PABLO LÓPEZ LANDEROS

178863

EXAMEN 1

① P.D. Media muestral de $\vec{x}$ MIN $f(a)$.

$$f(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i a + a^2) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + na^2\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(a)}{\partial a} = \frac{1}{n}\left\{-2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2na\right\}$$ ahora, para ver que es pto. crítico : $\frac{\partial f(a)}{\partial a} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2na\right) = 0 \iff -2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2na = 0 \iff 2\left(an - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\iff an - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \iff a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \iff a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Veamos que es MIN:

$$f'(a) = \frac{1}{n}\left\{-2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2na\right\} \Rightarrow f''(a) = \frac{1}{\cancel{n}}(2\cancel{n}) = 2 \Rightarrow f''(a) > 0 \ \forall a$$

$\therefore$ $a = \bar{x}$ es un <u>MÍNIMO</u>

② P.D. $\text{Cuantil}_{h(\vec{x})}(\alpha) = h(\text{Cuantil}_{\vec{x}}(\alpha))$

DEF $\text{Cuantil}_{x}(\alpha) = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$

Definición tomada de: "Distribution and Quantile Functions"
Autor: Jean-Marie Dufour

Tomemos entonces:

$h(\text{Cuantil}_{\vec{x}}(\alpha)) = h(\inf\{\vec{x} : F(x) \geq \alpha\}) = h(\inf\{x : P\{X \leq x\} \geq \alpha\}) = \star$

•) pero al ser h no decreciente: $h(\inf(x)) = \inf(h(x))$ (por ANÁLISIS 1)

$\star = \inf\{h(x) : P\{X \leq h(x)\} \geq \alpha\} = \inf\{h(x) : F(h(x)) \geq \alpha)\} \underset{\text{por def}}{=} \text{Cuantil}_{\vec{h}(x)}(\alpha)$.

③ : $Cov(\hat{F}(x), \hat{F}(y))$

Calcular

<u>Por def</u> : $\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}^{(x_i)}$

$$\Rightarrow cov(\hat{F}(x), \hat{F}(y)) = cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}^{(x_i)}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{(-\infty,y]}^{(y_j)}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(cov\, 1_{(-\infty,x]}^{(x_i)}, cov\, 1_{(-\infty,y]}^{(y_j)}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i}\sum_{j} E\left[1_{(-\infty,x]}^{x_i} 1_{(-\infty,y]}^{y_j}\right] - E\left[1_{(-\infty,x]}^{(x_i)}\right] E\left[1_{(-\infty,y]}^{y_j}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big\{\sum_{i}\sum_{j}\left(1\cdot P\{x_i \leq x, y_i \leq y\} + 0\cdot P\{x_i > x, y_i > y\}\right)$$

$$- \left(1\cdot P\{x_i \leq x\} + 0\cdot P\{x_i > x\}\right)\left(1\cdot P\{y_j \leq y\} + 0\cdot P\{y_j > y\}\right)\Big\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(P\{x_i \leq x, y_i \leq y\} - P\{x_i \leq x\}\cdot P\{y_j \leq y\}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{x,y}(x,y) - F_x(x)\cdot F_y(y)\right)\Big\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2 F_{x,y}(x,y) - n^2 F_x(x)\cdot F_y(y)\right)$$

$$= F_{x,y}(x,y) - F_x(x)\cdot F_y(y)$$

(4) comparaciones 2 a 2 entre una lista

Hay orden parcial, es decir: entre x y y ocurre $x \leq y$ ó $y \leq x$

y no transitividad $(x \leq y \wedge y \leq z) \not\Rightarrow (x \leq z)$

Construir $\rho_{\perp}$ τ:

$\rho_{\perp} = 1$

si sus preferencias son iguales

$\rho_{\perp} = -1$

si son opuestas

Podemos construir un mecanismo dónde asignamos a cada alimento una categoría en <u>Dulzura</u> y <u>Nivel de Grasa</u>. (cada una del 1 al 5)

=> construiremos un mecanismo entonces en dónde

$$\boxed{\rho_{\perp} = \frac{N_s - N_d}{N_s + N_d}}$$

dónde N_s es el # de pares en dónde un alimento es más dulce <u>y</u> más grasoso $(R(X_i) < R(X_j)$ y $R(Y_i) < R(Y_j))$ es decir # de casos concordantes.

y N_d es el # de casos discordantes, es decir, un par es menos dulce <u>ó</u> y más grasoso ó viceversa, ó si es un empate.

En el ejemplo: $X \triangleq$ nivel de dulzura
$Y \triangleq$ nivel de grasa =>

ANA	BETO	concord ó disc.
(1,3)	(1,3)	o
(3,1)	(5,4)	c
(1,3)	(3,1)	d
(1,3)	(1,3)	o
(5,4)	(2,5)	d