



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**Dualidad Tiempo-Frecuencia
en el estudio del circuito RC**

Presentado por:
D. Pablo García Torres

Curso Académico 2023/2024

Resumen

El objetivo es el diseño de una práctica de laboratorio para estudiar la transformada discreta de Fourier aplicándola a la señal de carga y descarga de un condensador mediante un pulso de tensión rectangular y obteniendo la respuesta en frecuencias del circuito RC serie. Se trata de conectar la dualidad Tiempo/Frecuencia a través de una herramienta numérica muy importante en Física y que permite obtener, de forma relativamente fácil, la transformada de Fourier de señales de laboratorio. Para ello se ha realizado este trabajo, con el que se pretende salvar la barrera del lenguaje de programación a través de ofrecer al alumnado y profesorado una guía en formato de Notebook de Jupyter y un conjunto de funciones en Python. Con esto, el alumnado estará capacitado para estudiar y darle un enfoque práctico a conceptos del procesamiento de señales como: teorema de muestreo, frecuencia de Nyquist, aliasing y principios de incertidumbre y causalidad.

Abstract

The objective is to design a laboratory practice to study the discrete Fourier transform by applying it to the charge and discharge signal of a capacitor by means of a rectangular voltage pulse and obtaining the frequency response of the series RC circuit. The aim is to connect the Time/Frequency duality by means of a very important numerical tool in Physics, which allows the Fourier transform of laboratory signals to be obtained relatively easily. The aim of this work is to overcome the programming language barrier by offering students and teachers a guide in Jupyter Notebook format and a set of Python functions. With this, students will be able to study and give a practical approach to signal processing concepts such as: sampling theorem, Nyquist frequency, aliasing and principles of uncertainty and causality.

Índice

1	Introducción	3
2	Metodología	5
2.1	Carga y descarga de un condensador	6
2.2	Respuesta en frecuencia de un circuito RC	7
2.3	Análisis y transformada de Fourier	10
2.3.1	Series de Fourier	10
2.3.2	Transformada de Fourier	11
2.3.3	DFT	13
2.4	Teorema de muestreo, frecuencia de Nyquist y aliasing	14
2.5	Respuesta impulso de un sistema lineal	15
3	Resultados	17
3.1	Tarea 1: Aplicación de la DFT y <i>zero padding</i>	17
3.2	Tarea 2: Principio de incertidumbre	19
3.3	Tarea 3: Teorema de muestreo y frecuencia de Nyquist	20
3.4	Tarea 4: "Aliasing"	23
3.5	Tarea 5: Principio de causalidad	24
3.6	Tarea 6: Función de transferencia y diagramas de Bode	26
4	Conclusiones	29
	Referencias	30
A	Apéndice	31

1 Introducción

La dualidad entre el dominio del tiempo (DT) y el dominio de la frecuencia (DF) es un concepto fundamental en el análisis de sistemas físicos y de las señales generados por estos. Cuando hablamos de dualidad, nos referimos a la relación íntima y de transformación entre la representación temporal y frecuencial de una señal. En el dominio del tiempo, una señal la podemos describir como una función del tiempo, mientras que en el dominio de la frecuencia, la describimos como una combinación de sinusoides de diferentes frecuencias.

El concepto y la idea que hay detrás de la dualidad entre estos dos dominios es de vital importancia para físicos e ingenieros. La razón de esto es que la representación de una señal en uno u otro dominio tiene ventajas o inconvenientes [1]. Por ejemplo, en el dominio del tiempo nos encontramos la representación más intuitiva de la señal y nos sirve para ver como cambia la señal en función del tiempo. Por otro lado, la representación en el dominio de las frecuencias es crucial para comprender el carácter dispersivo de un sistema [2], [3].

La herramienta matemática que nos conecta los dos dominios es la *Fourier transform* (FT), por sus siglas en inglés. Esta transformada nos permite descomponer una señal compleja en las componentes de frecuencia, lo que evidencia como varía las frecuencias de una señal. La FT se usa en multitud de casos prácticos, desde el procesamiento de señales de audio o vídeo, hasta en la modulación de comunicaciones, pasando por el diseño de sistemas multisensores [1].

A los alumnos de física e ingenierías les interesa conocer y saber utilizar la FT, sin embargo las matemáticas que se involucran así como conceptos abstractos tales como campos y armónicos en el tiempo, fasores y la propia FT lo dificulta enormemente. Es por ello que se ha realizado este trabajo. Nuestro objetivo es salvar la barrera matemática y conceptual de la FT y ofrecer una idea intuitiva y útil que le sirva al alumnado para interpretar los resultados que obtengan en el laboratorio. Para ello, una herramienta fundamental y que nos permite lo anterior es la *discrete Fourier transform* (DFT).

El trabajo que hemos realizado pretende unificar dos prácticas de laboratorio comunes a los estudiantes de física. El objetivo último de esta unificación es puramente didáctico, puesto que no se pretende hacer ningún nuevo aporte, simplemente ofrecer una visión clara y proporcionar herramientas para que el alumnado pueda relacionar las dos prácticas: "Carga-Descarga de un condensador" y "Respuesta en frecuencias de un circuito de primer orden RC". Como ya dijimos, esta relación se hará por medio de la DFT y se realizarán paquetes y funciones en el lenguaje de programación de Python y presentados en formato Notebook de Jupyter, para que el alumnado los use y salve la barrera de programación que pudiese dificultarles el trabajo.

Cabe destacar la importancia y las amplias aplicaciones que tiene tanto el lenguaje de programación Python como los paquetes Numpy y Matplotlib usados en este trabajo. Python está muy extendido en el mundo científico debido a que es software libre, simple y legible, y posee un gran ecosistema de paquetes desarrollados por su amplia comunidad [4]. Destacamos a Numpy por ser una biblioteca fundamental en la computación científica y que ofrece gran cantidad de herramientas matemáticas como arreglos multidimensionales o creación de números aleatorios. Por otro lado, Matplotlib es una biblioteca de gráficos en 2 dimensiones eficiente y versátil [5].

El Proyecto Jupyter y sus Notebook Jupyter componen un entorno perfecto para el desarrollo científico y que los profesores compartan sus trabajos. Esta herramienta tiene la capacidad de combinar código, texto y visualizaciones de manera interactiva. Esto, sumado a su facilidad, lo convierte en una pieza fundamental en el desarrollo científico y pedagógico [5].

De forma sintetizada, este trabajo final de grado (TFG) se basa en la realización de las prácticas de laboratorio comentadas con anterioridad y de funciones

de Python que sirvan de ayuda a alumnos y profesores. El código, las gráficas y los recursos creados para este fin serán almacenadas en un repositorio público de GitHub hasta la fecha de exposición del trabajo, donde pasará a ser privado. Esta decisión se toma para que el profesorado las distribuya y los alumnos tengan acceso solo a las funciones y no al desarrollo de toda la práctica, Apéndice A .

Desde el punto de vista de la programación del trabajo, las decisiones que se han tomado se basan en utilizar Python frente a Mathematica o Maxima. Achacamos esta decisión a que Python es de software libre y los otros no [5]. Este hecho es notorio puesto que en el ámbito científico en el que nos encontramos, necesitamos saber con certeza los cálculos, algoritmos y métodos que tiene un software de operar. Del mismo modo, Python es gratuito, ventaja sustancial frente a sus competidores.

Por otro lado, este trabajo se enmarca en una reestructuración de los contenidos de la asignatura de circuitos eléctricos. El marco teórico con el que trabajamos es el dar una visión clara y profunda de la DFT, puesto que en ninguno de los cursos del grado de física se explica de este modo. Para enmarcar la DFT en la asignatura de Teoría de Circuitos se podría seguir el siguiente orden, primero se introduciría la corriente continua y el concepto de resistencia. Posteriormente, se daría una visión de la corriente alterna y de la práctica del estudio en frecuencias. A continuación, se estudiaría el régimen transitorio y se vería la práctica de carga y descarga de un condensador. Por último, se analizaría las series de Fourier y sus transformadas, lo que permitiría explicar el concepto de DFT. De esta nueva forma de explicar los conceptos de la asignatura, tanto la definición de la FT como la DFT se demuestran de forma natural.

Con todas estas herramientas y contenidos que hemos expuesto, explicaremos de forma concisa como se estructura este trabajo. En el capítulo 2 se expone la metodología desarrollada, donde exponemos los conceptos teóricos pertinentes en profundidad, así como las tecnologías usadas y formas de trabajar. En el capítulo 3 se presentan los resultados en forma de guión de la práctica. Concretamente, en 3.1 trataremos con la transformada discreta de Fourier y como mejorar la nitidez añadiendo ceros. En 3.2 expondremos una versión clásica del principio de incertidumbre. En 3.3 se explica el teorema de muestreo y la frecuencia de Nyquist. En 3.4 hablaremos de como evitar el aliasing. En 3.5 se verá un ejemplo del principio de causalidad, y posteriormente, en 3.6 representaremos diagramas de Bode. Por último, en el capítulo 4, se presentan las conclusiones del trabajo.

2 Metodología

Una vez establecido la introducción y el objetivo de nuestro trabajo, vamos a comenzar por exponer la forma de trabajo que se ha seguido, así como los conceptos teóricos necesarios que se han necesitado para obtener nuestros resultados.

Primeramente y como se expuso con anterioridad, trataremos de conectar dos prácticas de laboratorio aparentemente diferentes, la carga y descarga de un condensador y la respuesta en frecuencias de un circuito RC. Como se verá en nuestro desarrollo y con ayuda de la transformada de Fourier, podemos llegar a que estas dos prácticas son semejantes. Pasemos a comentar los fundamentos de cada uno.

2.1 Carga y descarga de un condensador

Empezamos definiendo el condensador como un dispositivo capaz de adquirir carga superficial igual pero de signo contrario entre sus dos extremos, generalmente conductores y que, generalmente, están separados por un dieléctrico. Debido a que los electrones de los conductores son libres y que los del dieléctrico no, dentro de este se crea un campo no nulo debido a los conductores cargados. Añadiendo el condensador que hemos explicado, con una resistencia y una fuente de voltaje tenemos el circuito con el que trabajaremos. El proceso de carga y descarga de un condensador en un RC es un fenómeno fundamental en la teoría de circuitos y tiene multitud de aplicaciones. Entre estas, podemos destacar los filtros de ciertas frecuencias, fuentes de energía en componentes electrónicos o como memoria en la RAM de un ordenador.

Partiendo de la ley de Kirchhoff y aplicándola a la figura 1, como el circuito consta de una fuente de corriente, una resistencia y un condensador en serie, obtenemos la ecuación 2.1.

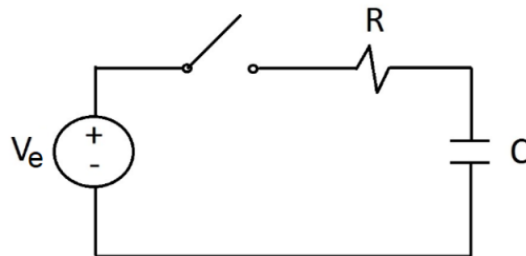


Figura 1: Circuito formado por resistencia, condensador y fuente.

$$v_e(t) = v_R(t) + v_C(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad (2.1)$$

donde $v_e(t)$, $v_R(t)$, $v_C(t)$ son el voltaje de la fuente, de la resistencia y del condensador, respectivamente.

Para obtener la solución de la ecuación diferencial de coeficientes constantes que acabamos de obtener, basta con obtener la solución homogénea (respuesta natural del circuito) y la no homogénea (respuesta forzada) [6]. La solución completa vendrá determinada por la fuente de alimentación, que en nuestro caso, será

continua.

Para el proceso de carga y descarga del condensador, encenderemos la fuente de alimentación hasta un tiempo t_w . Con todo esto,

$$V_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_0 (1 - e^{-t/\tau}), & 0 \leq t < t_w \\ V_0 (1 - e^{-t_w/\tau}) e^{-(t-t_w)/\tau}, & t \geq t_w \end{cases} \quad (2.2)$$

donde V_0 es la altura del pulso rectangular, $\tau = RC$ es la constante de tiempo del sistema, t el tiempo y t_w el ancho del pulso.

