# Proyecto 1: Análisis Aplicado

Pablo López Landeros
*178863*
Fernando Stein Vallarta
*165455*
Diego González
*167429*

## Goldstein Price Function

La función de precios de Goldstein está definida de la siguiente forma:

$$f(x,y) = [1+(x+y+1)^2(1914x+3x^2 14y+6xy+3y^2)][30+(2x-3y)^2(18-32x+12x^2+4y-36xy+27y^2)]$$

Notemos que la función tiene las siguientes características:

1. La función es continua: La continuidad de la función la obtenemos ya que podemos escribir a $f(x,y)$ como el producto de dos funciones $f_1, f_2$ continuas, donde $f_1 = [1+(x+y+1)^2(1914x+3x^2 14y+6xy+3y^2)]$ y $f_2 = [30+(2x-3y)^2(18-32x+12x^2+4y-36xy+27y^2)]$. Notemos que $f_1$ y $f_2$ son continuas al ser polinomios.

2. La función NO es convexa.

3. El dominio de la función es $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la función suele ser definida tal que $x, y \in [-2,2]$.

4. La función es diferenciable: La diferenciabilidad de la funcion se obtiene de una forma muy similar a la continuidad. La functión es diferenciable, ya que podemos escribir a $f(x,y)$ como el producto de dos funciones $f_1, f_2$ continuas, donde $f_1 = [1+(x+y+1)^2(1914x+3x^2 14y+6xy+3y^2)]$ y $f_2 = [30+(2x-3y)^2(18-32x+12x^2+4y-36xy+27y^2)]$. Notemos que $f_1$ y $f_2$ son diferenciables al ser polinomios.

Luego entonces, partiendo del hecho de que la función es diferenciable obtenemos su gradiente algebraicamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8\ (24\ \mathrm{x}^3 - 12x^2(9y+4) + 2x(81y^2+50y+9) - 3y(27y^2+14y+9))((3x^2+2x(3y-7)+3y^2-14y+19)(x+y+1)^2+1)$$
$$+\,12(x^3+x^2(3y-2)+x(3y^2-4y-1)+y^3-2y^2-y+2)((12x^2-4x(9y+8)+27y^2+4y+18)(2x-3y)^2+30)$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 12\ (\mathrm{x}^3 + x^2(3y-2) + x(3y^2-4y-1) + y^3 - 2y^2 - y + 2)((12x^2 - 4x(9y+8) + 27y^2 + 4y + 18)(2x-3y)^2 + 30)$
$-4(2x-3y)(36x^2-2x(54y+25)+9(9y^2+y+3))((3x^2+2x(3y-7)+3y^2-14y+19)(x+y+1)^2+1)$

Para terminar, recordamos que el gradiente esta definido de la siguiente forma:

$$\Delta f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$

Asimismo, sabemos que la función tiene un punto crtítico cuando $\Delta f(x,y) = 0$. De donde, la función tiene como punto crítico $(x^*, y^*) = (0, -1)$. Luego entonces, necesitamos encontrar la matriz Hessiana evaluada en el punto crítico para observar si el punto $(0,-1)$ es un mínimo o un máximo.
Para hacer lo anterior utilizamos el código apHess, y obtenemos que la matriz hessiana H está dada por lo siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 504 & -216 \\ -216 & 864 \end{pmatrix}$
Luego entonces, notemos que utilizando el método de coeficientes principales que $det(H_1) = 504 > 0$ y $det(H_2) = 504 * 864 + 216^2 = 482112 > 0$. De ahí que la matriz Hessiana de la función Goldstein sea positiva definida y por lo tanto el punto $x^* = (0, -1)$ es un mínimo. Finalmente, evaluando el punto mínimo que encontramos en la función obtenemos que $f(x^*) = 3$

# Métodos

Ahora bien, para poder realizar las tareas asignadas en el documento necesitamos los siguientes métodos:

1. Punto de Cauchy
2. Punto DogLeg

El Punto de Cauchy es un punto que soluciona el problema de minimización del modelo cuadrático dado por:

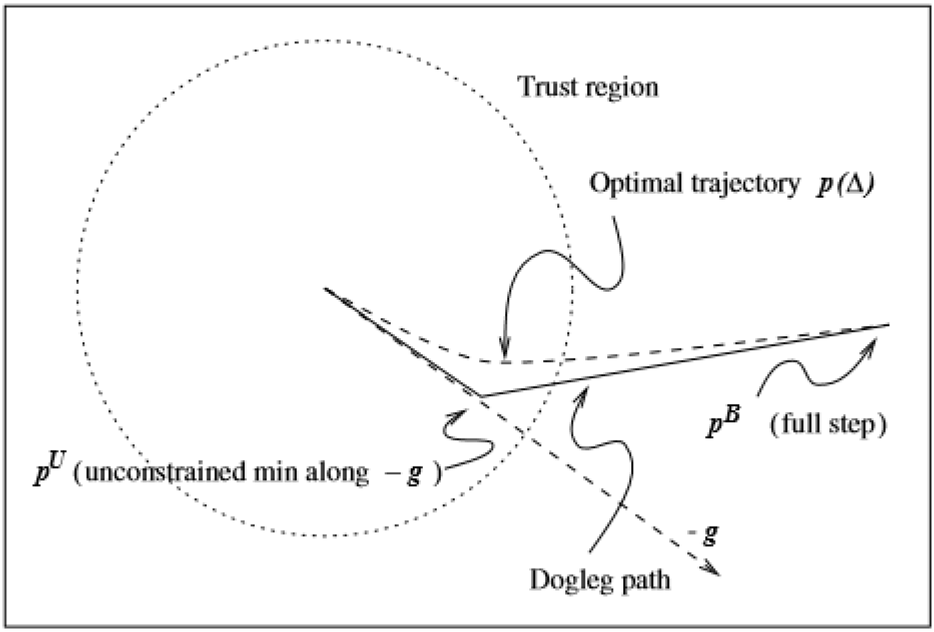
$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad m(g) \\ &\text{sujeto a} \quad ||g|| \leq delta_k \end{aligned}$$

Donde,

$$m(g) = f_k + \delta g^t f_k + \frac{1}{2} g^T B g$$

## Punto DogLeg

El Método Dogleg encuentra una solución aproximada al reemplacar a la trayectoria por $p*(\delta)$ con un camino compuesto por dos segmentos:




Fuente: Jorge Nocedal,Numerical Optimization

El primero que va desde el centro (origen) hasta $P^U$ y el segundo que va desde $P^U$ hasta $P^B$.

