Proyecto 2

Optimización Numérica

Francisco Huerta Fernández C.U. 166040
Eric Bazaldúa Miñana C.U. 155279
Pablo López Landeros C.U. 178863

Profesor Zeferino Parada García

05 · noviembre · 2020

Índice

Objetivo

El objetivo del proyecto consiste en minimizar la función:

$$\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=i+1}^{np} \frac{1}{||u_i - u_j||_2}$$

Sujeta a :

$$u_i^t u_i = 1, i = 1, 2, ..., np$$

Modelo

Una vez entrando en el ciclo de subproblemas, utilizamos el código *pc.m* para resolver el subproblema cuadrático:

$$\text{Min: } (1/2)p^t Bp + \nabla f_k^t p$$
$$\text{Sujeto a: } A_k p + h_k = 0$$

que nos devuelve p_k el punto mínimo del subproblema anterior y L el Lagrangiano del subproblema.

Para hacer los cálculos necesarios dentro del algoritmo de programación cuadrática sucesiva de la jacobiana y el gradiente, utilizamos las funciones *jacobiana.m* y *gradiente.m* que fueron hechas en clase.

Posteriormente α_k se encontró haciendo *Line Search*.

Una vez teniendo estas variables, utilizamos la Actualización BFGS para aproximar la matriz Hessiana en cada iteración.

Ahora para actualizar el nuevo multiplicador de Lagrange λ_{k+1}, necesitamos minimizar:

$$\text{Min } ||\nabla f_{k+1} + A_{k+1}^T \lambda||_2$$
$$\lambda \in \mathbb{R}^n$$

Pero sabemos que la λ que minimiza es:

$$\lambda_{k+1} = -(AA')^{-1}A\nabla f_k$$

Demostración:
Suponer que $Rank(A) = m$, donde A es la matriz Jacobiana asociada a h. Entonces por demostrar que

$$\lambda^* = -(AA')^{-1}A\nabla f_k$$

.
Recordemos que minimizar una norma equivale a minimizar el cuadrado de dicha norma. Entonces:

$$\begin{aligned}||\nabla f_k + A'\lambda||_2^2 &= (\nabla f_k + A'\lambda)'(\nabla f_k + A'\lambda)\\ &= (\nabla f_k' + \lambda' A)'(\nabla f_k + A'\lambda)\\ &= \nabla f_k'\nabla f_k + 2'A\nabla f_k + \lambda' AA'\end{aligned}$$

Derivando respecto a λ :

$$2A\nabla f_k + 2AA'\lambda \tag{1}$$

Igualando a 0:

$$\begin{aligned}&2AA'\lambda + 2A\nabla f_k = 0\\ &\Rightarrow AA'\lambda = -A\nabla f_k\\ &\text{pero como: } AA'\text{es s.p.d :}\\ &\Rightarrow \lambda = -(AA')^{-1}A\nabla f_k \text{ es un punto crítico.}\end{aligned}$$

Ahora, derivando (1) respecto a λ obtenemos:

$$2AA'$$

lo que asegura que la λ obtenida es en efecto el único mínimo, pues AA' es simétrica positiva definida.
Así:

$$\lambda^* = -(AA')^{-1}A\nabla f_k$$

es el punto que minimiza $||\nabla f_k + A'\lambda||_2^2$

Códigos

- *$fesfera.m$*: Este script establece la función de repulsión para $\frac{n}{3}$ puntos en la esfera unitaria de dimensión 3.

- *$hesfera.m$*: Script que genera las restricciones del problema para los np puntos dentro de la esfera unitaria. Recordemos que en nuestro problema, las np restricciones son

$$h(x) = u_i^T u_i - 1 = 0$$

- *pc.m*: Script visto en clase. Regresa dos vectores en $\mathbb{R}^n$; un vector x la solución del problema cuadrático de la forma:

$$\begin{aligned} &\text{MIN: } \frac{1}{2}x'Qx + c'x \\ &\text{S.A.: } Ax = b \end{aligned}$$

  y λ, su multiplicador de Lagrange asociado.

- *pcsglobal.m*: Script que implementa el método de programación cuadrática sucesiva. Utilizamos búsqueda en línea, función de mérito L_1 y la actualización BFGS de la matriz Hessiana para resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\text{MIN: } f(x) \\ &\text{S.A.: } h(x) = 0 \end{aligned}$$

- *gradiente.m*: Código visto en clase para calcular el gradiente de $f(x)$ por medio de diferencias hacia adelante.