Para la intensidad que recorre el circuito, obtenemos por la ley de Ohm,

$$i_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}, & 0 \leq t < t_w \\ -\frac{V_0}{R} (e^{-t_w/\tau} - 1) e^{-(t-t_w)/\tau}, & t \geq t_w \end{cases} \quad (2.3)$$

Un aspecto muy importante de estos circuitos y del que aún no le hemos prestado la atención que merece es el de la constante de tiempo del sistema, τ . Se define como el tiempo necesario para que la respuesta del sistema decaiga un valor de $\frac{1}{e}$ o un 36,8 % de su valor inicial [7], [8]. Su importancia reside en que establece la medida de tiempos que podemos elegir para nuestro muestreo y del que hablaremos detenidamente más adelante.

A forma de resumen gráfico de esta sección, nos fijaremos en las figuras 2 y 3, donde podemos observar como ante un pulso rectangular se genera una respuesta en el condensador y en la resistencia. Se observa que la intensidad que recorre el circuito no es continua, tal y como dicta la ecuación 2.3.

2.2 Respuesta en frecuencia de un circuito RC

En este caso analizaremos el mismo circuito de la figura 1, sin embargo, nos centraremos en la respuesta en frecuencias del circuito. Para ello, trabajaremos en el dominio de las frecuencias [1]. A nivel físico, ambos sistemas son equivalentes, en el primero trabajamos con una fuente de corriente continua y un condensador de varios mF, mientras que en esta práctica, la fuente de tensión es sinusoidal y el condensador es bastante más pequeño. Del mismo modo, el proceso de medición en ambas prácticas es diferente. En el proceso de carga y descarga medimos manualmente el voltaje del condensador a través de un voltímetro en cada intervalo de tiempo Δt , mientras que en el estudio en frecuencias, medimos el voltaje en el condensador que al tratarse de una onda sinusoidal, consta de magnitud y fase. Por lo tanto, mediremos el voltaje en el segundo caso mediante un osciloscopio.

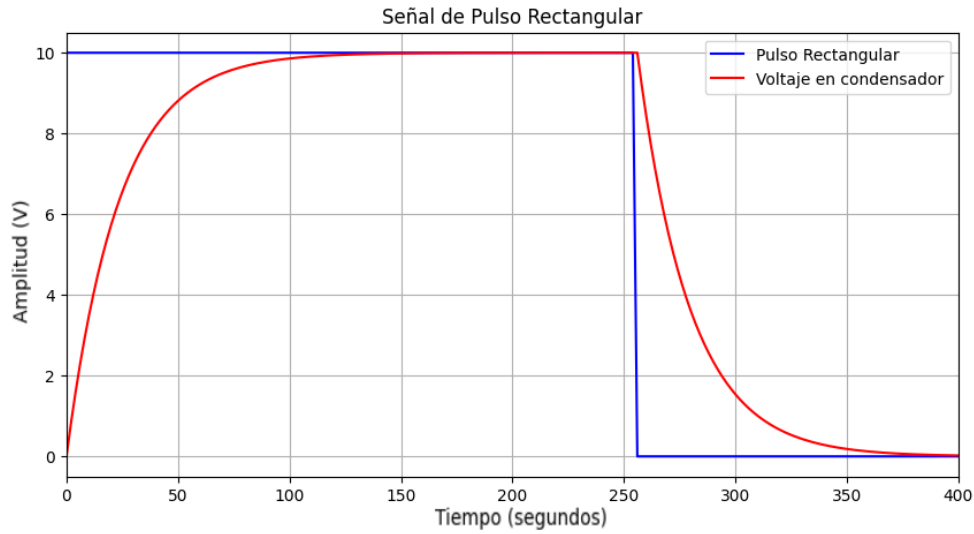


Figura 2: Pulso rectangular de entrada y respuesta en el voltaje en el condensador.

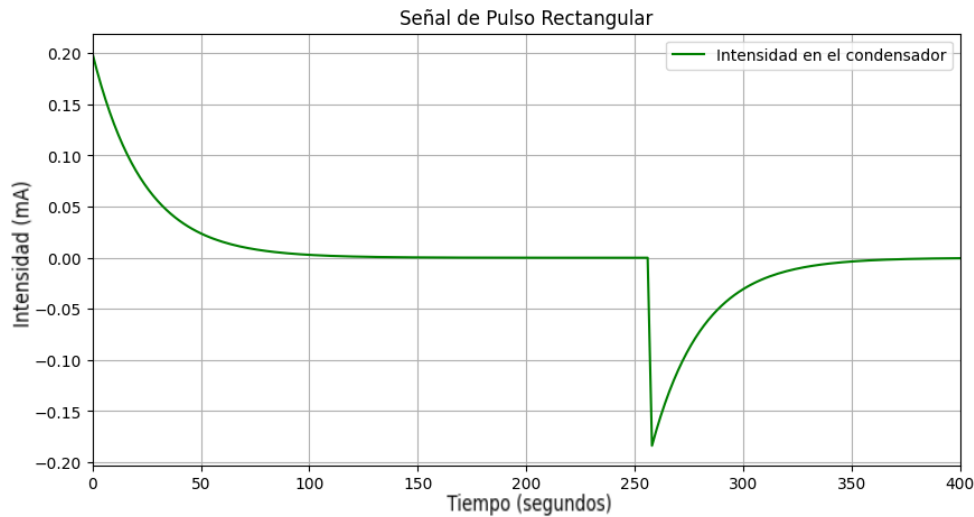


Figura 3: Respuesta al pulso de entrada de la intensidad en la resistencia.

Por todas estas razones, es lógico pensar, a priori, que estas dos prácticas no son tan idénticas como pensamos. De aquí el desarrollo de este trabajo, que con ayuda de la transformada de Fourier, que nos conecta esta dualidad entre tiempo y frecuencia, podremos explicar la equivalencia entre estas dos prácticas. Una buena analogía para expresar esta semejanza es que ambas prácticas son dos caras de una moneda y la transformada de Fourier las conecta [1].

Pasaremos ahora al fundamento teórico de la respuesta en frecuencia del RC. Utilizaremos el formalismo de fasores, para ello, establecemos V_e y V_C en su forma compleja, sustituyendo en la ecuación diferencial, ecuación 2.1, los valores en la forma fasorial, nos queda

$$V_0 = (j\omega RC + 1)V_c \Rightarrow V_c = \frac{V_0}{j\omega RC + 1} \quad (2.4)$$

donde j es la unidad imaginaria y ω la frecuencia angular.

Por lo tanto, podemos definir la función de transferencia del circuito con salida en el condensador como,

$$T_c \equiv \frac{V_c}{V_e} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{ju + 1} \quad (2.5)$$

donde u es la frecuencia normalizada del sistema y se define por $u = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c}$, y a su vez, $f_c = 2\pi RC$.

Cabe destacar un resultado notorio de la función de transferencia y es su representación en los conocidos diagramas de Bode. Conociendo la respuesta del sistema a una excitación conocida podemos representarla en función de la frecuencia. Sin embargo, al ser una respuesta compleja (módulo y fase) tendremos que construir dos gráficas. Como trabajaremos con varios órdenes de magnitud, la representación será logarítmica, figuras 4 y 5.

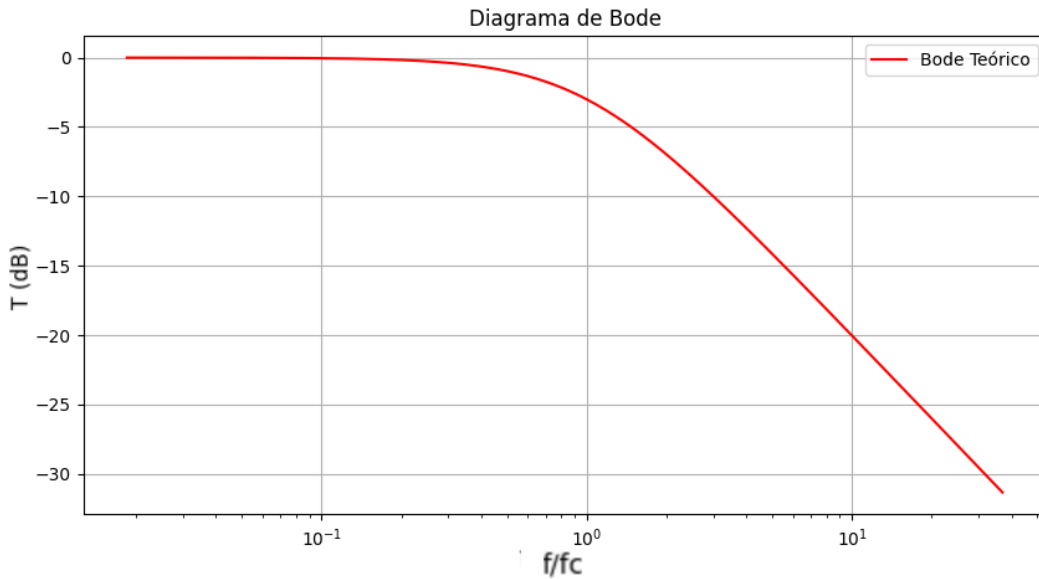


Figura 4: Módulo del Bode teórico con salida en el condensador.

Un punto del que no hemos comentado gran cosa y que son la principal aplicación de los circuitos RC en frecuencias son los filtros. Lo que ocurre en estos circuitos es que el voltaje en el condensador tiende a ser igual al voltaje de entrada para frecuencias bajas. Por el contrario, para altas frecuencias, la tensión en la resistencia es similar a la de entrada y la del condensador casi nula. El sistema posee asíntotas horizontales en -20dB/dec y 20 dB/dec [7]. Para la fase ocurre que en bajas frecuencias el argumento de V_R se adelanta y para altas frecuencias V_C se atrasa una cierta fase hasta un máximo de 90° . En otras palabras, la salida en la resistencia es un filtro paso-alta y la salida en el condensador un filtro paso-baja.

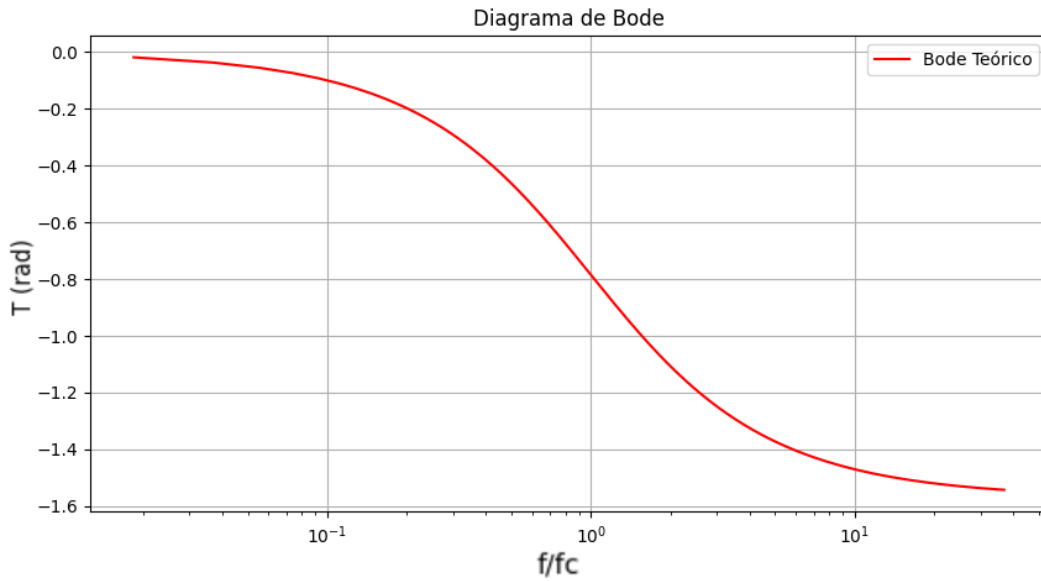


Figura 5: Argumento del Bode teórico con salida en el condensador.

