Valoración de derivados financieros con un modelo de dividendos estocásticos

Pablo Macías Pineda

Valoración de derivados financieros con un modelo de dividendos estocásticos

Índice

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

- Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otras variables subyacentes más básicas.

Figura 1. Número de contratos negociados. (Fernández, 2020)

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

Los principales subyacentes que se negocian en los mercados son:

- Acciones (“equities”) e índices bursátiles (como IBEX 35, EURO STOXX 50, DOW JONES, NIKKEI 225 o S&P 500).
- Índices de tipos de interés (como EURIBOR, EONIA, €STR, SOFR o LIBOR).
- Tipos de cambio de divisas (como EUR/USD, EUR/GBP o USD/JPY).
- Materias primas (como trigo, maíz, oro o recursos energéticos).

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

Derivados financieros básicos:

- Forwards
- Futuros
- Opciones

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

Forward:

- Es un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado.

- Valor del contrato:

$$V_T^{fwd} = S_T - K$$

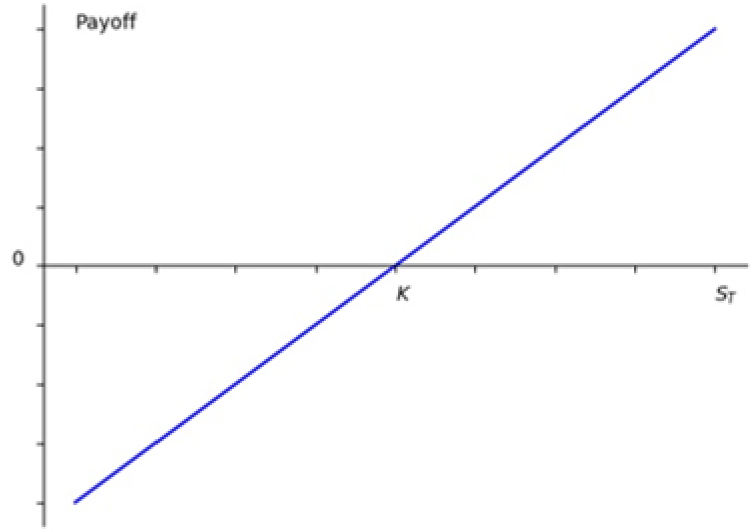


Figura 2. Payoff de un contrato forward comprado. Elaboración propia.

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

Futuro:

- Es un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado, pero en el que cada día se va liquidando la variación del precio del subyacente.

- Valor del contrato:

$$V_T^{fut} = \sum_{i=1}^{N} P_{t_i}^{fut}$$

$$= \left(S_{t_1} - K\right) + \left(S_{t_1} - S_{t_2}\right) + \cdots + \left(S_{t_N} - S_{t_{N-1}}\right)$$

$$= S_T - K$$

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

Opciones:

- Son contratos en los que una parte le da la opción a la otra de comprar (o vender) un determinado subyacente a un precio fijado en una fecha futura. Las opciones en las que se otorga el derecho (pero no la obligación) de comprar se llaman “opciones call”, mientras que en las opciones en las que se otorga el derecho a vender se llaman “opciones put”.

- Valor del contrato:

$$V_T^{call} = \max(S_T - K, 0)$$
$$V_T^{put} = \max(K - S_T, 0)$$

Apartado 1: Introducción y conceptos básicos

Opciones:

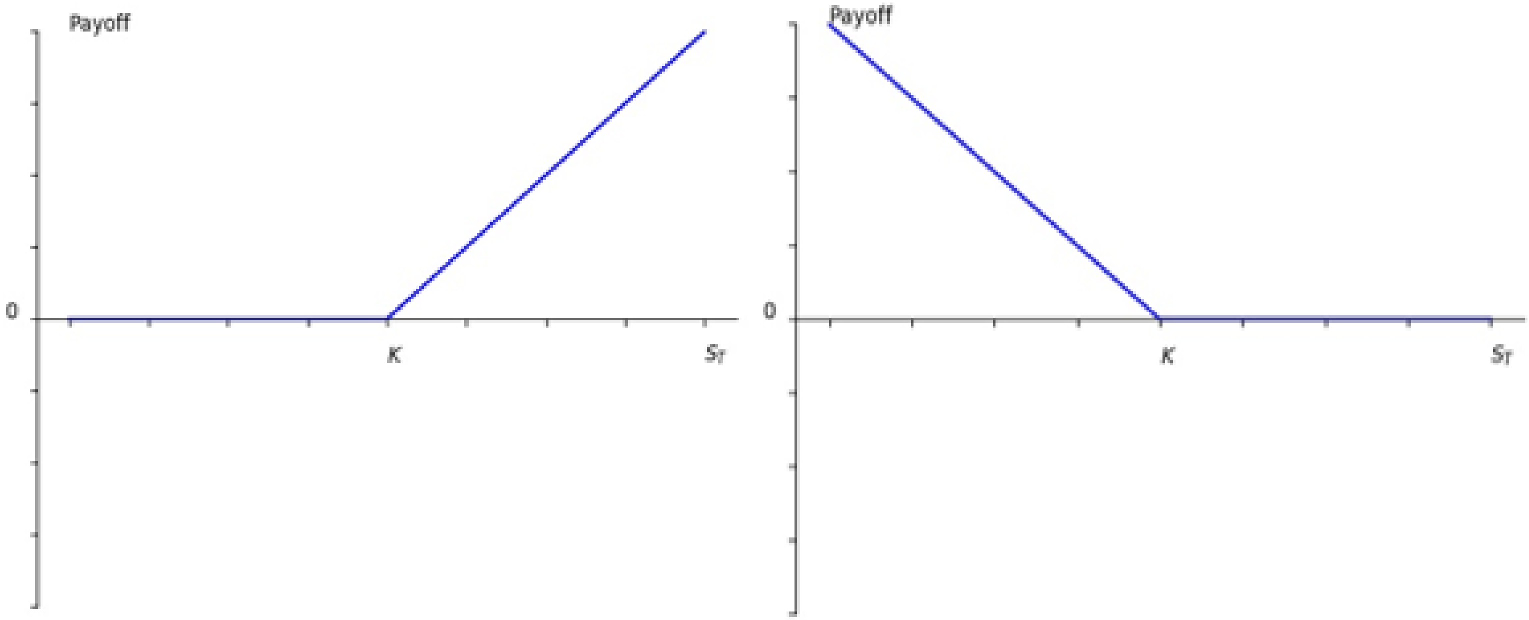


Figura 3. Payoff de una opción call (izquierda) y de una opción put (derecha). Elaboración propia.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

- S_t es un variable aleatoria en cada instante de tiempo t, es decir, es un proceso estocástico

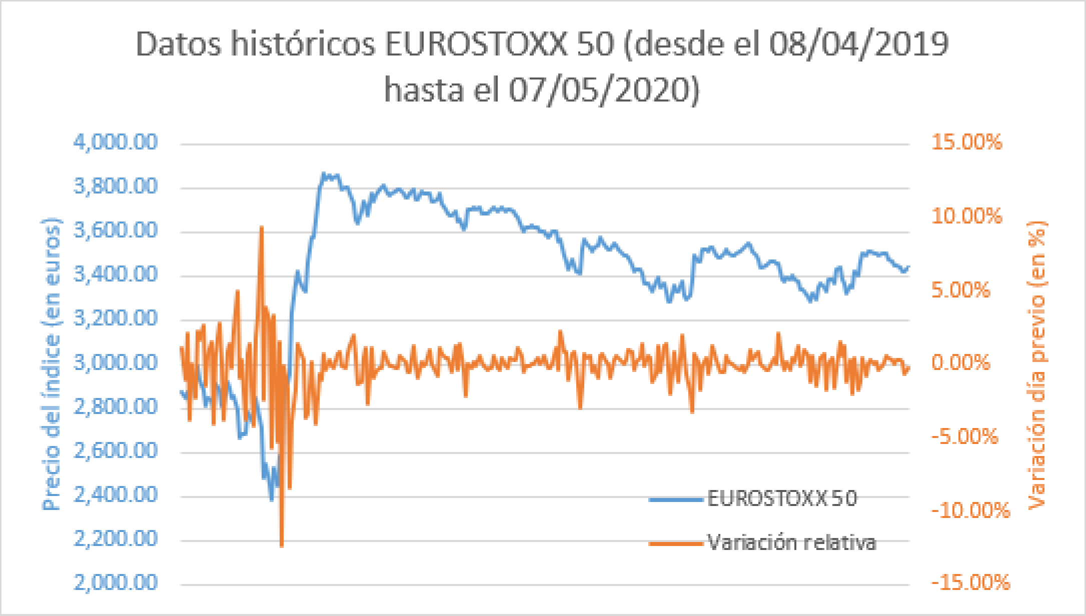


Figura 4. Datos históricos EUROSTOXX 50. (Investing.com, 2020)

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Definimos el **camino aleatorio simétrico** de k pasos como:

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$$

donde X_j son variables aleatorias independientes que pueden tomar los valores 1 y -1 con la misma probabilidad.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

