
Entregable Tema 2

Pablo Lechón

February 28, 2019

1

Encontrar los puntos singulares de los sistemas siguientes, linealizar las ecuaciones en su entorno y determinar la naturaleza de dichos puntos singulares.

El primer sistema es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_2^2)\end{aligned}\tag{1.1}$$

El sistema tiene un unico punto de equilibrio, el $[0,0]$. Para ver su estabilidad, podemos tener en cuenta el criterio de Routh-Hurwitz. La ecuación característica del sistema linealizado (es decir, de su Jacobiano) tiene la forma

$$|A - s\mathbb{I}| = s^2 - s + 1\tag{1.2}$$

Debido a que no todos sus coeficientes son positivos, el sistema no es estable. De hecho, debido a que su segundo coeficiente es negativo, las dos raices del polinomio caracteristico son inestables.

El segundo sistema es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1|x_1| \\ \dot{x}_2 &= 1 - x_1\end{aligned}\tag{1.3}$$

Su único punto de equilibrio es el $[1,1]$. Y la ecuación característica del Jacobiano correspondiente al mismo es

$$|A - s\mathbb{I}| = (s + 1)^2\tag{1.4}$$

Por lo que inmediatamente deducimos que el sistema es estable (su único punto de equilibrio lo es).

El tercer sistema es

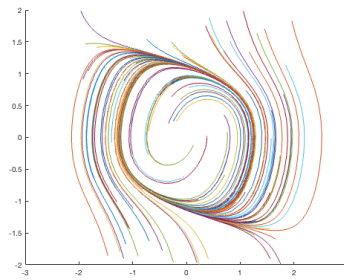
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1 - 1)\end{aligned}\tag{1.5}$$

Que tiene como puntos de equilibrio el $[0,0]$ y el $[1,1]$. La ecuación característica correspondiente al Jacobiano del punto $[0,0]$ es

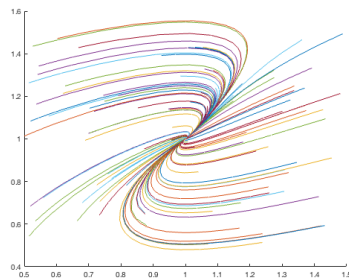
$$|A - s\mathbb{I}| = s^2 - 1\tag{1.6}$$

Uno de los coeficientes es 0 con lo que este criterio no asegura nada. Hemos de mirar los autovalores del Jacobiano, que son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ Por tanto, el $[0,0]$ es inestable.

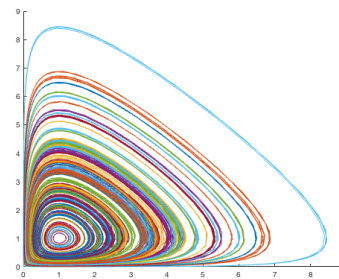
La ecuación característica correspondiente al segundo punto de equilibrio también tiene uno de sus coeficientes iguales a 0, y los autovalores son complejos. En concreto, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Por su naturaleza compleja, los autovalores no nos informan de la estabilidad del sistema. El tercer recurso que tenemos es simular muchas trayectorias para ver su comportamiento. A continuación se muestran 3 gráficas asociadas a los tres sistemas.



(a) Ciclo límite entorno al $[0,0]$



(b) Nodo estable $[1,1]$



(c) Centro

Figure 1.1: Mapa de fases de cada sistemas

Como vemos, el tercer sistema tiene un comportamiento oscilante que no es ni inestable, ni estable, ni cíclico.

2 LOTKA-VOLTERRA

Las ecuaciones de Volterra-Lotka para ecosistemas se pueden poner en la forma

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 - \mu x_1^2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2 - \tau x_2 \dot{x}_1 \quad (2.2)$$

donde el término en μ representa el efecto de las enfermedades y de la superpoblación sobre las presas y el término en τ modela el efecto retardado que la alimentación tiene sobre el depredador. Encontrar los puntos de equilibrio, linealizar en torno a aquel cuyas dos variables de estado son distintas de cero y mostrar como su estabilidad e inestabilidad depende de μ y τ . Discutir la posibilidad de existencia de un ciclo límite.

Para estudiar este sistema lo primero que vamos a hacer es linealizarlo. Esto es, desarrollar por Taylor a primer orden entorno a los puntos de equilibrio, o lo que es lo mismo, calcular el Jacobiano de nuestro sistema evaluado en esos puntos de equilibrio. El sistema tiene 3 puntos de equilibrio pero que vamos a estudiar es aquel con las dos componentes distintas de 0. Esta solución es

$$s_3 = [1, 1 - \mu] \quad (2.3)$$

Y el Jacobiano de este punto de equilibrio toma la forma

$$M = \begin{bmatrix} -\mu & -1 \\ 1 - \mu\tau(\mu - 1) - \mu & -\tau(\mu - 1) \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de este jacobiano toma la forma

$$D = s^2 + (\mu - \tau + \mu\tau)s + 1 - \mu \quad (2.4)$$

De este resultado deducimos que la estabilidad, dada por los coeficientes de la ecuación 1.5 depende, en efecto, de los parámetros tau y mu. Para que el sistema sea estable, todos los coeficientes de la ecuación característica han de ser mayores que 0. Esto se traduce en las siguientes condiciones para los parámetros

$$\tau < \frac{\mu}{1 - \mu} \quad \text{y} \quad 0 > \mu > 1 \quad (2.5)$$

De esta manera, vemos como no solo la estabilidad depende de tau y mu, si no que a su vez, estos tienen una dependencia intrínseca. Esto es, para que el coeficiente sea positivo, μ toma valores entre 0 y 1, mientras que τ lo hace en función de lo que valga μ .