2.3 Análisis y transformada de Fourier

El análisis de Fourier nos permite descomponer funciones complejas del mundo real en sus componentes más fundamentales, a menudo funciones sinusoidales, mediante las denominadas transformadas de Fourier [3]. En esencia el análisis de Fourier descompone funciones complejas en infinitas sumas de senos y cosenos de amplitud y frecuencia variable. Esto nos permite analizar el comportamiento en frecuencias del sistema y tener una visión más clara de las señales con las que trabajamos.

2.3.1 Series de Fourier

Para entender el contexto del análisis de Fourier y la forma en la que se ha trabajado en este trabajo, es necesario que prestemos atención a las series de Fourier.

Tal y como establece el teorema de Fourier, cualquier función periódica puede expresarse en términos de una suma infinita de senos y cosenos, múltiplos a su vez de la frecuencia de la función, ω_0 . Expresando este resultado matemáticamente,

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$$

o

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{C.C}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)}_{\text{C.A}}$$

donde C.A Y C.C hace referencia a la corriente alterna y continua, respectivamente, $\omega_0 = 2\pi/T$ se denomina frecuencia fundamental y T es el periodo o inverso de

la frecuencia. Esta ecuación se denomina serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$. Las constantes a_n y b_n son los coeficientes de Fourier. El coeficiente a_0 es la componente C.C o el valor medio de $f(t)$. Los coeficientes a_n y b_n son las amplitudes de las sinusoides de la corriente alterna [8], [9].

Las condiciones suficientes, aun que no necesarias, para que exista una serie de Fourier se conoce como condiciones de Dirichlet [8].

No es complicado calcular los valores de los coeficientes de la serie de Fourier como,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Y que aplicando las relaciones matemáticas de las identidades trigonométricas, podemos expresar todos estos resultados en forma de amplitud y fase:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

Del mismo modo, utilizando la representación del seno y coseno como funciones exponenciales complejas (Identidad de Euler), podemos expresar los resultados anteriores en su representación exponencial compleja [9],

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.6)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.7)$$

Como conclusión, hemos hecho un desarrollo extenso de las series de Fourier porque forman la base conceptual para construir las denominadas transformadas de Fourier y con las que trabajaremos para obtener nuestros resultados.

2.3.2 Transformada de Fourier

El desarrollo anterior es de utilidad para funciones periódicas, pero que pasa, si, como en nuestro caso, tenemos un pulso rectangular que no es periódico.

Ilustraremos la transformada de Fourier con nuestro propio ejemplo con el que trabajamos. Nuestro pulso rectangular, y cualquier función no periódica, se puede convertir en periódica. Para ello, replicamos dicha función infinitas veces en el eje X con un cierto periodo. Ahora hacemos que ese periodo tienda a infinito

y recuperamos nuestra función inicial. Como es lógico, la frecuencia tiende a cero si el periodo a infinito, por lo que hemos creado una representación continua de nuestra función en el espacio de las frecuencias. Por otro lado, si sustituimos el valor para los coeficientes de Fourier, ecuación 2.7 en la ecuación 2.6, obtenemos,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (2.8)$$

Por otro lado, el espaciado entre los armónicos es de $\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Si sustituimos,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \Delta\omega e^{jn\omega_0 t} \quad (2.9)$$

Ahora tendremos en cuenta que si dejamos que $T \rightarrow \infty$, la suma se convierte integral, el incremento $\Delta\omega$ se convierte en un diferencial $d\omega$, y la frecuencia discreta $n\omega_0$ se convierte en una frecuencia continua ω [8]. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \\ \Delta\omega &\Rightarrow d\omega \\ n\omega_0 &\Rightarrow \omega \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que la representación en serie de senos y cosenos de la función, ha quedado como una representación integral de exponenciales complejas

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

De donde se extrae el famoso valor de la transformada de Fourier [8],

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.11)$$

Los las aplicaciones de esta transformada son múltiples. Ya hemos comentado que si tenemos una función en DT, la transformada de Fourier trabaja en DF.

Como conclusión, resaltar que tanto al medir en el laboratorio las señales de entrada como al programar nuestros pulsos rectangulares, siempre tendrán una duración limitada y por lo tanto no se podrá usar el formalismos aquí descrito, ya que hemos establecido que el periodo tiende a infinito.

Por lo tanto, para poder usar tanto la transformada de Fourier, como la DFT que estudiaremos a continuación, tenemos que añadir ceros a nuestra función. El proceso es simple, añadimos cuantos más ceros mejor cuando la señal termine, pero teniendo en cuenta que a nivel computacional tiene que ser manejable. Con este añadido de ceros o *zero padding* hacemos que nuestra señal sea más próxima a

la descrita en el formalismo de Fourier. Como es lógico, si nos aproximamos más a la transformada de Fourier teórica, los resultados que obtendremos serán más exactos y se cometerá un menor error.

Puesto que trabajamos con un pulso rectangular para obtener su transformada de Fourier, es conveniente expresar la transformada teórica de un pulso rectangular desplazado del origen. De este modo podremos hacer la comparación entre nuestros resultados obtenidos con la DFT y los resultados teóricos.

Por las propiedades de la transformada de Fourier, la transformada de una función desplazada un tiempo $\frac{t_w}{2}$ es,

$$\mathcal{F} \left[f \left(t + \frac{t_w}{2} \right) \right] = e^{-j\omega \frac{t_w}{2}} F(\omega) \quad (2.12)$$

Puesto que la transformada de un pulso rectangular, centrada en el origen, $F(\omega)$, es analítica y su valor es:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \tau \operatorname{sinc} \left(\omega \frac{\tau}{2} \right) \quad (2.13)$$

donde sinc hace referencia al seno del argumento entre dicho argumento y se denomina función seno cardinal.

2.3.3 DFT

Puesto que las señales con las que trabajamos en el laboratorio tienen una duración finita, la integral se extenderá desde 0 hasta un intervalo de tiempo t_{max} .

Como se explicó en secciones anteriores, los valores experimentales que obtenemos en el laboratorio son los valores asociados a un momento concreto de una función, una muestra. Discretizar la señal con la que trabajamos no es más que medir dicha señal a intervalos regulares o periodo de muestreo, Δt . El periodo de muestreo define su homólogo en el espectro de la frecuencia, la frecuencia de muestreo $f_m = \frac{1}{\Delta t}$.

Puesto que trabajamos con señales discretas, la integral de la ecuación 2.11 pasa a ser un sumatorio y el diferencial de tiempo un incremento. Por otro lado, supongamos que hacemos N medidas por lo que $f(t)$ pasa a ser $f(n\Delta t)$ con $0 \leq n < N$, válido para valores desde $t = 0$ hasta $t = N\Delta t$. Con esto podemos definir el incremento en frecuencias en el dominio de la frecuencia como $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ [10].

La transformada de Fourier discreta se define por lo tanto [10],

$$F(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-j2\pi k \Delta f n \Delta t} \Delta t = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-j2\pi kn/N} \Delta t \quad (2.14)$$

mientras que la transformada discreta inversa de Fourier es [10],

$$f(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Delta f) e^{j2\pi kn/N} \Delta f \quad (2.15)$$

donde k es el numero de onda.

Una consideración muy importante en lo referente a las transformadas discretas de Fourier es que se asume que la señal en el dominio del tiempo se repite de forma periódica en cada intervalo de tiempo $N\Delta t$. En realidad, esta propiedad se hereda de la propia transformada de Fourier. Es importante tener esta periodicidad en cuenta puesto que para reproducir de manera más exacta nuestra señal muestreada y que se parezca más a la señal real, es conveniente añadir ceros al final de la señal, como ya se ha comentado.

2.4 Teorema de muestreo, frecuencia de Nyquist y aliasing

Analizando formalmente los dos dominios con los que estamos trabajando, tiempo y frecuencia, observamos que son equivalentes, sin embargo, mientras en el primero obtenemos valores reales, en el segundo son complejos. Esto implica que el espectro en frecuencias tiene una particularidad, el valor de la transformada de Fourier para una frecuencia es el complejo conjugado de la frecuencia negativa. Esto implica que la frecuencia cero tiene un valor real [1].

La señal abarca desde $t = 0$ hasta $t = N\Delta t$, por tanto el muestreo va desde $t = 0\Delta t$ hasta $t = (N - 1)\Delta t$ (N muestras). Puesto que transformamos nuestra señal para cada periodo, la transformada también se repite en intervalos de $N\Delta f$. La frecuencia 0 corresponde con la primera muestra, desde 0 hasta $[N/2]$ son las frecuencias positivas y hasta N las negativas [1]. Las frecuencias negativas, desde $(N/2)$ hasta N , las desplazamos hacia la derecha para formar un intervalo completo y solapado. La frecuencia 0 y la $N\Delta f$ son la misma debido a la periodicidad de la onda. La frecuencia máxima de la transformada del dominio del tiempo se corresponde con:

$$f_{\text{máx}} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \Delta f = \frac{[N/2]}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (2.16)$$

Podemos generalizar el desarrollo que se acaba de hacer. En este momento es posible definir el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, que establece las condiciones necesarias para poder reconstruir una señal continua, a través de sus valores discretos muestreados, sin perder información.

Cuando una función del tiempo tiene un espectro en un intervalo finito (*band-limited function*) podemos muestrear la función y reconstruirla a partir de las muestras. Este resultado se conoce como teorema de muestreo de Shannon (1949).

El teorema se enuncia como sigue: sea $g(t)$ una función de $L^2(\mathbb{R})$ y su transformada $\hat{g}(f) = 0$ para $|f| > \Omega$. Entonces,

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(2\pi\Omega(t - t_n))}{2\pi\Omega(t - t_n)} g(t_n) \quad (2.17)$$

donde $t_n = n1/(2\Omega) = n\Delta t$ y Δt es el periodo de muestreo.

La demostración se basa en que $\hat{g}(f)$ una función de $L^2(\mathbb{R})$, por el teorema de Plancherel, y por tanto desarrollable en series de Fourier,

$$\hat{g}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi j f n / 2\Omega} \quad (2.18)$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} df e^{2\pi j f t_n} \hat{g}(f) = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} df e^{2\pi j f t_n} \hat{g}(f) = \frac{1}{2\Omega} f(t_n)$$

Tendremos por tanto,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} df e^{2\pi j f t} \hat{g}(f) = \int_{-\Omega}^{\Omega} df e^{2\pi j f t} \hat{g}(f) = \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} df e^{2\pi j f t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi j f n / 2\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t_n) \int_{-\Omega}^{\Omega} df e^{2\pi j f (t - t_n)} = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t_n) \frac{2j \sin(2\pi\Omega(t - t_n))}{2\pi j (t - t_n)} \end{aligned}$$

donde $t_n = n1/(2\Omega)$. La igualdad es en $L^2(\mathbb{R})$ pero las funciones *band-limited* se pueden extender al plano complejo y la igualdad es punto a punto,

$$g(t + iv) = \int_{-\Omega}^{\Omega} df e^{2\pi j f (t + iv)} \hat{g}(f) \quad (2.19)$$

La frecuencia de muestreo $1/\Delta t = 2\Omega$ corresponde a la frecuencia de Nyquist y nos determina el incremento temporal máximo con el que hay que muestrear la señal, o viceversa, fijado el incremento temporal, nos dice hasta qué frecuencia máxima de la señal estamos muestreando correctamente. En los casos prácticos se hace *oversampling*. Por ejemplo, la frecuencia máxima del espectro sonoro se establece en 18 kHz, pero la frecuencia de muestreo en los *compact-disk* se hace a 44 kHz que es superior a 32 kHz.