## Ejercicio 1

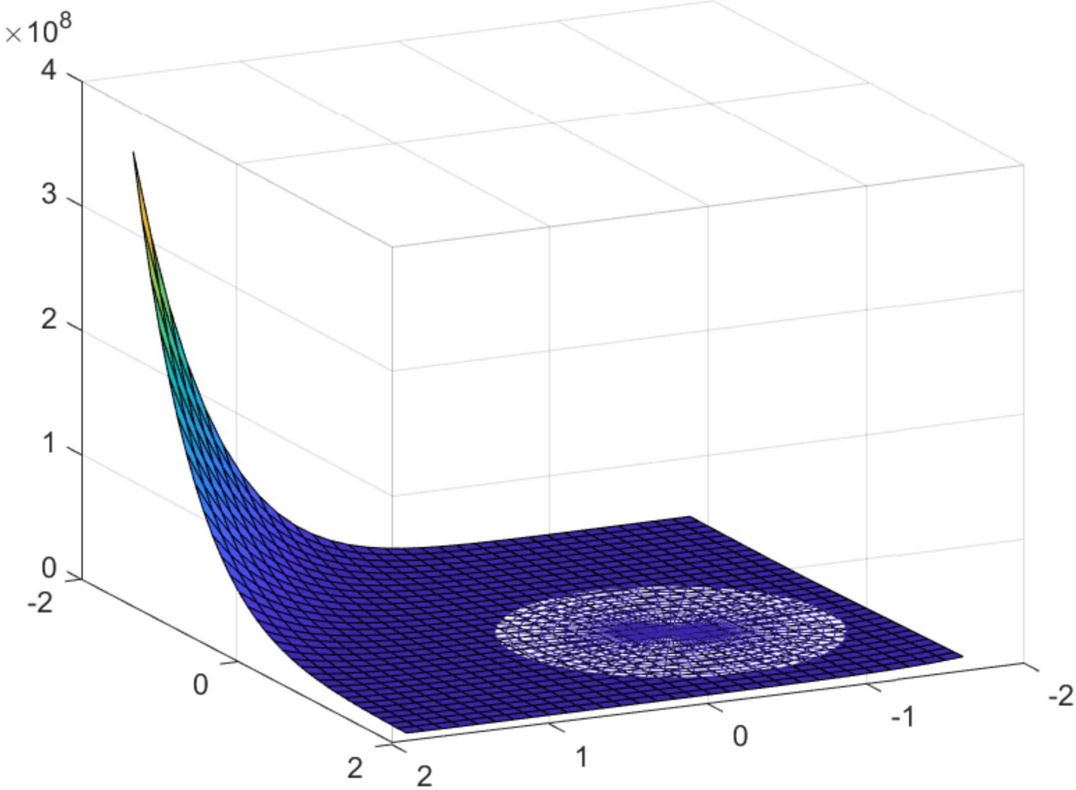
El Ejercicio 1 nos pide que dibujemos en 3D. Sea $f : R^2 \to R$ el punto inicial $x_0$ cerca de un mínimo local $x^*$. La matriz Hessiana en $x_0$ sea simétrica y (semi-)definida positiva. Escoge una región de confianza con $\delta > 0$. Dibuje la gráfica en $R^3$ del modelo cuadratico en la región de la confianza.

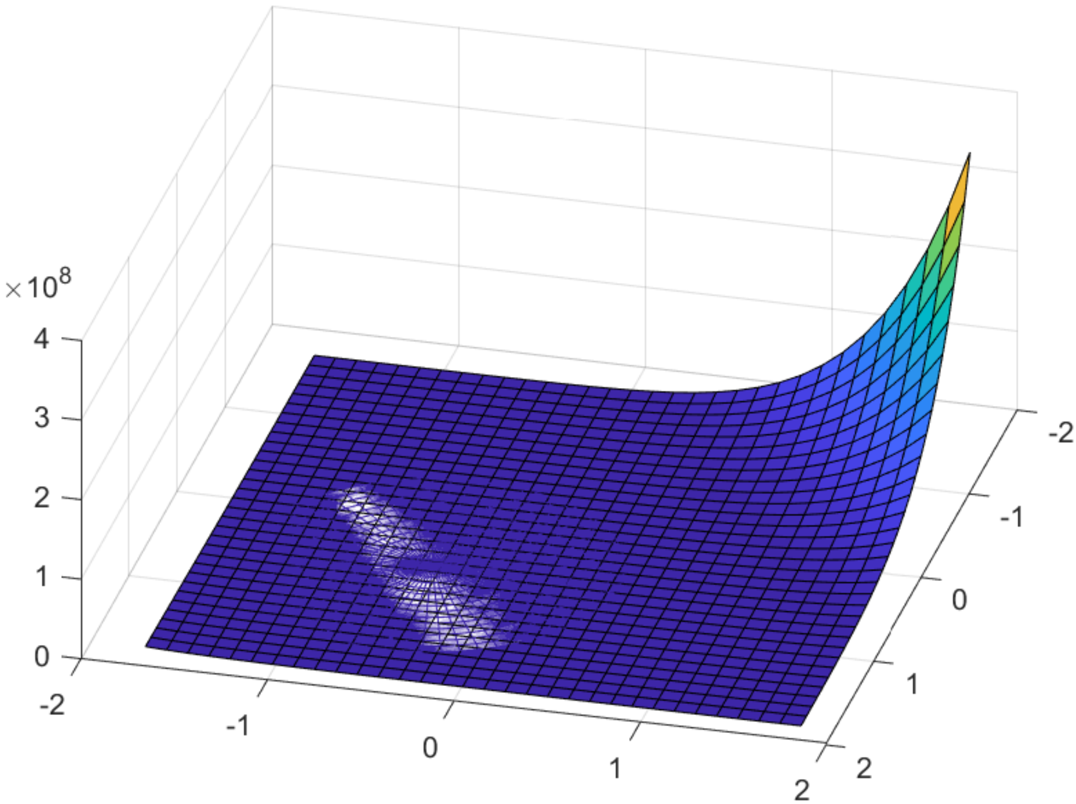
Para resolver este ejercicio hacemos uso del código que realizamos en clase llamado: examplecircular.m, solamente modificamos las funciones para ajustar nuestro modelo cuadrático.

