a}]$ cuando $\mathbf{A} \vDash \delta[\bar{a}]$ para cada $\delta \in \Delta(\bar{x})$.

DEFINICIÓN 4. Sea $\mathbf{A}$ una estructura y sean $a_1, \ldots, a_n \in A$. Definimos el diagrama abierto para $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathbf{A}$ como:

$$\Delta_{\mathbf{A},\bar{a}}(x_1, \ldots, x_n) := \{\alpha \mid \alpha \text{ es abierta y } \mathbf{A} \vDash \alpha[\bar{a}]\}$$

TEOREMA 5. *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura y* $b_1, \ldots, b_n \in B$*, son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \vDash \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$
2. *Hay un isomorfismo* γ *de* $\langle\bar{a}\rangle^{\mathbf{A}}$ *en* $\langle\bar{b}\rangle^{\mathbf{B}}$ *tal que* $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Veamos 1⇒2:
Supongamos que $\mathbf{B} \vDash \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$
Si α fórmula abierta y $\mathbf{A} \vDash \alpha[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \vDash \alpha[\bar{b}]$

Tomo $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] : t \in T^{\tau}, a_1, \ldots, a_n \in \bar{a}\}$ y $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[b_1, \ldots, b_n] : t \in T^{\tau}, b_1, \ldots, b_n \in \bar{b}\}$

Defino

$$\begin{aligned} \gamma \quad & : A' \to B' \\ \gamma \quad & (t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_n] \end{aligned}$$

Es claro que γ es un homomorfismo.

- Veamos que γ es inyectivo
  Sean $a_1', a_2' \in A'$ tales que $a_1' \neq a_2'$

$$\begin{aligned} a_1' &\neq a_2' \\ t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}] &\neq t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}] \\ \mathbf{A} &\vDash \neg(t_1 \equiv t_2)[\bar{a}] \qquad (2.1.1) \\ \mathbf{B} &\vDash \neg(t_1 \equiv t_2)\left[\bar{b}\right] \qquad (2.1.2) \\ t_1^{\mathbf{B}}\left[\bar{b}\right] &\neq t_2^{\mathbf{B}}\left[\bar{b}\right] \\ \gamma\left(t_1^{\mathbf{A}}[\bar{a}]\right) &\neq \gamma\left(t_2^{\mathbf{A}}[\bar{a}]\right) \end{aligned}$$

- Veamos que γ es sobreyectivo
  Sea $b' \in B'$

$$\begin{aligned} b' &\in B' \\ t^{\mathbf{B}}\left[\bar{b}\right] &\in B' \end{aligned}$$

Tomo $t^{\mathbf{A}}[\bar{a}] = a'$

$$\gamma\left(t^{\mathbf{A}}[\bar{a}]\right) = t^{\mathbf{B}}\left[\bar{b}\right]$$

Por lo tanto γ es un isomorfismo y $\gamma(a_j) = \gamma(x_j^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = x_j^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_n] = b_j$.
Ahora veamos 2⇒1:

Supongamos que hay un isomorfismo γ de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

Entonces, es claro que γ es un embedding de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$.

Por el Teorema 1 para toda fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ y cada $\bar{a} \in A'$

$$\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

Por el Teorema 2 como $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ es subestructura de $\mathbf{A}$, $\langle \bar{b} \rangle^{\mathbf{B}}$ lo es de $\mathbf{B}$ y φ es abierta

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$$

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$$

Por lo tanto si α es abierta y $\mathbf{A} \vDash \alpha[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{B} \vDash \alpha\left[\bar{b}\right]$

Finalmente, $\mathbf{B} \vDash \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}\left[\bar{b}\right]$ □

Definición 6. Dos fórmulas $\alpha(\bar{x})$ y $\beta(\bar{x})$ se dicen *equivalentes* sobre una familia de estructuras $\mathcal{K}$ si para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y cada $\bar{a}$ de A vale que

$$\mathbf{A} \vDash \alpha[\bar{a}] \Longleftrightarrow \mathbf{A} \vDash \beta[\bar{a}].$$

TEOREMA 7 (Modulo equivalencia sobre una estructura finita, la cantidad de fórmulas en $x_1, \ldots, x_n$ es finita). *Sea $\mathcal{K}$ una clase finita de estructuras finitas, y sean $x_1, \ldots, x_n$ variables.*

Hay un conjunto finito de fórmulas $\Sigma(\overline{x})$ tal que para toda fórmula $\varphi(\overline{x})$ hay $\sigma(\overline{x}) \in \Sigma(\overline{x})$ tal que $\varphi(\bar{x})$ y $\sigma(\overline{x})$ son equivalentes sobre $\mathcal{K}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m\}$. Veamos primero que las fórmulas son finitas modulo equivalencia. Sea $\varphi(\bar{x})$ defino $T_{\varphi\mathcal{K}} = \{\bar{a} \in A_1^n | \mathbf{A}_1 \vDash \varphi[\bar{a}]\} \times \cdots \times \{\bar{a} \in A_m^n | \mathbf{A}_m \vDash \varphi[\bar{a}]\}$ y supongamos φ equivalente ψ en $\mathcal{K}$, entonces

$$(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \in T_{\varphi\mathcal{K}} \Leftrightarrow (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \in T_{\psi\mathcal{K}} \text{ para cada } (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \in A_1^n \times \cdots \times A_m^n$$

lo que significa que $T_{\varphi\mathcal{K}} = T_{\psi\mathcal{K}}$. Entonces basta con contar los subconjuntos de $A_1^n \times \cdots \times A_m^n$, como $|A_1^n \times \cdots \times A_m^n| = |A_1|^n . \cdots . |A_m|^n$ y cada A_i era finito, es claro que $A_1^n \times \cdots \times A_m^n$ es finito. Por lo tanto $\mathcal{P}(A^n)$ también lo es.

Ahora veamos que existe $\Sigma(\bar{x})$. Sean $T_1, \ldots, T_k \subseteq A_1^n \times \cdots \times A_m^n$ tales que existe $\varphi_i(\bar{x})$ tal que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \vDash \varphi_i[T_i]$ y sea $\psi(\bar{x})$, tomo $T_{\psi\mathcal{K}}$y como $T_1, \ldots, T_k$ es la sucesión de todos los subconjuntos que se definen con una fórmula, hay un j tal que $T_j = T_{\psi\mathcal{K}}$. Entonces, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \vDash \psi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi_j[\bar{a}]$. □

TEOREMA 8. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ estructuras finitas y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces existe una fórmula abierta $\varphi(\bar{x})$ tal que para todo $\bar{b} \in B^n$ son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \vDash \varphi[\bar{b}]$
2. *Hay un isomorfismo γ de $\langle\bar{a}\rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle\bar{b}\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$*

DEMOSTRACIÓN. Tomo $\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})$ que es una fórmula, por el Teorema 7.

