

Hay  
Un magnetismo mental  
Entre nosotros,  
Que nos delata  
A kilómetros de distancias...  
Y usted lo sabe  
Marco Valerio

## Paramagnetismo de Langevin

Es adecuado suponer a los átomos paramagnético como pequeños imanes, a veces, llamados agujas magnéticas, esta imagen es adecuado para describir el comportamiento de los átomos paramagnéticos a altas temperaturas, para lo cual debemos suponer que no existe ningún tipo de interacción entre ellos. Langevin fue el primero que formulo una teoría sobre el paramagnetismo. Trata a la sustancia como un conjunto clásico de dipolos magnéticos sin interacciones, con un tratamiento similar al problema de encontrar el momento dipolar eléctrico en un dieléctrico en presencia de un campo eléctrico. Sin campo magnético externo los dipolos están desordenados , al azar. No existiendo un momento magnético neto. La introducción del campo magnético externo genera una inhomogeneidad en el espacio e introduce una fuerza ordenadora, capaz de orientar los dipolos magnéticos. Como consecuencia aparece una magnetización resultante. Cuando desaparece el campo externo la agitación térmica genera el estado inicial nuevamente, ya que supusimos que no hay ningún tipo de interacción entre los dipolos magnéticos. Dicho de otro modo es una competencia entre la fuerza ordenadora, magnética y la acción desordenadora de la temperatura. De aquí inferimos que la magnetización depende de la temperatura La idea es hallar el momento magnético resultante del material al introducir el campo.

La energía de un dipolo magnético en un campo, cuyo vector inducción es  $\vec{B}$  esta dada por, donde observamos que el valor mínimo de la energía se obtiene cuando  $\theta=0$ , razón por lo cual se orientan los dipolos

$$E_{\mu} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -|\vec{\mu}| |\vec{B}| \cos \theta = -\mu_0 \mu H \cos \theta$$

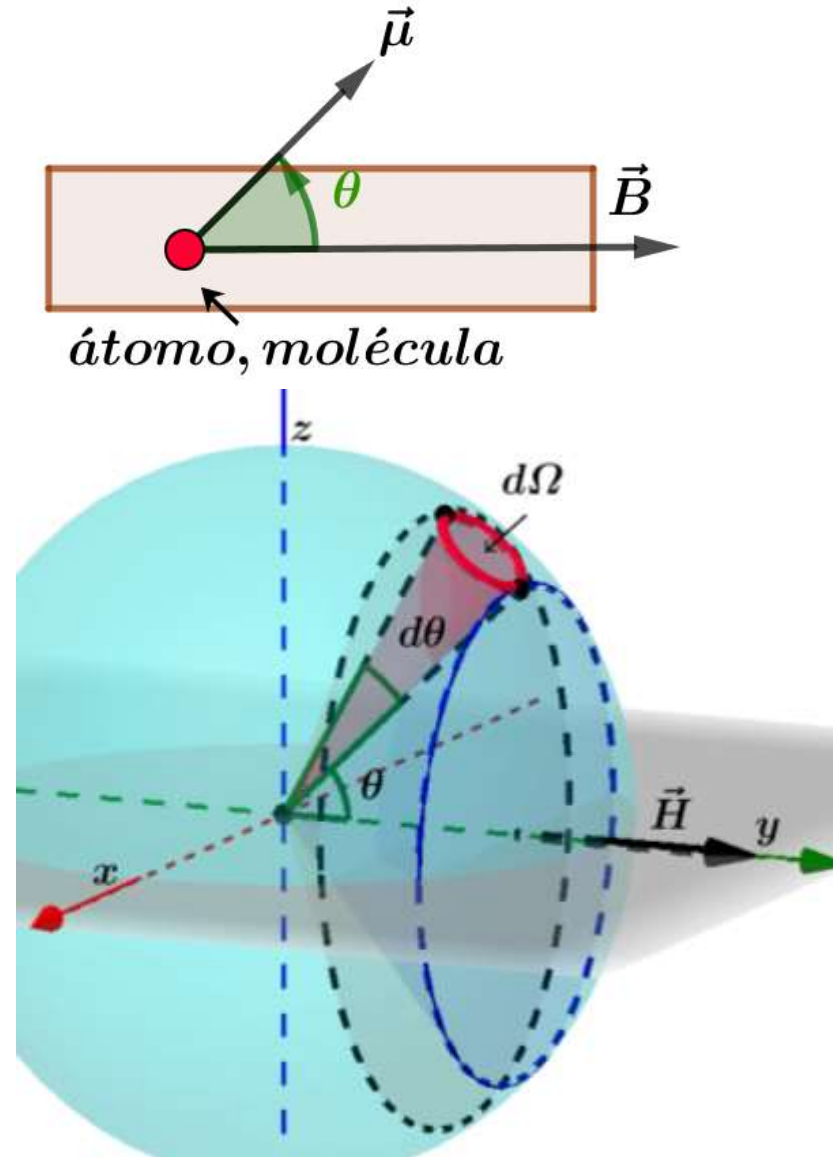
Sumando las proyecciones, en la dirección del campo, de todos los momentos magnéticos de los átomos o moléculas obtendríamos el momento magnético total de la sustancia. Es razonable suponer que no todos los átomos reaccionaran de igual manera, luego estamos en presencia de un problema estadístico, con un gran numero de partículas (átomos). El momento magnético resultante será un equilibrio estadístico entre la acción orientadora del campo externo y la desorientadora debido al movimiento térmico. El valor medio de las proyecciones de los momentos magnéticos individuales será la magnetización

