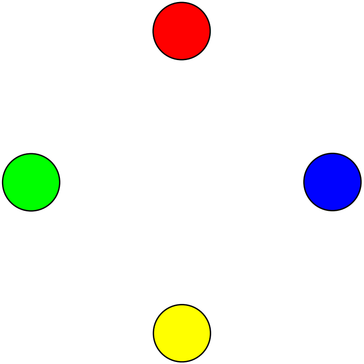
Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones en fragmentos de primer orden

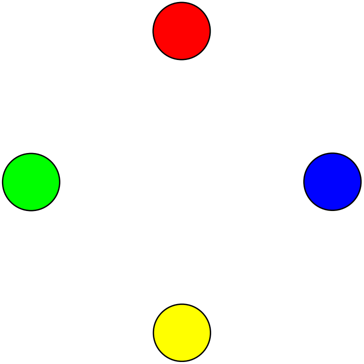
Pablo Ventura

2 de marzo de 2016

Lenguaje Natural



Lenguaje Natural



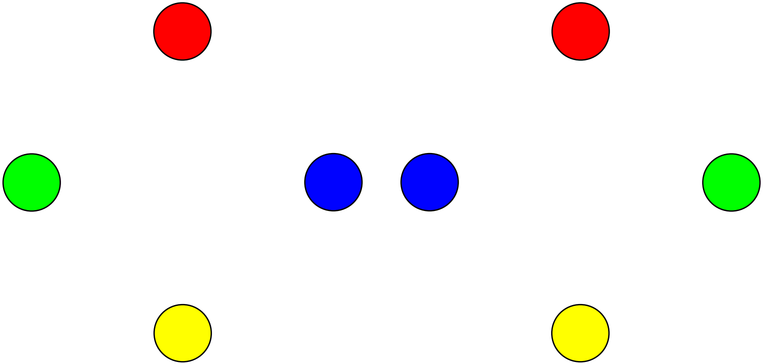
Restringimos el lenguaje:

«esta arriba o a la misma altura que»

«esta abajo o a la misma altura que»

Lenguaje Natural

A pesar de reflejarlo en espejo se mantiene quien esta abajo o arriba de quien.



Lenguaje Formal

- La Lógica de Primer Orden es un lenguaje formal que permite expresar propiedades de estructuras matemáticas.

Lenguaje Formal

- La Lógica de Primer Orden es un lenguaje formal que permite expresar propiedades de estructuras matemáticas.
- En nuestro caso lo restringimos a fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales, existenciales positivas y sin restricciones.

Elemento definible

Definición

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Si $a \in A$, diremos que la fórmula $\varphi(x)$ *define a a en* $\mathbf{A}$ si para todo $x \in A$ vale que

$$x = e \iff \mathbf{A} \models \varphi(x).$$

Preservación para refutar definibilidad

Teorema

Si F es un automorfismo de $\mathbf{A}$ y $\varphi(y)$ es una fórmula, entonces

$$\mathbf{A} \vDash \varphi\,[a] \Longleftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi\,[F(a)]\,.$$

Preservación para refutar definibilidad

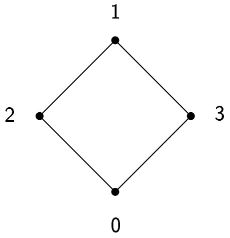
Teorema

Si F es un automorfismo de $\mathbf{A}$ y $\varphi(y)$ es una fórmula, entonces

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[a] \Longleftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi[F(a)]\,.$$

Volviendo al ejemplo:

¿Es definible el elemento 2 en $\langle \mathbf{2} \times \mathbf{2}, \leq \rangle$?



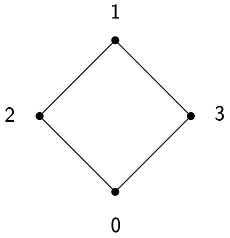
Preservación para refutar definibilidad

Teorema

Si F es un automorfismo de $\mathbf{A}$ y $\varphi(y)$ es una fórmula, entonces

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[a] \iff \mathbf{A} \vDash \varphi[F(a)]\,.$$

Volviendo al ejemplo:
¿Es definible el elemento 2 en $\langle \mathbf{2} \times \mathbf{2}, \leq \rangle$?



