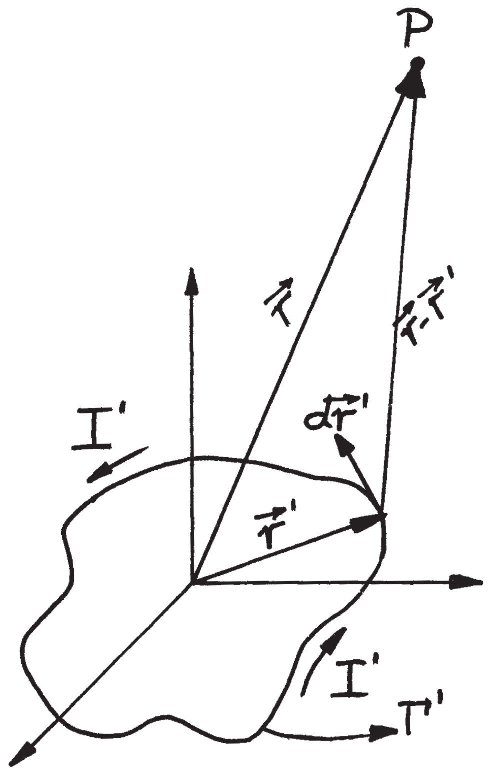
Desarrollo multipolar del potencial vector magnético.

Consideremos una espira conductora (conductor filiforme cerrado de longitud finita), modelada mediante la curva Γ', por la que circula una corriente estacionaria de intensidad I'. Vamos a elegir un sistema de coordenadas con origen en el centro geométrico de la espira, con respecto al cual los puntos de la espira tienen un vector de posición $\mathbf{r}'$. Sea P un punto del espacio de vector de posición $\mathbf{r}$ relativo al sistema de coordenadas mencionado. El potencial vector magnético creado por la espira conductora en el punto P viene dado por:



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1}$$

donde $d\mathbf{r}'$ es un vector desplazamiento infinitesimal definido en cada punto de Γ' en el sentido de la corriente. Supongamos ahora que el punto P está muy alejado de la espira conductora, cumpliéndose que $|\mathbf{r}| >>> \max_{\mathbf{r}' \in \Gamma'} |\mathbf{r}'|$. En ese caso se puede llevar a cabo un desarrollo en serie del factor $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ (que aparece en el integrando de la ecuación (1)) en potencias del parámetro pequeño $|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}|$ (este desarrollo en serie es el mismo que el que se realizó en el tema

1 para obtener el desarrollo multipolar del potencial eléctrico). Si retenemos solamente los dos primeros términos de ese desarrollo en serie, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + |\mathbf{r}'|^2}} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}|}\left[1 + \left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}|}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right)^2 + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}|}\left\{1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^2} + +O\left(\frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right)\right\} \\
&\approx \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} \qquad (2)
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^2} \leq \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} <<< 1$ y que $\frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2} <<< \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} <<< 1$ si $\mathbf{r}' \in \Gamma'$.

Si introducimos la expresión aproximada obtenida en (2) en la ecuación (1), se obtiene una expresión aproximada para el valor de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en P, dada por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I'}{4\pi|\mathbf{r}|}\oint_{\Gamma'} d\mathbf{r}' + \frac{\mu_0 I'}{4\pi|\mathbf{r}|^3}\oint_{\Gamma'} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \qquad (3)$$

La ecuación (3) contiene los dos primeros términos del desarrollo multipolar del potencial vector magnético creado por la espira conductora. Al primer término se le conoce como término monopolar, y al segundo término, como término dipolar. Ahora bien, el término monopolar es nulo ya que $\oint_{\Gamma'} d\mathbf{r}'$ representa la circulación a lo largo de una curva cerrada de una diferencial vectorial exacta, y en consecuencia, $\oint_{\Gamma'} d\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ (o lo que es lo mismo, de acuerdo con el problema 13 del Boletín 0, dada una superficie S' limitada por la curva Γ' y dado un campo escalar $f(\mathbf{r}')$, se cumple que $\oint_{\Gamma'} f(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = -\int_{S'} \nabla' f(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}'$, y si tomamos $f(\mathbf{r}') = 1$, $\nabla' f(\mathbf{r}') = 0$, y en consecuencia $\oint_{\Gamma'} d\mathbf{r}' = \mathbf{0}$). Esto quiere decir que el primer término no nulo del desarrollo multipolar es el término dipolar, y que, de acuerdo con la ecuación (3), el potencial vector creado en P por la espira conductora se puede aproximar mediante la expresión:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I'}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \oint_{\Gamma'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \tag{4}$$