Existen otros dos puntos de equilibrio en este sistema:

$$[\frac{1}{\mu}, 0] \quad \text{y} \quad [0, 0] \quad (2.6)$$

El $[0,0]$ es inestable, ya que independientemente de μ y τ , nunca llegamos a él. Análogamente se puede deducir la condición para el punto de equilibrio $[\frac{1}{\mu}, 0]$. Esto es

$$\mu \geq 1 \quad (2.7)$$

Podemos representar el mapa de fases para el caso en el que uno de los puntos de equilibrio es estable. Para tener estabilidad en el punto $[1, 1 - \mu]$, los valores que han de tomar los parámetros, de acuerdo con la expresión 1.6 pueden ser $\mu = 0.5$ $\tau = 0.5$. La Figura 1.1. (a) recoge esta representación. Como sólo hay un punto de equilibrio estable (en nuestro caso particular es $[1,0.5]$, las trayectorias mueren en él.

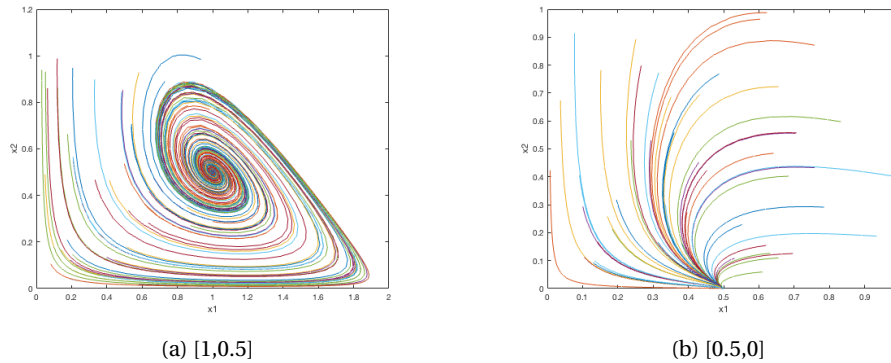


Figure 2.1: Casos en los que hay un solo punto de equilibrio estable

El segundo caso a estudiar es aquel en el que el unico punto de equilibrio estable es el punto $[\frac{1}{\mu}, 0]$. Valores de los parámetros para lograr esto pueden ser, teniendo en cuenta la expresión 1.8, $\mu = 2$ y $\tau = 0.5$

El mapa de fases correspondiente a este caso se representa en la Figura 1.1. (b)

El tercer y último caso a estudiar sería aquel en el que los tres puntos de equilibrio son inestables. Por ejemplo, para los valores $\mu = 0.5$ y $\tau = 2$ estos valores los hemos fijado teniendo en cuenta las imposiciones en las ecuaciones 1.6 y 1.8. Si representamos el mapa de fases (Figura 2.2) tenemos un ciclo límite.

Sabemos esto debido a que puntos iniciales tanto por arriba como por abajo del ciclo límite convergen a él.

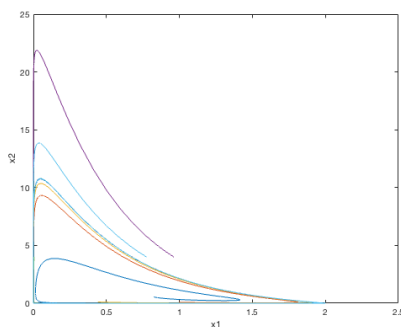


Figure 2.2: Ciclo límite para el caso de los tres puntos inestables

3 LORENTZ

Uno de los modelos de ecuaciones diferenciales más estudiadas como ejemplo de comportamiento caótico es el de Lorenz, que tienen la forma

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = (\lambda - x_2)x_1 - x_2 + u \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 \quad (3.3)$$

- Con $u=0$ el sistema presenta un movimiento caótico. Localizar los puntos singulares, linealizar en torno a ellos. Con $\sigma = 10$, $\lambda = 28$, $b = 8/3$ determinar la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio. Simular el comportamiento del sistema para distintas condiciones iniciales. Hacer su representación temporal y en el espacio de fases.
- Si en el modelo linealizado en torno al punto de equilibrio $[8.4853, 8.485, 27]^T$ y $u = 0$ se utiliza la ley de control $u = -kz_1$, siendo z_1 el primer estado del sistema lineal. Mostrar usando la ecuación característica del sistema lineal controlado que el sistema es asintóticamente estable para valores de $k > 0.50101..$
- Si aplicamos la ley de control al modelo no lineal se puede ver que para valores de k muy elevados el sistema tiende al punto de equilibrio de forma 'normal', sin embargo según k se aproxima al valor 0.50101 el comportamiento puede ser de tipo caótico durante un tiempo, pero finalmente converge al punto de equilibrio.

Se procede de la misma manera que en el ejercicio 1. Primero identificamos los puntos de equilibrio, que son 3

$$s_1 = [0, 0, 0], \quad s_2 = [-72^{1/2}, -72^{1/2}, 27], \quad s_3 = [72^{1/2}, 72^{1/2}, 27] \quad (3.4)$$

Como vemos, hay tres puntos de equilibrio. Esto es, tres combinaciones de x_1, x_2 y x_3 que hacen las derivadas 0. Una de ellas es la solución trivial, y las otras dos provienen de que el sistema es no lineal de 2º orden.

Para ver qué ocurre en cada punto, vemos qué pasa con un punto ligeramente alejado del equilibrio en cada caso, y ver cómo se comporta. Esto es equivalente a realizar una linealización del sistema en cada punto. La diferencia es que esta vez tenemos ya los parámetros, así que no hace falta hacerlo analíticamente.

A todos los puntos de equilibrio se les añade un ruido de la forma

$$x_0 = s_i + \delta_0 \quad (3.5)$$

obteniendo así las condiciones iniciales $[\delta_0, \delta_0, \delta_0]$, $[-72^{1/2} + \delta_0, -72^{1/2} + \delta_0, 27 + \delta_0]$, $[72^{1/2} + \delta_0, 72^{1/2} + \delta_0, 27 + \delta_0]$

A partir de estas condiciones iniciales se representó el mapa de fases correspondiente a cada una de ellas.