Hay $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, tal que $\gamma(2) = 3$.

Pero lo interesante es la vuelta

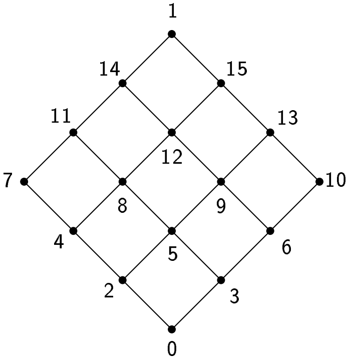
Teorema

Si $\mathbf{A}$ *es finita y e es punto fijo de todo automorfismo, entonces e es definible.*

Pero lo interesante es la vuelta

Teorema

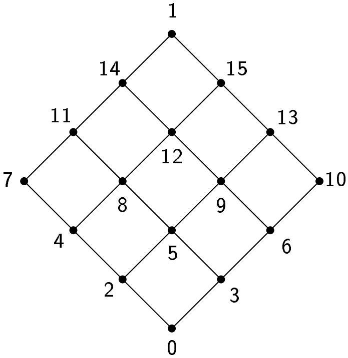
Si **A** *es finita y e es punto fijo de todo automorfismo, entonces e es definible.*



Pero lo interesante es la vuelta

Teorema

*Si **A** es finita y e es punto fijo de todo automorfismo, entonces e es definible.*



Solo los de la vertical!

$$\{1, 12, 5, 0\}$$

Definibilidad y preservación de relaciones binarias

Definición

Sean $\mathbf{A}$ una estructura y $R \subseteq A \times A$. Diremos que la fórmula $\varphi(x_1, x_2)$ *define a* R *en* $\mathbf{A}$ si para todo $a_1, a_2 \in A$ vale que

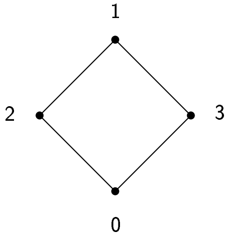
$$(a_1, a_2) \in R \iff \mathbf{A} \vDash \varphi(a_1, a_2).$$

Definibilidad y preservación de relaciones binarias

Definición

Sean $\mathbf{A}$ una estructura y $R \subseteq A \times A$. Diremos que la fórmula $\varphi(x_1, x_2)$ *define a* R *en* $\mathbf{A}$ si para todo $a_1, a_2 \in A$ vale que

$$(a_1, a_2) \in R \iff \mathbf{A} \vDash \varphi(a_1, a_2).$$

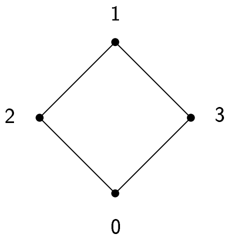


Definibilidad y preservación de relaciones binarias

Definición

Sean $\mathbf{A}$ una estructura y $R \subseteq A \times A$. Diremos que la fórmula $\varphi(x_1, x_2)$ *define a* R *en* $\mathbf{A}$ si para todo $a_1, a_2 \in A$ vale que

$$(a_1, a_2) \in R \iff \mathbf{A} \models \varphi(a_1, a_2).$$



La relación binaria «cubre a» es definible por

$$x \leq y \wedge x \neq y \wedge$$
$$\nexists z \, (x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \wedge z \neq y)$$

Preservación de relaciones binarias

Definición

Sean $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras y $R \in \mathcal{L}$ binaria. Una función $f : A \to B$ *preserva* a R si

$$(a_1, a_2) \in R^{\mathbf{A}} \Longrightarrow (f(a_1), f(a_2)) \in R^{\mathbf{B}}.$$

Teorema semántico de primer orden

Teorema

Sean $\mathbf{A}$ *una estructura y* $R \subseteq A \times A$*. Son equivalentes:*

1. *Hay una fórmula que define* R *en* $\mathbf{A}$*.*
2. *Todo automorfismo* $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *preserva* R*.*

Problema de definibilidad

Dados:

- $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden finito,
- $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura finita,
- un $R \subseteq A \times A$,
- un fragmento de primer orden Σ,

decidir si hay una fórmula en Σ que define a R en $\mathbf{A}$.