Vamos a reescribir ahora la ecuación (4) de otra forma más conveniente. Para ello, vamos a tener en cuenta que:

$$(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} \;=\; (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')d\mathbf{r}' - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}')\mathbf{r}' \tag{5}$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad vectorial $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\, \mathbf{B}$. Además, vamos a utilizar que sobre los puntos de la curva Γ' se cumple que:

$$d\left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'\right]\big|_{\Gamma'} \;=\; (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')d\mathbf{r}' + (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}')\mathbf{r}' \tag{6}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{r}$ es un vector constante sobre los puntos de Γ', y que $d\mathbf{r}|_{\Gamma'} = \mathbf{0}$.

Si ahora sumamos las ecuaciones (5) y (6), y despejamos $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')d\mathbf{r}'$, se llega a que:

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')d\mathbf{r}' \;=\; \frac{1}{2}\left\{(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + d\left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'\right]\big|_{\Gamma'}\right\} \tag{7}$$

Y si sustituimos la ecuación (7) en la ecuación (4), se llega a la siguiente expresión aproximada de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I'}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \left\{\frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'\right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}\oint_{\Gamma'} d\left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'\right]\right\} \tag{8}$$

Ahora bien, se cumple que $\oint_{\Gamma'} d\left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{r}'\right] = 0$ ya que la circulación a lo largo de una curva cerrada de una diferencial exacta es nula. Por tanto, la ecuación (8) se puede reescribir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I'}{4\pi|\mathbf{r}|^3}\left(\frac{1}{2}\oint_{\Gamma'} \mathbf{r}'\times d\mathbf{r}'\right)\times\mathbf{r} \tag{9}$$

Y si ahora definimos el momento dipolar magnético de la espira conductora por la que circula una corriente de intensidad I' como:

$$\mathbf{m} \;=\; \frac{I'}{2}\oint_{\Gamma'} \mathbf{r}'\times d\mathbf{r}' \tag{10}$$

la expresión aproximada de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en P se puede reescribir en términos de $\mathbf{m}$ como se indica a continuación:

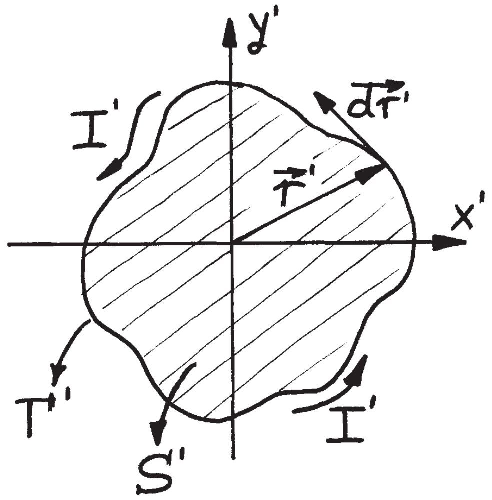
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{r}|^3}\mathbf{m}\times\mathbf{r} \tag{11}$$

Como (4) y (11) son equivalentes, la ecuación (11) también contiene el término dipolar del desarrollo multipolar del potencial vector creado por la espira conductora. Cuando $\mathbf{m}\neq 0$, este término dipolar es el término dominante del desarrollo multipolar, y proporciona el valor del potencial vector en puntos muy alejados de la espira en relación con sus dimensiones. Se observa que el módulo del término dipolar decae como $1/|\mathbf{r}|^2$ conforme aumenta $|\mathbf{r}|$, tal y como ocurre con el término dipolar del desarrollo multipolar del potencial eléctrico (véase el tema 1).