2.5 Respuesta impulso de un sistema lineal

En este apartado vamos a realizar un estudio teórico de la respuesta impulso en un sistema lineal. Asumiremos que nuestro sistema es lineal [3]. Definimos un sistema como un conjunto de operaciones que se realizan sobre una señal. Con otras

palabras, podemos decir que es como una caja negra que coge una señal de entrada y la transformada en otra de salida [8]. Lineal quiere decir que si sometemos el sistema a una excitación $x(t)$ se produce una respuesta $y(t)$, caracterizada por la función respuesta impulso del sistema, ecuación 2.20 [3]. Invariante hace referencia a que la respuesta no varía en el tiempo. Estas dos propiedades conforman los denominados sistemas LTI, figura 6.

Definimos la respuesta impulso como la respuesta de un circuito con una única fuente independiente, que se caracteriza por su función de impulso unitaria, es decir, la función delta de Dirac $\delta(t)$ [11].

La respuesta al impulso $h(t)$ (una función de tiempo) y su correspondiente transformada de Fourier o respuesta en frecuencia $H(\omega)$ forman un par de transformadas de Fourier [11]. Puesto que los dos circuitos que hemos analizado en las prácticas son causales, la respuesta a una entrada no puede comenzar hasta que dicha entrada no comience. Por lo tanto, la respuesta al impulso es nula para todo tiempo negativo, $h(t) = 0$ para $t < 0$.

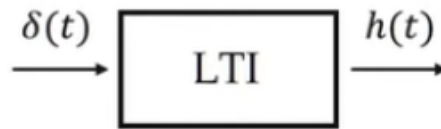


Figura 6: Respuesta impulso para una entrada delta de Dirac.

Esto nos permite calcular la respuesta de cualquier tipo de impulso inicial, se hace de la siguiente manera

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (2.20)$$

lo que nos define el siguiente producto,

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (2.21)$$

donde $*$ simboliza el operador convolución.

La ecuación 2.21 es un producto de convolución. Este producto nos integra dos señales una desplazada frente a la otra. De forma simplificada, nos superpone una a la otra para formar una tercera función.

El producto de convolución es complejo y poco versátil. Es por ello que podemos realizar las transformadas de Fourier a ambos términos de la ecuación 2.21 para convertir dicho producto de convolución en un producto usual, ecuación 2.22.

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (2.22)$$

donde $Y(\omega)$ y $X(\omega)$ son las transformadas de Fourier de las señales de entrada y salida del sistema LTI, y $H(\omega)$ es la función de transferencia [3].

Esta propiedad de la transformadas de Fourier es de vital importancia en el tratamiento de señales, puesto que nos permite reescribir el producto de convolución como un producto de funciones.

Como íbamos diciendo, este desarrollo puramente matemático se ha realizado con el objetivo de dar respuesta a la posibilidad de estudiar la respuesta en frecuencias de un sistema para una fuente que es continua. Entonces, la respuesta en frecuencias de un sistema con corriente continua esta relacionada con la respuesta impulso de la delta de Dirac. Para nuestro caso, aproximaremos la delta de Dirac por el pulso rectangular, teniendo en cuenta que el contenido en frecuencias será suficiente para que cubra el ancho del pulso [1].

3 Resultados

En esta sección de resultados se expondrá el guión de la práctica que el alumnado seguirá para poder estudiar, de forma computacional, los puntos teóricos desarrollados en la sección de Metodología. Centramos nuestra atención en una serie de puntos o tareas a realizar. Nuestro objetivo principal ha sido desarrollar un código eficiente y preciso que realice transformadas de Fourier, y posteriormente, aplicarlas a diversos conjuntos de datos para analizar su comportamiento, validar su eficacia y que los alumnos la utilicen.

Como se iba diciendo, nuestro objetivo final en última instancia de este trabajo ha sido crear una serie de paquetes y funciones de Python para comprobar la dualidad entre las dos prácticas con las que trabajamos. Para ello, estudiaremos y desarrollaremos funcionalidades en dicho idioma de programación sobre varios aspectos clave. Destacaremos como aplicar la DFT a sendos sistemas, obtendremos la respuesta impulso del sistema lineal, comprobaremos de manera experimental el Teorema de muestreo y la frecuencia de Nyquist, así como el “*aliasing*” y el principio de incertidumbre y causalidad para sistemas ondulatorios.

Cabe resaltar un aspecto a considerar tanto para el alumnado o profesorado que siga este trabajo. Expondremos el código de algunos de los algoritmos diseñados, sin embargo no todos estarán en este artículo puesto que se extendería demasiado. Como ya se ha comentado en la sección de Introducción, para consultar todas estas funciones y paquetes desarrollados, consultar el repositorio de Github, (Apéndice A).

3.1 Tarea 1: Aplicación de la DFT y *zero padding*

En este apartado, implementaremos el algoritmo de la transformada discreta de Fourier, en el que se tendrá en cuenta, la sencillez y la eficiencia del mismo, es de-

cir, diseñaremos el más óptimo para obtener resultados computacionales rápidos y fáciles de implementar por el alumnado o profesorado. A modo ilustrativo, exponremos el código diseñado para la DFT, Listing 1. Sin embargo, en un primer momento a los alumnos no se les debería facilitar la definición de DFT e IDFT (*inverse discrete Fourier transform*), ya que se considera viable que el alumno las construya. Del mismo modo, es un buen primer contacto con el mundo de Python.

```

1 import numpy as np
2 from numpy import pi
3
4 def dft(vs,dt):
5     ns=len(vs)
6     ks=np.arange(ns)
7     ns_coef=np.arange(ns)
8     vsdf=np.zeros(ns, dtype=complex)
9     for k in ks:
10         vsdf[k]=np.sum(vs*np.exp(-1j*2*np.pi*ns_coef*k/ns)*dt)
11
12     return vsdf

```

Listing 1: Algoritmo de las transformadas discretas

Con este algoritmo diseñado solo nos queda aplicarlo a dos pulsos rectangulares con un *zero padding* mayor o menor, es decir, más o menos muestreados, figura 7. Igualmente, programaremos la transformada de Fourier teórica para un pulso rectangular, de acuerdo a la definición que se plasmó en la sección de Metodología, Listing 2.

```

1 def transf_teorica_pulso(f,v0,ts):
2     vt=v0*ts*np.exp(-2.*np.pi*1j*f*ts/2.)*np.sinc(2.*f*ts/2.)
3     return vt
4
5 # Creando el muestreo en frecuencias entre 0 - fmax
6 frecsteo=np.linspace(0,1/(2.*dt),2000)
7 Tteo_pulso=transf_teorica_pulso(frecsteo,v0,ts)

```

Listing 2: Definición de la Transformada teórica

Una vez establecidos todos estos pasos, tenemos las condiciones suficientes para llamar a la función que hemos diseñado y graficar la transformada de dos pulsos rectangulares con diferente muestreo, junto con la transformada teórica. Como se puede observar de la figura 8, las dos transformadas discretas se asemejan en forma y comportamiento a la transformada teórica, lo que nos da una buena señal de la correcta implementación de nuestros algoritmos.

Por otro lado, se observa que la señal con mayor *zero padding* o más muestreada se asemeja mejor al comportamiento teórico. Esto es totalmente coherente con lo que dijimos en secciones pasadas, y es que si queremos utilizar el formalismo de la transformadas de Fourier, necesitamos una señal que se expanda en el tiempo de forma infinita. Esto es algo que en la práctica nunca conseguiremos, pero podemos afinar si el añadido de ceros es suficiente para minimizar los errores.

La explicación de este fenómeno es múltiple, pero se puede empezar por argumentar que al aplicar el añadido de ceros a la señal, estás aumentando la resolución en el dominio de la frecuencia sin cambiar la información en el dominio del tiempo. De esta manera podemos obtener componentes frecuenciales más finas.

Igualmente, podemos argumentar que, como la DFT mapea el dominio del tiempo en el de las frecuencias, y la resolución frecuencial depende directamente de la longitud de la señal en el dominio del tiempo, por lo que una señal con *zero padding* genera una resolución espectral mayor.

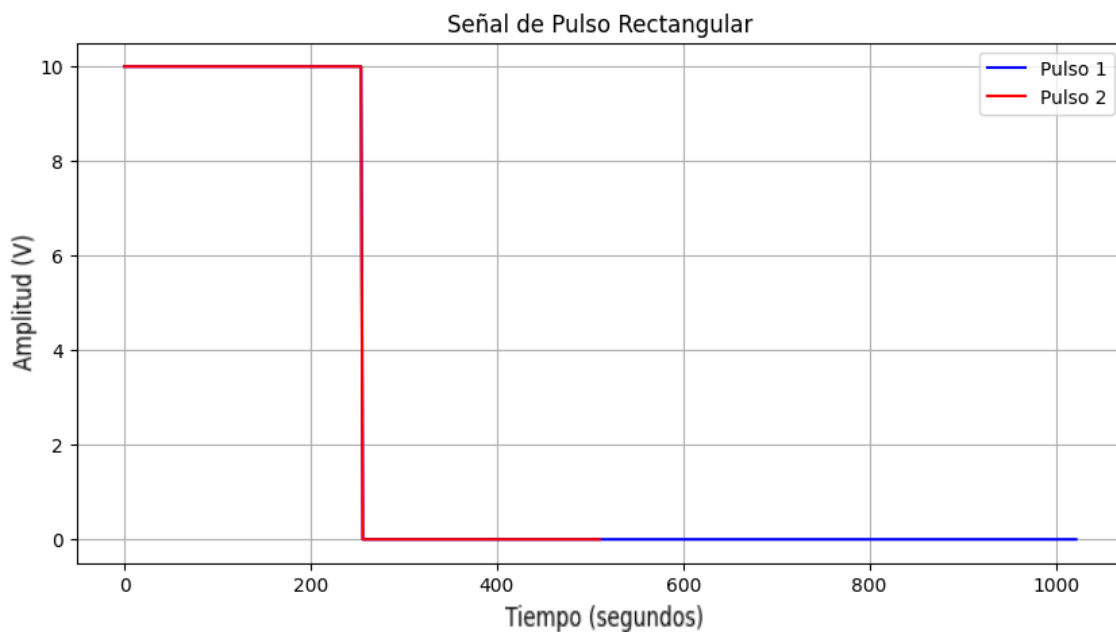


Figura 7: Distintos pulsos de entrada con diferente *zero padding*

Como último paso en esta tarea, vamos a realizar una comparativa entre nuestro algoritmo de la DFT y la FFT (*fast Fourier transform*) que incorpora mumpy en su librería. Observamos de la figura 9 que ambos algoritmos siguen el mismo comportamiento, existiendo una leve discrepancia entre el FFT y la DFT para frecuencias bajas, la razón reside en los propios algoritmos y que son aproximaciones de la propia FT.

3.2 Tarea 2: Principio de incertidumbre

Uno de los aspectos más fascinantes que nos encontramos al realizar el estudio entre estas dos prácticas, es que, se puede encontrar una versión semejante al principio de incertidumbre para transformadas de Fourier. Para explicar este fenómeno realizaremos un estudio de 3 pulsos, uno será idéntico al que hemos definido en la sección anterior, y los otros serán iguales pero con la mitad y la cuarta parte de la anchura original del pulso, respectivamente. Calcularemos, con el algoritmo que previamente hemos diseñado, la DFT de los 3 pulsos.

