Valoración de derivados financieros con un modelo de dividendos estocásticos

Pablo Macías Pineda

Universidad Internacional de la Rioja
Logroño (España)

Fecha 22/07/2021

RESUMEN

En este trabajo se modelizarán el índice EURO STOXX 50 y el pago de sus dividendos con ecuaciones diferenciales estocásticas. Para ello, primero se realiza una introducción teórica al cálculo estocástico y la valoración de derivados financieros. Partiendo de conceptos básicos de teoría de la medida, se construyen los conceptos de proceso estocástico, movimiento Browniano e integral de Itô. Una vez presentados, se introduce la fórmula de valoración de riesgo neutro.
El índice EURO STOXX 50 y el pago de sus dividendos son modelizados con una evolución lognormal y con una evolución de Cox-Ingersoll-Ross respectivamente. Se utilizará el precio de opciones call sobre el EURO STOXX 50, el precio de opciones call sobre los dividendos y futuros sobre los dividendos para calibrar todos los parámetros libres del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas planteado: la volatilidad del índice, la volatilidad de los dividendos, el valor medio de los dividendos y la velocidad de reversión a la media de los dividendos.
Para realizar esta calibración, se valorarán los productos a través de un método Montecarlo programado en Python y se utilizará el método híbrido de Powell como algoritmo de búsqueda de raíces para encontrar los parámetros del modelo. Una vez calibrado el modelo, se analizarán dos posibles usos de este modelo en la industria financiera: el cálculo del VaR y el cálculo de las sensibilidades.

Palabras clave: Cox-Ingersoll-Ross, Dividendos, Derivados financieros, Montecarlo

1 – Introducción

En la actualidad, los derivados financieros son herramientas básicas en la industria de las finanzas. Son usados por todo tipo de compañías: bancos, bancos centrales, energéticas, farmacéuticas, compañías de seguros, gobiernos, fondos de inversiones…

Para poder apreciar la relevancia de estos instrumentos, la Figura 1 muestra el número de contratos negociados (en millones) en los principales mercados de intercambio de derivados durante 2019.

Comenzamos este trabajo definiendo el concepto de derivado financiero: “Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otras variables subyacentes más básicas” (Hull, 2014, p.1). A lo largo de este trabajo, aprenderemos a utilizar diferentes modelos que se usan en la actualidad para calcular el valor de derivados financieros y propondremos uno que tenga en cuenta el riesgo que surge debido a los dividendos.

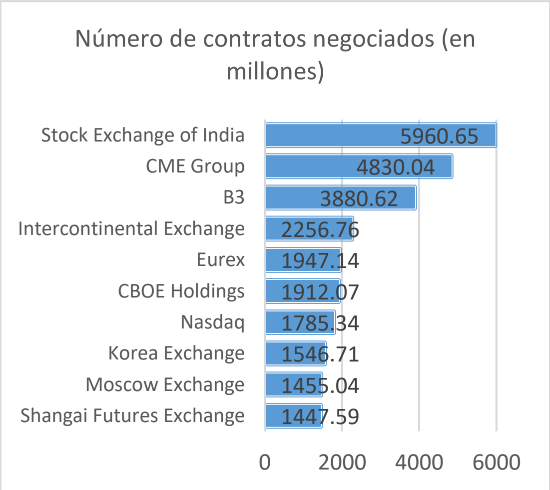

Figura 1. Número de contratos negociados. (Fernández, 2020)

La valoración de estos instrumentos es fundamental para la gestión de riesgos, debido a que diferentes reguladores de instituciones financieras como el ECB[1] o asociaciones de participantes en los mercados financieros como ICMA[2] o IFRS[3], exigen a las entidades que manejan este tipo de instrumentos el cálculo de diferentes medidas del riesgo al que se exponen, como el VaR[4] o las griegas. Actualmente, se ha publicado una normativa que está pendiente de ser implantada en todas las instituciones (Basel Committee on Banking Supervition, 2019). El cálculo de estas medidas es fundamental para las instituciones y debe realizarse con la mayor precisión posible, ya que el capital que deben reservar para hacer frente a posibles pérdidas depende de ellas.

Durante este trabajo, nos centraremos en modelizar derivados de acciones. Concretamente, el índice que elegiremos es el EURO STOXX 50, ya que es uno de los principales índices de Europa y existen muchos tipos diferentes de derivados sobre él. De los diferentes mercados organizados que se indican en la Figura 1, el EURO STOXX 50 es negociado en Eurex. Los derivados más básicos son: forwards, futuros y opciones.