Es claro que $\mathbf{B} \vDash \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})[\bar{b}] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}[\bar{b}]$

Entonces por Teorema 5, hay un isomorfismo γ de $\langle\bar{a}\rangle^{\mathbf{A}}$ en $\langle\bar{b}\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$ □

DEFINICIÓN 9. Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden y $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Diremos que R es *definible* en una familia $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras cuando exista una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tal que para todo $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y todas $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \iff \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ son lenguajes de primer orden, para una $\mathcal{L}'$-estructura $\boldsymbol{A}$, usaremos $\boldsymbol{A}_{\mathcal{L}}$ para indicar el reducto de $\boldsymbol{A}$ al lenguaje $\mathcal{L}$. Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras, usaremos $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ para expresar que $\boldsymbol{A}$ es subestructura de $\boldsymbol{B}$.

Sean

$$At(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}\text{-fórmulas atómicas}\}$$

$$\pm At(\mathcal{L}) = At(\mathcal{L}) \cup \{\neg\alpha : \alpha \in At(\mathcal{L})\}$$

$$Op(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula abierta}\}$$

DEFINICIÓN 10. Dados A, B conjuntos, $R^A \subseteq A^n$, $R^B \subseteq B^n$, diremos que una función $\gamma : A \to B$ preserva R si para toda tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in A_0$ tenemos que si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^A$ implica que $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in R^A$.

TEOREMA 11. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Para una clase finita $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. Hay una fórmula en $\mathrm{Op}(\mathcal{L})$ que define R en $\mathcal{K}$.
2. Para todas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, todas $\boldsymbol{A}_0 \leq \boldsymbol{A}_{\mathcal{L}}, \boldsymbol{B}_0 \leq \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$, todo isomorfismo $\sigma : \boldsymbol{A}_0 \to \boldsymbol{B}_0$ preserva R.

Demostración. 1⇒2) Sea $\varphi(\bar{x})$ la fórmula que define R en $\mathcal{K}$, sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ tales que $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ sea un isomorfismo. Sea $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \cap A_0$ veamos que $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}_0}$. Como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \Rightarrow \bar{a} \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}]$, por Teorema 2, $A_0 \vDash \varphi[\bar{a}]$ y como $\mathbf{A}_0$ y $\mathbf{B}_0$ son isomorfos por σ, $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[\sigma(\bar{a})]$. Nuevamente por Teorema 2 $\mathbf{B} \vDash \varphi[\sigma(\bar{a})]$ y como por hipótesis φ define a R en $\mathcal{K}$, $\sigma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

2⇒1) Sea $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A}\in\mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a}\in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge_{\alpha\in\Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})\right)\right)$, la cual es fórmula por el Teorema 7. Veamos que para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$ sii $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$:

⇒) Supongamos $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$, entonces en particular para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \vDash \bigwedge_{\alpha\in\Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})\left[\bar{b}\right]$. Por Teorema 8, hay un isomorfismo $\gamma : \langle\bar{a}\rangle^{\mathbf{A}} \to \langle\bar{b}\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$. Entonces por hipótesis γ preserva R. Finalmente como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$ o sea que $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

⇐) Supongamos $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A}\in\mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a}\in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge_{\alpha\in\Delta_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})\right)\right) = \cdots \vee \cdots \vee \left(\bigwedge_{\alpha\in\Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}} \alpha(\bar{x})\right)$, evidentemente $\mathbf{B} \vDash \Delta_{\mathbf{B}\bar{b}}\left[\bar{b}\right]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$. □

2.2. Definibilidad por fórmulas abiertas positivas y conjunción de atómicas

Teorema 12. *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *estructuras y* $h : A \to B$ *una función, son equivalentes:*

1. h *es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$.
2. *Para toda fórmula atómica* $\varphi = \varphi(\bar{x})$ *y para cada* $\bar{a}$ *de* A *vale que*
$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Longrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[h(\bar{a})].$$
3. *Para toda fórmula abierta positiva*[1] $\varphi = \varphi(\bar{x})$ *y para cada* $\bar{a}$ *de* A *vale que*
$$\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Longrightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[h(\bar{a})].$$

Demostración. 1⇒2) Directo, ya que los homomorfismos preservan términos.

2⇒1) Supongamos $\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}] \Rightarrow \mathbf{B} \vDash \varphi[h(\bar{a})]$ con φ atómica. Veamos que h es homomorfismo.

Sea $c \in \mathcal{C}$
$$\mathbf{A} \vDash (c \equiv x_1)\left[c^{\mathbf{A}}\right] \Rightarrow \mathbf{B} \vDash (c \equiv x_1)\left[h\left(c^{\mathbf{A}}\right)\right] \Leftrightarrow c^{\mathbf{B}} = h\left(c^{\mathbf{A}}\right)$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\vDash (f(x_1,\ldots,x_n) \equiv x_{n+1})\left[a_1,\ldots,a_n,f^{\mathbf{A}}(\bar{a})\right] \\ \mathbf{B} &\vDash (f(x_1,\ldots,x_n) \equiv x_{n+1})\left[h(a_1),\ldots,h(\bar{a}_n),h\left(f^{\mathbf{A}}(\bar{a})\right)\right] \\ f^{\mathbf{B}}(h(\bar{a})) &= h\left(f^{\mathbf{A}}(\bar{a})\right) \end{aligned}$$

Sea $r \in \mathcal{R}_n$
$$\bar{a} \in r^{\mathbf{A}} \Rightarrow \mathbf{A} \vDash r(\bar{x})[\bar{a}] \Rightarrow \mathbf{B} \vDash r(\bar{x})[h(\bar{a})] \Rightarrow h(\bar{a}) \in r^{\mathbf{B}}$$

2⇒3) Rutina.

