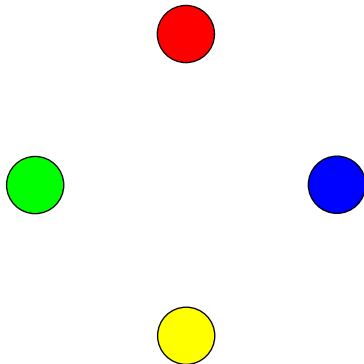


# Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones en fragmentos de primer orden

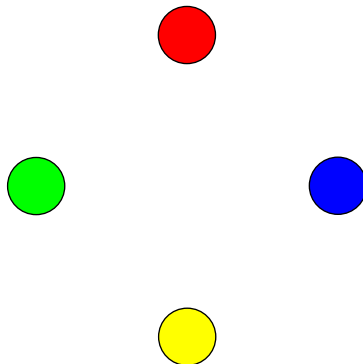
Pablo Ventura

2 de marzo de 2016

# Lenguaje Natural



# Lenguaje Natural



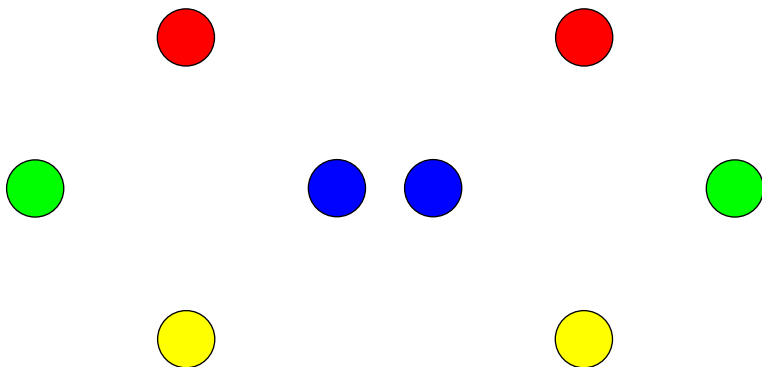
Restringimos el lenguaje:

«esta arriba o a la misma altura que»

«esta abajo o a la misma altura que»

# Lenguaje Natural

A pesar de reflejarlo en espejo se mantiene quien esta abajo o arriba de quien.



# Lenguaje Formal

- ▶ La **Lógica de Primer Orden** es un lenguaje formal que permite expresar propiedades de estructuras matemáticas.

# Lenguaje Formal

- ▶ La **Lógica de Primer Orden** es un lenguaje formal que permite expresar propiedades de estructuras matemáticas.
- ▶ En nuestro caso lo restringimos a fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales, existenciales positivas y sin restricciones.

# Elemento definible

## Definición

Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden y  $\mathbf{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura. Si  $a \in A$ , diremos que la fórmula  $\varphi(x)$  *define a a en  $\mathbf{A}$*  si para todo  $x \in A$  vale que

$$x = a \iff \mathbf{A} \models \varphi(x).$$

# Preservación para refutar definibilidad

## Teorema

*Si  $F$  es un automorfismo de  $\mathbf{A}$  y  $\varphi(y)$  es una fórmula, entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a] \iff \mathbf{A} \models \varphi[F(a)].$$



# Preservación para refutar definibilidad

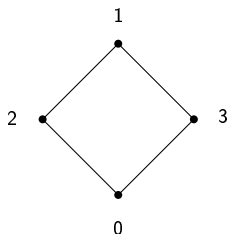
## Teorema

Si  $F$  es un automorfismo de  $\mathbf{A}$  y  $\varphi(y)$  es una fórmula, entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[a] \iff \mathbf{A} \models \varphi[F(a)].$$

Volviendo al ejemplo:

¿Es definible el elemento 2 en  $\langle 2 \times 2, \leq \rangle$ ?