- *jacobiano.m*: Código visto en clase para calcular la matriz Jacobiana de $h(x)$.

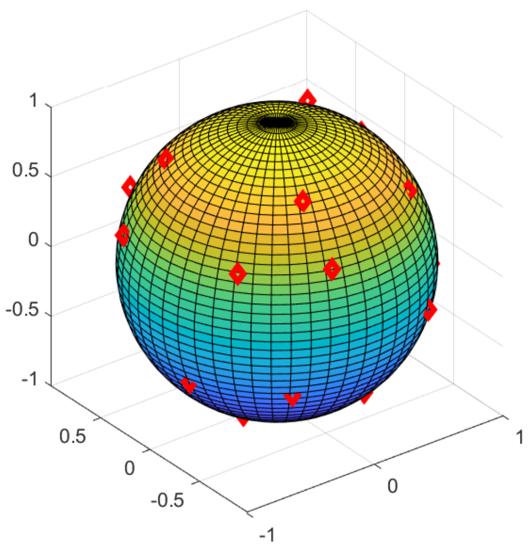
- *$esfera.m$*: Script más importante del proyecto. Este utiliza todos los códigos anteriores para calcular los puntos dentro de la esfera unitaria que sean solución al problema original planteado. Adicionalmente, nos regresa una tabla con todos los puntos solución en $\mathbb{R}^3$ y grafica los puntos dentro de la esfera unitaria.

Resultados

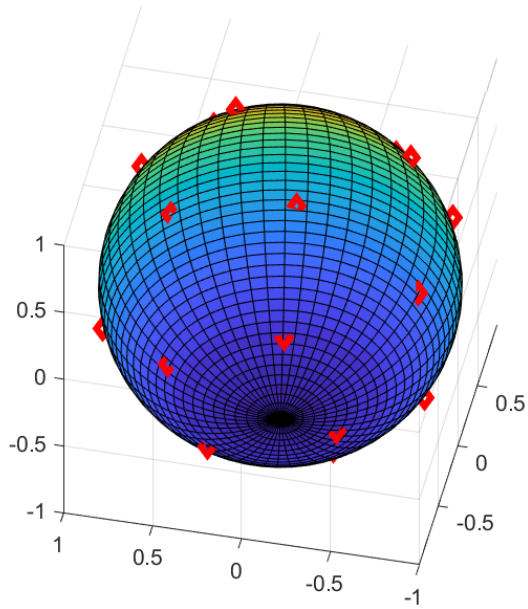
Al correr el script $esfera.m$, nuestro programa tarda **11.966601 segundos** en encontrar los 21 puntos solución en $\mathbb{R}^3$, los cuales se muestran a continuación:

```
    ----------------------------------------------------------
>> esfera
Elapsed time is 11.966601 seconds.
Puntos Generados:
            x                   y                   z
    ----------------------------------------------------------
    2.995873e-01       -4.949437e-01       -8.1914e-01
    5.771492e-01       -5.855577e-01       5.6997e-01
    -8.615963e-01      -2.366837e-01       -4.5511e-01
    4.286054e-01       2.490756e-01        8.8815e-01
    -5.654206e-01      7.558481e-01        3.8553e-01
    9.139208e-01       -3.796864e-01       -1.6373e-01
    -6.401975e-01      6.051828e-01        -4.7372e-01
    8.272622e-01       2.174548e-01        5.3752e-01
    1.158508e-01       9.540029e-01        -2.8438e-01
    4.055050e-01       7.086198e-01        5.9497e-01
    7.542782e-01       6.301517e-01        -1.8645e-01
    -8.766388e-01      4.207436e-01        3.0441e-01
    8.981160e-02       5.006622e-01        -8.6161e-01
    -3.389863e-01      -9.613456e-02       -9.3588e-01
    -2.511235e-01      -5.877866e-01       7.9089e-01
    -2.436373e-01      -8.841801e-01       4.3916e-01
    6.454712e-01       5.362105e-02        -7.6358e-01
    -7.324210e-01      -5.537729e-01       4.2109e-01
    -5.695815e-01      3.861859e-01        7.5068e-01
    -4.657148e-01      -7.660343e-01       -4.4878e-01
    5.380593e-01       -8.390117e-01       -1.5017e-01
    ----------------------------------------------------------
>>
```

Más aún, al graficar los puntos dentro de la esfera unitaria, obtenemos la siguiente figura:



(a) Esfera vista por arriba.



(b) Esfera vista por abajo.

Figuras que muestran los puntos obtenidos graficados dentro de la esfera unitaria.