Teorema semántico para abiertas

Teorema

Sean $\mathbf{A}$ *una estructura y* $R \subseteq A \times A$. *Son equivalentes:*

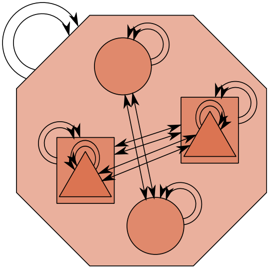
1. *Hay una fórmula abierta que define a* R *en* $\mathbf{A}$.
2. *Para todas* $\mathbf{B}, \mathbf{C} \leq \mathbf{A}$, *se tiene que todo isomorfismo* $\sigma : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *preserva* R.

Teorema semántico para abiertas

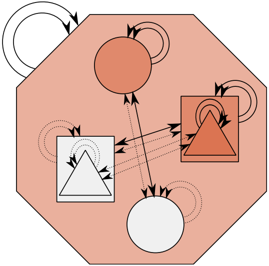
Teorema

Sean $\mathbf{A}$ *una estructura y* $R \subseteq A \times A$. *Son equivalentes:*

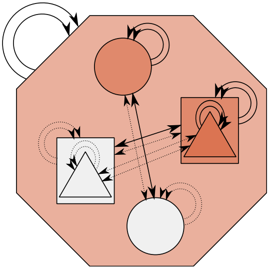
1. *Hay una fórmula abierta que define a* R *en* $\mathbf{A}$.
2. *Para todas* $\mathbf{B}, \mathbf{C} \leq \mathbf{A}$, *se tiene que todo isomorfismo* $\sigma : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *preserva* R.



Generación

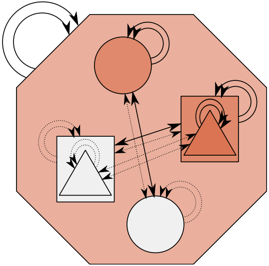


Generación



Representantes para cada tipo de iso

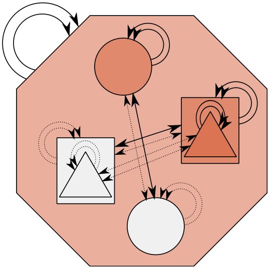
Generación



Representantes para cada tipo de iso

- Automorfismos de los representantes

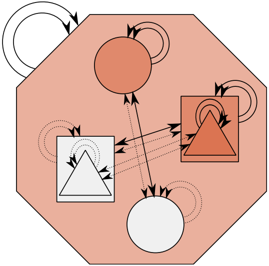
Generación



Representantes para cada tipo de iso

- Automorfismos de los representantes
- Solo un isomorfismo de representante en representado

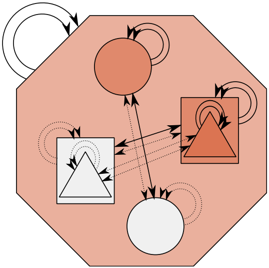
Generación



Representantes para cada tipo de iso

- Automorfismos de los representantes
- Solo un isomorfismo de representante en representado
- Sin morfismos entre subestructuras de subestructuras

Generación



Representantes para cada tipo de iso

- Automorfismos de los representantes
- Solo un isomorfismo de representante en representado
- Sin morfismos entre subestructuras de subestructuras