3⇒2) Directo ya que toda atómica es abierta positiva. □

Definición 13. Sea $\mathbf{A}$ una estructura y sean $a_1,\ldots,a_n \in A$. Definimos el diagrama atómico positivo de $\bar{a}$ en $\mathbf{A}$ como
$$\Delta^{+}_{\mathbf{A},\bar{a}}(x_1,\ldots,x_n) := \{\alpha \mid \alpha \text{ es atómica y } \mathbf{A} \vDash \alpha[\bar{a}]\}.$$

[1] Una fórmulas es positiva si no tiene ocurrencias de $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

TEOREMA 14. *Sean* $\mathbf{B}$ *una estructura y* $b_1, \ldots, b_n \in B$*, son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A},\bar{a}}\left[\bar{b}\right]$.
2. *Hay un homomorfismo* h *de* $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ *en* $\left\langle \bar{b} \right\rangle^{\mathbf{B}}$ *tal que* $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

DEMOSTRACIÓN. 1⇒2) Defino $h : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \to \left\langle \bar{b} \right\rangle^{\mathbf{B}}$, como

$$h\left(t^{\mathbf{A}}\left[\bar{a}\right]\right) = t^{\mathbf{B}}\left[\bar{b}\right]$$

El cual es se ve fácilmente que es un homomorfismo que cumple $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

2⇒1) Supongamos que hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\left\langle \bar{b} \right\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$, entonces como $\mathbf{A} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A},\bar{a}}\left[\bar{a}\right]$, por el Teorema 12 $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A},\bar{a}}\left[h(\bar{a})\right]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A},\bar{a}}\left[\bar{b}\right]$ □

TEOREMA 15. *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *estructuras finitas y* $a_1, \ldots, a_n an \in A$*, entonces existe una fórmula abierta* $\varphi(\bar{x})$ *tal que para todo* $\bar{b} \in B^n$ *son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$
2. *Hay un homomorfismo* h *de* $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ *en* $\left\langle \bar{b} \right\rangle^{\mathbf{B}}$ *tal que* $h(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Tomo $\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})$ que es una fórmula, por el Teorema 7.

Es claro que $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right] \Leftrightarrow \mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A}\bar{a}}\left[\bar{b}\right]$

Entonces por Teorema 14, hay un homomorfismo h de $\langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}}$ en $\left\langle \bar{b} \right\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$ □

TEOREMA 16. *Dados* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ *lenguajes de primer orden, sea* $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ *un símbolo de relación n-ario. Para una clase finita* $\mathcal{K}$ *de* $\mathcal{L}'$*-estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. Hay una $\mathcal{L}$-fórmula abierta positiva que define R en $\mathcal{K}$.
2. Para todas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, todas $\boldsymbol{A}_0 \leq \boldsymbol{A}_{\mathcal{L}}, \boldsymbol{B}_0 \leq \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$, todo homomorfismo $h : \boldsymbol{A}_0 \to \boldsymbol{B}_0$ preserva R.

DEMOSTRACIÓN. Veamos 1⇒2:

Sea $\varphi(\bar{x})$ la fórmula abierta positiva que define R en $\mathcal{K}$, sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y sean $\mathbf{A_0} \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ tales que $h : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ sea un homomorfismo. Sea $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \cap A_0$ veamos que $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}_0}$:

$\bar{a} \in R^{\mathbf{A}_0} \Rightarrow \bar{a} \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi\left[\bar{a}\right]$, por Teorema 2, $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi\left[\bar{a}\right]$ y como h es un homomorfismo de $\mathbf{A}_0$ en $\mathbf{B}_0$ y φ es abierta positiva por Teorema 12, $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi\left[h(\bar{a})\right]$. Nuevamente por Teorema 2 $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[h(\bar{a})\right]$ y como por hipótesis φ define a R en $\mathcal{K}$, $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

Veamos 2⇒1:

Sea $\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}}\left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}}\left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{\mathbf{A}\bar{a}}} \alpha(\bar{x})\right)\right)$, la cual es fórmula por el Teorema 7. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$:

⇒) Supongamos $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$, entonces en particular para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A}\bar{a}}\left[\bar{b}\right]$. Por Teorema 15, hay un homomorfismo $h : \langle \bar{a} \rangle^{\mathbf{A}} \to \left\langle \bar{b} \right\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$. Entonces por hipótesis h preserva R. Finalmente como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, entonces $h(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$ o sea que $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

⇐) Supongamos $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces $\varphi = \cdots \vee \cdots \vee \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{\mathbf{B}\bar{b}}} \alpha(\bar{x})\right)$, evidentemente $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{B}\bar{b}}\left[\bar{b}\right]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$. □

DEFINICIÓN 17. Sean $A_1, \ldots, A_m, B$ conjuntos, $R^{A_i} \subseteq A_i^n$ para cada $i \in [1, m]$, $R^B \subseteq B^n$ y $h : D \subseteq A_1 \times \cdots \times A_m \to B$ una función. Diremos que h *preserva* R si dados

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, \bar{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nm}) \in D$$

tales que

$$(a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{A_i} \text{para cada i}\in[1,\text{m}]$$

se tiene que $(h(\bar{a}_1), \dots, h(\bar{a}_n)) \in R^B$.

LEMA 18. *Dadas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ estructuras y $\varphi = \exists \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})$ con ψ una conjunción de fórmulas atómicas. Entonces son equivalentes:*

1. *Para todo $i = 1, \dots, m$ se da que $\mathbf{A}_i \vDash \varphi[a_{1i}, \dots, a_{ni}]$*
2. *$\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m \vDash \varphi[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$, con $\bar{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jm})$*

DEMOSTRACIÓN. Rutina. □

TEOREMA 19. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Para una clase finita $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Para cada $m \geq 1$, para todas $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, para cada $\boldsymbol{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, todo homomorfismo $h : \mathbf{S} \to \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R.*
2. *Hay una conjunción finita de $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas que define R en $\mathcal{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. 2⇒1) Sea $\varphi(\bar{x})$ conjunción de atómicas que define a R en $\mathcal{K}$. Sean $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, $\boldsymbol{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, y $h : \mathbf{S} \to \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$ un homomorfismo. Sean

$$\bar{s}_1 = (s_{11}, \dots, s_{1m}), \dots, \bar{s}_n = (s_{n1}, \dots, s_{nm}) \in S$$

tales que

$$(s_{1i}, \dots, s_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Veamos que $(h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)) \in R^B$. Como $(s_{1i}, \dots, s_{ni}) \in R^{A_i}$ y φ define a R en $\mathcal{K}$, tenemos que

$$\mathbf{A}_i \vDash \varphi[s_1, \dots, s_{ni}] \text{ para } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Luego, por el Lema 18,

$$\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m \vDash \varphi[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n].$$

Como φ es abierta y $\boldsymbol{S} \leq (\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}}$, el Teorema 2 implica que $\mathbf{S} \vDash \varphi[\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n]$, y aplicando el Teorema 12 obtenemos que $\mathbf{B} \vDash \varphi[h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)]$. Finalmente, como φ define a R en $\mathcal{K}$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, concluimos que $(h(\bar{s}_1), \dots, h(\bar{s}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$.

