Desarrollo multipolar del potencial vector

- Introducción
- Desarrollo multipolar del potencial vector debido a una distribución de corrientes
- Multipolos magnéticos
- El dipolo magnético puntual.
- Distribuciones de dipolos magnéticos

Introducción

- Los medios magnéticos están constituidos por átomos con un momento magnético (angular o de spin).
- El momento magnético angular puede interpretarse clásicamente suponiendo que el electrón gira alrededor del átomo
- El momento magnético de spin tiene un origen cuántico y no hay interpretación clásica
- No hay cargas magnéticas, luego el primer “ente” no nulo es el dipolo magnético
- La materia puede sustituirse por una distribución de dipolos magnéticos

Desarrollo de A

El potencial vector debido a una distribución de corrientes es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Desarrollando el denominador en términos de r'/r,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}\,'}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}\,')^2}{r^3} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right)$$

El primer término del desarrollo es:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{J}(\vec{r}\,') d^3\vec{r}\,' = 0 \qquad \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint d\vec{l} = 0$$

Demostración para corrientes estacionarias:

$$0 = \int \vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d^3\vec{r} = \int \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \cdot \vec{r}\right) - \vec{J}\right] d^3\vec{r} = -\int \vec{J} d^3\vec{r}$$

Término dipolar

Primer término no nulo:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int \vec{J}(\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')d^3\vec{r}'$$

Componente β de dicho término:

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}x_\alpha\int x'_\alpha J_\beta d^3\vec{r}'$$

La divergencia del producto

$$\partial_\alpha(J_\alpha x_\beta x_\gamma) = (\partial_\alpha J_\alpha)x_\beta x_\gamma + J_\alpha\delta_{\alpha\beta}x_\gamma + J_\alpha x_\beta\delta_{\alpha\gamma} = J_\beta x_\gamma + J_\gamma x_\beta$$

Integrando a un volumen que englobe las corrientes llegamos a:

$$\int J_\alpha x_\beta d^3\vec{r} = -\int J_\beta x_\alpha d^3\vec{r} \qquad x_\alpha\int J_\alpha x'_\beta d^3\vec{r}' = -x_\alpha\int J_\beta x'_\alpha d^3\vec{r}'$$

Luego podemos reescribir el término del desarrollo en la forma:

$$\int \vec{J}(\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')d^3\vec{r}' = \frac{1}{2}\int\left[\vec{J}(\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}') - (\vec{J}\cdot\vec{r})\vec{r}'\right]d^3\vec{r}' = \left[\frac{1}{2}\int \vec{J}\times\vec{r}'d^3\vec{r}'\right]\times\vec{r}$$

Definiendo el momento dipolar magnético:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{J}(\vec{r}')d^3\vec{r}' \rightarrow \vec{m} = I\int\frac{1}{2}\vec{r}'\times d\vec{l} = I\vec{S}$$

Potencial vector de un dipolo magnético $\Longrightarrow$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$$

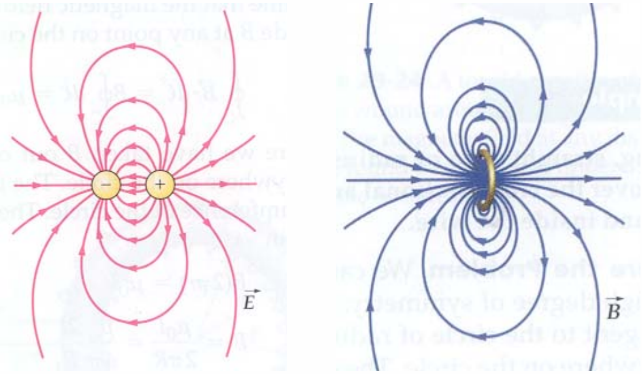
Campo magnético

Hallando el rotacional del potencial vector,

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{m_y z - y m_z}{r^3} & \frac{m_z x - z m_x}{r^3} & \frac{m_x y - x m_y}{r^3} \end{vmatrix}$$

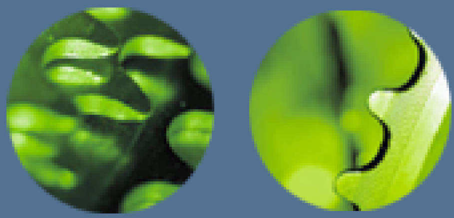
obtenemos el campo de un dipolo magnético:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$



El potencial escalar es:

$$V_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot \vec{m}}{r^3}$$



Par sobre un dipolo

El par de fuerzas sobre una espira es:

$$\vec{\tau} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_C \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$

Diferenciando el producto

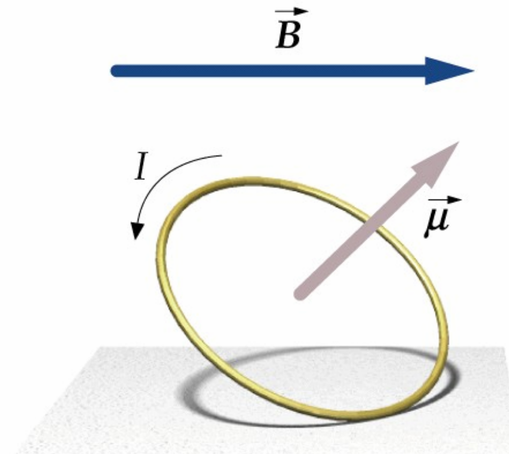
$$d[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})] = \vec{r} \times (\vec{dl} \times \vec{B}) + \vec{dl} \times (\vec{r} \times \vec{B})$$

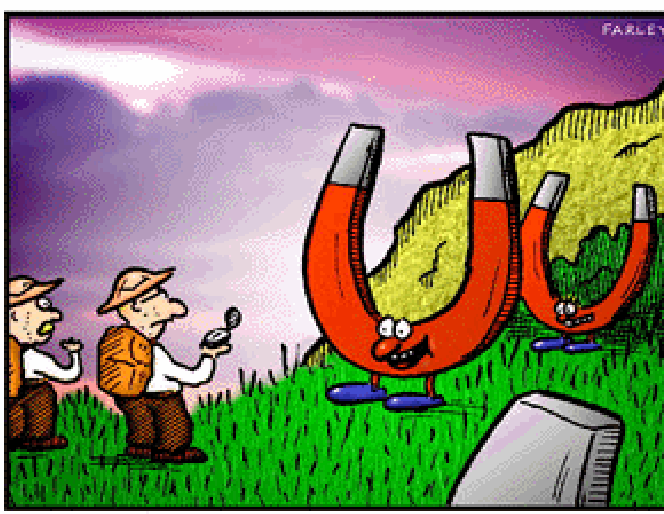
Recurriendo a la conocida relación

$$\vec{r} \times (d\vec{l} \times B) + d\vec{l} \times (\vec{B} \times \vec{r}) + \vec{B} \times (\vec{r} \times d\vec{l}) = 0$$

llegamos a la expresión final

$$\vec{\tau} = I \oint_C \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{l}) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$





"Ho ho, foolish explorers - your compasses are useless here!"

Energía de un dipolo

- La energía potencial de un dipolo magnético en un campo exterior es

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

- Si el dipolo está alineado al campo, la energía potencial es mínima
- Si el dipolo está orientado en sentido contrario al campo, la energía es máxima