Generan
al resto de morfismos

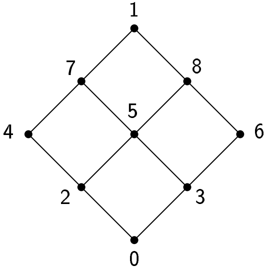
Algoritmo para definibilidad abierta

- $\mathcal{S} = \emptyset$
- Para cada subestructura **B** de **A**, de mayor a menor
  - Si tiene representante en $\mathcal{S}$
    - Reviso preservación en el isomorfismo
    - Salteo las subestructuras de **B**
  - No tiene representante en $\mathcal{S}$
    - Se agrega la subestructura a $\mathcal{S}$
    - Se revisa preservación en los automorfismos

Ejemplo de ejecución

$\langle \mathbf{3} \times \mathbf{3}, \leq \rangle$

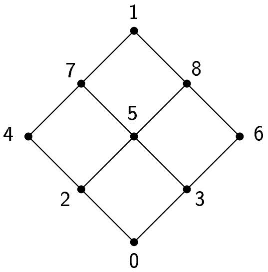
$R = \{(x, y) : x \text{ esta a la izquierda de } y\}$



Ejemplo de ejecución

$\langle \mathbf{3} \times \mathbf{3}, \leq \rangle$

$R = \{(x, y) : x$ esta a la izquierda de $y\}$



Contraejemplo!

γ iso de $\langle 0, 1 \rangle^{\mathbf{L}}$ en $\langle 0, 2 \rangle^{\mathbf{L}}$

$\gamma(0) = 0$

$\gamma(1) = 2$

$(2, 0) \in R$ pero $(1, 0) \notin R$

Otros algoritmos

Desarrollamos algoritmos con ideas similares para los siguientes fragmentos:

- Fórmulas abiertas positivas (Homomorfismos subestructuras)
- Fórmulas existenciales (Automorfismos)
- Fórmulas existenciales positivas (Endomorfismos)

Álgebras de relaciones definibles

- Las relaciones binarias definibles por Σ en $\mathbf{A}$ son cerradas bajo $\cup$ y $\cap$.

Álgebras de relaciones definibles

- Las relaciones binarias definibles por Σ en $\mathbf{A}$ son cerradas bajo $\cup$ y $\cap$.
- Forman un reticulado distributivo, llamado Álgebra de Lindenbaum.

Álgebras de relaciones definibles

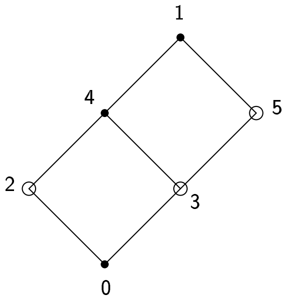
- Las relaciones binarias definibles por Σ en $\mathbf{A}$ son cerradas bajo $\cup$ y $\cap$.
- Forman un reticulado distributivo, llamado Álgebra de Lindenbaum.
- Un reticulado distributivo queda caracterizado por sus elementos join-irreducibles.

Join-irreducibles

Un elemento es join-irreducible si no puede ser expresado como supremo de otros elementos.

Join-irreducibles

Un elemento es join-irreducible si no puede ser expresado como supremo de otros elementos.



Teorema semántico de existenciales positivas

Teorema

Las relaciones definibles por fórmulas existenciales positivas en $\mathbf{A}$ *son exactamente las preservadas por endomorfismos de* $\mathbf{A}$.

Cálculo de las relaciones Join-irreducibles

Lema

Una relación $r \subseteq A^2$ es join-irreducible en $\mathbf{E}^+(\mathbf{A})$ sii hay $p \in A^2$ tal que $r = \{h(p) : h \in Endomorfismos(\mathbf{A})\}$.

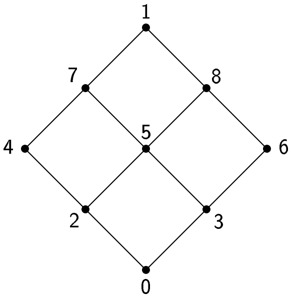
Generación del álgebra de Lindenbaum

- Recopilamos los endomorfismos generadores a partir del algoritmo de chequeo.