Ahora bien, definimos el punto $x_0 = (0.5, -0.5)$ para comenzar las sucesivas iteraciones. Más aún, utilizamos $\delta = 1$.

Utilizamos el codigo Ejercicio1.m para poder realizar la figura de la función Goldstein 3D con la región de confianza.

Los resultados de la gráfica son los siguientes:


×10^8
4
3
2
1
0
-2
0
2
2
1
0
-1
-2



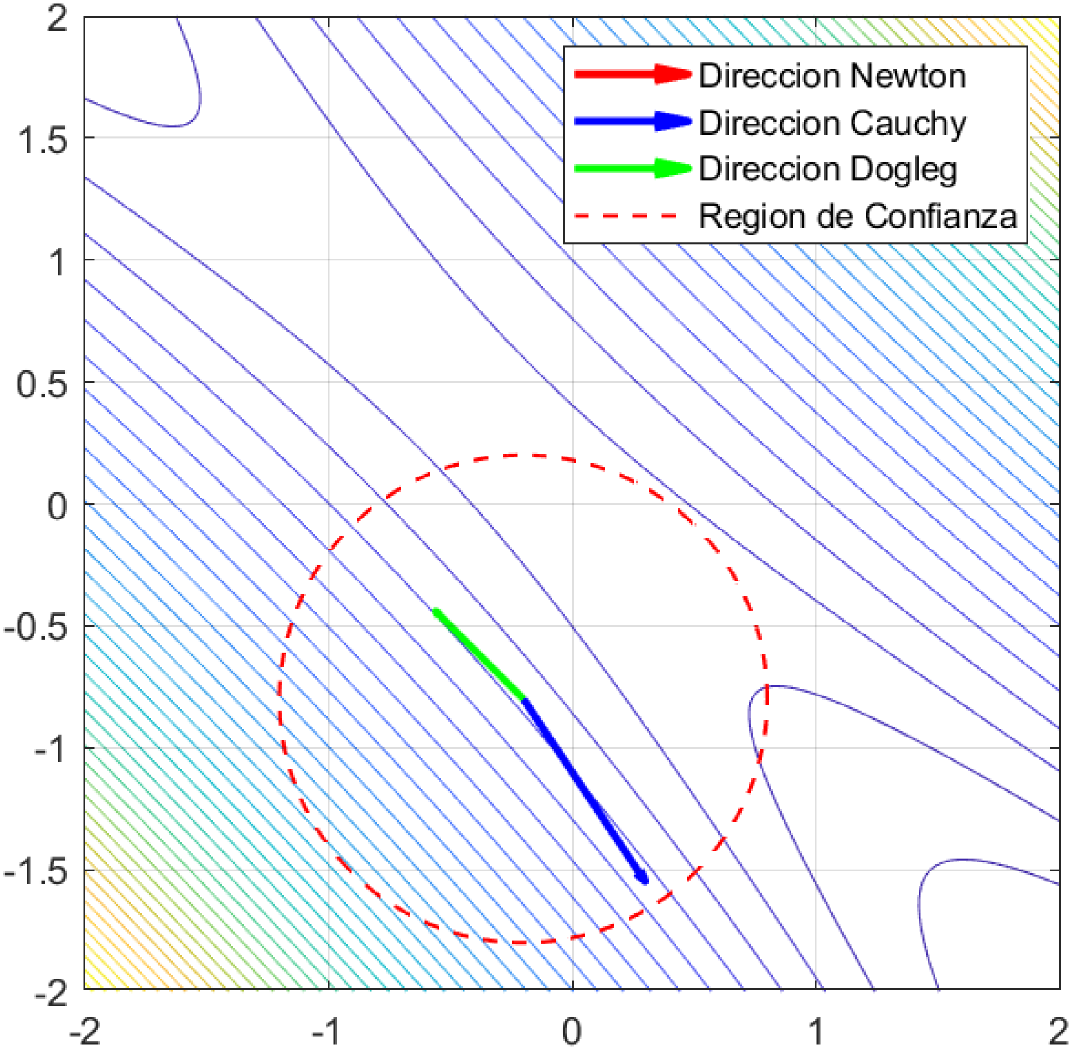

Ambos gráficos son del mismo código, simplemente usamos dos visualizaciones desde diferentes ángulos para caracterizarlas.

## Ejercicio 2

El ejercicio 2 nos pide que realicemos un plot (en dos dimensiones) que contiene la frontera de la región de confianza, algunos conjuntos de nivel en $\mathbb{R}^2$ del modelo cuadrático en la región de la confianza y las tres direcciones Newton, Cauchy, DogLeg.

Para resolver este ejercicio creamos un documento de MatLab llamado Ejercicio2.m. Para este script, utilizamos el punto $x_0 = (-0.3, -0.7)$, que es un punto relativamente cercano al punto mínimo $x^* = (0, -1)$, y asignamos un valor $\delta = 1$. Ahora bien, para encontrar las direcciones de Newton, Cauchy y DogLeg empleamos nuestros códigos previos, y utulizamos la fórmula del punto de Newton $P_N = -inv(B_k) * g_k$, donde $B_k, g_k$ son las aproximaciones de la matriz Hessiana y el vector gradiente. Ahora bien, para obtener los conjuntos de nivel utilizamos el código srcLevel.m que ya habíamos realizado en clases anteriores. Finalmente, definimos la región de confianza utilizando coordenadas polares.

Al correr el script de Ejercicio2.m obtenemos el resultado siguiente:




Observemos que en el diagrama no aparece la dirección de Newton, esto se debe a que la dirección Dogleg coincide con la dirección de Newton.

## Ejercicio 3

El ejercicio 3 nos pide que escojamos un punto inicial tal que $||x_0 x_k||_2 > \delta_m ax$ y en el cual la función tiene una Hessiana no positiva definida, y que hagamos una tabla que contiene las últimas 8 iteraciones con su número y los valores de la norma de $\nabla f(x_k)$ y $f(x_k)$.

Para este ejercicio utilizamos los siguientes datos:

1. $x^* = (0, -1)$
2. $x_0 = (0, -2.6)$
3. $||x^* - x_0||_2 = 1.6 > \Delta_{max} = 1.5$
4. Notemos que los eigenvalores de la matriz B son: $(10, 140.773, -1, 154.799)$, de donde uno de los eigenvectores es negativo y la matriz B NO es positiva definida.

Más aún, empleamos el código Ejercicio3.m para realizar los métodos.

