PABLO LOPEZ
LANDEROS
CU: 178863

CONTROL 2

① En MAS C/R sea $n_{únicos}$ la cardinalidad del conjunto $\{X_K \mid X_K \in S\}$; es decir, # de valores únicos que se obtuvieron en el muestreo. Det. $E[n_{únicos}]$

Para esto podemos definir primero el conjunto $D := \{X_K \mid X_K \in S\}$. Luego entonces, definimos la variable indicadora:

$$1_D^{x_j} = \begin{cases} 1 & \text{si se obtiene } x_j \text{ en } S \text{ al menos una vez} \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[1_D^{x_j}] = 1 \cdot P\{1_D^{x_j} = 1\} + 0 \cdot P\{1_D^{x_j} = 0\}$$

$$= P\{1_D^{x_j}\} = P\{x_j \text{ esté en la muestra al menos una vez}\}$$

$$= 1 - P\{x_j \notin \text{en la muestra}\} = \star$$

•) Ahora en MAS C/Reemplazo, por def. la prob. de que $x_j \notin$ en la muestra es:

$(1 - 1/N)^m$ que en nuestro problema es $(1 - 1/n)^K = \left(\frac{n-1}{n}\right)^K$

$$\Rightarrow \star = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^K$$

•) Sean $n_{únicos} := \sum_{j=1}^{n} 1_D^{x_j} \Rightarrow E\left[\sum_{j=1}^{n} 1_D^{x_j}\right] = \sum_{K=1}^{n} E[1_D^{x_j}] = \sum_{i=1}^{n} 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^K$

$$= n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^K\right) = n - \frac{(n-1)^K}{n^{K-1}}$$

Escaneado con CamScanner

PABLO LÓPEZ LANDEROS
C.U. : 178863

CONTROL 2

① Sea S una muestra bajo diseño Bernoulli parámetro π.
Sea $n(S) = \#S$ la v.a. del tamaño de S:
Dem. que condicional en que $n(S) = n$ la prob. de que $S=s$ es la misma que bajo MAS.

Como es diseño BERNOULLI $\Rightarrow n(S) \sim Binomial(N, \pi)$

Condicionamos:

$$P\{S=s \mid n(S)=n\} \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{P\{S=s, n(S)=n\}}{P\{n(S)=n\}} = \frac{\pi^n (1-\pi)^{N-n}}{\binom{N}{n}\pi^n (1-\pi)^{N-n}}$$

Porque $n(S) \sim Binomial(N, \pi)$ y en la parte de arriba queremos una muestra s de tamaño n por eso omitimos el "$\binom{N}{n}$".

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} = P\{S=s\} \quad \square$$

Bajo MAS ya que por def:

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} = P\{S=s\} = \begin{cases} 1/\binom{N}{n} & \text{si } \#S=n \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

③ Sea $X_i \sim Binomial(10, .01)$. $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n(S)} X_i \sim Binomial(N \cdot 10, .01)$

dónde X_i es # de veces que se incluye al elemento i en

↳ Intuición: suma a muestreo Bernoulli

$\Rightarrow$ el Tamaño de muestra es $n(S) \sim Binomial(N, \pi_K)$ donde $\pi_k \sim Binomial(10, .01)$

$\therefore$ $n(S)$ es MULTINOMIAL (N, π_k)

ya que $P\{X_k \in S\} \sim Binomial$

$\sim B(10, .01)$

$\therefore$ $E[n(S)] = E[E[n(S) | \pi_k = k]] = E[N \cdot \pi_k | \pi_k = k]$

$= E[N \cdot 10(.01)]$

$= 100{,}000\,(10)(.01)$

$= 1{,}000{,}000\,(.01)$

$= 10{,}000$

El tamaño promedio de la muestra será de 10,000

b)

Escaneado con CamScanner