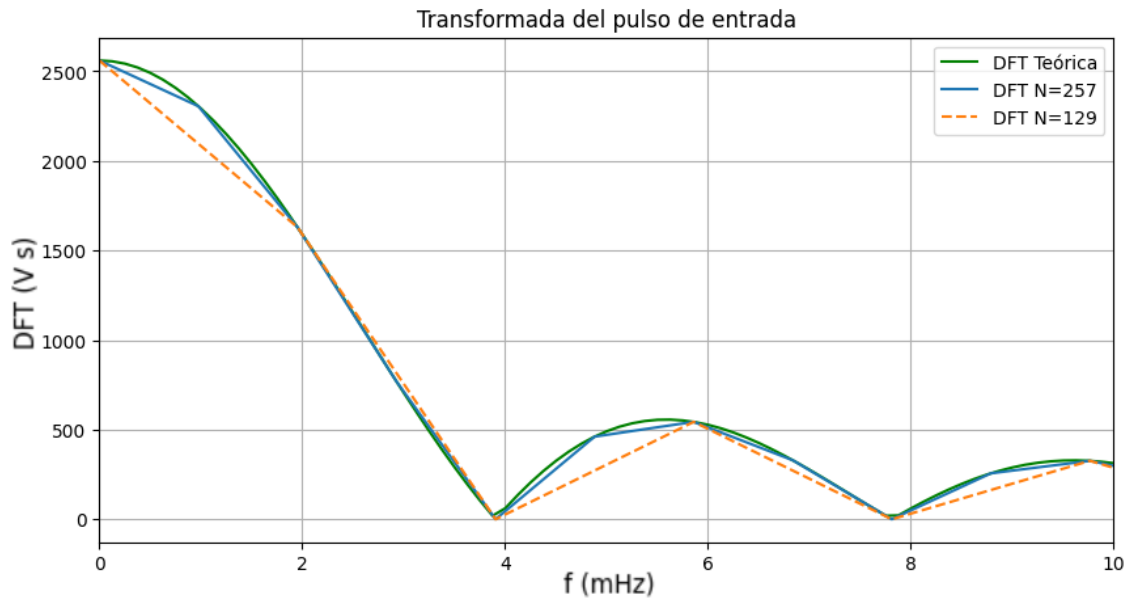


Figura 8: DFT de los pulsos de entrada y de la señal teórica. N representa el número de muestras de la señal.

De este modo, podemos hacer una comprobación experimental del principio de incertidumbre de Fourier, que no es más que una manifestación matemática del principio de incertidumbre de Heisenberg. Este principio establece que hay una cota inferior para el producto de las incertidumbres de un pulso y su transformada de Fourier. Podemos expresarlo como $\Delta t \cdot \Delta \omega$ es siempre mayor que una cierta constante [1], donde Δt es la anchura efectiva del pulso en el dominio del tiempo y $\Delta \omega$ es su correspondiente anchura en el dominio de las frecuencias.

Utilizando esta analogía del principio de incertidumbre de Heisenberg, somos capaces de explicar el comportamiento que vemos en la figura 10. En esta, el pulso rectangular con una anchura de 256 segundos tiene una anchura espectral comparativamente inferior que aquellos que tienen anchuras menores en el dominio del tiempo. En resumen, podemos decir que un pulso más ancho tendrá un contenido espectral más reducido, y viceversa.

3.3 Tarea 3: Teorema de muestreo y frecuencia de Nyquist

En esta sección, trataremos de realizar un análisis del teorema de muestreo y de la frecuencia de Nyquist, y aplicarlo a nuestro ejemplo concreto. Utilizando nuestro más que conocido pulso teórico y otros 3 pulsos con diferente intervalo de muestreo, $\Delta t_1 = 2s$, $\Delta t_2 = 8s$, $\Delta t_3 = 0,5s$. Calcularemos las DFT correspondiente y analizaremos los resultados ateniendo al módulo y al argumento de la transformada en la figura 11.

En este caso concreto, consideramos oportuno resaltar el código que hemos diseñado para la obtención de estas gráficas. El algoritmo crea dos gráficas corres-

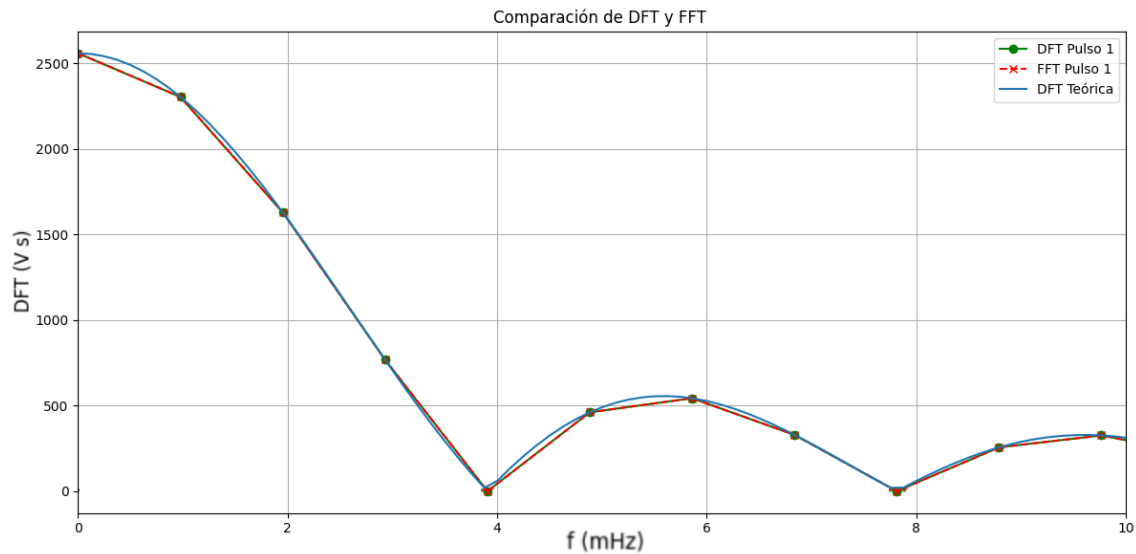


Figura 9: Comparación entre algoritmo DFT Y FFT de Numpy

pendientes al módulo y fase de las transformadas en el espacio de frecuencias y de un número arbitrario de funciones que le pasemos, Listing 3.

```

1 def graficar_general_N_mod_fase(Tteo_pulso, frecsteo, *args):
2     fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(10, 8))
3     # Primero: Magnitud de la DFT
4     axs[0].plot(frecsteo*1E3, np.abs(Tteo_pulso), c='m', label='DFT Teorica
5     ')
6     for i, (frdt, Tvetm, nfmt, dt) in enumerate(args):
7         axs[0].plot(frdt*1E3, np.abs(Tvetm[0:nfmt]), label=f'DFT con
8         muestreo dt={dt}', linestyle=['-', '--', '-.', ':'][i % 4])
9
10    axs[0].set_xlim(0, 100)
11    axs[0].set_ylim(0, 300)
12    axs[0].set_xlabel('f (mHz)')
13    axs[0].set_ylabel('Magnitud de DFT (V s)')
14    axs[0].legend(loc=1)
15    axs[0].grid()
16    axs[0].set_title('Transformada modulo del voltaje de entrada')
17    # Segundo: Fase de la DFT
18    axs[1].plot(frecsteo*1E3, np.angle(Tteo_pulso), c='m', label='DFT
19    Teorica')
20    for i, (frdt, Tvetm, nfmt, dt) in enumerate(args):
21        axs[1].plot(frdt*1E3, np.angle(Tvetm[0:nfmt]), label=f'DFT con
22        muestreo dt={dt}', linestyle=['-', '--', '-.', ':'][i % 4])
23
24    axs[1].set_xlim(0, 25)
25    axs[1].set_xlabel('f (mHz)')
26    axs[1].set_ylabel('Fase de DFT (rad)')
27    axs[1].legend(loc=2)
28    axs[1].grid()
29    axs[1].set_title('Transformada del angulo del voltaje de entrada')
30    plt.tight_layout()
31    plt.show()

```

Listing 3: Graficar un numero arbitrario de DFT

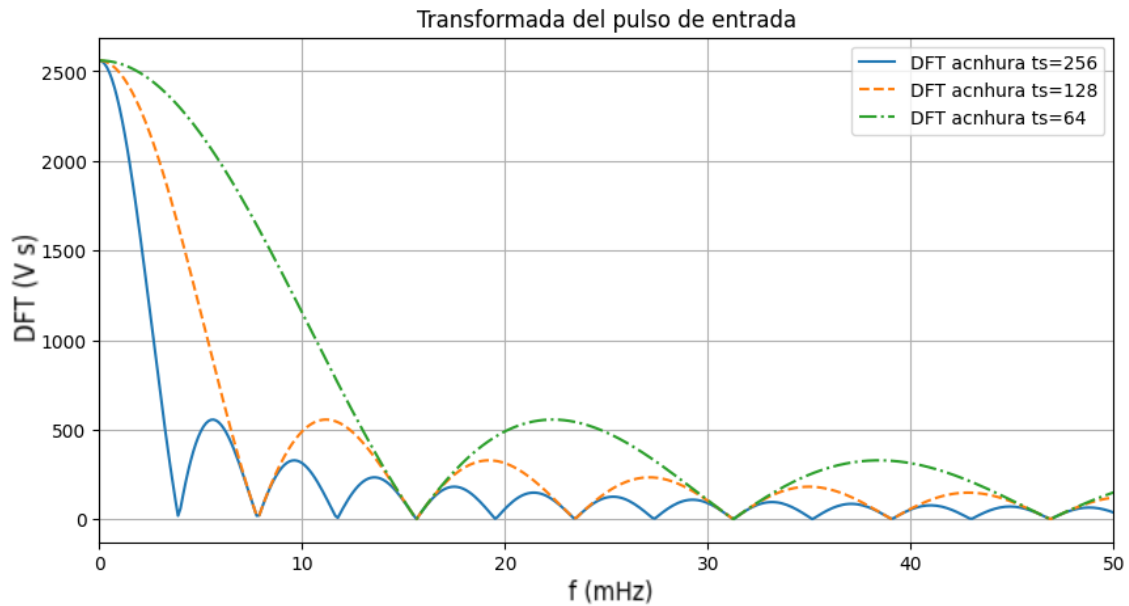


Figura 10: Representación del principio de incertidumbre ondulatorio. La variable ts se refiere a la anchura del pulso.

Pasándole al algoritmo 3 señales con los tiempos de muestreo descritos y la señal teórica, obtenemos dos gráficas, figura 11. La primera de ellas representa el módulo de la transformada de Fourier frente a las frecuencias asociadas y la segunda representa la fase. Podemos observar que tanto la transformada teórica como las muestreadas con diferentes valores se comportan de manera muy similar tanto para altas y bajas frecuencias. Resaltar que la transformada con $\Delta t = 8s$ se corta entre los 60-70 mHz, frecuencia de Nyquist. Utilizando la ecuación 2.16 y el valor del muestreo, comprobamos que efectivamente, la frecuencia de Nyquist en este caso, es 62,5 mHz, justo donde nuestra gráfica termina.

A pesar de que no tengamos muestras de cada señal, mas allá de sus correspondientes frecuencias de Nyquist, no nos impide afirmar que el comportamiento teórico y experimental, para el módulo de las transformadas, es muy afín. Por el contrario, para el estudio de la fase encontramos discrepancias entre resultados teóricos y experimentales, incluso entre las propias transformadas con diferentes tiempos de muestreo.

Las discrepancias entre la transformada teórica y las transformadas discretas de Fourier se deben a varias razones inherentes a la propia naturaleza de las transformadas. La primera de ellas es general tanto para la fase como para el módulo y es el "*aliasing*", del que hablaremos más detenidamente a continuación.