El momento dipolar magnético definido en (10) es una magnitud vectorial que sólo depende de la geometría de la espira conductora y de la intensidad de corriente que la atraviesa. En el sistema internacional el momento dipolar magnético se mide en A·m^2.

$$\mathbf{m} \;=\; I'\oint_{\Gamma'}\left(\frac{x'}{2}\mathbf{u}_x + \frac{y'}{2}\mathbf{u}_y\right)\times\left(dx'\mathbf{u}_x + dy'\mathbf{u}_y\right)$$

Supongamos que la espira conductora es una espira plana y tomamos los ejes coordenados de manera que la espira esté contenida en el plano que forman el origen con los ejes x' e y' (vea la figura adjunta). Sea S' la superficie plana que está limitada por la curva Γ'. En ese caso, la ecuación (10) para el momento dipolar se puede reescribir:



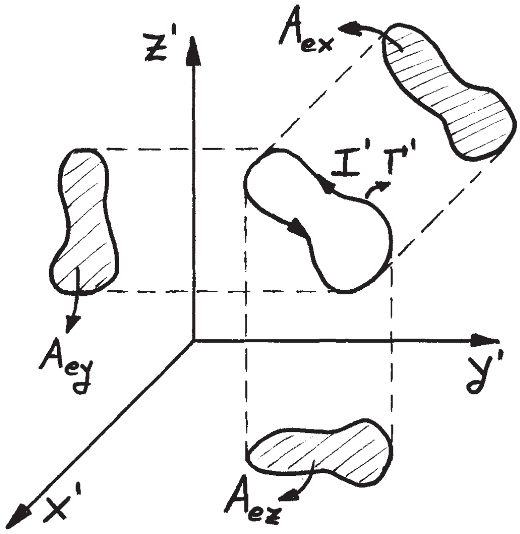
$$\begin{aligned} &= I' \left[\oint_{\Gamma'} \left(\frac{-y'}{2} \mathbf{u}_x + \frac{x'}{2} \mathbf{u}_y \right) \cdot (dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y) \right] \mathbf{u}_z \\ &= I' \left\{ \int_{S'} \left[\nabla \times \left(\frac{-y'}{2} \mathbf{u}_x + \frac{x'}{2} \mathbf{u}_y \right) \right] \cdot dx' dy' \mathbf{u}_z \right\} \mathbf{u}_z \\ &= I' \left(\int_{S'} dx' dy' \right) \mathbf{u}_z = I' A_e \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (12)$$

donde se ha aplicado el teorema de Stokes al calcular la circulación del campo vectorial $\left(\frac{-y'}{2} \mathbf{u}_x + \frac{x'}{2} \mathbf{u}_y \right)$ a lo largo de Γ'. En la ecuación (12) A_e representa el área de la superficie S'. La ecuación (12) indica que **el momento dipolar magnético de una espira conductora plana es un vector cuyo módulo es igual al área de la espira por la intensidad de corriente que la atraviesa, cuya dirección es perpendicular al plano de la espira, y cuyo sentido está relacionado con el sentido de recorrido de la corriente en la espira mediante la regla del sacacorchos.**

En el caso en que la espira conductora no es una espira plana, se puede demostrar que el momento dipolar magnético se puede escribir como:

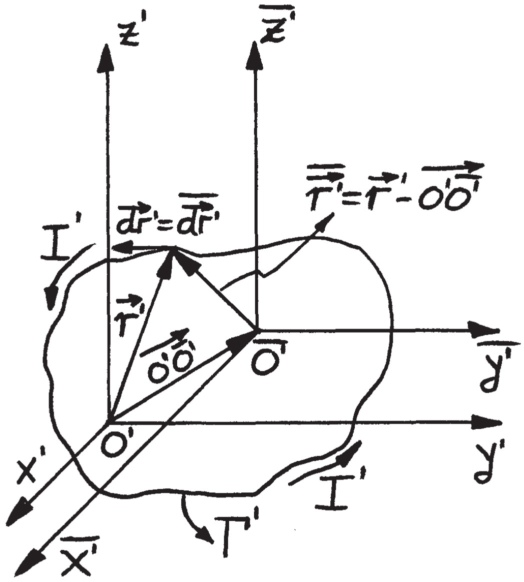
$$\mathbf{m} = I'(A_{ex}\mathbf{u}_x + A_{ey}\mathbf{u}_y + A_{ez}\mathbf{u}_z) = I'\mathbf{A_e} \tag{13}$$

donde A_{ex}, A_{ey} y A_{ez} son las áreas de las proyecciones de la espira conductora sobre los planos coordenados perpendiculares a los ejes x', y' y z' respectivamente, tal y como se muestra en la figura adjunta (la ecuación (13) se puede demostrar trabajando con las tres componentes de $\mathbf{m}$ que se deducen de la ecuación (10) y operando como se ha hecho para obtener la ecuación (12)).