$$M = \langle \mu \cos \theta \rangle = \mu \langle \cos \theta \rangle$$

Donde  $N$  es el número de partículas por unidad de volumen, resta encontrar  $\langle \cos \theta \rangle$  por ser un problema clásico podemos utilizar la distribución de Boltzmann que nos da la probabilidad de que el momento magnético este en un ángulo comprendido entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$ , o lo que es equivalente dentro del ángulo solido  $\Omega$  como se observa en la figura. El ángulo sólido esta delimitado por la intercepción de dos conos sobre la esfera de radio  $r$ . El área de este sector es la longitud de la circunferencia cuyo radio es  $2\pi r \sin \theta$  por la altura del sector  $r d\theta$  o sea

$$ds = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \text{ luego tomando } r = 1 \text{ nos queda } ds = 2\pi \sin \theta d\theta = d\Omega$$

## Paramagnetismo de Langevin



# Paramagnetismo de Langevin

Que la probabilidad de una orientación para una dada energía es,

$$P(E) = \frac{1}{A' e^{\frac{E}{kT}}}$$

donde  $T$  es la temperatura en grados Kelvin,  $k$  la constante de Boltzmann y  $A'$  es una constante de normalización. No hay restricción sobre el número de partículas que pueden ocupar un dado estado. Esta distribución es para partículas idénticas pero distinguibles (Ver nota). Luego

$$P(E) = A e^{-\frac{E}{kT}} = A e^{\frac{\mu\mu_0 NH \cos \theta}{kT}} = A e^{\beta \cos \theta}$$

Con  $\beta = \frac{\mu\mu_0 NH}{kT}$  luego el valor medio será

$$\begin{aligned} M &= \mu \langle \cos \theta \rangle = \mu \frac{\int \cos \theta e^{\beta \cos \theta} d\Omega}{\int e^{\beta \cos \theta} d\Omega} \quad \text{extendida a todos los ángulos sólidos} \\ &= \mu \frac{\int_0^\pi 2\pi \cos \theta e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi 2\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta} = \mu \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\beta \cos \theta} d(\sin \theta)}{\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} d(\sin \theta)} = \\ &= \mu \frac{\int_{-1}^1 u e^{\beta u} du}{\int_{-1}^1 e^{\beta u} du} = \mu \frac{d}{d\beta} \left[ \ln \left( \int_{-1}^1 e^{\beta u} du \right) \right] = \mu \left[ \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^\beta - e^{-\beta}} - \frac{1}{\beta} \right] = \mu \left[ \coth \beta - \frac{1}{\beta} \right] \end{aligned}$$

La función entre corchetes es llamada  $L(\beta)$ , función de Langevin.