1⇒2) Supongamos $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}$, R n-aria. Sean $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ tales que $\bar{x}_i = \left(x_{i1}^1, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_1}|}^1, \dots, x_{i1}^m, \dots, x_{i|R^{\mathbf{A}_m}|}^m\right)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ con $\bigcup R^{\mathbf{A}_j} = \left\{\left(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j\right) \text{ con } i \in \left\{1, \left|R^{\mathbf{A}_j}\right|\right\}\right\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea

$$\varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}} \alpha(\bar{x})$$

. Supongamos $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \dots, b_n]$ y veamos que $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Como $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}, (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}[b_1, \dots, b_n]$, por Teorema 14 hay h homomorfismo de $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle^{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}}$ en $\langle b_1, \dots, b_n \rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{x}_i) = b_i$. Como por hipótesis h preserva R, entonces como $\left(x_{1i}^j, \dots, x_{ni}^j\right) \in R^{\mathbf{A}_j}$, $(h(\bar{x}_1), \dots, h(\bar{x}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, que es exactamente $(b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Ahora supongamos $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$ y veamos que $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$, entonces hay algún j tal que $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}$ y hay algún k y algún j tal que

$$\left(x^j_{1k}, \ldots, x^j_{nk}\right) = (b_1, \ldots, b_n)$$

. Entonces como $\mathbf{A}_1^{\left|R^{\mathbf{A}_1}\right|} \times \cdots \mathbf{B}^{\left|R^{\mathbf{B}}\right|} \cdots \times \mathbf{A}_m^{\left|R^{\mathbf{A}_m}\right|} \vDash \varphi[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]$ por Teorema 18 $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[x^j_{1k}, \ldots, x^j_{nk}\right]$, por lo tanto $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$. □

TEOREMA 20. *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura finita y* $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Entonces hay una fórmula existencial* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *tal que para toda estructura* $\mathbf{B}$ *y para todo* $\bar{b} \in B^n$ *los siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$.
2. *Hay un embedding* $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *tal que* $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Sean $a'_1, \ldots, a'_m$ tales que $\langle a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_m\rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y sea

$$\varphi = \exists y_1, \ldots, y_m \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right)$$

que es fórmula por el Teorema 7.

Supongamos $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$, entonces existen $b'_1, \ldots, b'_m \in B$ tales que $\mathbf{B} \vDash \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})\left[\bar{b}, \bar{b'}\right]$ por Teorema 5 hay un isomorfismo $\gamma : \left\langle \bar{a}, \bar{a'}\right\rangle^{\mathbf{A}} \to \left\langle \bar{b}, \bar{b'}\right\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $\gamma\left(\bar{a}, \bar{a'}\right) = \left(\bar{b}, \bar{b'}\right)$, y como $\left\langle \bar{a}, \bar{a'}\right\rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\left\langle \bar{b}, \bar{b'}\right\rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$.

Supongamos que hay un embedding $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que $\gamma(\bar{a}) = \bar{b}$, por lo tanto $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{S} \leq \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Como $\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}]$, por ser γ un isomorfismo $\mathbf{S} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y entonces $\mathbf{S} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$. Por lo tanto existe $\bar{b'}$en $S \subseteq B$ tal que $\mathbf{S} \vDash \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})\left[\bar{b}, \bar{b'}\right]$. Como $\bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ es una fórmula abierta, por Teorema 2, $\mathbf{B} \vDash \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})\left[\bar{b}, \bar{b'}\right]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$ □

TEOREMA 21. *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura finita y* $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Entonces hay una fórmula existencial positiva* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *tal que para toda estructura* $\mathbf{B}$ *y para todo* $\bar{b} \in B^n$ *los siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$.
2. *Hay un homomorfismo* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *tal que* $h(\bar{a}) = \bar{b}$

DEMOSTRACIÓN. Sean $a'_1, \ldots, a'_m$ tales que $\langle a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_m\rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y sea

$$\varphi = \exists y_1, \ldots, y_m \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \right)$$

que es fórmula por el Teorema 7.

Supongamos $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$, entonces existen $b'_1, \ldots, b'_m \in B$ tales que $\mathbf{B} \vDash \bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})\left[\bar{b}, \bar{b'}\right]$ por Teorema 14 hay un homomorfismo $h : \left\langle \bar{a}, \bar{a'}\right\rangle^{\mathbf{A}} \to \left\langle \bar{b}, \bar{b'}\right\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h\left(\bar{a}, \bar{a'}\right) = \left(\bar{b}, \bar{b'}\right)$, y como $\left\langle \bar{a}, \bar{a'}\right\rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\left\langle \bar{b}, \bar{b'}\right\rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, h es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$.

Supongamos que hay un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que $h(\bar{a}) = \bar{b}$. Como $\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}]$, entonces $\mathbf{A} \vDash \Delta^+_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}\left[\bar{a}, \bar{a'}\right]$ y por Teorema 12 $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}\left[h(\bar{a}), h\left(\bar{a'}\right)\right]$. Entonces $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{(\bar{a}, \bar{a'}), \mathbf{A}}\left[\bar{b}, \bar{b'}\right]$, por lo que claramente $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$. □

TEOREMA 22. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Para una clase finita $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Hay una $\mathcal{L}$-fórmula existencial que define R en $\mathcal{K}$.*
2. *Para todas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, todo embedding $\gamma : \boldsymbol{A}_{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R.*

DEMOSTRACIÓN. 1⇒2) Sea φ existencial que define a R en $\mathcal{K}$, y sea $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un embedding. Entonces $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{S} \leq \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Supongamos $\mathbf{A} \vDash \varphi[\bar{a}]$ entonces $\mathbf{S} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$. Como φ es de la forma $\varphi = \exists \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})$ con ψ abierta, existe un $\bar{s}$ tal que $\mathbf{S} \vDash \psi[\gamma(\bar{a}), \bar{s}]$. Como ψ es abierta y $\mathbf{S} \leq \mathbf{B}$, por el Teorema 2 $\mathbf{B} \vDash \psi[\gamma(\bar{a}), \bar{s}]$. Entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi[\gamma(\bar{a})]$ y como φdefine a R en $\mathcal{K}$, entonces $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$.

2⇒1) Para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, cada $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, tomo $\bar{a'}$ tal que $\langle \bar{a}, \bar{a'} \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Ahora tomo $\delta_{\mathbf{A},(\bar{a},\bar{a'})}(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_{(\bar{a},\bar{a'}),\mathbf{A}}} \alpha(\bar{x}, \bar{y})$, que es fórmula por Teorema 7. Ahora tomo

$$\varphi = \bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{K}} \left(\bigvee_{\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\exists \bar{y}\, \delta_{\mathbf{A},(\bar{a},\bar{a'})}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right)$$

Sea $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces como $\varphi = \cdots \vee \exists \bar{y}\, \delta_{\mathbf{B},(\bar{b},\bar{b'})}(\bar{x}, \bar{y}) \vee \ldots$, y como $\mathbf{B} \vDash \exists \bar{y}\, \delta_{\mathbf{B},(\bar{b},\bar{b'})}(\bar{x}, \bar{y}) \left[\bar{b}, \bar{b'}\right]$, $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[\bar{b}\right]$.