Por otro lado, para las discrepancias en la fase, podemos argumentar no solo el ya comentado "*aliasing*", si no también, que en el proceso de discretizar la señal, la fase solo se calcula para ciertas frecuencias y, como la función con la que trata-

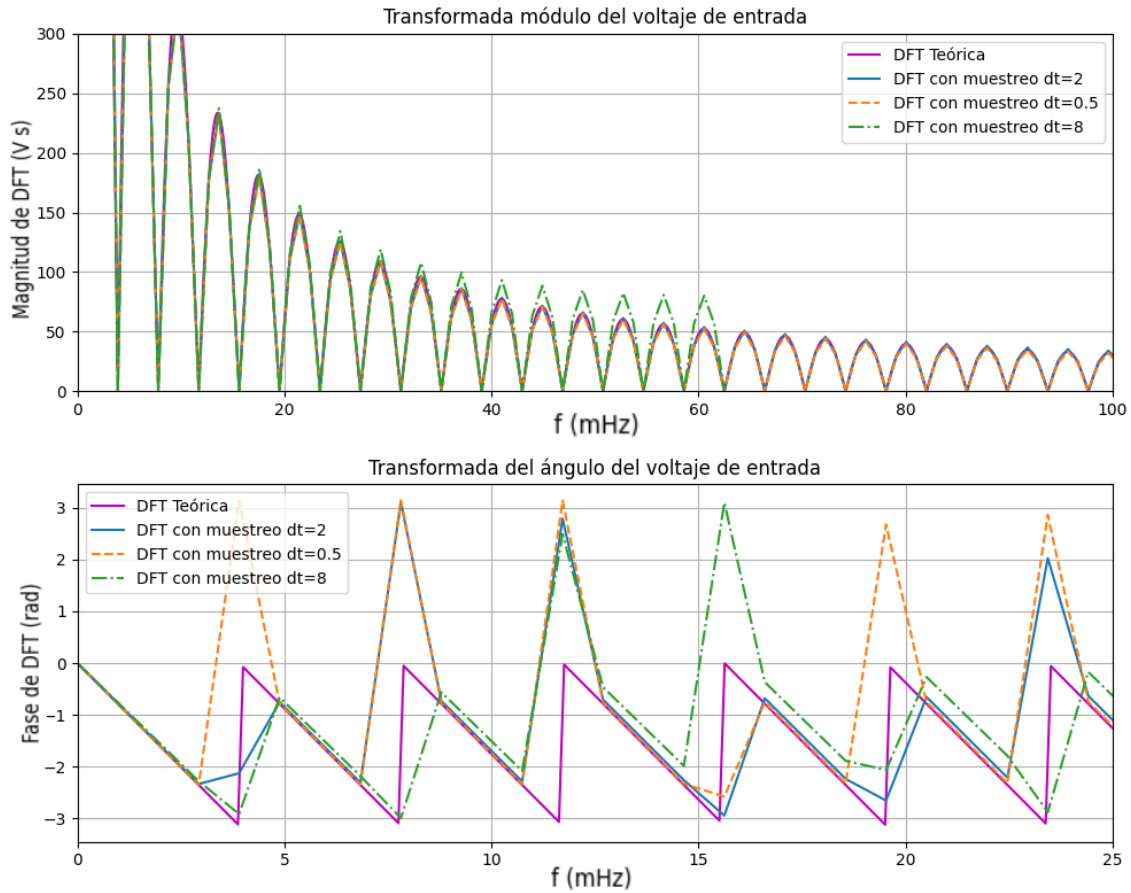


Figura 11: DFT teórica y DFT de 3 pulsos de entrada con diferentes intervalos de muestreo.

mos es del tipo sinc, los errores se disparan para las muestras donde la función se hace cero.

Como se ha comentado con anterioridad, el fenómeno del "*aliasing*" es perceptible en la figura 11, pero igualmente, lo podremos observar en futuras secciones y las gráficas que se obtengan en las mismas. Estudiaremos con más detenimiento este fenómeno en las secciones 3.4 y 3.6.

3.4 Tarea 4: "*Aliasing*"

Uno de los aspectos más relevantes que es necesario analizar es el aliasing en el tratamiento de señales analógicas. Este fenómeno se observa al muestrear una señal continua y dicho muestreo es insuficiente para capturar adecuadamente las variaciones de la señal original, causando que, al reconstruir la señal, encontremos ambigüedades y distorsiones [12]. Esto se debe a que se superponen los espectros de la FT.

El fenómeno del aliasing lo podemos observar, en nuestro caso de estudio, si

muestreamos una señal con un incremento temporal insuficiente, tal y como hemos hecho en el apartado anterior. Ahí se tomaron 3 tiempos de muestreo 0.5, 2 y 8 segundos. Para estos tiempos, tendremos una frecuencia de Nyquist de 1000, 250 y 6,25 mHz, respectivamente. Podemos argumentar si ocurrirá, o no, el fenómeno del aliasing atendiendo a estas frecuencias de Nyquist y entendiendo la representación espectral de la DFT para cada muestreo.

Para los tiempos de muestreo de 2 y 8 segundos, ocurrirá dicho fenómeno, siendo más pronunciado para el segundo caso. Esto se debe a que, como el contenido espectral del pulso rectangular se extiende más allá de la frecuencia de Nyquist, habrá aliasing. El espectro se repliega sobre sí mismo en cada frecuencia de muestreo, distorsionando la señal original, figura 11.

Para el tiempo de muestreo de 0.5 segundos, al contrario que el caso anterior, podemos afirmar que no ocurrirá aliasing, la frecuencia de Nyquist es mayor que la mayor parte de la información espectral de la DFT del pulso, por lo que la imagen no mostrará aliasing, figura 11.

Del mismo modo, observamos el "*aliasing*" en la sección de diagramas de Bode, sección 3.6. En dicha sección se visualizará dicho fenómeno de otra manera, a través de la función de transferencia y el corte de cada DFT en su diagrama de Bode.

3.5 Tarea 5: Principio de causalidad

En esta sección vamos a considerar un nuevo aspecto que nos surge al realizar la comparación entre las dos prácticas. Se trata de una propiedad intrínseca de los sistemas lineales, el principio de causalidad. Este establece que una causa debe preceder a su efecto, esto implica que cualquier efecto que se observa de un sistema lineal es el resultado de eventos pasados o presentes.

Para nuestro caso concreto, vamos a crear dos pulsos, el primero será idéntico al que hemos trabajado en secciones pasadas. Los muestrearemos con un periodo de 2 segundos. El nuevo pulso será una copia del primero pero añadiendo una muestra más no nula. En otras palabras, tendremos que cambiar el signo $<$ de la definición de voltaje de entrada, ecuación 2.2, por uno que sea \leq , al hacer esto, la señal de entrada tiene una duración mayor, en concreto, una muestra más que la señal inicial. Esto genera que el proceso de descarga comience con un leve adelanto que será apreciable en el análisis espectral de Fourier, figuras 12 y 13. En esta última figura se ha añadido la DFT de la respuesta del condensador para evidenciar una limitación del principio de incertidumbre y que se comentará al final de esta tarea.

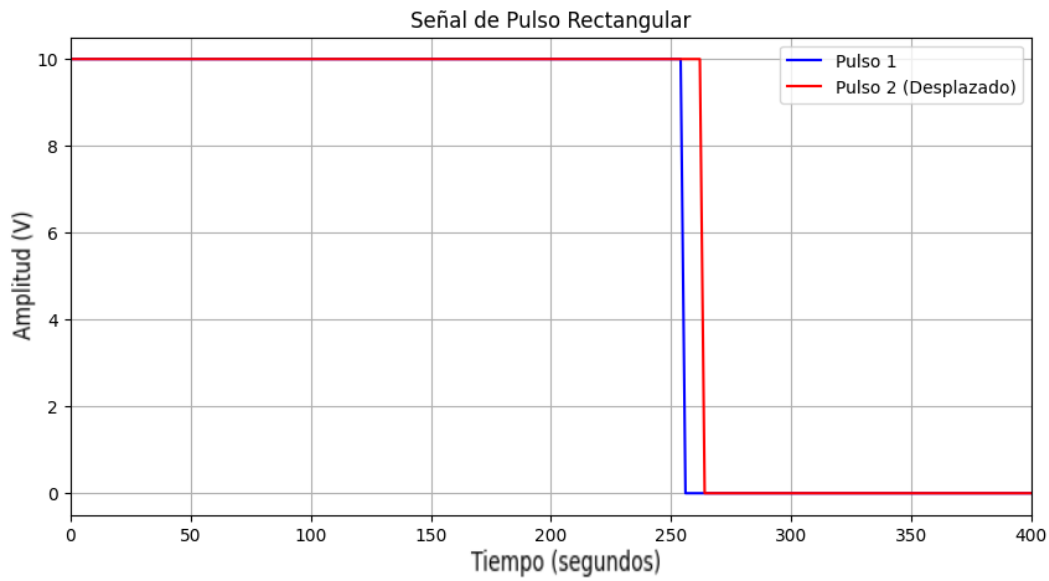


Figura 12: Pulso inicial y desplazado con una muestra no nula más

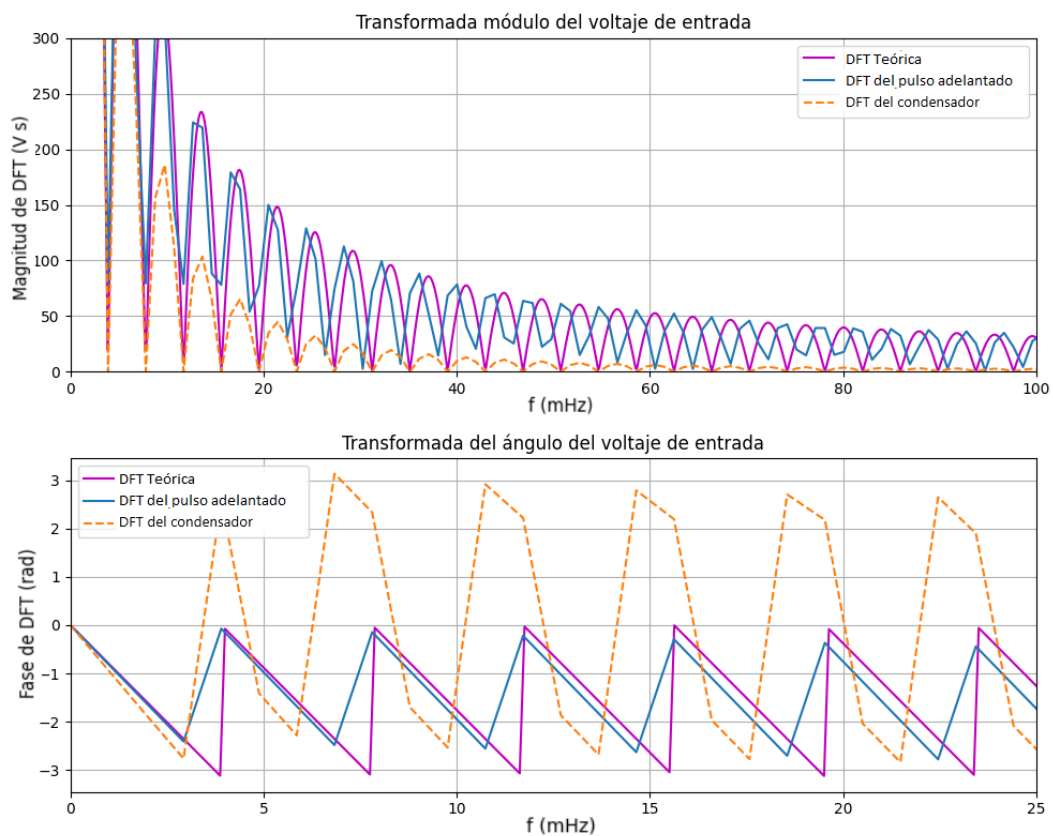


Figura 13: DFT teórica, de la respuesta en el condensador y del pulso desplazado.

Este desplazamiento de la señal original genera un retraso en el proceso de descarga y hace que se evidencie el principio de causalidad. Como se evidencia de la figura 13, la DFT del pulso desplazado ocurre antes que la DFT teórica. Esto

es lógico y es una evidencia del principio de causalidad puesto que en el espectro de las frecuencias es inversamente proporcional al del tiempo.

En este punto, explicaremos la limitación que hemos encontrado y que cabe la pena destacar. El hecho de añadir una muestra más a nuestra señal añade un cierto error numérico a nuestros cálculos y por lo tanto a la representación que obtenemos. Dicho error se magnifica para frecuencias donde el espectro de la señal de entrada tiende a cero. Estos errores computacionales generan que haya puntos donde la señal de salida o respuesta del sistema (módulo de la DFT del condensador) sea mayor que la de entrada. Ver figura 14 entorno a la frecuencia de 30 mHz. Esto no puede ocurrir, en ningún caso, para un circuito de primer orden.