# Paramagnetismo de Langevin

Para valores pequeños de  $\beta = \frac{\mu\mu_0NH}{kT}$  o sea para  $\mu\mu_0H < kT$ , pequeños campos y temperaturas elevadas podemos desarrollar el  $\coth \beta = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^3}{45} + \dots$ . luego si nos quedamos con los dos primeros términos queda

$$M = \mu \langle \cos \theta \rangle = \mu \left[ \coth \beta - \frac{1}{\beta} \right] = \mu \frac{\beta}{3} = \frac{\mu^2 \mu_0 NH}{3kT}$$

luego la susceptibilidad paramagnética será

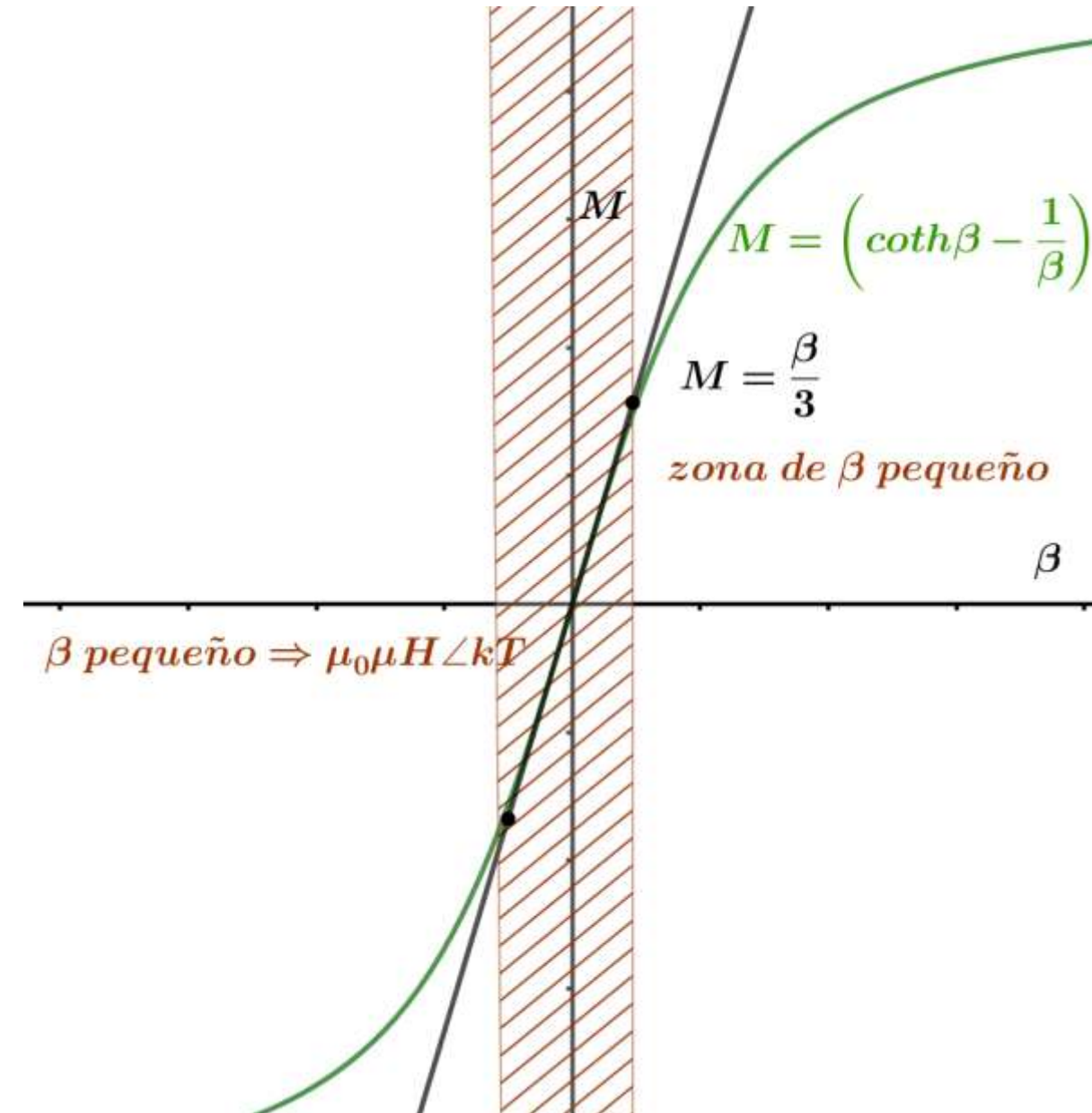
$$\chi_p = \frac{M}{H} = \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3kT}$$