# Preservación para refutar definibilidad

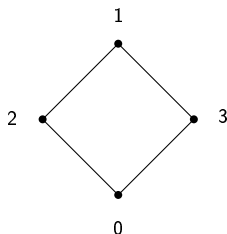
## Teorema

Si  $F$  es un automorfismo de  $\mathbf{A}$  y  $\varphi(y)$  es una fórmula, entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[a] \iff \mathbf{A} \models \varphi[F(a)].$$

Volviendo al ejemplo:

¿Es definible el elemento 2 en  $\langle \mathbf{2} \times \mathbf{2}, \leq \rangle$ ?



Hay  $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ , tal que  $\gamma(2) = 3$ .

## Pero lo interesante es la vuelta

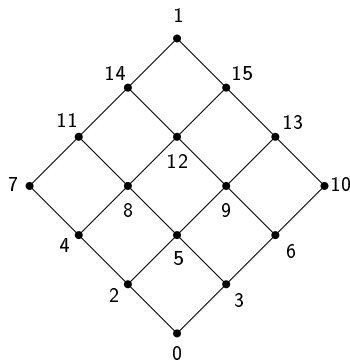
### Teorema

*Si  $\mathbf{A}$  es finita y  $e$  es punto fijo de todo automorfismo, entonces  $e$  es definible.*

## Pero lo interesante es la vuelta

### Teorema

*Si  $\mathbf{A}$  es finita y  $e$  es punto fijo de todo automorfismo, entonces  $e$  es definible.*





# Definibilidad y preservación de relaciones binarias

## Definición

Sean  $\mathbf{A}$  una estructura y  $R \subseteq A \times A$ . Diremos que la fórmula  $\varphi(x_1, x_2)$  *define a*  $R$  en  $\mathbf{A}$  si para todo  $a_1, a_2 \in A$  vale que

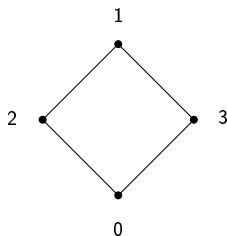
$$(a_1, a_2) \in R \iff \mathbf{A} \models \varphi(a_1, a_2).$$

# Definibilidad y preservación de relaciones binarias

## Definición

Sean  $\mathbf{A}$  una estructura y  $R \subseteq A \times A$ . Diremos que la fórmula  $\varphi(x_1, x_2)$  *define a*  $R$  en  $\mathbf{A}$  si para todo  $a_1, a_2 \in A$  vale que

$$(a_1, a_2) \in R \iff \mathbf{A} \models \varphi(a_1, a_2).$$

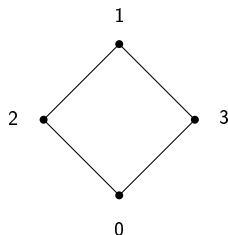


# Definibilidad y preservación de relaciones binarias

## Definición

Sean  $\mathbf{A}$  una estructura y  $R \subseteq A \times A$ . Diremos que la fórmula  $\varphi(x_1, x_2)$  *define a*  $R$  en  $\mathbf{A}$  si para todo  $a_1, a_2 \in A$  vale que

$$(a_1, a_2) \in R \iff \mathbf{A} \models \varphi(a_1, a_2).$$



La relación binaria «cubre a» es definible por

$$x \leq y \wedge x \neq y \wedge \nexists z (x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \wedge z \neq y)$$



# Preservación de relaciones binarias

## Definición

Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  dos  $\mathcal{L}$ -estructuras y  $R \in \mathcal{L}$  binaria. Una función  $f : A \rightarrow B$  *preserva* a  $R$  si

$$(a_1, a_2) \in R^{\mathbf{A}} \implies (f(a_1), f(a_2)) \in R^{\mathbf{B}}.$$

# Teorema semántico de primer orden

## Teorema

Sean  $\mathbf{A}$  una estructura y  $R \subseteq A \times A$ . Son equivalentes:

1. Hay una fórmula que define  $R$  en  $\mathbf{A}$ .
2. Todo automorfismo  $\gamma : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  preserva  $R$ .

# Problema de definibilidad

Dados:

- ▶  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden finito,
- ▶  $\mathbf{A}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura finita,
- ▶ un  $R \subseteq A \times A$ ,
- ▶ un fragmento de primer orden  $\Sigma$ ,

decidir si hay una fórmula en  $\Sigma$  que define a  $R$  en  $\mathbf{A}$ .