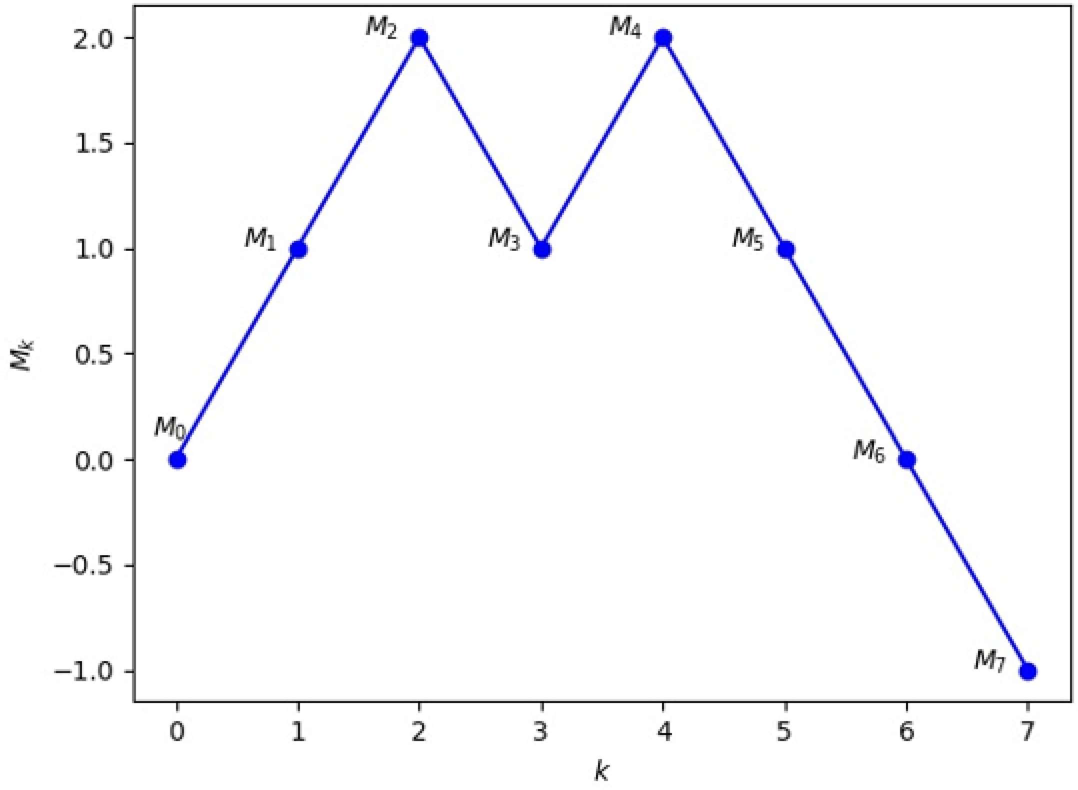


Figura 5. Camino aleatorio simétrico. Elaboración propia.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

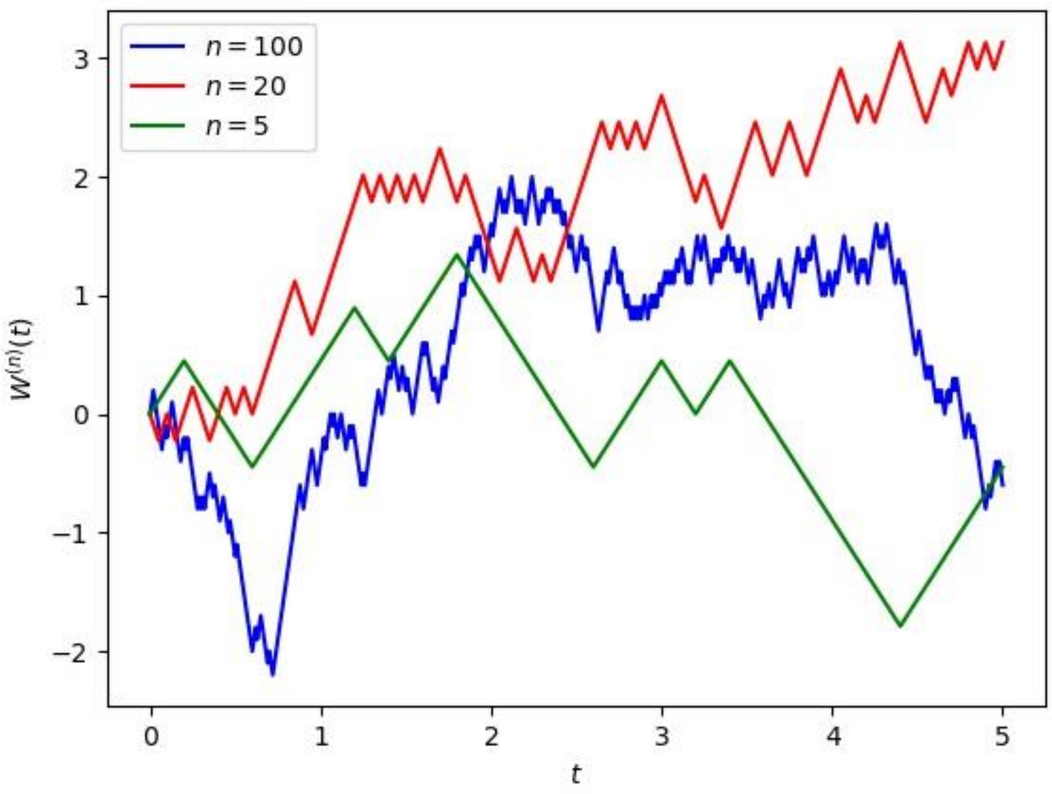
Definimos el **camino aleatorio simétrico escalado** $W^{(n)}(t)$ como:

$$W^{(n)}(t) = \frac{M_{nt}}{\sqrt{n}}$$

donde n es un parámetro que fija el tamaño de la escala.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico



Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Un movimiento Browniano se define como el proceso estocástico $W(t)$ obtenido como:

$$W(t) = \lim_{n \to \infty} W^{(n)}(t).$$

Propiedades:

- $\mathbb{E}\left[W(t_j) - W(t_k)\right] = 0$
- $Var\left[W(t_j) - W(t_k)\right] = t_j - t_k$
- A lo largo de un intervalo $[0, T]$, acumula T unidades de variación cuadrática, luego $\left(W(t) - W(s)\right)^2 \approx (t - s)$ cuando $(t - s)$ es pequeño.

$$dW(t)dW(t) = dt$$

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Cálculo de Itô:

En cálculo clásico, la integral de Lebesgue de $\Delta(t)$ con respecto a $g(t)$:

$$\int_0^T \Delta(t)\, dg(t) = \int_0^T \Delta(t) g'(t)\, dt$$

Si queremos hacer cálculo estocástico, con $g(t) = W(t)$, no podemos usar la integral clásica.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Cálculo de Itô:

Si tenemos un proceso $\Delta(t)$ simple, definimos la integral de Itô como

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u)\, dW(u)$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)\left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right] + \Delta(t_k)\left[W(t) - W(t_k)\right].$$

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Cálculo de Itô:

En caso de que el proceso $\Delta(t)$ no sea simple, podemos aproximarlo por un proceso que si lo sea.

4.3 Itô's Integral for General Integrands 135

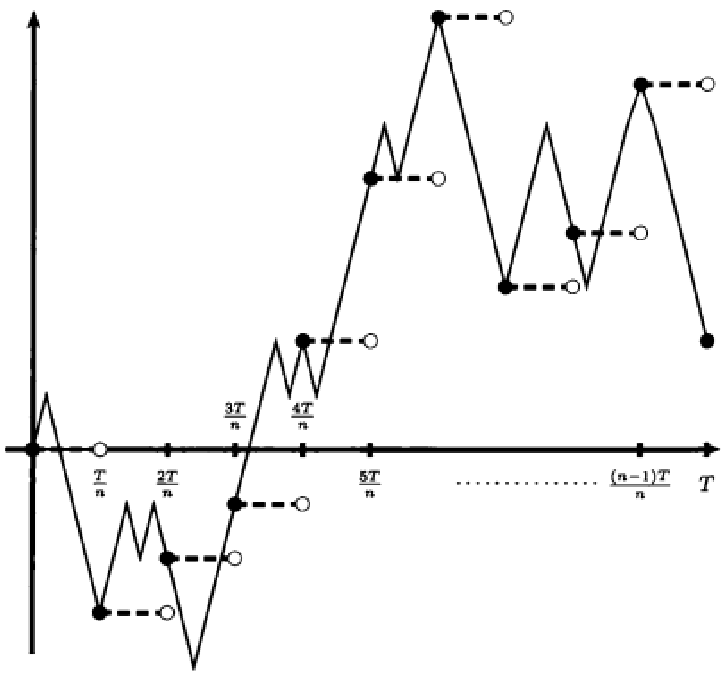


Fig. 4.3.2. Simple process approximating Brownian motion.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Cálculo de Itô:

Añadiendo puntos a la partición del intervalo, obtenemos una sucesión $\Delta_{\mathrm{n}}(t)$ de procesos simple que converge al proceso $\Delta(t)$ y podemos definir la integral de Itô mediante un límite:

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u)\, dW(u) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_0^t \Delta_{\mathrm{n}}(u)\, dW(u)$$

Propiedades:

- Los caminos de $I(t)$ son continuos
- $I(t)$ es $\mathcal{F}(t)$−medible para todo t.
- $\mathbb{E}\mathrm{I}^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u)\, du$
- Su variación cuadrática es $[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)\, du$

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Fórmula de Itô-Doeblin:

Generalización de la regla de la cadena:
$\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = f'\big(g(t)\big)\, g'(t)$, o bien, $df\big(d(t)\big) = f'\big(g(t)\big)\, dg(t)$

Fórmula:

$$df\big(W(t)\big) = f'\big(W(t)\big)\, dW(t) + \frac{1}{2} f''\big(W(t)\big) dt$$

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

En este trabajo modelizamos el índice y sus dividendos usando procesos de Itô:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)\, dW(u) + \int_0^t \Theta\,(u)\, du,$$

Escritos en forma diferencial:

$$dX(t) = \Delta(t)\, dW(t) + \Theta(t)dt$$

La formula de Itô-Doeblin, generalizada para este tipo de procesos quedaría:

$$df\big(t, X(t)\big) = f_t\big(t, X(t)\big)dt + f_x\big(t, X(t)\big)dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}\big(t, X(t)\big)dX(t)dX(t)$$

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.1 Introducción al cálculo estocástico

Los procesos que utilizaremos serán un movimiento Browniano geométrico $S(t)$ para el EUROSTOXX 50

$$dS(t) = (r - q(t))S(t)dt + \sigma\, S(t)dW(t)$$

y un proceso de Cox-Ingersoll-Ross para los dividendos

$$q(t) = a\big(b - q(t)\big)dt + \sigma\sqrt{q(t)}dW(t)$$

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.2 Valoración de derivados financieros

La fórmula de valoración de riesgo neutro de un derivado financiero es

$$V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}\,V(T)|\mathcal{F}(t)\right], \qquad 0 \le t \le T.$$

Sección 5.2.4 de (Shreve, 2004)

Para el caso concreto de la valoración de futuros

$$V(t) = \widetilde{\mathbb{E}}[S(T)|\mathcal{F}(t)].$$

Sección 5.6.2 de (Shreve, 2004)

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.2 Estado del arte

En (Lioui, 2006), se presenta una fórmula de valoración obtenida con una evolución lognormal para el índice de equity y una evolución para el ratio de dividendos y para otra variable que no analizaremos en este trabajo (el precio de mercado del riesgo) dadas por procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados.

En (Phewchean & Wu, 2019), se realiza un estudio muy similar al anterior, en el que se utiliza otro modelo más complejo para el precio de mercado del riesgo.

Apartado 2: Contexto y estado del arte

2.2 Estado del arte

En (Vatiwutipong & Phewchean, 2019) se presenta un estudio de un modelo de dividendos estocásticos que también utiliza un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. En este caso, el estudio consiste en ajustar los parámetros a datos históricos del índice en cuestión. Se trata de un tipo de estudio diferente al que realizaremos en este trabajo, donde lo que pretendemos es calibrar los parámetros con los datos de un instante presente para obtener como va a evolucionar el subyacente.

En estas tres referencias, el ratio de dividendos puede ser negativo.

Apartado 3: Aplicaciones

- Valoración de derivados financieros
- Cálculo de griegas
- Cálculo del VaR (Value at risk) y ES (Expected Shortfall)
- PRIIPs

Investment €1000				
Scenarios		1 year	[3] years	[5] years (Recommended holding period)
Unfavourable scenario	What you might get back after costs	€920	€857	€951
	Average return each year	-8%	-5%	-1%
Moderate scenario	What you might get back after costs	€1,030	€1,093	€1,159
	Average return each year	3%	3%	3%
Favourable scenario	What you might get back after costs	€1,100	€1,225	€1,338
	Average return each year	10%	7%	6%

Apartado 4: Objetivos

Objetivo general:

- Aprender las técnicas y teoría matemática usadas en la actualidad para valorar derivados financieros

Objetivos específicos:

- Plantear las ecuaciones que describen la evolución de las dos variables modelizadas

- Discretizar el sistema de ecuaciones apropiadamente para poder aplicar el método Montecarlo

- Desarrollos en Python:
  - El código de un método Montecarlo que simule las variables.
  - La valoración de futuros y opciones con el método Montecarlo.
  - El código de un algoritmo de optimización que calibre los parámetros del modelo para obtener los precios de mercado con el método Montecarlo.
  - El cálculo de las griegas usando el modelo calibrado.
  - El cálculo del VaR y el Expected Shortfall.