Un forward es un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado. Si llamamos T al momento en el que se realizará la venta, S_T al precio del subyacente en el instante T y K al precio de venta que se ha fijado, entonces el valor V_T^{fwd} del contrato forward en el momento en el que se realiza la venta final será

$$V_T^{fwd} = S_T - K.$$

Los futuros son derivados financieros muy parecidos a los forwards. Se trata también de un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado, por lo que la fórmula para valorar el producto en la fecha final es la misma.

La principal diferencia de este tipo de contratos es que se acuerda ir realizando pagos cada día. El primer día t_1 se paga la diferencia $P_{t_1}^{fut} = S_{t_1} - K$, y el resto de día se va pagando la diferencia con el día anterior $P_{t_i}^{fut} = S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ (con $i = 2, \dots, N$ y $t_N = T$). De esta manera, se elimina el riesgo de que al final del contrato, el precio a pagar sea muy elevado y se cometa un impago.

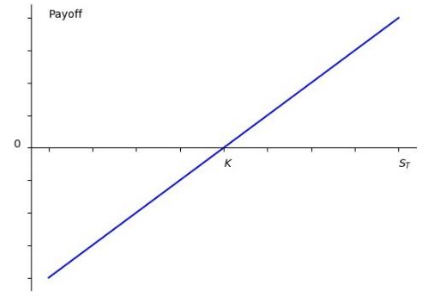

Figura 2. Payoff contrato forward. Elaboración propia.

Si sumamos todos los pagos que se han ido haciendo durante la vida del futuro, vemos que el valor del contrato es equivalente al del forward

$$\begin{aligned} V_T^{fut} = \sum_{i=1}^{N} P_{t_i}^{fut} &= \left(S_{t_1} - K\right) + \left(S_{t_1} - S_{t_2}\right) + \cdots \\ &+ \left(S_{t_N} - S_{t_{N-1}}\right) = S_{t_N} - K \\ &= S_T - K. \end{aligned}$$

Las opciones son contratos en los que una parte le da la opción a la otra de comprar (o vender) un determinado subyacente a un precio fijado en una fecha futura. Las opciones en las que se otorga el derecho (pero no la obligación) de comprar se llaman "opciones call", mientras que en las opciones en las que se otorga el derecho a vender se llaman "opciones put".

El valor de una opción call V_T^{call} en el instante T de finalización del contrato será

$$V_T^{call} = \max(S_T - K, 0).$$

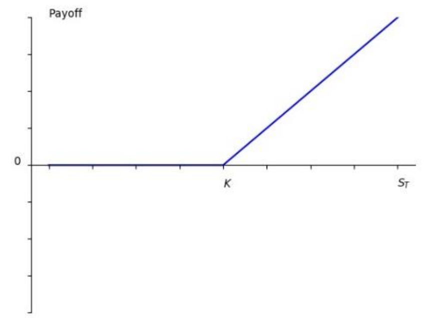

Figura 3. Payoff opción call. Elaboración propia.

[1] ECB: European Central Bank
[2] ICMA: International Capital Market Association
[3] IFRS: International Financial Reporting Standards
[4] VaR: Value at Risk

2 – Estado del arte

La valoración de derivados financieros con modelos en los que los dividendos son estocásticos no es común, ya que hoy en día, no existen demasiados derivados sobre los dividendos que permitan calibrar los parámetros.

Cuando el ratio de dividendos no se considera estocástico, sino que se toma como un parámetro determinista más o cuando el pago de dividendos discretos se considera conocido, las fórmulas de valoración de opciones, futuros y forwards son conocidas. Estas fórmulas de valoración y su deducción se pueden encontrar en (Hull, 2014) y (Shreve, 2004).

Sin embargo, al pasar a un modelo estocástico, estás formulas pueden complicarse demasiado, llegando incluso a no ser podidas obtener de manera cerrada.

En (Lioui, 2006), se presenta una fórmula de valoración obtenida con una evolución lognormal para el índice de equity y una evolución para el ratio de dividendos y para otra variable que no analizaremos en este trabajo (el precio de mercado del riesgo) dadas por procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados.

En (Phewchean & Wu, 2019), se realiza un estudio muy similar al anterior, en el que se utiliza otro modelo más complejo para el precio de mercado del riesgo.