# Teorema semántico para abiertas

## Teorema

Sean  $\mathbf{A}$  una estructura y  $R \subseteq A \times A$ . Son equivalentes:

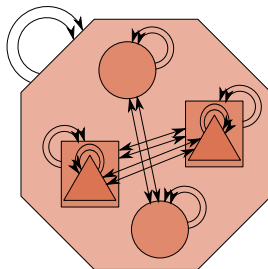
1. Hay una fórmula abierta que define a  $R$  en  $\mathbf{A}$ .
2. Para todas  $\mathbf{B}, \mathbf{C} \leq \mathbf{A}$ , se tiene que todo isomorfismo  $\sigma : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$  preserva  $R$ .

## Teorema semántico para abiertas

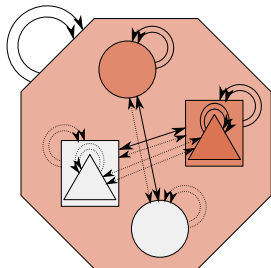
## Teorema

Sean  $\mathbf{A}$  una estructura y  $R \subseteq A \times A$ . Son equivalentes:

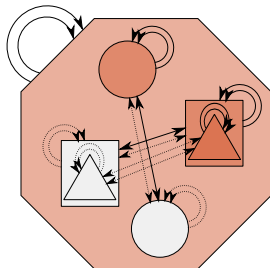
1. Hay una fórmula abierta que define a  $R$  en  $\mathbf{A}$ .
2. Para todas  $\mathbf{B}, \mathbf{C} \leq \mathbf{A}$ , se tiene que todo isomorfismo  $\sigma : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$  preserva  $R$ .



# Generación

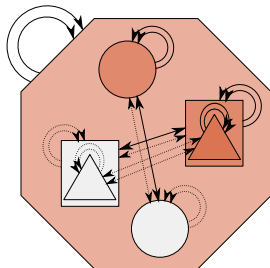


# Generación



Representantes para cada tipo de iso

# Generación

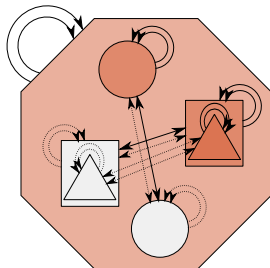


Representantes para cada tipo de iso

- Automorfismos de los representantes



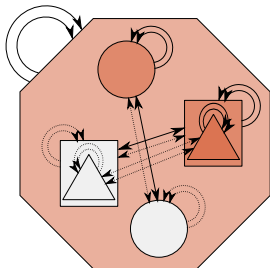
# Generación



Representantes para cada tipo de iso

- ▶ Automorfismos de los representantes
- ▶ Solo un isomorfismo de representante en representado

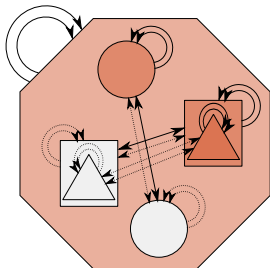
# Generación



Representantes para cada tipo de iso

- ▶ Automorfismos de los representantes
- ▶ Solo un isomorfismo de representante en representado
- ▶ Sin morfismos entre subestructuras de subestructuras

## Generación



Representantes para cada tipo de iso

- ▶ Automorfismos de los representantes
- ▶ Solo un isomorfismo de representante en representado
- ▶ Sin morfismos entre subestructuras de subestructuras

Generan  
al resto de morfismos

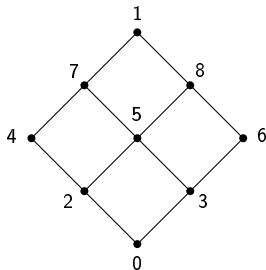
## Algoritmo para definibilidad abierta

- ▶  $\mathcal{S} = \emptyset$
- ▶ Para cada subestructura  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{A}$ , de mayor a menor
  - ▶ Si tiene representante en  $\mathcal{S}$ 
    - ▶ Reviso preservación en el isomorfismo
    - ▶ Salteo las subestructuras de  $\mathbf{B}$
  - ▶ No tiene representante en  $\mathcal{S}$ 
    - ▶ Se agrega la subestructura a  $\mathcal{S}$
    - ▶ Se revisa preservación en los automorfismos