Sea $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$. Entonces para algún $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, y algún $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$ tales que $\mathbf{B} \vDash \exists \bar{y}\, \delta_{\mathbf{A},(\bar{a},\bar{a'})}(\bar{x}, \bar{y}) \left[\bar{b}\right]$. Entonces hay un $\bar{z}$ en $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \vDash \delta_{\mathbf{A},(\bar{a},\bar{a'})}(\bar{x}, \bar{y}) \left[\bar{b}, \bar{z}\right]$. Como $\mathbf{B} \vDash \Delta_{(\bar{a},\bar{a'}),\mathbf{A}} \left[\bar{b}, \bar{z}\right]$, por Teorema 5 hay $\gamma : \langle \bar{a}, \bar{a'} \rangle^{\mathbf{A}} \to \langle \bar{b}, \bar{b'} \rangle^{\mathbf{B}}$ isomorfismo tal que $\left(\gamma(\bar{a}), \gamma(\bar{a'})\right) = \left(\bar{b}, \bar{z}\right)$ y como $\langle \bar{a}, \bar{a'} \rangle^{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ y $\langle \bar{b}, \bar{b'} \rangle^{\mathbf{B}} \leq \mathbf{B}$, γ es un embedding de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ y como $\bar{a} \in R^{\mathbf{A}}$, $\gamma(\bar{a}) \in R^{\mathbf{B}}$, $\bar{b} \in R^{\mathbf{B}}$.

Como φ es disyunción de existenciales, por teorema puede ser convertida en una fórmula existencial. □

TEOREMA 23. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Para una clase finita $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Hay una $\mathcal{L}$-fórmula existencial positiva que define R en $\mathcal{K}$.*
2. *Para todas $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, todo homomorfismo $\gamma : \boldsymbol{A}_{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R.*

DEMOSTRACIÓN. Igual a la prueba del Teorema 22, tomando el diagrama abierto positivo. □

TEOREMA 24. *Dados $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-ario. Para una clase finita $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, los siguientes son equivalentes:*

1. *Para cada $m \geq 1$, para todas $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$, todo homomorfismo $h : (\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$ preserva R.*
2. *Hay una $\mathcal{L}$-fórmula primitiva positiva que define R en $\mathcal{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. 2⇒1) Sea $\varphi = \exists \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})$ primitiva positiva que define a R en $\mathcal{K}$. Sean $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$ y $h : (\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m)_{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{B}_{\mathcal{L}}$ un homomorfismo. Sean

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, \bar{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nm}) \in S$$

tales que

$$(a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in R^{A_i} \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Veamos que $(h(\bar{a}_1),\ldots,h(\bar{a}_n)) \in R^B$. Como $(a_{1i},\ldots,a_{ni}) \in R^{A_i}$ y φ define a R en $\mathcal{K}$, tenemos que

$$\mathbf{A}_i \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_{ni}] \text{ para } i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Luego, por el Lema 18,

$$\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m \vDash \varphi[\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n].$$

Entonces hay $b_1,\ldots,b_k \in A_1 \times \cdots \times A_m$, tales que

$$\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_m \vDash \psi[\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,b_1,\ldots,b_k].$$

Como ψ es abierta positiva, aplicando el Teorema 12 obtenemos que $\mathbf{B} \vDash \varphi[h(\bar{a}_1),\ldots,h(\bar{a}_n)]$. Finalmente, como φ define a R en $\mathcal{K}$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, concluimos que $(h(\bar{a}_1),\ldots,h(\bar{a}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$.

1⇒2)Supongamos $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_m\}$, R n-aria. Sean $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ tales que $\bar{x}_i = \left(x^1_{i1},\ldots,x^1_{i|R^{\mathbf{A}_1}|},\ldots,x^m_{i1},\ldots,x^m_{i|R^{\mathbf{A}_m}|}\right)$ para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ con $\bigcup R^{\mathbf{A}_j} = \left\{\left(x^j_{1i},\ldots,x^j_{ni}\right) \text{ con } i \in \{1,|R^{\mathbf{A}_j}|\}\right\}$ para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Sean $\bar{x'}_1,\ldots,\bar{x'}_k \in \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times\cdots\times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$, tales que $\left\langle \bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{x'}_1,\ldots,\bar{x'}_k\right\rangle^{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|}\times\cdots\times\mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}} = \mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$. Sea

$$\varphi = \exists \bar{y} \bigwedge_{\alpha \in \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|}\times\cdots\times\mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|},(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{x'}_1,\ldots,\bar{x'}_k)}} \alpha(\bar{x},\bar{y})$$

. Supongamos $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1,\ldots,b_n]$ y veamos que $(b_1,\ldots,b_n) \in R^{\mathbf{B}}$. Entonces hay $b'_1,\ldots,b'_k$ tal que $\mathbf{B} \vDash \Delta^+_{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|}\times\cdots\times\mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|},(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{x'}_1,\ldots,\bar{x'}_k)}[b_1,\ldots,b_n,b'_1,\ldots,b'_k]$, por Teorema 14 hay h homomorfismo de $\left\langle \bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{x'}_1,\ldots,\bar{x'}_k\right\rangle^{\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|}\times\cdots\times\mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}}$ en $\langle b_1,\ldots,b_n,b'_1,\ldots,b'_k\rangle^{\mathbf{B}}$ tal que $h(\bar{x}_i) = b_i$ y $h\left(\bar{x'}_i\right) = b'_i$, claramente h es un homomorfismo de $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|}$ en $\mathbf{B}$. Como por hipótesis h preserva R, entonces como $\left(x^j_{1i},\ldots,x^j_{ni}\right) \in R^{\mathbf{A}_j}$, $(h(\bar{x}_1),\ldots,h(\bar{x}_n)) \in R^{\mathbf{B}}$, que es exactamente $(b_1,\ldots,b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Ahora supongamos $(b_1,\ldots,b_n) \in R^{\mathbf{B}}$ y veamos que $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1,\ldots,b_n]$, entonces hay algún j tal que $\mathbf{A}_j = \mathbf{B}$ y hay algún k y algún j tal que

$$\left(x^j_{1k},\ldots,x^j_{nk}\right) = (b_1,\ldots,b_n)$$

. Entonces como $\mathbf{A}_1^{|R^{\mathbf{A}_1}|} \times \cdots \times \mathbf{B}^{|R^{\mathbf{B}}|} \times \cdots \times \mathbf{A}_m^{|R^{\mathbf{A}_m}|} \vDash \varphi[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$ por Teorema 18 $\mathbf{B} \vDash \varphi\left[x^j_{1k},\ldots,x^j_{nk}\right]$, por lo tanto $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1,\ldots,b_n]$. □