Apartado 5: Descripción de la contribución

- El modelo propuesto es

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = (r - q_t)dt + \sigma^S dW_t^1 \\ dq_t = a(b - q_t)dt + \sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho \, dt \end{cases}$$

- Los parámetros del modelo dependen del tiempo, de manera que son constantes a trozos.

Etiqueta	Fecha
T_1	18/12/2020
T_2	17/12/2021
T_3	16/12/2022
T_4	15/12/2023

Apartado 5: Descripción de la contribución

Datos de mercado:

- r: tipo de interés – tomo el EURIBOR 1 AÑO: 0.168%
- S_0: EUROSTOXX 50: 2680,30 €
- q_0: ratio de dividendos del EUROSTOXX 50: 1.9968%

$$\delta_t = S_t \cdot q_t$$

- ρ: correlación entre las dos variables – observada durante un año hasta la fecha de valoración: -18.9292%

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

- a: velocidad de reversión a la media – valor fijado a 0.001

En el modelo quedaría por calibrar los siguientes parámetros:

- σ^q, σ^S y b

Apartado 5: Descripción de la contribución

Para cada vencimiento, valoramos:

- Una opción call sobre el EUROSTOXX 50 con strike $\mathrm{K} = 2680.30$

$$V_{T_i,t}^{S} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T_i-t)}\, P_{T_i}^{S} \middle| \mathcal{F}(t)\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T_i-t)} \max(S_{T_i} - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t)\right]$$

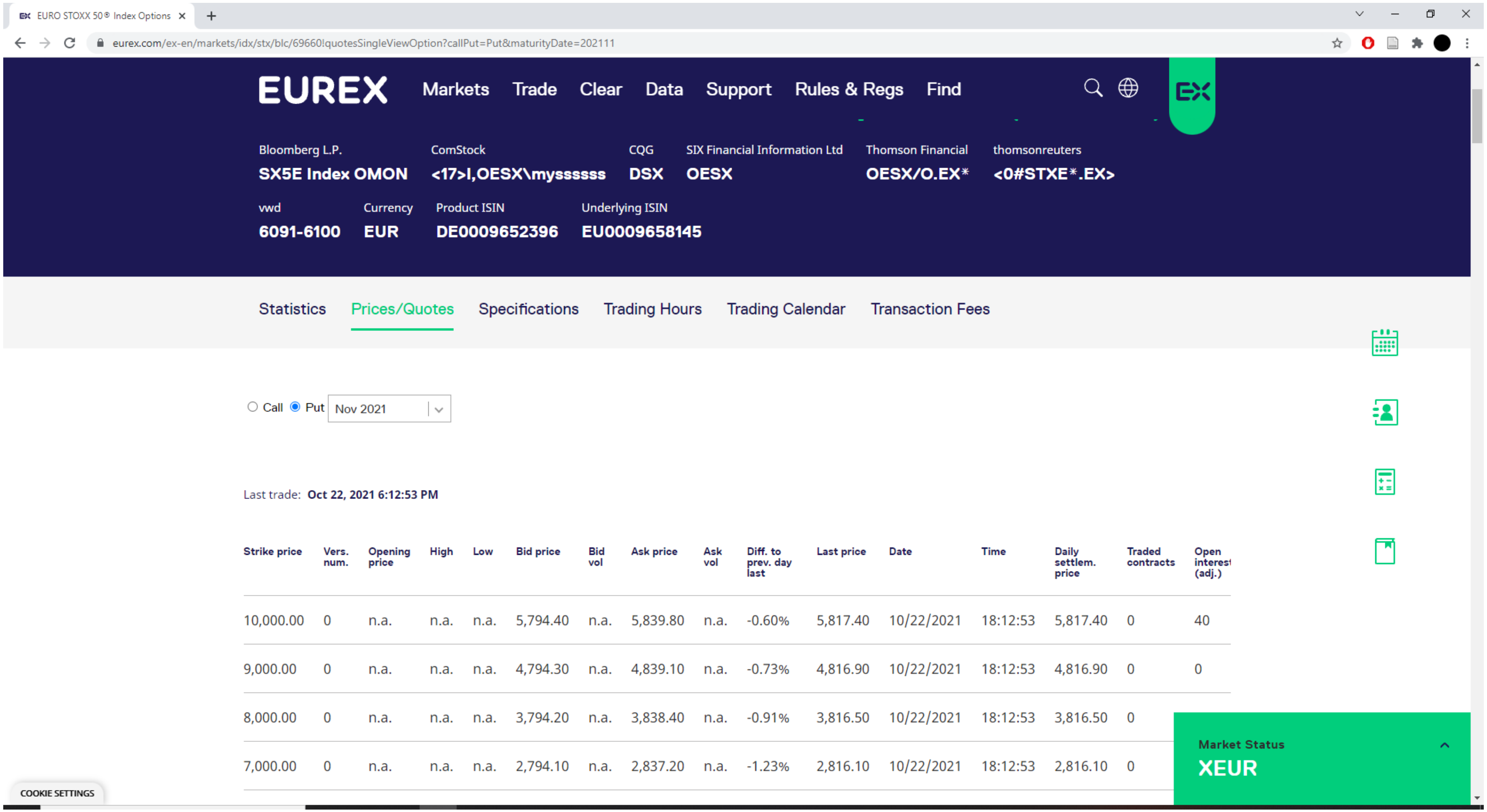
- Una opción call sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50 con strike $\mathrm{K} = 65$