## Ejemplo de ejecución

$$\langle 3 \times 3, \leq \rangle$$

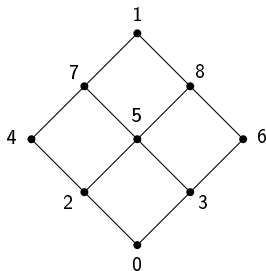
$$R = \{(x, y) : x \text{ esta a la izquierda de } y\}$$



## Ejemplo de ejecución

$$\langle 3 \times 3, \leq \rangle$$

$$R = \{(x, y) : x \text{ esta a la izquierda de } y\}$$



Contraejemplo!

$\gamma$  iso de  $\langle 0, 1 \rangle^L$  en  $\langle 0, 2 \rangle^L$

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(1) = 2$$

$(2, 0) \in R$  pero  $(1, 0) \notin R$

# Otros algoritmos

Desarrollamos algoritmos con ideas similares para los siguientes fragmentos:

- ▶ Fórmulas abiertas positivas (Homomorfismos subestructuras)
- ▶ Fórmulas existenciales (Automorfismos)
- ▶ Fórmulas existenciales positivas (Endomorfismos)

# Álgebras de relaciones definibles

- ▶ Las relaciones binarias definibles por  $\Sigma$  en  $\mathbf{A}$  son cerradas bajo  $\cup$  y  $\cap$ .



# Álgebras de relaciones definibles

- ▶ Las relaciones binarias definibles por  $\Sigma$  en  $\mathbf{A}$  son cerradas bajo  $\cup$  y  $\cap$ .
- ▶ Forman un reticulado distributivo, llamado **Álgebra de Lindenbaum**.

# Álgebras de relaciones definibles

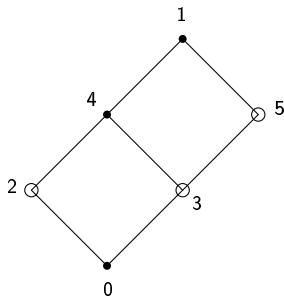
- ▶ Las relaciones binarias definibles por  $\Sigma$  en  $\mathbf{A}$  son cerradas bajo  $\cup$  y  $\cap$ .
- ▶ Forman un reticulado distributivo, llamado **Álgebra de Lindenbaum**.
- ▶ Un reticulado distributivo queda caracterizado por sus elementos join-irreducibles.

# Join-irreducibles

Un elemento es join-irreducible si no puede ser expresado como supremo de otros elementos.

## Join-irreducibles

Un elemento es join-irreducible si no puede ser expresado como supremo de otros elementos.



# Teorema semántico de existencia positivas

## Teorema

*Las relaciones definibles por fórmulas existencia positivas en  $\mathbf{A}$  son exactamente las preservadas por endomorfismos de  $\mathbf{A}$ .*

# Cálculo de las relaciones Join-irreducibles

## Lema

*Una relación  $r \subseteq A^2$  es join-irreducible en  $\mathbf{E}^+(\mathbf{A})$  sii hay  $p \in A^2$  tal que  $r = \{h(p) : h \in \text{Endomorfismos}(\mathbf{A})\}$ .*

# Generación del álgebra de Lindenbaum

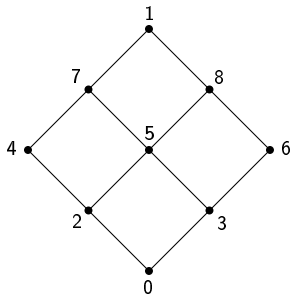
- Recopilamos los endomorfismos generadores a partir del algoritmo de chequeo.