En (Vatiwutipong & Phewchean, 2019) se presenta un estudio de un modelo de dividendos estocásticos que también utiliza un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. En este caso, el estudio consiste en ajustar los parámetros a datos históricos del índice en cuestión. Se trata de un tipo de estudio diferente al que realizaremos en este trabajo, donde lo que pretendemos es calibrar los parámetros con los datos de un instante presente para obtener como va a evolucionar el subyacente.

Estas tres referencias tienen en común el modelo que utilizan para los dividendos estocásticos. Al usar ese modelo en concreto, se pueden obtener fórmulas cerradas, pero este presenta una característica que podría ser de controversia. El ratio de dividendos podría tomar valores negativos.

En este trabajo, utilizaremos el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, que por la forma de construirlo, hace que esto no pueda ocurrir. Aunque para ello, tenemos que pagar un precio por haber complicado el modelo: No se pueden obtener fórmulas cerradas para valorar los productos. Por tanto, tendremos que ver métodos alternativos para hallar los precios de los productos que utilizaremos para calibrar.

3 – Aplicaciones del estudio

La valoración de derivados financieros con el modelo propuesto se puede utilizar en los siguientes ámbitos:

Valoración de derivados:

Además de valorar los productos con los que hemos calibrado el modelo, se pueden valorar productos mucho más complejos, productos para los que incluso no haya precio en ningún mercado organizado y se negocien internamente entre entidades financieras. Algunos ejemplos de estos payoffs son:

- Opciones asiáticas: En este tipo de opciones, en lugar de mirar el valor del subyacente en la fecha de vencimiento, se hace una media del valor que toma en unas fechas específicas t_k, de modo que el payoff es
$$V_T = \max\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S_{t_k} - K, 0\right).$$
- Opciones con barrera: En este tipo de opciones, el payoff es igual que el de las opciones call o put que ya hemos visto, pero condicionado a que el subyacente pase (o que no pase también) de un determinado valor durante la vida del contrato. En caso de que no se cumpla esta condición, el producto no tendría valor.
- Opciones americanas: En este tipo de opciones, el payoff también es igual al de las opciones call o put, pero se otorga el derecho al comprador de a ejecutar el contrato en cualquier momento, en lugar de ser únicamente en la fecha de vencimiento.

Griegas:

Como ya comentamos en la introducción, se llama griegas a las derivadas del precio de un instrumento financiero con respecto a las variables de las que depende. Las griegas miden el riesgo de dicho instrumento, ya que mientras mayor sea el valor de una griega, más puede variar su precio en función de lo que cambie la variable.

Esto hace que las griegas sean una métrica importante para las entidades financieras en la gestión de riesgos. Tan importante es, que la regulación FRTB, que entrará en vigor en 2022, exige a las entidades calcular las griegas de todos los productos financieros de sus libros de trading y reservar un determinado capital que depende de ellas para hacer posible a posibles pérdidas.

Algunos ejemplos de las instrucciones para calcular las griegas expuestas en (Basel Committee on Banking Supervition, 2019) son:

- *"(21.21) Delta equity spot: the sensitivity is measured by changing the equity spot price by 1 percentage point (ie 0.01 in relative terms) and dividing the resulting change in the market value of the instrument (V_i) by 0.01 (ie 1%) as follows, where:*
  - *k is a given equity;*
  - *EQ_k is the market value of equity k; and*
  - *V_i is the market value of instrument i as a function of the price of equity k.*

$$s_k = \frac{V_i(1.01\, EQ_k) - V_i(EQ_k)}{0.01}$$

- *(21.25) (1) Vega, $\frac{\partial V_i}{\partial \sigma_i}$, is defined as the change in the market value of the option V_i as a resulto f a small amount of change to the implied volitlity σ_i."*

Cálculo del VaR:

El VaR para un determinado instrumento financiero se define como el percentil 5% de la distribución resultante de valorar dicho instrumento variando únicamente el precio del subyacente, que tomará 252 valores calculados como el precio en el día del cálculo multiplicado por uno más la variación porcentual diaria que ha tenido durante el año anterior.

Esta definición nos permite afirmar que estamos seguros al 95% de que, si el precio del subyacente variara como en el año anterior, nuestro instrumento no perdería un valor superior al VaR calculado.

En la actualidad, el VaR debe ser calculado obligatoriamente por todas las entidades financieras, y es la métrica de referencia que se usa para calcular el capital que se debe reservar para riesgo hasta que entre en vigor la normativa FRTB mencionada anteriormente.