Capítulo 3

Algoritmo de la Constelación

3.1. Preprocesamiento

LEMA 25. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, $\mathcal{K}$ una clase finita de $\mathcal{L}'$-estructuras finitas y $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{K}$, con $\mathbf{A} \neq \tilde{\mathbf{A}}$, tales que hay un $\mathcal{L}$-isomorfismo $\gamma : A \to \tilde{A}$. Entonces para toda $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ y toda $\mathcal{L}$-fórmula φ son equivalentes:*

1. *φ define a R en $\mathcal{K}$.*
2. *γ es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-isomorfismo y φ define a R en $\mathcal{K} - \{\tilde{\mathbf{A}}\}$.*

DEMOSTRACIÓN. 1⇒2) Trivial.
2⇒1) $\tilde{\mathbf{A}} \vDash R[\bar{a}]$ sii $\mathbf{A} \vDash R\left[\gamma^{-1}(\bar{a})\right]$ sii $\mathbf{A} \vDash \varphi\left[\gamma^{-1}(\bar{a})\right]$ sii $\tilde{\mathbf{A}} \vDash \varphi[\bar{a}]$. □

Independientemente del tipo de definibilidad que uno quiera chequear el Lema 25 sugiere que uno puede comenzar por reducir $\mathcal{K}$ eliminando copias de estructuras $\mathcal{L} \cup \{R\}$-isomorfas.

Algorithm 1 Preprocesamiento

for $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ **do**
    for $\mathbf{B} \in \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$ **do**
        if hay $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-isomorfismo **then**
            if γ es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-isomorfismo **then**
                $\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{B}\}$
            else
                return γ ▷ R no es definible y γ es contraejemplo
            end if
        end if
    end for
end for
return $\mathcal{K}$ ▷ $\mathcal{K}$ sin estructuras $\mathcal{L}$-isomorfas

Notar que los isomorfismos revisados por este algoritmo deben ser necesariamente revisados para comprobar definibilidad en cualquiera de los formatos. La ventaja de chequear estos en primer lugar es que podría reducirse la clase $\mathcal{K}$ en el proceso.

Se obtiene una pequeña ganancia al chequear por $\mathcal{L}$-isomorfismos y recién descubierto uno de estos comprobar si es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-isomorfismo. Observar además que, para poder aplicar los teoremas de definibilidad de las secciones 2.1 y 2.2, habría que verificar que cada uno de los $\mathcal{L}$-isomorfismos entre estructuras de $\mathcal{K}$ preserven R y vemos que basta con chequear sólo uno.

3.2. Definibilidad abierta

Dada $\mathcal{K}$ una familia de $\mathcal{L}$-estructuras, llamaremos $\mathcal{K}$-flecha a una terna $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ donde $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $f : \mathcal{D}_f \subseteq A \to \mathcal{I}_f \subseteq B$. Además, dadas $\alpha = (f, \mathbf{M}, \mathbf{T})$ y $\beta = (g, \mathbf{S}, \mathbf{M})$, $\mathcal{K}$-flechas tales que $f \circ g$ esté definida, definimos $\alpha \circ \beta = (f \circ g, \mathbf{S}, \mathbf{T})$.

Una $\mathcal{K}$-constelación será una tupla $(\mathcal{K},\mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ será un conjunto de $\mathcal{K}$-flechas.

Dadas $\mathcal{C}_0 = (\mathcal{K},\mathcal{F}_0)$ y $\mathcal{C} = (\mathcal{K},\mathcal{F})$ $\mathcal{K}$-constelaciones diremos que $\mathcal{C}_0$ genera a $\mathcal{C}$ si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ hay $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{F}_0$(quizás repetidas) tales que $f = f_1 \circ \cdots \circ f_n$.

Dada $\mathcal{K}$, definimos $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{open} = (\mathcal{K},\mathcal{F}^{open})$ con

$$\mathcal{F}^{open} = \{(\gamma,\mathbf{S},\mathbf{T}) : \gamma \text{ es un isomorfismo entre } \mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S} \text{ y } \mathbf{T}_0 \leq \mathbf{T}\}$$

LEMA 26. *Dada $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{open}$, y dado un $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguaje de primer orden tal que $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ es un símbolo de relación n-ario. Si extendemos cada $\mathcal{L}$-estructura en $\mathcal{K}$ a una $\mathcal{L}'$-estructura, entonces si para cada $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathcal{F}^{open}$ γ preserva R, R es definible por una $\mathcal{L}$-formula abierta en $\mathcal{K}$.*

TEOREMA 27. *Dado $\mathcal{L}$ lenguaje de primer orden, $\mathcal{K}$ una clase finita de $\mathcal{L}$-estructuras finitas donde no hay estructuras $\mathcal{L}$-isomorfas.*

Sea P un conjunto de tuplas de $\mathcal{L}$-estructuras donde para cada tipo de isomorfismo en $S(\mathcal{K})$ hay una única tupla $(\mathbf{A}_0,\mathbf{A})$ donde $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}_0$ representante del tipo de isomorfismo y $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Construimos $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}^{open} = \left(\mathcal{K},\tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}\right)$ con $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}} = Aut \cup Iso$, donde $Aut = \bigcup_{(\mathbf{S}_0,\mathbf{S})\in P} \{(\alpha,\mathbf{S},\mathbf{S}) : \alpha \in Aut(\mathbf{S}_0)\}$ y Iso es un conjunto de $\mathcal{K}$-flechas tal que dadas $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}$ con $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ pero $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, hay un único $\gamma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ isomorfismo, tal que $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) \in Iso$ y $\left(\gamma^{-1},\mathbf{B},\mathbf{A}\right) \in Iso$.

Entonces $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}^{open}$ genera a $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{open}$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}} \subseteq \mathcal{F}^{\text{open}}$.

Sea $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathcal{F}^{\text{open}}$, entonces $\gamma : \mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A} \to \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}$ isomorfismo, con $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

Si $\mathbf{A}_0$ es maximal respecto a embeddings, entonces $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ y por lo tanto $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\gamma,\mathbf{A},\mathbf{A}) \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$.