Esta expresión concuerda con la ley experimental llamada de Curie que nos indica que  $\chi_p = \frac{C}{T}$

Langevin aplica  $\Rightarrow$   $\left( \begin{array}{l} \text{Bien en : vapores, gases paramagneticos y} \\ \text{sales y metales a altas temperaturas} \\ \text{Mal en : metales paramagnetico solidos} \end{array} \right.$

Es razonable pensar que los resultados en los solidos metálicos no sean adecuados, puesto que unas de las premisas supuestas es que no existía interacción entre las partículas, cosa que evidentemente no es así. La suposición de un gas sin interacción entre partículas deja de ser valida. Pero, si la temperatura es elevadas, la energía de las partículas supera a la interacción entre ellas y modelo de gas es valido.

# Paramagnetismo de Langevin



En el esquema que se observa se represento la función de Langevin y la recta que se le aproxima para pequeños valores de  $\beta$ . La zona rayada indica la r. Las deducciones anteriores se realizaron para región donde rige la aproximación  $\mu\mu_0 H < kT$ . Si contrariamente nos ubicamos donde vale  $\mu\mu_0 H \gg kT$  entonces,  $\beta = \frac{\mu\mu_0 NH}{kT} \rightarrow$  a un valor muy grande, entonces, la ecuación

$$M = \mu \left[ \coth \beta - \frac{1}{\beta} \right] \approx \mu$$

Por tanto a temperaturas muy bajas la susceptibilidad paramagnética disminuye a medida que aumenta el campo

$$\chi_p = \frac{M}{H} \approx \frac{\mu}{H} \rightarrow 0$$

Con el objeto de contemplar la interacción atómica existente en los solidos metálicos, Weiss introdujo la idea de que a consecuencia de la interacción entre los momentos magnéticos se genera un nuevo campo interno. O sea los átomos individuales interactuaban entre sí a través de un campo interno. Weiss lo llamó "campo molecular" y lo supuso igual  $\alpha M$ .



Luego al campo externo  $H$  le sumamos el interno, nos da el efectivo o total  $H_{ef} = H + \alpha M$  si esta expresión la reemplazamos en

$$M = \frac{\mu^2 \mu_0 N H}{3kT} = \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3kT} (H + \alpha M) = \frac{\mu^2 \mu_0 N H}{3kT} + \alpha \frac{\mu^2 \mu_0 N M}{3kT}$$

$$M \left( 1 - \alpha \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3kT} \right) = \frac{\mu^2 \mu_0 N H}{3kT}$$

$$\chi_p = \frac{M}{H} = \frac{\frac{\mu^2 \mu_0 N}{3kT}}{\left( 1 - \alpha \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3kT} \right)} = \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3k \left( T - \alpha \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3k} \right)} = \frac{\alpha}{T - \theta}$$

Que es la ley de Curie-Weiss donde  $\alpha = \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3k}$  y  $\theta = \alpha \frac{\mu^2 \mu_0 N}{3k}$ , llamada temperatura de Curie ( $T_c$ ) y marca el límite entre el estado paramagnético y ferromagnéticos del material. Este desarrollo muestra que un sólido paramagnético con momentos atómicos localizados pero interactivos tendrá una susceptibilidad que obedece a la ley Curie-Weiss.

## ley Curie-Weiss