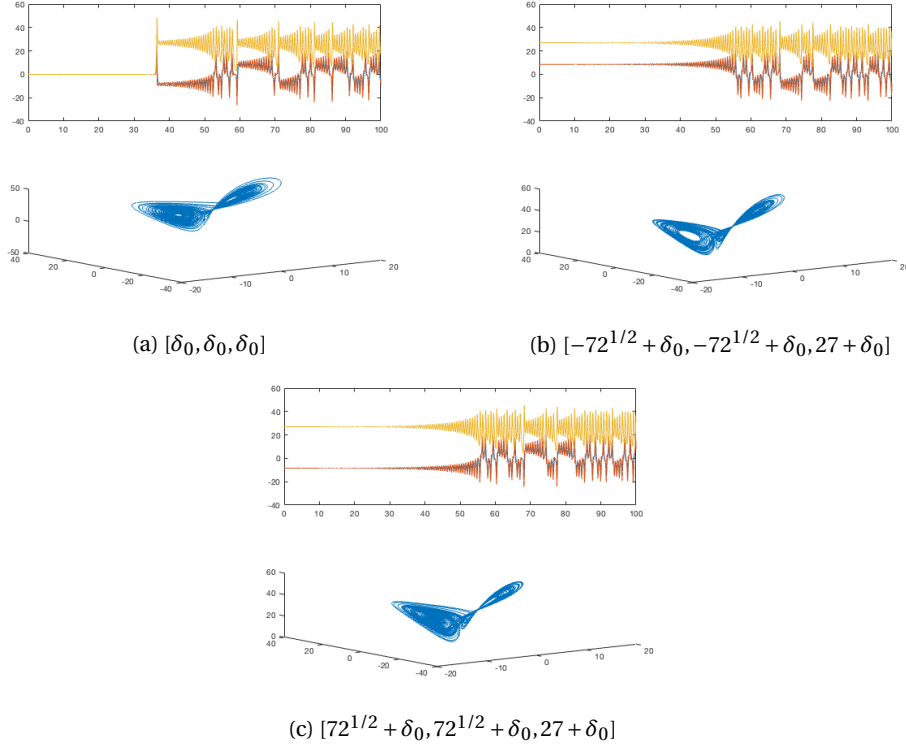


Figure 3.1: Espacios de fases para perturbaciones a los tres puntos de equilibrio

Podemos ver que los tres son puntos de equilibrio inestables en principio. Analíticamente podríamos haberlo predicho, si evaluamos los autovalores de las dos soluciones no triviales, vemos que tenemos partes reales positivas, lo cual nos inestabiliza la situación.

$$\lambda_{i,0} = [-2.67, -22.82, 11.83] \quad (3.6)$$

$$\lambda_{i,1} = [-13.85, 0.09 - 10.1i, 0.09 + 10.1i] \quad (3.7)$$

$$\lambda_{i,2} = [-13.85, 0.09 - 10.1i, 0.09 + 10.1i] \quad (3.8)$$

Podemos observar que la parte real del autovalor positivo de la solución trivial es mucho mayor que la parte real del autovalor positivo de las otras dos soluciones. Podemos afirmar entonces que el $[0,0,0]$ es más inestable que los otros dos. Esto se aprecia en la figura 2.1, ya que la figura (a) se desestabiliza mucho antes que las figuras (b) y (c).

A continuación pasamos a linealizar el modelo de Lorentz en torno al punto de equilibrio

$[6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27]^T$. En primer lugar se calcula el Jacobiano del sistema, evaluado en dicho punto de equilibrio, esto es, obtenemos la matriz A del nuevo sistema linealizado

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

A este sistema se le añade un término de control de la forma $u = -kz_1$, donde z_1 es el primer estado del sistema linealizado, es decir, $z_1 = x_1 - x_{1,eq}$. Si hacemos esto, la matriz A se transforma en \bar{A}

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1-k & -1 & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, tenemos que el sistema linealizado, con el término de control toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1-k & -1 & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{eq,1} \\ x_2 - x_{eq,2} \\ x_3 - x_{eq,3} \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar los autovalores de la matriz \bar{A} en función del parámetro k resolviendo el polinomio característico

$$|\bar{A} - \lambda \mathbb{I}| = s^3 + \frac{41}{3}s^2 + s\left(\frac{304}{3} + 10k\right) + 1440 + \frac{80}{3}k = 0 \quad (3.9)$$

Se resolvió numéricamente para muchos k, empleando el bucle

```
for k = 0:0.0001:1
v(:, i) = roots([-1 -41/3 -10*k-304/3 -80*k/3 -1440]);
i = i+1;
end
```

Esto es, se obtuvo el vector v , que tiene 3 columnas, cada una correspondiente a un autovalor del sistema. Las filas del vector v son los autovalores calculados para cada valor de k. Los valores del parámetro se han dado convenientemente para que engloben al punto de inflexión en el que los autovalores pasan de ser negativos a ser positivos. Para hallar el valor de k para el que pasa esto de manera lo más exacta posible se interpoló con el comando $x01 = \text{interp1}(v(:, 2), k, 0)$. De esta manera, se obtuvo un valor de

$$k = 0.50101$$

Para valores mayores que el obtenido, los autovalores son todos negativos, siendo el sistema estable. Si pasa lo contrario, obtenemos dos autovalores positivos y el sistema es en consecuencia inestable.