En la nueva normativa, se propone pasar de la métrica VaR a ES[5], que se calcula de forma parecida. La única diferencia es que en lugar de tomar el percentil 5%, se debe hacer una media de todo lo que está por debajo, de modo que se trata con más cuidado la cola de la distribución.

Regulación PRIIPs:

Esta regulación pretende proteger a los clientes minoristas que pueden desconocer los instrumentos financieros que compran. La regulación obliga a entregar una hoja de información del producto que se vende, llamada KID[6], en la que se deben explicar lo riesgos del producto, se debe indicar con un número del 1 al 7 el nivel de riesgo del producto y se deben simular los resultados de producto en diferentes escenarios, tanto favorables como desfavorables.

Tanto para calcular el nivel de riesgo del producto, como para simular los escenarios, se debe valorar el producto con una simulación Montecarlo similar a la propuesta en este trabajo. Los detalles de esta simulación se pueden encontrar en (European Supervisory Authorities, 2016).

4 - Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es aprender las técnicas y teoría matemática usadas en la actualidad para valorar derivados financieros. Aprenderemos estas técnicas modelizando un índice bursátil y sus dividendos con un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para alcanzar el objetivo general, pasaremos por los siguientes puntos:

- Plantear las ecuaciones que describen la evolución de las dos variables modelizadas.
- Discretizar el sistema de ecuaciones apropiadamente para poder aplicar el método Montecarlo.
- Desarrollos en Python:
  - El código de un método Montecarlo que simule las variables.
  - La valoración de futuros y opciones con el método Montecarlo.
  - El código de un algoritmo de optimización que calibre los parámetros del modelo para obtener los precios de mercado con el método Montecarlo.
  - El cálculo de las griegas usando el modelo calibrado.
  - El cálculo del VaR y el Expected Shortfall.

[5] Expected Shortfall
[6] KID: Key information document.

5 – Descripción de la contribución

El modelo propuesto es

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = (r - q_t)dt + \sigma^S dW_t^1 \\ dq_t = a(b - q_t)dt + \sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^{2}{}' \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho\, dt \end{cases}$$

donde:

- S_t es el valor del índice EUROSTOXX 50 en el instante t.
- r es el tipo de interés libre de riesgo.
- q_t es el ratio de dividendos pagados por el índice en el instante t.
- W_t^1 y W_t^2 son dos movimientos Brownianos.
- σ^S es la volatilidad del índice.
- σ^q es la volatilidad del ratio de dividendos.
- a es la velocidad de reversión a la media del ratio de dividendos.
- b es el valor medio de los dividendos.
- ρ es la correlación entre los movimientos Brownianos.

El modelo de evolución para el ratio de dividendos es conocido como Cox-Ingersoll-Ross. Es común en la industria financiera utilizar este modelo para los tipos de interés, en lugar de para el ratio de dividendos. El estudio de este TFM consiste en ver si podemos calibrar este modelo para replicar los precios que se cotizan en el mercado de una serie de derivados financieros, y así poder medir riesgos asociados a los dividendos que no se podían estudiar sin usar algún modelo para la evolución de estos.

La elección del modelo de Cox-Ingersoll-Ross para el ratio de dividendos en este trabajo se debe a que es el modelo más sencillo que por construcción, asegura que el valor del subyacente modelado siempre será positivo en unas determinadas condiciones que serán comprobadas.

Si nos fijamos en la notación utilizada para los parámetros del modelo σ^S, σ^q y b, no se incluye dependencia temporal. Esta notación ha sido elegida por simplicidad, pero a la hora de realizar la calibración, asumiremos que los parámetros tienen una dependencia temporal, de manera que serán constantes en varios intervalos, determinados por el vencimiento de los productos que usaremos en la calibración. Estos intervalos tendrán una longitud de un año cada uno.

Para calibrar el modelo, utilizaremos tres tipos de derivados financieros: Opciones sobre el EURO STOXX 50, futuros sobre el índice de dividendos del EURO STOXX 50 y opciones sobre el índice de dividendos del EURO STOXX 50.

Todos los precios utilizados en este trabajo se han obtenido de la web del mercado europeo de productos financieros Eurex (Eurex, 2020) a fecha 01/04/2020.