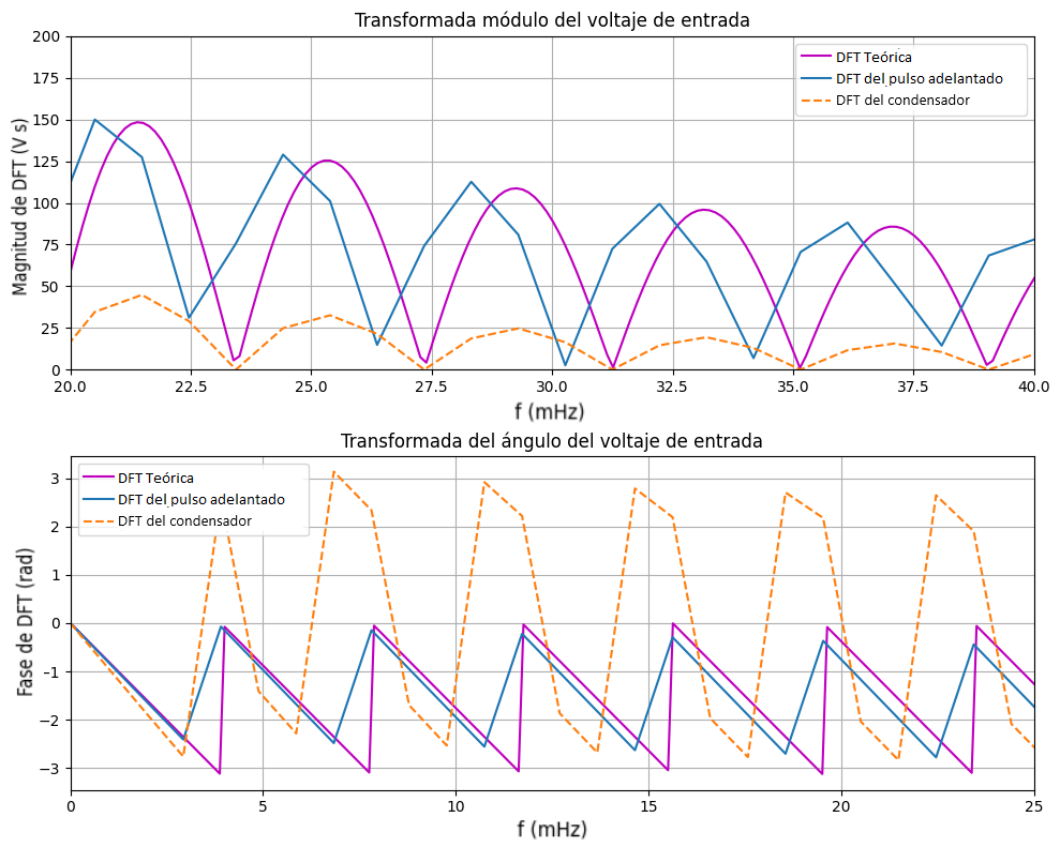


Figura 14: Ampliación del eje X para visualizar la rotura del principio de causalidad por errores numéricos

3.6 Tarea 6: Función de transferencia y diagramas de Bode

Hasta ahora hemos trabajado con la transformada del pulso rectangular que se ha usado como entrada para el proceso de carga del condensador. Esta señal tiene transformada analítica y permite comprobar el funcionamiento del programa de la DFT así como otras tareas de la práctica donde se pone de manifiesto el principio de incertidumbre o el efecto del muestreo y zero-padding asociado al fundamento de la FT y las series de Fourier.

En esta subsección vamos a pasar a trabajar directamente con voltaje en el condensador durante el proceso de carga y descarga. Concretamente, vamos a hacer la DFT de esta señal y dividiendo entre la DFT del pulso de entrada obtener la aproximación a la función de transferencia que se obtuvo en la práctica del estudio en frecuencias del circuito RC, representada mediante su diagrama Bode.

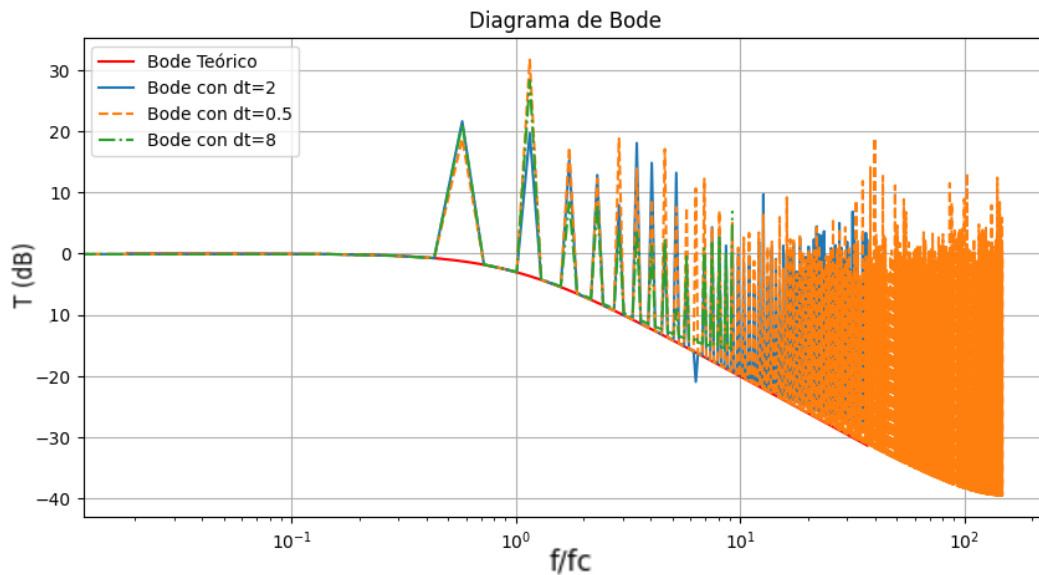


Figura 15: Módulo del diagrama de Bode para la transformada teórica y los 3 pulsos muestreados y un número de muestras $N=1024$.

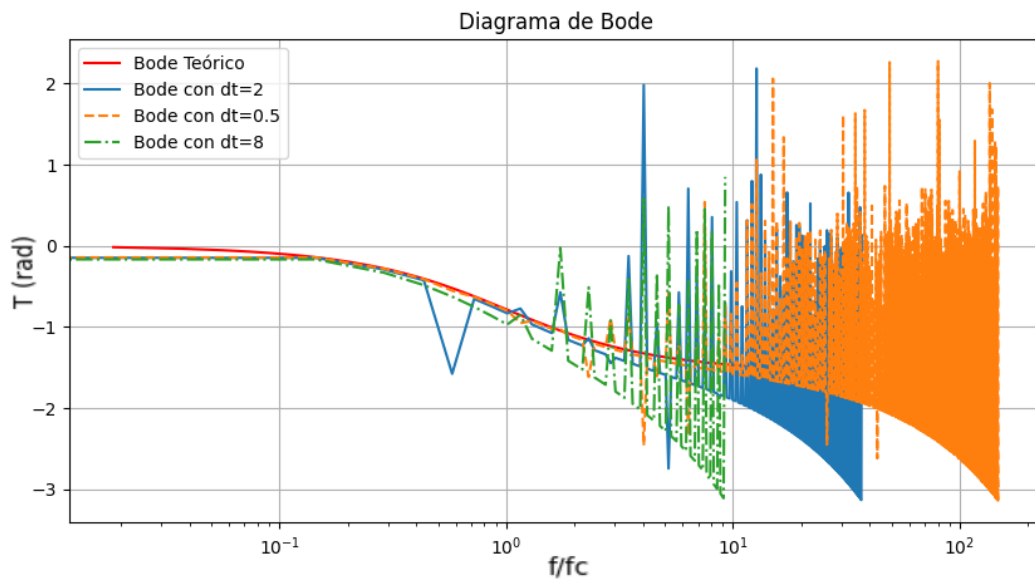


Figura 16: Fase del diagrama de Bode para la transformada teórica y los 3 pulsos muestreados y un número de muestras $N=1024$.

Por tanto utilizando la ecuación 2.5 y las transformadas del condensador obtenidas en la sección anterior, podemos obtener la función de transferencia. En las figuras 15 y 16 se representan, en módulo y fase respectivamente, los diagramas de Bode asociados a las DFT del pulso de entrada y del voltaje en el condensador. Las frecuencias se han normalizado con la frecuencia de corte del sistema. Se puede comprobar cómo hay puntos donde tanto la entrada como la salida tienen amplitud cero, 14. Al dividir estos valores vamos a tener una indeterminación que el error numérico hará mayor como luego se comprobará. Este punto puede ser interesante señalarlo al alumnado.

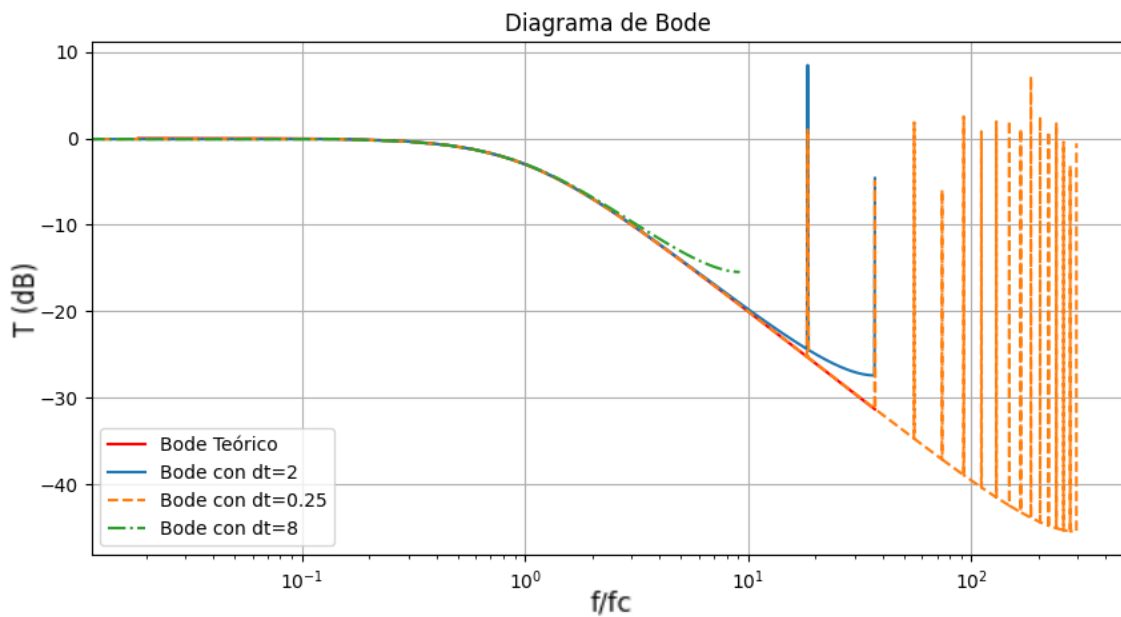


Figura 17: Módulo del diagrama de Bode para la transformada teórica y los 3 pulsos muestreados y un número de muestras $N=1000$.

El proceso para obtener los 2 diagramas de Bode es relativamente sencillo, una vez obtenida la DFT de la entrada y la salida pasamos a dividirlos y a representarlos en su diagrama Bode. Las figuras 15 y 16 corresponden a dicha representación usando 3 muestreos diferentes. Podemos ver que para muestreos con un periodo grande la frecuencia de Nyquist es menor y el espectro se acorta. Para periodos de muestreo menores la DFT se extiende hasta frecuencias mayores. Pero para todos los muestreos hay puntos que se apartan claramente del valor teórico. El número de estos puntos se incrementa con la frecuencia produciendo, a altas frecuencias, una señal casi continua de lo que parece un ruido. Este aparente ruido no es más que la división entre valores muy pequeños comentada anteriormente. El hecho de usar un número de muestras de 1024 hace el incremento en frecuencias determine unas frecuencias en la DFT que coincide con los puntos en los que la entrada y la salida tienen una amplitud muy pequeña, casi nula. Si cambiamos el número total de muestras a 1000 este fenómeno ocurre de forma más esporádica, como puede apreciarse en las figuras 17 y 18.