$$V_{T_i,t}^{D} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T_i-t)}\, P_{T_i}^{D} \middle| \mathcal{F}(t)\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T_i-t)} \max(D_{T_i} - K, 0) \middle| \mathcal{F}(t)\right]$$

- Un futuro sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50

$$V_{T_i,t}^{S} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[D_{T_i} \middle| \mathcal{F}(t)\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{n} S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t \middle| \mathcal{F}(t)\right]$$

Apartado 5: Descripción de la contribución


EURO STOXX 50® Index Options

eurex.com/ex-en/markets/idx/stx/blc/69660!quotesSingleViewOption?callPut=Put&maturityDate=202111

EUREX Markets Trade Clear Data Support Rules & Regs Find

Bloomberg L.P.	ComStock	CQG	SIX Financial Information Ltd	Thomson Financial	thomsonreuters
SX5E Index OMON	<17>I,OESX\mysssss	DSX	OESX	OESX/O.EX*	<0#STXE*.EX>

vwd	Currency	Product ISIN	Underlying ISIN
6091-6100	EUR	DE0009652396	EU0009658145

Statistics Prices/Quotes Specifications Trading Hours Trading Calendar Transaction Fees

Call Put Nov 2021

Last trade: **Oct 22, 2021 6:12:53 PM**

Strike price	Vers. num.	Opening price	High	Low	Bid price	Bid vol	Ask price	Ask vol	Diff. to prev. day last	Last price	Date	Time	Daily settlem. price	Traded contracts	Open interest (adj.)
10,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	5,794.40	n.a.	5,839.80	n.a.	-0.60%	5,817.40	10/22/2021	18:12:53	5,817.40	0	40
9,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	4,794.30	n.a.	4,839.10	n.a.	-0.73%	4,816.90	10/22/2021	18:12:53	4,816.90	0	0
8,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	3,794.20	n.a.	3,838.40	n.a.	-0.91%	3,816.50	10/22/2021	18:12:53	3,816.50	0	
7,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	2,794.10	n.a.	2,837.20	n.a.	-1.23%	2,816.10	10/22/2021	18:12:53	2,816.10	0	

Market Status
XEUR

COOKIE SETTINGS

Apartado 5: Descripción de la contribución

Valoración por Montecarlo

Teorema central del límite de Lindeberg-Levy:

Dada una sucesión $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas con esperanza $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y varianza $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Cuando n se acerca a infinito, la sucesión de variables aleatorias $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge en distribución a una normal $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, donde

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + \ X_n}{n}$$

Aplicado al producto $V_t = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-r(T-t)}\ P_T | \mathcal{F}(t)\right]$:

Tomamos $X = e^{-r(T-t)}\ P_T$, simulamos esta variable n veces y $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ con $V_t = \mu$

Apartado 5: Descripción de la contribución

Discretización por Euler-Maruyama

El sistema discretizado quedaría:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + (r - q_i)S_i\Delta t + \sigma^S \mathrm{S_i}\Delta W_i^1 \\ q_{i+1} = q_i + a(b - q_i)\Delta t + \sigma^q\sqrt{q_i}\Delta W_i^2 \end{cases}$$

La primera ecuación se comporta de manera exponencial. Aplicamos Itô con la transformación $f(x) = \ln x$:

$$df(t, S_t) = f_t(t, S_t)dt + f_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}f_{xx}\big(t, S(t)\big)dS_t dS_t$$

$$\begin{cases} f_t = 0 \\ f_x = \dfrac{1}{x} \\ f_{xx} = \dfrac{(-1)}{x^2} \end{cases},$$