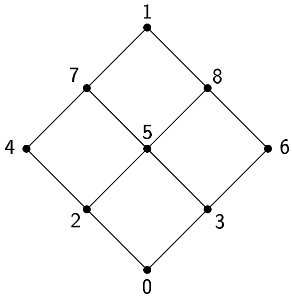
Generación del álgebra de Lindenbaum

- Recopilamos los endomorfismos generadores a partir del algoritmo de chequeo.
- Saturamos cada $\bar{a} \in A^n$ con estos endomorfismos para obtener cada elemento join-irreducible. En particular $\{h(\bar{a}) : h \in \text{Endomorfismos}(\mathbf{A})\}$.

Ejecución para reticulados distributivos



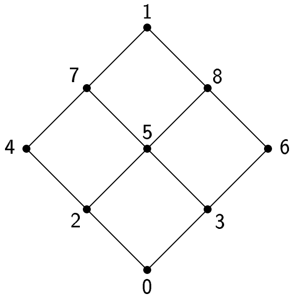
Ejecución para reticulados distributivos



Interpretando la salida:

- Δ

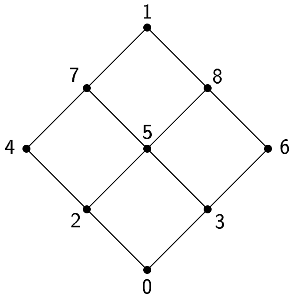
Ejecución para reticulados distributivos



Interpretando la salida:

- Δ
- $\leq$

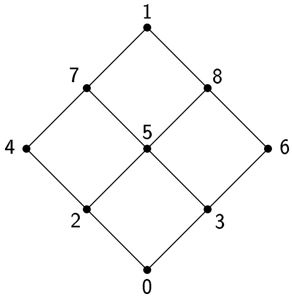
Ejecución para reticulados distributivos



Interpretando la salida:

- Δ
- $\leq$
- $\geq$

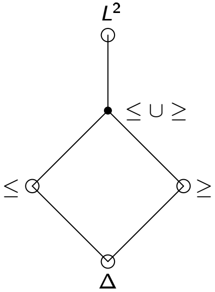
Ejecución para reticulados distributivos



Interpretando la salida:

- Δ
- $\leq$
- $\geq$
- L^2

$E^+(3 \times 3)$



Nuestro teorema de reticulados distributivos

Teorema

Sea **L** *un reticulado distributivo y R una relación binaria sobre L definible por un fórmula existencial positiva en* **L**. *Se da una de las siguientes:*

- $R = \Delta$,
- $R = \{(x, y) : x \leq y\}$,
- $R = \{(x, y) : x \geq y\}$,
- $R = \{(x, y) : x \leq y\} \cup \{(x, y) : x \geq y\}$,
- $R = L \times L$.

Aportes

- Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.

Aportes

- Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.

- Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.

Aportes

- Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.
- Algoritmos para obtener el álgebra de relaciones definibles.

Aportes

- Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.
- Algoritmos para obtener el álgebra de relaciones definibles.
- Se desarrolló una herramienta que implementa dichos algoritmos.

Aportes

- Resultados sobre un conjunto generador para los morfismos a revisar para definibilidad abierta y definibilidad abierta positiva.
- Algoritmos para decidir definibilidad de relaciones, en fórmulas abiertas, abiertas positivas, existenciales y existenciales positivas.
- Algoritmos para obtener el álgebra de relaciones definibles.
- Se desarrolló una herramienta que implementa dichos algoritmos.
- Caracterización de las relaciones binarias definibles por existenciales positivas en reticulados distributivos.

Trabajo Futuro

- Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.

Trabajo Futuro

- Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.
- Interacción entre los diferentes tipos de definibilidad.

Trabajo Futuro

- Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.
- Interacción entre los diferentes tipos de definibilidad.
- Mejores implementaciones para la generación de subestructuras.

Trabajo Futuro

- Definibilidad por conjunción de atómicas y por primitivas positivas.
- Interacción entre los diferentes tipos de definibilidad.
- Mejores implementaciones para la generación de subestructuras.
- Continuar el estudio de la definibilidad existencial positiva en reticulados distributivos.

¿Preguntas?