Los resultados se presentan en las tablas siguientes:

Resultados

| Metodo | Iteraciones |
|---|---|
| Punto Cauchy | 24 |
| Punto Dog-Leg | 11 |

Método RC1

| Iteración | x | f(x) | Norma Gradiente | Error |
|---|---|---|---|---|
| 17 | ( 2.656988e-05 , -9.999938e-01 ) | 3.00E+00 | 1.21E-02 | 2.73E-05 |
| 18 | ( 3.308971e-06 , -9.999931e-01 ) | 3.00E+00 | 5.28E-03 | 7.69E-06 |
| 19 | ( 3.110487e-06 , -9.999993e-01 ) | 3.00E+00 | 1.41E-03 | 3.19E-06 |
| 20 | ( 3.874806e-07 , -9.999992e-01 ) | 3.00E+00 | 6.19E-04 | 9.00E-07 |
| 21 | ( 3.642118e-07 , -9.999999e-01 ) | 3.00E+00 | 1.65E-04 | 3.74E-07 |
| 22 | ( 4.540757e-08 , -9.999999e-01 ) | 3.00E+00 | 7.24E-05 | 1.06E-07 |
| 23 | ( 4.267745e-08 , -1.000000e+00 ) | 3.00E+00 | 1.94E-05 | 4.38E-08 |
| 24 | ( 5.351287e-09 , -1.000000e+00 ) | 3.00E+00 | 8.48E-06 | 1.25E-08 |

Metodo RC2

| Iteracion | x | f(x) | Norma gradiente | Error |
|---|---|---|---|---|
| 4 | ( 6.776213e-01 , -1.661221e+00 ) | 1.54E+03 | 5.08E+03 | 9.47E-01 |
| 5 | ( 3.689134e-01 , -1.345978e+00 ) | 2.63E+02 | 1.42E+03 | 5.06E-01 |
| 6 | ( 1.792636e-01 , -1.145613e+00 ) | 3.85E+01 | 3.76E+02 | 2.31E-01 |
| 7 | ( 7.918606e-02 , -1.027728e+00 ) | 5.89E+00 | 8.21E+01 | 8.39E-02 |
| 8 | ( 3.241925e-02 , -9.935952e-01 ) | 3.24E+00 | 1.57E+01 | 3.30E-02 |
| 9 | ( 1.461478e-03 , -1.001018e+00 ) | 3.00E+00 | 1.54E+00 | 1.78E-03 |
| 10 | ( 6.055101e-06 , -1.000006e+00 ) | 3.00E+00 | 7.68E-03 | 8.41E-06 |
| 11 | ( 1.824213e-10 , -1.000000e+00 ) | 3.00E+00 | 1.97E-07 | 1.88E-10 |

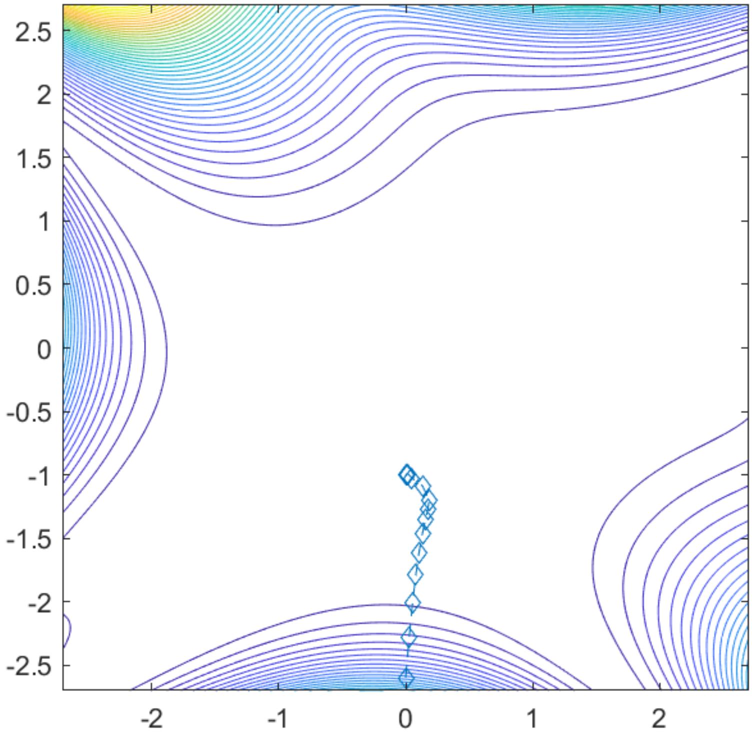
Los resultados de las tablas anteriores nos indican que se necesitan 24 iteraciones para el Punto de Cauchy y solamente 11 iteraciones para el Punto DogLeg. Notemos que en términos de eficiencia en tiempo tenemos que el método utilizando el Punto DogLeg es mucho más eficiente.