Si $\mathbf{A}_0$ no es maximal y supongamos que ni $\mathbf{A}_0$, ni $\mathbf{B}_0$ son representantes en P de su tipo de isomorfismo. Entonces tomo $(\mathbf{C}_0,\mathbf{C}) \in P$ tal que $(\delta,\mathbf{C},\mathbf{A}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$ con $\delta : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{A}_0$ isomorfismo y $(\delta',\mathbf{C},\mathbf{B}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$ con $\delta' : \mathbf{C}_0 \to \mathbf{B}_0$ isomorfismo. Como $\delta'^{-1}\gamma\delta = \lambda \in Aut(\mathbf{C}_0)$ y $(\lambda,\mathbf{C},\mathbf{C}) \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$. Entonces $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\delta',\mathbf{C},\mathbf{B}) \circ (\lambda,\mathbf{C},\mathbf{C}) \circ \left(\delta^{-1},\mathbf{A},\mathbf{C}\right)$.

Si $\mathbf{A}_0$ no es maximal y supongamos que $\mathbf{A}_0$ es representante de su tipo de isomorfismo en P, pero $\mathbf{B}_0$ no, entonces tomo $(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}')$ en P, $(\delta,\mathbf{A}',\mathbf{A}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$ con $\delta : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}_0$ isomorfismo y $(\delta',\mathbf{B},\mathbf{A}') \in \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$ con $\delta : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{A}_0$ isomorfismo. Como $\delta'\gamma\delta = \lambda \in Aut(\mathbf{A}_0)$ y $(\lambda,\mathbf{A}',\mathbf{A}') \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$. Entonces $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left(\delta'^{-1},\mathbf{A}',\mathbf{B}\right) \circ (\lambda,\mathbf{A}',\mathbf{A}') \circ \left(\delta^{-1},\mathbf{A},\mathbf{A}'\right)$.

Si $\mathbf{A}_0$ no es maximal y supongamos que tanto $\mathbf{A}_0$ como $\mathbf{B}_0$ son representantes en P de su tipo de isomorfismo. Entonces $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$. Ahora tomo $(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}') = (\mathbf{B}_0,\mathbf{A}') \in P$ y $(\delta,\mathbf{A}',\mathbf{A}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$ con $\delta : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}_0$ isomorfismo y $(\delta',\mathbf{B},\mathbf{A}') \in \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$ con $\delta : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}_0$ isomorfismo. Como $\delta'\gamma\delta = \lambda \in Aut(\mathbf{A}_0)$ y $(\lambda,\mathbf{A}',\mathbf{A}') \in Aut \subseteq \tilde{\mathcal{F}}^{\text{open}}$. Entonces $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) = \left(\delta'^{-1},\mathbf{A}',\mathbf{B}\right) \circ (\lambda,\mathbf{A}',\mathbf{A}') \circ \left(\delta^{-1},\mathbf{A},\mathbf{A}'\right)$. □

LEMA 28. *Dadas $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{open}$, $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}^{open}$, y dado un $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguaje de primer orden tal que $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ es un símbolo de relación n-ario. Si extendemos cada $\mathcal{L}$-estructura en $\mathcal{K}$ a una $\mathcal{L}'$-estructura, si para cada $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ γ preserva R, entonces para cada $(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathcal{F}^{open}$ γ preserva R.*

DEMOSTRACIÓN. Directa ya que composición de funciones que preservan, preserva. □

COROLARIO 29. *Dada* $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}}^{open}$ *y dado un* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ *lenguaje de primer orden tal que* $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ *es un símbolo de relación n-ario. Dada una extensión para cada* $\mathcal{L}$*-estructura en* $\mathcal{K}$ *a una* $\mathcal{L}'$*-estructura, si cada* $(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{open}$ γ *preserva* R*, entonces* R *es definible por una* $\mathcal{L}$*-formula abierta en* $\mathcal{K}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Directa de los lemas28 y 26. □

El Teorema 27 sugiere un subconjunto de isomorfismos que bastan para revisar definibilidad abierta a través del Corolario 29.

En el Algoritmo 2 recorremos los isomorfismos en $\tilde{\mathcal{F}}^{open}$. Comenzamos recorriendo las estructuras en $\mathcal{K}$, desde la de mayor cardinalidad a la de menor cardinalidad. Esto permite detectar cuando hay $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ y nos permite evitar calcular las subestructuras de $\mathbf{A}$, ya que serán subestructuras de $\mathbf{B}$. Además recorremos las subestructuras de menor a mayor ya que es mas fácil detectar isomorfismos entre subestructuras mas chicas.

3.3. Definibilidad de primer orden

Luego de haber aplicado el Algoritmo 1 para preprocesamiento, solo basta con revisar los automorfimos para $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$.

3.4. Definibilidad existencial-positiva

Por el Teorema 23, luego de aplicar el Algoritmo1 de preprocesamiento, solo basta con revisar los homomorfismos entre $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$.

3.5. Definibilidad abierta-positiva

Por el Teorema 16, luego de aplicar el Algoritmo1 de preprocesamiento y el Algoritmo 2 de definibilidad abierta.

3.5.1. Detección de homomorfismos. Como aparece en [**2**], un CSP (constraint satisfaction problem) es definido como la terna $\langle X, D, C\rangle$, donde

$$X = \{X_1, \ldots, X_n\} \text{ es un conjunto de variables}$$
$$D = \{D_1, \ldots, D_n\} \text{ es un conjunto con los respectivos dominios de los valores}$$
$$C = \{C_1, \ldots, C_m\} \text{ es un conjunto de restricciones}$$

Cada variable X_i se mueve en los valores del respectivo dominio no vacío D_i. Cada restricción $C_j \in C$ es un par $\langle t_j, R_j\rangle$, donde t_j es una k-upla de variables y R_j es una relación k-aria en el correspondiente dominio de cada variable. Una valuación sobre las variables es una función desde un subconjunto de las variables a un particular conjunto de valores en los correspondientes dominios de valores. Una valuación v satisface la restricción $\langle t_j, R_j\rangle$ si los valores asignados a las variables t_j satisfacen la relación R_j.

Una valuación es consistente si no viola ninguna de las restricciones. Una valuación es completa si incluye todas las variables. Una valuación es solución si es consistente y completa. En ese caso diremos que la valuación resuelve el CSP.