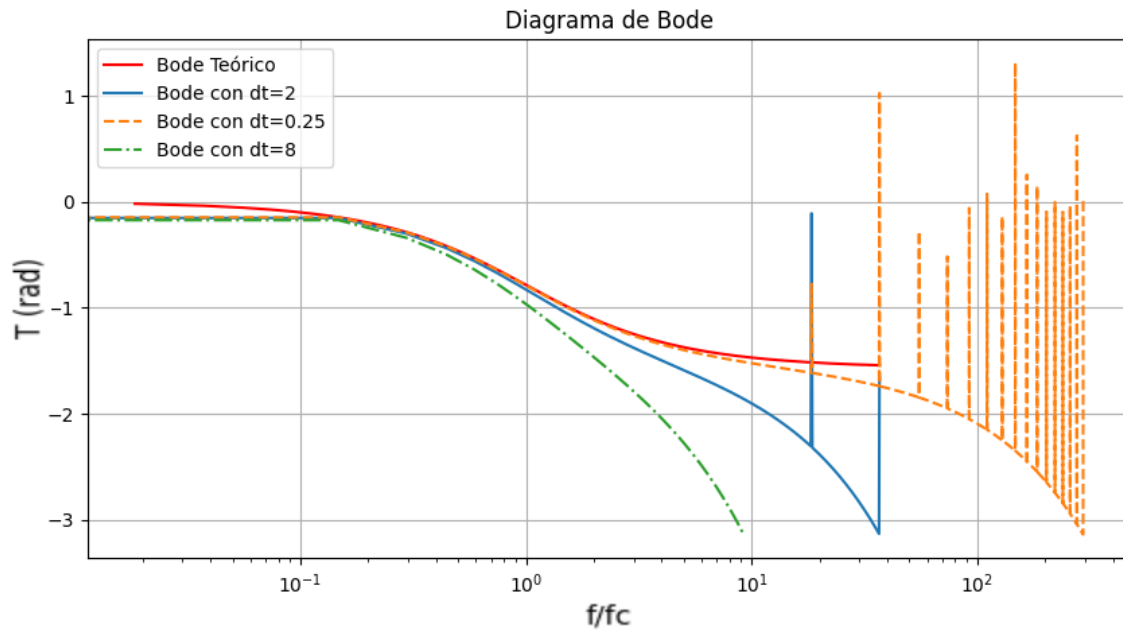


Figura 18: Fase del diagrama de Bode para la transformada teórica y los 3 pulsos muestreados y un número de muestras $N=1000$.

En estas figuras vemos como el efecto del muestreo y la frecuencia de Nyquist asociada aparece en el ancho de banda de las transformadas. También podemos observar que en la fase hay una diferencia entre el valor obtenido mediante la transformada y el teórico que aparece con todos los muestreos pero que es menor a medida que aumentamos la frecuencia de muestreo: es el fenómeno de aliasing que se manifiesta claramente en la fase de la función de transferencia porque el módulo es muy pequeño a frecuencias grandes mientras que la fase mantiene un valor constante.

4 Conclusiones

En este trabajo hemos conseguido desarrollar una serie de paquetes y funciones en Python diseñados, específicamente, para que el alumnado o profesora de la asignatura de Circuitos Eléctricos tenga nuevas herramientas para realizar prácticas de laboratorio relacionadas con la carga y descarga de un condensador de un circuito RC. De este modo, se podrá comprender de manera práctica la DFT y otros conceptos fundamentales del análisis de señales. Los paquetes desarrollados en Python permiten explicar conceptos clave como el aliasing, el teorema de muestreo, la frecuencia de Nyquist, y los principios de causalidad e incertidumbre, logrando representar el comportamiento teórico de manera precisa y reproducible. Las representaciones de las TF y las DFT obtenidas muestran una alta concordancia con las teorías establecidas, proporcionando una base sólida para el aprendizaje práctico y cimentando los conceptos teóricos.

Aunque la experiencia del alumnado aún no ha sido probada, se prevé que

el uso de estas herramientas será altamente satisfactorio y enriquecedor en cursos venideros. La implementación de estos paquetes de Python permitirá a los estudiantes explorar y entender de manera más profunda y visual los conceptos teóricos, facilitando una comprensión más estructurada del análisis de señales.

Las limitaciones que se han encontrado durante el desarrollo de este trabajo son varias y su naturaleza son tanto prácticas como teóricas. Por ejemplo, las limitaciones de índole teórica se basan en el tipo de pulso de entrada que elegimos, en nuestro caso fue un pulso rectangular, que tiene una TF analítica y, en consecuencia, podemos hacer una comparación entre el comportamiento teórico y experimental. Sin embargo, la mayoría de pulsos de entrada no tendrán una expresión analítica de su TF. Por otro lado, las limitaciones experimentales residen en que el código de Python, aunque se ha intentado construir de la manera más versátil, siempre tendrá limitaciones a la hora de generar nuevas características en las gráficas.

Nuestro trabajo tiene la finalidad de no solo servir como base para futuras investigaciones o trabajos académicos, sino que también se proyecta como una herramienta pedagógica útil y versátil para alumnos y profesores de carreras científicas. El uso de estos paquetes facilitará una educación más interactiva y aplicada al mundo experimental, alejando los conceptos teóricos más abstractos y complejos del alumnado. Además, este enfoque podría ser extendido a otros dominios de la física y la ingeniería, promoviendo un aprendizaje interdisciplinario y transversal, junto con una mayor integración de la programación en la enseñanza de conceptos teóricos complejos.

Referencias

- [1] Morente, J. A., Salinas, A., Toledo-Redondo, S., Fornieles-Callejon, J., Mendez, A., & Portí, J.,
A New Experiment-Based Way to Introduce Fourier Transform and Time Domain-Frequency Domain Duality,
IEEE Transactions on Education, **56(4)** (2013) 400-406.
[<https://doi.org/10.1109/te.2013.2246164>].
- [2] Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H.,
Signals and Systems,
Prentice Hall International, 1997.
- [3] Reitz, J. R., Milford, F. J., & Christy, R. W.
Fundamentos de la teoría electromagnética,
Addison-Wesley, 1996.
- [4] Hill, C.
Learning Scientific Programming with Python
Cambridge University Press, 2016

- [5] Python, R. (2023, 20 noviembre). Jupyter Notebook: An Introduction.
<https://realpython.com/jupyter-notebook-introduction/>
- [6] Simmons, G. F,
Differential Equations with Applications and Historical Notes.
McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics, 1991
- [7] Jesús, F. M.
Circuitos eléctricos
PEARSON EDUCACIÓN, S.A. 2012
- [8] Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O.
Fundamentals of Electric Circuits.
McGraw-Hill Education, 2016
- [9] Dorf, R. C., & Svoboda, J. A.
Introduction to Electric Circuits.
Wiley, 2010
- [10] Ignacio F. Sánchez, Jesus F Fornieles & Alfonso Salinas E.
Técnicas Experimentales: Electromagnetismo Teoría y prácticas
- [11] Potrebic, M. M., Tosic, D. V., & Pejovic, P. V.
Understanding computation of impulse response in microwave software tool,
IEEE Transactions on Education, **53(4)** (2010) 547-555.
<https://doi.org/10.1109/te.2009.2032335>].
- [12] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R.
Discrete-Time Signal Processing. Pearson.
Prentice Hall International, 1999

A Apéndice

El enlace al repositorio de GitHub público hasta el día de la exposición del TFG es el siguiente: [TFG-Dualidad-Tiempo-Frecuencia-en-el-estudio-del-circuito-RC](#).

Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Física

Tutor/a: Alfonso Salinas Extremera

Departamento y Área de Conocimiento: Electromagnetismo y Física de la Materia- Electromagnetismo

Correo electrónico: asalinas@ugr.es

Cotutor/a:

Departamento y Área de Conocimiento:

Correo electrónico:

Título del Trabajo: Dualidad Tiempo-Frecuencia en el estudio del circuito RC

Tipología del Trabajo:

(Segun punto 3 de las Directrices del TFG aprobadas por Comisión Docente el 10/12/14)

(Marcar con X)

1. Revisión bibliográfica		4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio	X
2. Estudio de casos teórico-prácticos		5. Elaboración de un proyecto	
3. Trabajos experimentales		6. Trabajo relacionado con prácticas externas	

Breve descripción del trabajo: La práctica a elaborar pretende relacionar las prácticas de laboratorio “Carga-Descarga de un condensador” y “Respuesta en frecuencias de un circuito de primer orden RC” (asignatura de Circuitos Eléctricos de 2º curso) a través de la transformada de Fourier. Para ello se usará la transformada discreta de Fourier de los valores de voltaje de carga y descarga de un condensador para obtener la respuesta en frecuencias del circuito RC. La programación de la tarea se llevará a cabo usando el lenguaje Python y se presentará en formato notebook de Jupyter. Consistirá en el desarrollo de unos paquetes o funciones que salven la barrera del lenguaje de programación específico usado y permita al usuario de la práctica desarrollar algoritmos usando estos paquetes a modo de piezas de lego.

Objetivos planteados:

1. Aplicación práctica de la transformada discreta de Fourier en la conexión de los resultados de dos prácticas aparentemente diferentes
2. Obtención de la respuesta impulso de un sistema lineal
3. Aplicación práctica del teorema de muestreo y de la frecuencia de Nyquist
4. Comprobación experimental del fenómeno del “aliasing” y evidencia experimental de los principios de incertidumbre y de causalidad
5. Desarrollo de paquetes de Python y notebooks de Jupyter que permitan a los usuarios de la práctica centrarse en la física de esta y salvar dificultades asociadas al manejo del lenguaje de programación.

Metodología: El fundamente teórico de la práctica se encuentra en el artículo publicado en el año 2013 en IEEE Transactions on Education, “A New Experiment-Based Way to Introduce Fourier Transform and Time Domain-Frequency Domain Duality”. DOI: 10.1109/TE.2013.2246164.

Se usará el lenguaje Python porque permite una interacción directa con los datos y dispone de módulos de tratamiento de datos (Numpy) y salida gráfica (Matplotlib). Basándose en estos paquetes, se desarrollarán unas funciones que permitirán al usuario de la práctica escribir un programa a nivel superior para realizar los cálculos de la práctica y generar las salidas gráficas que estime oportunas. El material desarrollado se presentará en formato notebook de Jupyter que permite combinar código ejecutable y texto. También se implementarán otros notebooks que sirvan de manual de usuario de los paquetes o funciones desarrolladas.

Bibliografía:

Morente, J. A., Salinas, A., Toledo-Redondo, S., Fornieles-Callejón, J., Méndez, A., & Portí, J. (2013). A New Experiment-Based Way to Introduce Fourier Transform and Time Domain-Frequency Domain Duality. *IEEE Transactions on Education*, 56(4), 400–406. <https://doi.org/10.1109/TE.2013.2246164>

Lorena A. Barba, Lecia J. Barker, Douglas S. Blank, Jed Brown, Allen B. Downey, Timothy George, Lindsey J. Heagy, Kyle

T. Mandli, Jason K. Moore, David Lippert, Kyle E. Niemeyer, Ryan R. Watkins, Richard H. West, Elizabeth Wickes, Carol Willing, and Michael Zingale. (2019). **Teaching and Learning with Jupyter**. <https://jupyter4edu.github.io/jupyter-edu-book/index.html>

Hill, C. (2015). **Learning Scientific Programming with Python**. Cambridge University Press.

A rellenar sólo en el caso que el alumno sea quien realice la propuesta de TFG
Alumno/a propuesto/a:

Granada, 15 de mayo de 2023

Sello del Departamento