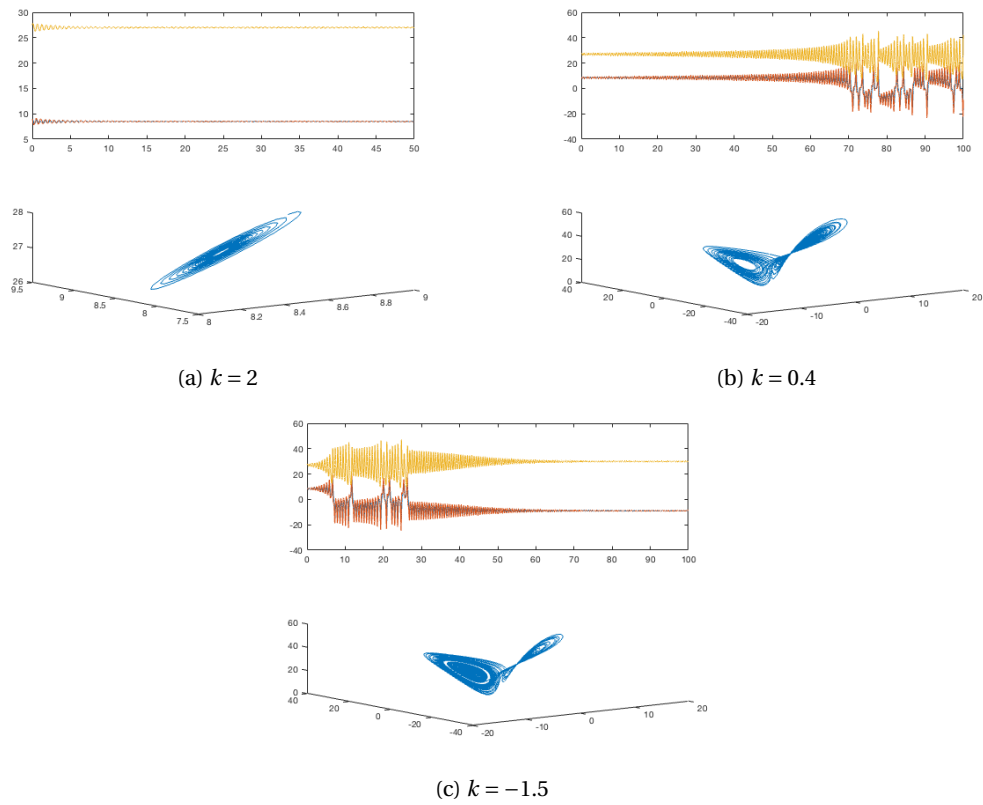


Figure 3.2: Espacios de fases para distintos valores de k

Si aplicamos la ley de control al modelo de Lorentz original, es decir, el no lineal, obtenemos los comportamientos recogidos en la Figura 2.2

Como vemos para valores de k menores que el calculado, tenemos un comportamiento caótico al cabo de un tiempo suficientemente largo. Por el contrario, para un valor de $k = 2$ obtenemos un comportamiento estable. Por último, podemos ver un caso en el que el valor de k se acerca al de 0.5101, y el comportamiento, inicialmente caótico, converge hacia el punto de equilibrio.

4 RØSSLER

El modelo caótico de Rossler tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - a x_2 \\ \dot{x}_3 &= b x_1 - c x_3\end{aligned}\tag{4.1}$$

Localizar los puntos singulares, linealizar en torno a ellos. Para $a=0.1, b=0$ y $c=14$ discutir la estabilidad e inestabilidad de los puntos de equilibrio. Simular el comportamiento del sistema para distintas condiciones iniciales. Hacer su representación temporal y en el espacio de fases.

El primer punto de equilibrio es el $[0,0,0]$. Si linealizamos entorno a dicho punto, obtenemos el siguiente jacobiano

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & -14 \end{bmatrix}\tag{4.2}$$

Sus autovalores son aproximadamente $\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = -14, \lambda_3 = 0.1$. Como uno de ellos es negativo, concluimos que el punto $[0,0,0]$ es inestable.

El segundo punto de equilibrio es el $[-0.31, 1, 0.0023]$, y su jacobiano es

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.0071 & 0.32 & -1 \\ -0.63 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & -14 \end{bmatrix}\tag{4.3}$$

Y sus autovalores son $[-14, -0.05 - 0.44i, -0.05 + 0.44i]$. Se observa que todas las partes reales de los autovalores del sistema linealizado entorno al segundo punto de equilibrio son negativas. Esto implica que el segundo punto de equilibrio es estable.

El tercer punto de equilibrio es el $[0.32, 1, 0.0023]$, y su jacobiano es

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0.0071 & -0.32 & -1 \\ 0.63 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & -14 \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

Y sus autovalores son los mismos que los de J_1 , por lo que el punto de equilibrio es estable. Si generamos condiciones iniciales aleatorias y hacemos su representación temporal y en el espacio de fases, obtenemos

Como se aprecia en la Figura 3.1, podemos observar cómo el sistema tiende a estabilizarse después de un transitorio caótico acabando en los dos puntos de equilibrio estables ya mencionados. La evolución temporal de los estados muestra también cómo estos se amortiguan hasta llegar a una u otra componente de los puntos de equilibrio. Nótese que la componente

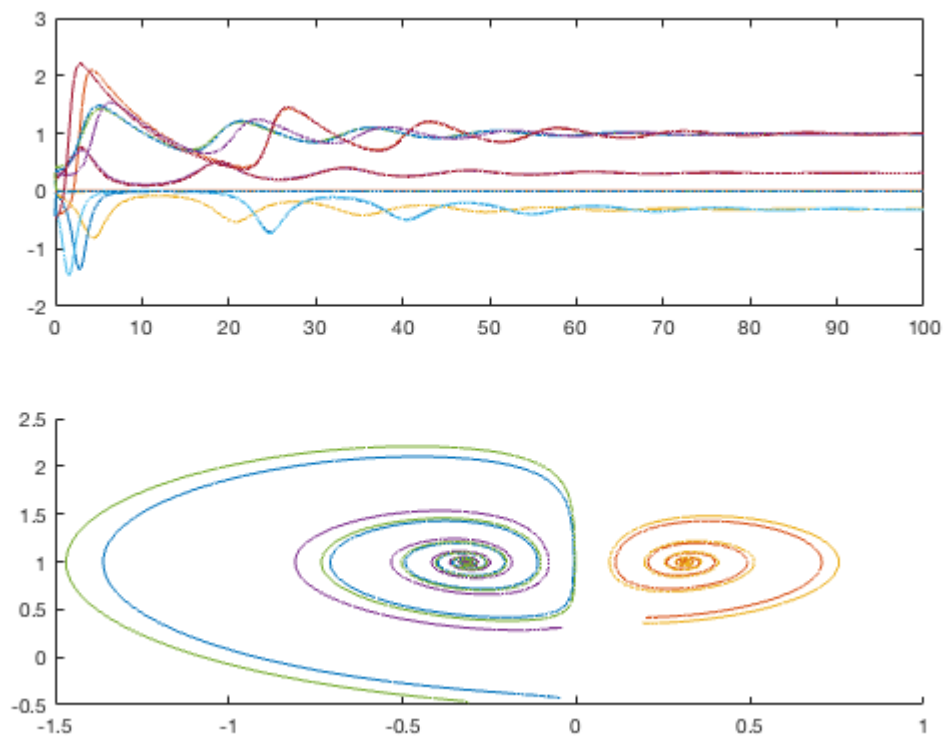


Figure 4.1: Evolución temporal de los estados y mapa de fases.