Apartado 5: Descripción de la contribución

Discretización por Euler-Maruyama

La primera ecuación quedaría

$$\mathrm{d}\ln S_t = \left(r - q_t - \frac{1}{2}(\sigma^S)^2\right)dt + \sigma^S \mathrm{d}W_t^1.$$

El sistema que simulamos con el Montecarlo finalmente sería

$$\begin{cases} \ln S_{i+1} = \ln S_i + \left(r - q_i - \frac{1}{2}(\sigma^S)^2\right)\Delta t + \sigma^S \Delta W_i^1 \\ q_{i+1} = q_i + a(b - q_i)\Delta t + \sigma^q \sqrt{q_i}\Delta W_i^2 \end{cases}$$

Apartado 5: Descripción de la contribución

Variables normales con correlación:

Para obtener dos variables aleatorias normales con correlación ρ, podemos utilizar el método de Cholesky.

$$Z = LX$$

$$\Sigma = LL^{\mathrm{T}}$$

Factorización de Cholesky:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Apartado 5: Descripción de la contribución

Valores negativos debido a la discretización:

$$dq_t = a(b - q_t)dt + \sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2$$

Apartado 5: Descripción de la contribución

Resultados:

Intervalo	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX	
	Producto			
$t_0 \leq t < T_1$	53.100000	5.600000	239.001600	Precio de mercado
	53.099999	5.600008	239.001599	Precio del modelo
$T_1 \leq t < T_2$	49.800000	4.1900000	292.900000	Precio de mercado
	49.800000	4.190000	292.900000	Precio del modelo
$T_2 \leq t < T_3$	63.600000	11.020000	312.560400	Precio de mercado
	63.600000	11.020000	312.560400	Precio del modelo
$T_3 \leq t \leq T_4$	67.400000	16.130000	336.769200	Precio de mercado
	67.400000	16.130000	336.769200	Precio del modelo

Tabla 5. Comparación entre precios de mercado y precios calculados. Elaboración propia.

Apartado 5: Descripción de la contribución

Resultados:

Intervalo	b	σ^S	σ^q
$t_0 \leq t < T_1$	0.024737	0.298577	0.178015
$T_1 \leq t < T_2$	0.039417	0.209427	0.129734
$T_2 \leq t < T_3$	0.051132	0.196489	0.127034
$T_3 \leq t \leq T_4$	0.055940	0.205345	0.181146

Tabla 4. Parámetros calibrados. Elaboración propia.

Apartado 5: Descripción de la contribución

Resultados:

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	53.100000	23.479155	239.001600
T_2	49.800000	17.978683	292.900000
T_3	63.600000	37.022108	312.560400
T_3	67.400000	43.801737	336.769200

Tabla 6. Sensibilidad delta de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	1,838.938107	679.394951	-919.425731
T_2	-25.536570	-9.925978	-910.892172
T_3	-45.011097	-25.462989	-881.371679
T_4	-47.795849	-30.665145	-859.113682

Tabla 7. Sensibilidad delta de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia.

Apartado 5: Descripción de la contribución

Resultados:

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	-0.448997	8.780789	461.384801
T_1	0.408203	10.000642	467.921482
T_2	-1.185040	7.987847	427.770744
T_3	-4.616025	-0.332051	499.439645

Tabla 8. Sensibilidad vega de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	0.128060	0.152205	6.607915
T_1	0.145831	0.174670	6.785728
T_2	0.085180	0.152576	8.545754
T_3	-6.595893	34.856358	10.739574

Tabla 9. Sensibilidad vega de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia.

Apartado 5: Descripción de la contribución

Resultados:

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.099131	-8.603416
ES	-3.304078	-2.071192	-16.509075

Tabla 10. Value at Risk y Expected Shortfall. Elaboración propia.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.118999	-8.603413
ES	-3.304078	-2.147245	-16.509075

Tabla 11. Value at Risk y Expected Shortfall mediante aproximación de Taylor. Elaboración propia.

0.0009 segundos vs 200 segundos

Apartado 6: Conclusiones

Conclusiones:

- El modelo es calibrable y se puede utilizar
- Es útil para la gestión de riesgos, se pueden obtener diferentes griegas.
- Se pueden calcular métricas exigidas por reguladores

Líneas de trabajo futuro:

- Se podría utilizar el modelo para valorar productos más complejos. Si no diera precios adecuados, se podrían calibrar el parámetro a que fijamos.
- Se podrían añadir más variables aleatorias, con sus propias dinámicas. Por ejemplo, para el tipo de interés r.
- Se podría utilizar un modelo más complejo para la volatilidad, como volatilidad local.

unir

LA UNIVERSIDAD
EN INTERNET

www.unir.net