# Generación del álgebra de Lindenbaum

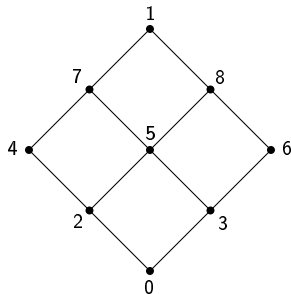
- ▶ Recopilamos los endomorfismos generadores a partir del algoritmo de chequeo.
- ▶ Saturamos cada  $\bar{a} \in A^n$  con estos endomorfismos para obtener cada elemento join-irreducible. En particular  $\{h(\bar{a}) : h \in \text{Endomorfismos}(\mathbf{A})\}$ .



# Ejecución para reticulados distributivos



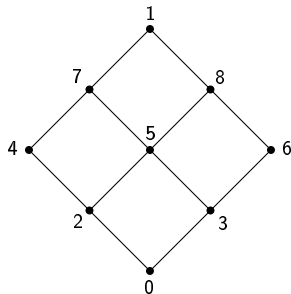
# Ejecución para reticulados distributivos



Interpretando la salida:

►  $\Delta$

# Ejecución para reticulados distributivos

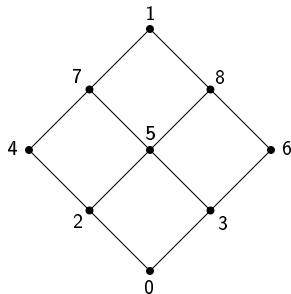


Interpretando la salida:

►  $\Delta$

►  $\leq$

# Ejecución para reticulados distributivos



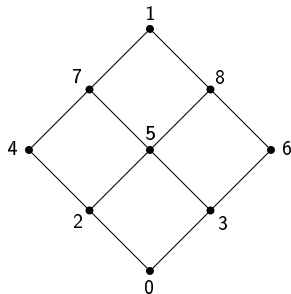
Interpretando la salida:

►  $\Delta$

►  $\leq$

►  $\geq$

# Ejecución para reticulados distributivos



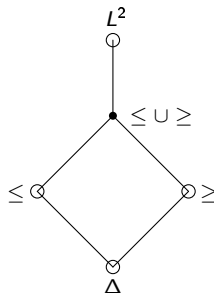
Interpretando la salida:

►  $\Delta$

►  $\leq$

►  $\geq$

►  $L^2$

$E^+(3 \times 3)$ 

# Nuestro teorema de reticulados distributivos

## Teorema

*Sea  $\mathbf{L}$  un reticulado distributivo y  $R$  una relación binaria sobre  $L$  definible por un fórmula existencial positiva en  $\mathbf{L}$ . Se da una de las siguientes:*

- ▶  $R = \Delta,$
- ▶  $R = \{(x, y) : x \leq y\},$
- ▶  $R = \{(x, y) : x \geq y\},$
- ▶  $R = \{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x \geq y\},$
- ▶  $R = L \times L.$

# Aportes

- ▶ Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.



# Aportes

- ▶ Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- ▶ Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.

# Aportes

- ▶ Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- ▶ Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.
- ▶ Algoritmos para obtener el álgebra de relaciones definibles.

# Aportes

- ▶ Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- ▶ Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.
- ▶ Algoritmos para obtener el álgebra de relaciones definibles.
- ▶ Se desarrolló una herramienta que implementa dichos algoritmos.

# Aportes

- ▶ Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- ▶ Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.
- ▶ Algoritmos para obtener el álgebra de relaciones definibles.
- ▶ Se desarrolló una herramienta que implementa dichos algoritmos.
- ▶ Caracterización de las relaciones binarias definibles por existenciales positivas en reticulados distributivos.

# Trabajo Futuro

- Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.

# Trabajo Futuro

- ▶ Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.
- ▶ Interacción entre los diferentes tipos de definibilidad.

# Trabajo Futuro

- ▶ Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.
- ▶ Interacción entre los diferentes tipos de definibilidad.
- ▶ Mejores implementaciones para la generación de subestructuras.

# Trabajo Futuro

- ▶ Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.
- ▶ Interacción entre los diferentes tipos de definibilidad.
- ▶ Mejores implementaciones para la generación de subestructuras.
- ▶ Continuar el estudio de la definibilidad existencial positiva en reticulados distributivos.



¿Preguntas?