2 de ambos puntos de equilibrio es la misma, por tanto no varía en la representación temporal. Esta similitud también se puede ver en el mapa de fases, en el que ambos puntos de equilibrio se encuentran a la misma altura.

Considérese el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 - 1) \quad (5.2)$$

Encontrar su dominio de atracción.

Probamos como tentativa de función de Lyapunov

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \quad (5.3)$$

que es definida positiva.

Su derivada total se calcula como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \quad (5.4)$$

Luego

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_2^2(x_1^2 - 1) \quad (5.5)$$

Para que el punto de equilibrio de este sistema, $[0,0]$ sea estable, $-1 < x_1 < 1$, ya que este es el dominio de x_1 para el que $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$. Entonces,

$$\boxed{|x_1| < 1} \quad (5.6)$$

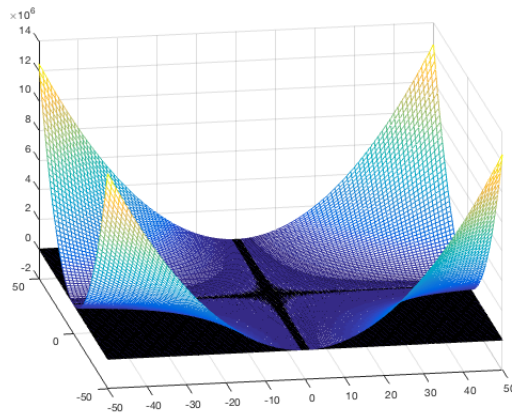


Figure 5.1: Representación 3D del corte del plano $Z=0$ con la superficie $\dot{V}(x)$

En la figura observamos una banda negra vertical, que tiene de anchura, en efeco , 2, es decir, comprende al conjunto $[-1,1]$. De esta gráfica también podemos sacar que $\dot{V}(x)$ es negativa para todo valor de x_2 siempre que x_1 cumpla la condición (5.6).

Podemos concluir entonces que un dominio de atracción en el que seguro que hay estabilidad es

$$|r| < 1$$

6

Demostrar la estabilidad asintótica global del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - \gamma x_2, \gamma > 0\end{aligned}\tag{6.1}$$

(Usar $V(x) = x_1^2 + x_2^2$)

Si derivamos la función de Liapunov propuesta obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1x_2 - 2x_2x_1^3 - 2\gamma x_2^2 < 0 \\ x_2 &> \frac{(x_1 - x_2^3)}{\gamma}\end{aligned}\tag{6.2}$$

Esta condición no se cumple en todo el espacio, por lo que con esta función de Liapunov no se puede demostrar la estabilidad asintótica global.

Si proponemos otra función, por ejemplo

$$V(x) = x_1^4 + 2x_2^2\tag{6.3}$$

Obtenemos que la derivada total es

$$\dot{V}(x) = -2\gamma x_2^2 \leq 0, \text{ siempre}\tag{6.4}$$

Llegados a este punto, para ver el dominio en el que es negativa, podemos pintarla, pero esta vez se opta por aplicar el teorema de Krasovski-Lasalle, ya que la derivada es semidefinida negativa. El conjunto S, para el que la derivada se anula es

$$S = \{\mathbf{x} \in D(r) : x_2 = 0\}\tag{6.5}$$

Luego tenemos que buscar el mayor conjunto invariante incluido en S, es decir, que cumpla la condición $x_2 = 0$. Este conjunto es el que cumple $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Por tanto se deduce por el teorema que el $[0,0]$ es asintóticamente estable.

Considérese el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1^2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1 x_2 + 3x_2^2\end{aligned}\quad (7.1)$$

Linealizar el sistema y encontrar una función de Liapunov para el sistema lineal. Aplicar dicha función para encontrar el tipo de estabilidad del sistema no lineal. Encontrar su dominio de atracción.

Si linealizamos el sistema, obtenemos una nueva matriz A

$$A = J_{[0,0]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si resolvemos la ecuación de Liapunov, tomando como matriz Q la matriz identidad, obtenemos una matriz P, y haciendo $[x_1, x_2] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se obtiene la función de Liapunov

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \quad (7.2)$$

que es definida positiva.

Si derivamos esta función aplicada al sistema lineal, sale lo que esperamos, $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$, es decir

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 \quad (7.3)$$

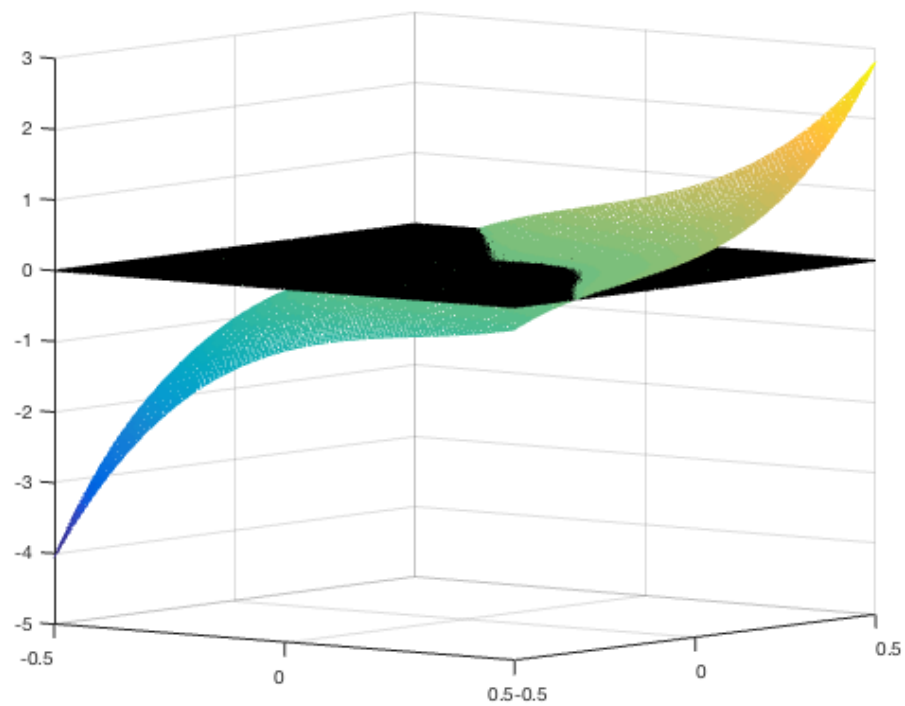
Que es definida negativa siempre.