Ahora bien, notemos que la solución con ambos métodos se aproxima más al punto óptimo con cada iteraicón, y, de igual forma, podemos observar que el error se hace más pequeño con cada iteración.

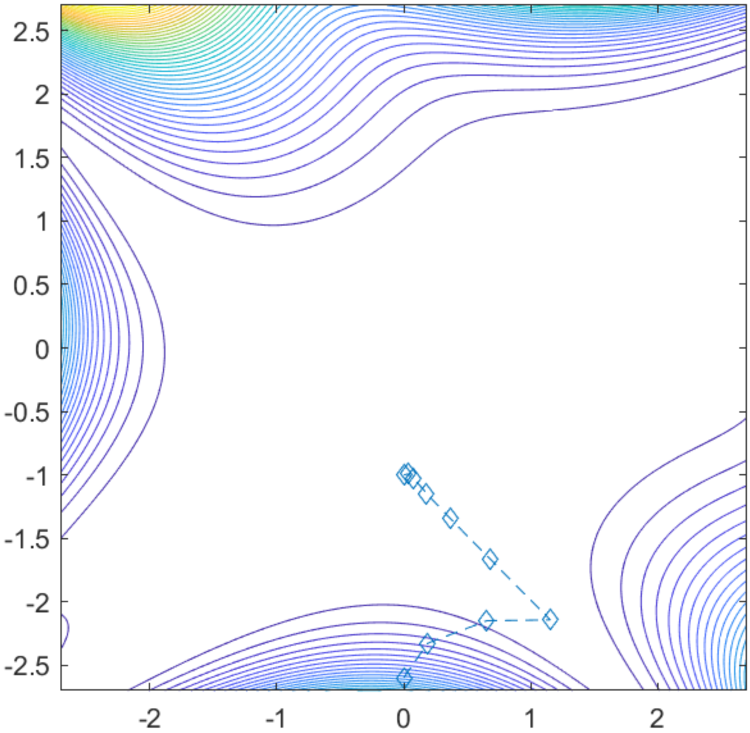
## Ejercicio 4

El ejercicio 4 nos pide que hagamos una gráfica similar a las en el Lab. 2 para visualizar el camino que tomó la iteración.

Empleando los datos del Ejercicio 3 y los códigos Ejercicio4RC1.m y Ejercicio4RC2.m tenemos los siguientes resultados:




En este caso, observamos el camino tomado por las iteraciones del Punto de Cauchy.




En este caso, observamos el camino tomado por las iteraciones del Punto DogLeg.

## Conclusiones

Para poder resolver este proyecto necesitamos conocer los métodos presentados por el Punto de Cauchy y por el Punto DogLeg. De igual forma, necesitamos definir las regiones de confianza de forma pertinente. Ahora bien, en este caso los resultados muestran que el Punto DogLeg presenta un mecanismo más eficiente que el Punto Cauchy pues se requieren de menos iteraciones para alcanzar el punto mínimo empleando tal.