Las fórmulas de valoración de los tres productos son: $V_{T_i,t}^S = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T_i-t)} \max(S_{T_i} - K, 0)\,|\mathcal{F}(t)\right]$ para las opciones call sobre el EURO STOXX 50, $V_{T_i,t}^S = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t | \mathcal{F}(t)\right]$ para los futuros sobre los dividendos y $V_{T_i,t}^D = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T_i-t)} \max(D_{T_i} - K, 0)\,|\mathcal{F}(t)\right]$ para las opciones sobre los dividendos, donde $D_t = \sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t$, t_0 es el día de comienzo del año en el que se calcula el índice y t_n coincide con el instante t en el que se está calculando el índice D_t.

Para obtener estos precios, utilizamos un método Montecarlo, es decir, vamos a simular N veces el valor que hay dentro de las esperanzas y por el teorema central del límite (Wackerly, Dennis et al., 2014), el estadístico media se distribuye como una normal $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)$, donde μ coincide con la esperanza que queremos calcular.

Para simular las variables aleatorias de nuestro modelo utilizamos el siguiente esquema de discretización, que ha sido obtenido aplicando la fórmula de Itô (Shreve, 2004) a la primera ecuación y después el método de Euler-Maruyama (E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard, 1992) a ambas

$$\begin{cases} \ln S_{i+1} = \ln S_i + \left(r - q_i - \dfrac{1}{2}(\sigma^S)^2\right)\Delta t + \sigma^S \Delta W_i^1 \\ q_{i+1} = q_i + a(b - q_i)\Delta t + \sigma^q \sqrt{q_i} \Delta W_i^2 \end{cases}.$$

6 – Resultados

Para calibrar el modelo, vamos ajustando los parámetros b, σ^S y σ^q haciendo "bootstrapping".

Empezamos con los precios de los tres productos para el primer vencimiento y buscamos los parámetros que durante el este primer periodo de tiempo nos dan los precios de mercado.

Una vez obtenidos estos parámetros para el primer periodo de tiempo, calculamos los precios de los tres productos para el segundo vencimiento. Durante este segundo vencimiento, tendremos los parámetros que calibramos en el primer tramo, y serán incógnita los parámetros entre el segundo tramo. Se calibran estos parámetros incógnita y se repite este proceso con todos los vencimientos para los que disponemos de datos.

La Tabla xxx muestra el resultado de la calibración de los parámetros con el código de Python.

Intervalo	b	σ^S	σ^q
$t_0 \leq t < T_1$	0.024737	0.298577	0.178015
$T_1 \leq t < T_2$	0.039417	0.209427	0.129734
$T_2 \leq t < T_3$	0.051132	0.196489	0.127034
$T_3 \leq t \leq T_4$	0.055940	0.205345	0.181146

Tabla 1. Parámetros calibrados. Elaboración propia.

Una vez calibrados los parámetros, podemos volver a valorar los derivados y obtener sus sensibilidades. Las Tabla 2, Tabla 3, Tabla 4 y Tabla 5 muestran las sensibilidades delta de equity, delta de dividendos, vega de equity y vega de dividendos respectivamente.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	53.100000	23.479155	239.001600
T_2	49.800000	17.978683	292.900000
T_3	63.600000	37.022108	312.560400
T_3	67.400000	43.801737	336.769200

Tabla 2. Delta de equity. Elaboración propia.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	1,838.938107	679.394951	-919.425731
T_2	-25.536570	-9.925978	-910.892172
T_3	-45.011097	-25.462989	-881.371679
T_4	-47.795849	-30.665145	-859.113682

Tabla 3. Delta de dividendos. Elaboración propia.

Además de las sensibilidades, también podemos calcular el VaR y el ES. La Tabla 6 muestra estos valores calculados mediante la reevaluación de los derivados financieros mediante el método Montecarlo 252 veces y la Tabla 7 muestra estos dos valores también, pero calculados a través de la sensibilidad delta de equity, por aproximación de Taylor.

La aproximación de Taylor consiste en aproximar la variación del precio $\Delta V_{t,k}$ (con t el día de valoración y k el día con respecto al que queremos calcularla) como

$$\Delta V_{t,k} \approx \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \Delta S_k,$$

donde ΔS_k es la variación porcentual del subyacente con respecto al día anterior, es decir,

$$\Delta S_k = \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1.$$

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	-0.448997	8.780789	461.384801
T_1	0.408203	10.000642	467.921482
T_2	-1.185040	7.987847	427.770744
T_3	-4.616025	-0.332051	499.439645

Tabla 4. Vega de equity. Elaboración propia.