3.5.2. Generación de subestructuras.

Algorithm 2 Constelación abierta

$\mathcal{K}_0 = \emptyset$
for $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, desde la mayor a la menor cardinalidad **do**
$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{A}\}$
$\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$
for $\alpha \in Aut_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ **do**
if α no es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-automorfismo **then**
return α ▷ R no es abierta-definible y α es contraejemplo
end if
end for
for $\mathbf{A}_0 \in S_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$, desde la menor a la mayor cardinalidad **do**
if hay un $\gamma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-isomorfismo, con $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ **then**
if γ no es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-isomorfismo **then**
return γ ▷ R no es abierta-definible y γ es contraejemplo
else
$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{B}\}$
$\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{B}\}$
for $\alpha \in Aut_{\mathcal{L}}(\mathbf{B})$ **do**
if α no es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-automorfismo **then**
return α ▷ R no es abierta-definible y α es contraejemplo
end if
end for
end if
else if hay un $\gamma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-isomorfismo, con $\mathbf{B} \in \mathcal{K}_0 - \{\mathbf{A}_0\}$ **then**
if γ no es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-isomorfismo **then**
return γ ▷ R no es abierta-definible y γ es contraejemplo
end if
else
$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{A}_0\}$
for $\alpha \in Aut_{\mathcal{L}}(\mathbf{A}_0)$ **do**
if α no es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-automorfismo **then**
return α ▷ R no es abierta-definible y α es contraejemplo
end if
end for
end if
end for
end for
return $\mathcal{K}_0$ ▷ R es abierta-definible

Algorithm 3 Constelación para primer orden

$\mathcal{K}_0 = \emptyset$
for $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ **do**
$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0 \cup \{\mathbf{A}\}$
$\mathcal{K} = \mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$
for $\alpha \in Aut_{\mathcal{L}}(\mathbf{A})$ **do**
if α no es un $\mathcal{L} \cup \{R\}$-automorfismo **then**
return α ▷ R no es definible en primer orden y α es contraejemplo
end if
end for
end for
return $\mathcal{K}_0$ ▷ R es definible en primer orden

Algorithm 4 Constelación existencial-positiva

for $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ **do**
    for $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ **do**
        if hay un $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-homomorfismo **then**
            if h no preserva R **then**
                return h ▷ R no es existencial-positiva definible y h es contraejemplo
            end if
        end if
    end for
end for
return $\mathcal{K}$ ▷ R es existencial positiva definible

Algorithm 5 Constelación abierta-positiva

for $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_0$ **do**
    for $\mathbf{B} \in \mathcal{K}_0$ **do**
        if hay un $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-homomorfismo **then**
            if h no preserva R **then**
                return h ▷ R no es abierta-positiva definible y h es contraejemplo
            end if
        end if
    end for
end for
return $\mathcal{K}_0$ ▷ R es abierta positiva definible

Capítulo 4

Álgebras de Lindenbaum

4.1. Definiciones e ideas básicas

4.2. Preorden y algoritmo

4.3. Algoritmos para calcular álgebras

4.4. Ejemplos y aplicación

LEMA 30. *Sea* $\mathbf{L}$ *un reticulado y* R *una relación binaria no vacía sobre* L *preservada por endomorfismos en* $\mathbf{L}$. *Entonces vale que* $\Delta^L \subseteq R$.

DEMOSTRACIÓN. Esto es una consecuencia directa de que para cada $a \in L$ la función de L en L que vale constantemente a es un endomorfismo. □

TEOREMA 31 (Teorema del filtro primo). *Sea* $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *un reticulado distributivo y* F *un filtro. Supongamos* $x \in L - F$. *Entonces hay un filtro primo* P *tal que* $x \notin P$ *y* $F \subseteq P$.

LEMA 32. *Sea* $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo y* R *una relación binaria no vacía sobre* L *preservada por endomorfismos en* $\mathbf{L}$. *Si hay* $(a,b) \in R$ *tal que* $a \nleq b$ *(respectivamente* $b \nleq a$*), entonces* $\{(x,y) : x \geq y\} \subseteq R$ *(respectivamente* $\{(x,y) : x \leq y\} \subseteq R$*).*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos $(a,b) \in R$ tal que $a \nleq b$, y sean $c, d \in L$ tales que $c \geq d$. Veremos que $(c,d) \in R$. Por el Teorema 31 hay un filtro primo P que contiene al filtro generado por a y además $b \notin P$. Definimos $h : L \to L$ por

$$h(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in P, \\ d & \text{si } x \notin P. \end{cases}$$

Es fácil ver que h es un endomorfismo. Finalmente como $(a,b) \in R$ y h preserva R, $(h(a), h(b)) = (c,d) \in R$. □

TEOREMA 33. *Sea* $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo y* R *una relación binaria sobre* L *definible por un fórmula existencial positiva en* $\mathbf{L}$. *Se da una de las siguientes:*

- $R = \Delta$,
- $R = \{(x,y) : x \leq y\}$,
- $R = \{(x,y) : x \geq y\}$,
- $R = \{(x,y) : x \leq y\} \cup \{(x,y) : x \geq y\}$,
- $R = L \times L$.

DEMOSTRACIÓN. Si $R \subseteq \Delta$, por el Lema 30 $R = \Delta$.

Si $R \subseteq \{(x,y) : x \leq y\}$, pero $R \nsubseteq \Delta$, hay $(a,b) \in R$ tales que $a < b$, entonces $a \ngeq b$ y por el Lema 32 $R = \{(x,y) : x \leq y\}$. Análogo para $R \subseteq \{(x,y) : x \geq y\}$.

Si $R \nsubseteq \{(x,y) : x \leq y\}$ y $R \nsubseteq \{(x,y) : x \geq y\}$, aplicando dos veces el Lema 32 $\{(x,y) : x \leq y\} \cup \{(x,y) : x \geq y\} \subseteq R$. Si además $(a,b) \in R$ pero $a \nleq b$ y $a \ngeq b$, tomo $(c,d) \in R$, si son comparables ya esta están en R por lo anterior. Si son incomparables aplico dos veces el Teorema 31 y tomo dos filtros primos P y Q tales que $a \in P$ pero $b \notin P$ y $b \in Q$ pero $a \notin Q$. Ahora definimos la siguiente función

$$h(x) = \begin{cases} c \vee d & \text{si } x \in P \cup Q \\ c & \text{si } x \in P - Q \\ d & \text{si } x \in Q - P \\ c \wedge d & \text{si } x \notin P \text{ y } x \notin Q \end{cases}$$

que fácilmente puede verse que es un endomorfismo. Por lo tanto como $(a, b) \in R$ y h preserva R, $(h(a), h(b)) = (c, d) \in R$. Por lo tanto $R = L \times L$. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Bibliografía

[1] Campercholi, Miguel y Diego Vaggione: *Semantical conditions for the definability of functions and relations*, 2015. `http://www.arxiv.org/abs/1506.07501`.

[2] Wikipedia: *Constraint satisfaction problem — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2016. `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Constraint%20satisfaction%20problem&oldid=695651340`, [En línea, visitado el 11 de Enero de 2016].