Sin embargo, al aplicarla al sistema no lineal las cosas no son tan bonitas. La forma cuadrática resultante es como sigue

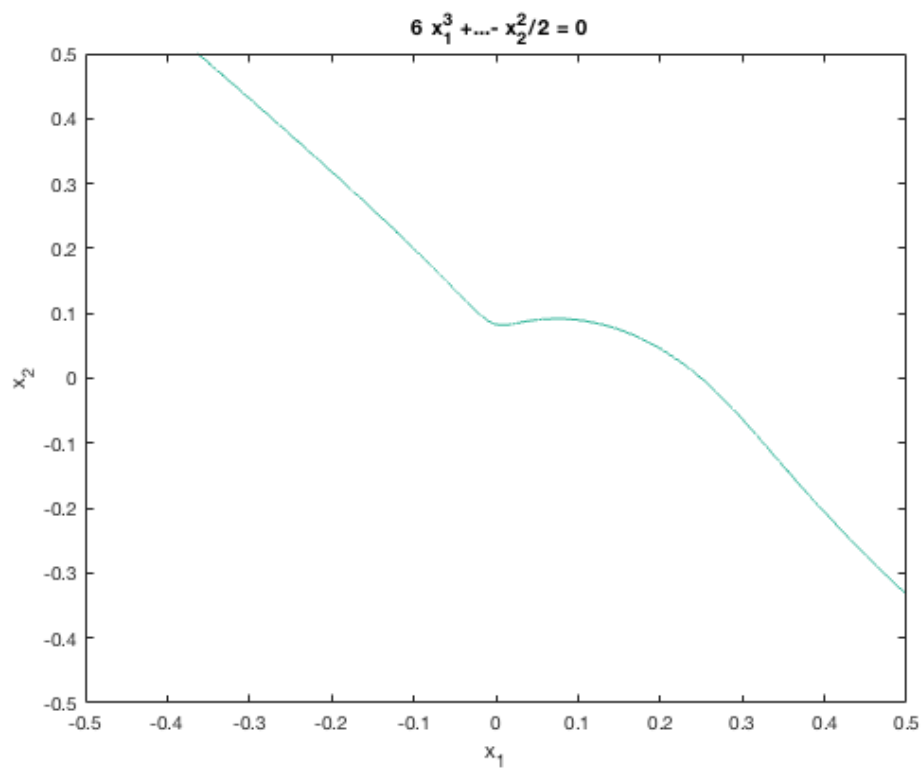
$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} (3x_1^3 + 3x_3^3 - 3x_1^2 - x_2^2 + 15x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2 - x_1 x_2) \quad (7.4)$$

Es difícil establecer un dominio de atracción para el cual esta función se hace negativa analíticamente. En caso de poder hacerlo, sería una larga expresión y no nos daría información. Por ello es más útil representarla junto con el plano coordenado $Z = 0$ para ver cuándo está por debajo del mismo. En esa región el sistema será estable. Si hacemos esto obtenemos la Figura 5.1

Como vemos, la curva que delimita la región de estabilidad no tiene una forma analítica sencilla.



(a) Representacion 3D de $\hat{V}(x)$ y el plano $Z = 0$, para ver cuándo es negativa.



(b) Representación implícita de la curva de corte entre el plano y la superficie de la figura (a)

Figure 7.1

Tomando

$$V(x) = 1 - \cos x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (8.1)$$

como función de Liapunov del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 - \epsilon x_2, \quad \epsilon > 0 \end{aligned}$$

encontrar el mayor valor V_0 de modo que la región conexa de la forma $V(x) < V_0$ es un dominio de atracción del punto de equilibrio $[0,0]$.

Si derivamos la función de Liapunov propuesta obtenemos

$$\dot{V}(x) = -\epsilon x_2^2 \quad (8.2)$$

Esto es, $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x$, lo que implica que el sistema es estable de forma local en el punto $[0,0]$. Para averiguar V_0 hemos de ver si el sistema es asintóticamente estable en un dominio $D(r)$. Para esto utilizamos el teorema de K-L, ya que la función $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa. Existe un conjunto compacto $D(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq V_0\}$ en el que se verifica que $V(x)$ es definida positiva, y $\dot{V}(x) \leq 0$. Este conjunto es aquel dado por el intervalo $[-\pi, \pi]$, ya que en dicho intervalo la función de Liapunov cumple estas dos características.

El conjunto S en el que se anula la derivada total de la función de Liapunov está dado por

$$S = \{\mathbf{x} \in D(r) : x_2 = 0\} \quad (8.3)$$

La condición impuesta por S implica que $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$. Entonces, deducimos de aquí que

$$\sin x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (8.4)$$

Como se pregunta por el origen en particular, $n = 0$, y S sólo tiene como conjunto invariante al punto de equilibrio $[0,0]$. Esto implica, por el teorema, que éste es asintóticamente estable.