Al estudiar el desarrollo multipolar del potencial eléctrico, vimos que el primer momento no nulo era independiente de la elección del origen de coordenadas, ya que el primer término no nulo del desarrollo multipolar es el que determina el potencial a grandes distancias del cuerpo cargado, y a esas distancias es irrelevante una traslación finita del origen de coordenadas. En el caso del desarrollo multipolar del potencial vector magnético de una espira conductora, el término monopolar es siempre nulo, y si $\mathbf{m} \neq 0$, el término dipolar es el término dominante del desarollo multipolar. Por tanto, en consonancia con lo que ocurre con el desarrollo multipolar del potencial eléctrico, el momento dipolar magnético $\mathbf{m}$ debe ser independiente de la elección del origen de coordenadas. Vamos a demostrar esto último.

Sea $\mathbf{m}_{\overline{O'}}$ el momento dipolar relativo al origen de coordenadas $\overline{O'}$ y sea $\mathbf{m}_{O'}$ el momento dipolar relativo al origen de coordenadas O'. La relación entre $\mathbf{m}_{\overline{O'}}$ y $\mathbf{m}_{O'}$ viene dada por:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{m}_{\overline{O'}} &= \frac{I'}{2}\oint_{\Gamma'} \overline{\mathbf{r}'} \times d\overline{\mathbf{r}'} \\
&= \frac{I'}{2}\oint_{\Gamma'} \left(\mathbf{r}' - \overrightarrow{O'\overline{O'}}\right) \times d\left(\mathbf{r}' - \overrightarrow{O'\overline{O'}}\right) \\
&= \frac{I'}{2}\oint_{\Gamma'} \left(\mathbf{r}' - \overrightarrow{O'\overline{O'}}\right) \times d\mathbf{r}' \\
&= \frac{I'}{2}\oint_{\Gamma'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' - \frac{I'}{2}\overrightarrow{O'\overline{O'}} \times \left(\oint_{\Gamma'} d\mathbf{r}'\right) \\
&= \frac{I'}{2}\oint_{\Gamma'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = \mathbf{m}_{O'} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

donde se ha hecho uso de que $\oint_{\Gamma'} d\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ por ser $d\mathbf{r}'$ una diferencial exacta.

Cuando $\mathbf{m} = 0$, el término dipolar del desarrollo multipolar (que aparece en la ecuación (10)) es nulo, y el desarrollo multipolar del potencial vector pasa a estar dominado por términos de orden superior (cuadrupolar, octupolar, etc.)

Para obtener el desarrollo multipolar del potencial vector magnético creado por conductores laminares que transportan corrientes superficiales o por conductores no filiformes que transportan corrientes volumétricas, se descomponen dichas corrientes en tubos de corriente de sección infinitesimal que pueden ser tratados como conductores filiformes, se utilizan los resultados obtenidos en las ecuaciones (1) a (11), y se aplica el principio de superposición.

Al operar así, se obtiene que el término dominante del desarrollo multipolar sigue siendo el que aparece en la ecuación (11), si bien la definición de $\mathbf{m}$ depende del tipo de conductor. Por ejemplo, en el caso de un conductor laminar que ocupa una superficie S' por la que circula una corriente estacionaria de densidad superficial de corriente $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$, el momento dipolar magnético $\mathbf{m}$ viene dado por:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{S'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{K}(\mathbf{r}'))\, dS' \tag{15}$$

Y en el caso de un conductor que ocupa un volumen τ' por el que circula una corriente estacionaria de densidad volumétrica de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, el momento dipolar magnético vale:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\tau'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))\, d\tau' \tag{16}$$