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	0.128060	0.152205	6.607915
T_1	0.145831	0.174670	6.785728
T_2	0.085180	0.152576	8.545754
T_3	-6.595893	34.856358	10.739574

Tabla 5. Vega de dividendos. Elaboración propia.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.099131	-8.603416
ES	-3.304078	-2.071192	-16.509075

Tabla 6. VaR y ES mediante revaloración Montecarlo. Elaboración propia.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.118999	-8.603413
ES	-3.304078	-2.147245	-16.509075

Tabla 7. VaR y ES mediante sensibilidades. Elaboración propia.

7 - Conclusiones

El modelo es utilizable, ya que hemos sido capaces de calibrarlo correctamente. Devuelve los precios iniciales a partir de los parámetros que hemos ajustado.

Además, cumple con el requisito que nos motivó a utilizar la dinámica de Cox-Ingersoll-Ross: el ratio de dividendos siempre se mantiene positivo.

El modelo se puede utilizar también para la gestión de riesgos. Como hemos visto, somos capaces de calcular la sensibilidad de los productos que se negocian en el mercado a diferentes parámetros, tanto a datos de mercado (como el precio del EUROSTOXX 50 y el ratio de dividendos, como a parámetros del modelo (como las volatilidades de ambas variables).

A parte, el uso del modelo nos permite calcular métricas de riesgos que exigen diferentes reguladores europeos a las entidades financieras, como son el Value at Risk y el Expected Shortfall. Estás métricas se pueden calcular de forma sencilla a partir de las griegas, pero teniendo siempre cuidado de que las griegas hayan sido calculadas de manera adecuada.

Como línea de trabajo futuro, el modelo calibrado podría utilizarse para valorar productos más complejos. Si tuviéramos acceso a precios de mercado de este tipo de productos, podríamos analizar si se obtienen bueno resultados. En caso de que no fuera bien, podríamos calibrar la velocidad de reversión a la media que fijamos por falta de restricciones en el problema de optimización.

Otra línea de trabajo podría ser la de añadir más variables aleatorias al modelo. Concretamente, es típico en la industria modelar el tipo de interés con un proceso estocástico análogamente a lo que se ha realizado en este trabajo para el ratio de dividendos. Para ello podrían utilizarse productos que no dependan del EUROSTOXX, para que sea más sencilla la calibración.

También se podría intentar hacer más compleja la volatilidad. En la práctica, cuando solo se modela estocásticamente un subyacente de equity, es sencillo aplicar un modelo de volatilidad local. Este tipo de modelos asumen que la variable σ^S (que nosotros hemos puesto dependiente del tiempo únicamente) depende también del valor de S_t, y no es constante a trozos como en este trabajo. El modelo de volatilidad local se puede encontrar en (Bergomi, Lorenzo, 2015) y se basa en obtener la superficie de volatilidad $\sigma(S_t, t)$ a partir de la superficie de precios de opciones call o put para diferentes vencimientos y strikes. Para ello, se utiliza la conocida fórmula de Dupire.

Bibliografía

Basel Committee on Banking Supervition. (2019). *Minimum capital requirements for market risk*. https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf

Bergomi, Lorenzo. (2015). *Stochastic volatility modeling*. CRC press.

E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.

Eurex. (2020, mayo 8). https://www.eurex.com/ex-en/

European Supervisory Authorities. (2016). *Final draft regulatory technical standards* (p. 183).

Fernández, R. (2020, diciembre 11). *Mercados intercambio de derivados: Ranking según contratos 2019*. Statista. https://es.statista.com/estadisticas/600804/ranking-de-los-principales-intercambios-de-derivados-en-el-mundo--por-volumen/

Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9a ed.). Pearson.

Lioui, A. (2006). Black-Scholes-Merton revisited under stochastic dividend yields. *Journal of Futures Markets*, *26*, 703-732. https://doi.org/10.1002/fut.20208

Phewchean, N., & Wu, Y. (2019). European option pricing model with generalized Ornstein–Uhlenbeck process under stochastic earning yield and stochastic dividend yield. *Advances in Difference Equations*, *2019*. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2210-5

Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag. https://www.springer.com/gp/book/9780387401010

Vatiwutipong, P., & Phewchean, N. (2019). A study of dividend yield model under stochastic earning yield environment in stock exchange of Thailand. *Advances in Difference Equations*, *2019*. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2231-0

Wackerly, Dennis, Mendenhall, William, & Scheaffer, Richard. (2014). *Mathematical Statistics with Applications* (7.ª ed.). Cengage Learning.