Así pues, podemos establecer el máximo V_0 para el cuál el sistema converge al punto de equilibrio $[0,0]$

$$V_0 = \pi$$

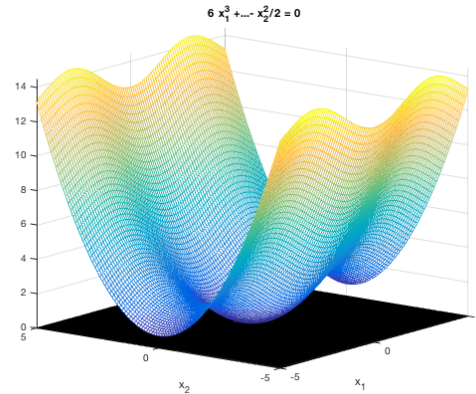


Figure 8.1: Representación de $V(x)$

Por último, podemos hacer una comprobación en Matlab. Si integramos el sistema dinámico, y generamos trayectorias para condiciones iniciales aleatorias, obtenemos la Figura 6.1

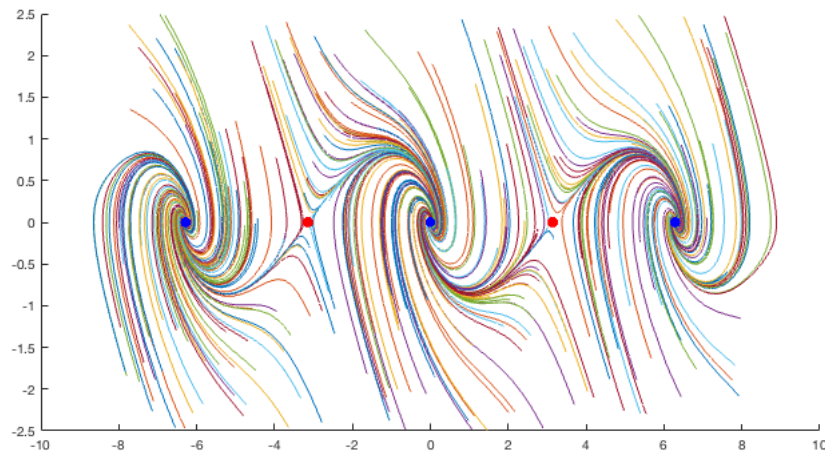


Figure 8.2: 200 Trayectorias para condiciones iniciales aleatorias

En la figura 8.2 se han representado aquellos puntos de equilibrio que suponen una cuenca de atracción en azul. Y en rojo los que no. Estos puntos son puntos silla. El radio de la cuenca de atracción es π .

Encontrar un dominio de atracción para el sistema

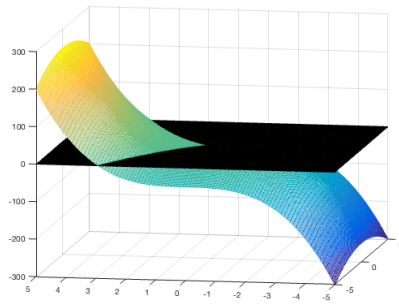
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2^2\end{aligned}\tag{9.1}$$

usando la función de Liapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

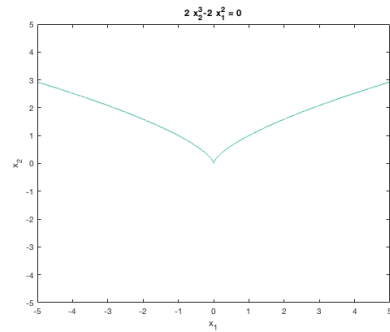
Para encontrar el dominio de atracción imponemos que la derivada total de $V(x)$ sea negativa. Con este constreñimiento, obtenemos

$$\dot{V}(x) = 2(x_2^3 - x_1^2) < 0\tag{9.2}$$

Si dibujamos esta condición obtenemos la Figura 6.1.



(a) Representacion 3D de $\dot{V}(x)$ y el plano $Z = 0$



(b) Representación implícita de la curva de corte

Figure 9.1

Así pues, por encima de la línea pintada en verde, el sistema no es estable, mientras que para valores de x_1 y x_2 que estén por debajo de tal línea, el punto de equilibrio sí es estable, siendo éste el dominio de atracción.

Resolver la ecuación de Lyapunov

$$LA + A^T L = -I \quad (10.1)$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

y mostrar que la solución es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $b > 0$.

En este caso no podemos aplicar el comando de Matlab `lyap(L', I)` debido a que tenemos expresiones simbólicas a y b , y este comando no funciona con este tipo de inputs.

Así pues, lo resolvemos a manubrio. En primer lugar calculamos las matrices en ambos términos de la ecuación de Lyapunov. Después igualamos término a término y obtenemos tres ecuaciones, ya que dos de ellas son la misma debido a que las matrices son simétricas. Esto es;

$$\begin{cases} -2by = -1 \\ x - ay - bz = 0 \\ 2(y - az) = -1 \end{cases}$$

Si expresamos este sistema matricialmente obtenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & -2b & 0 \\ 1 & -a & -b \\ 0 & 2 & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resuelto en Matlab con el comando `linsolve(A,B)` tiene como solución

$$x = L_{11} = \frac{a^2 + b^2 + b}{2ab}$$

$$y = L_{12} = \frac{1}{2b}$$

$$z = L_{22} = \frac{b+1}{2ab}$$

Esto es, la matriz L toma la forma

$$L = \begin{bmatrix} \frac{a^2 + b^2 + b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{b+1}{2ab} \end{bmatrix}$$

Para demostrar que es definida positiva para $a > 0$ $b > 0$ podemos ver para qué valores de a y b su traza y su determinante son positivos

$$|L| = \frac{(a^2 + b^2 + b)(b + 1)}{(2ab)^2} - \frac{1}{(2b)^2} > 0 \quad (10.2)$$

$$Tr(L) = \frac{a^2 + b^2 + 2b + 1}{2ab} > 0 \quad (10.3)$$

De estas inecuaciones podemos sacar varias condiciones. A partir de la ecuación (4.2) llegamos a la expresión

$$b(a^2 + (b + 1)^2) > 0 \quad , \quad \boxed{b > 0} \quad (10.4)$$

Teniendo esta restricción en cuenta, si nos fijamos ahora en la ecuación (4.3) deducimos inmediatamente que para que la expresión sea positiva, $\boxed{a > 0}$. Quedando así mostrado lo pedido en el ejercicio.

Considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1 x_2\end{aligned}\tag{11.1}$$

- Usar el primer método de Liapunov para estudiar la estabilidad en el origen.
- Encontrar una función de Liapunov para el sistema linealizado.
- Usar la función de Liapunov encontrada en el apartado anterior para obtener condiciones que definan una region en torno al origen en el cual las trayectorias tiendan asintóticamente al origen en el sistema no lineal.

Si linealizamos el sistema, obtenemos una nueva matriz A

$$A = J_{[0,0]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si resolvemos la ecuación de Liapunov, tomando como matriz Q la matriz identidad, obtenemos una matriz P, y haciendo $[x_1, x_2] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se obtiene la función de Liapunov

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\tag{11.2}$$

que es definida positiva.

Si derivamos esta función aplicada al sistema lineal, sale lo que esperamos, $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$, es decir

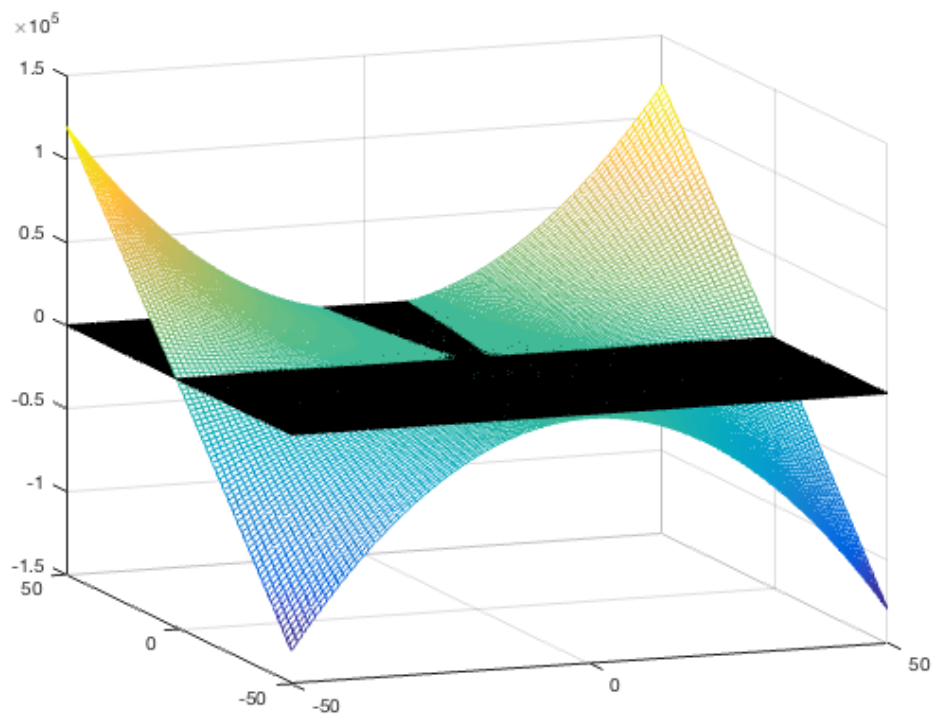
$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2\tag{11.3}$$

Que es definida negativa siempre.

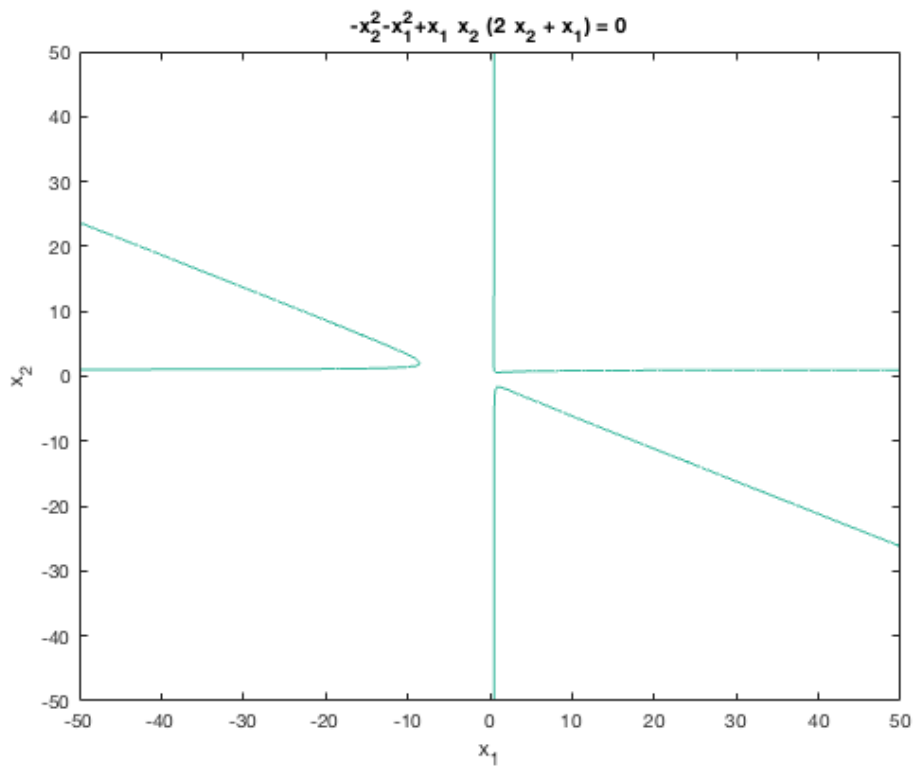
Si aplicamos esta función de Liapunov al sistema (7.1), tenemos que ver cuál es el dominio de $\dot{V}(x)$.

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2(2x_2 + x_1)\tag{11.4}$$

Para ver cuándo $\dot{V}(x)$ es negativa pintamos la superficie y el plano en el mismo gráfico para ver el corte. Además pintamos el implicit plot, que es la curva de corte entre estas dos superficies. Para ver dónde es negativa nos fijamos en la Figura 7.1 (a).



(a) Representacion 3D de $\hat{V}(x)$ y el plano $Z = 0$, para ver cuándo es negativa.



(b) Representación implícita de la curva de corte entre el plano y la superficie de la figura (a)

Figure 11.1