

Universidad Internacional de La Rioja

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Valoración de derivados financieros con un modelo de dividendos estocásticos

|  |  |
| --- | --- |
| Trabajo fin de estudio presentado por: | Pablo Macías Pineda |
| Tipo de trabajo: | Tipo 3. Investigación pura |
| Director/a: | Julia Calatayud Gregori |
| Fecha: | 2 de mayo de 2021 |

Resumen

En este trabajo se modelizarán el índice EURO STOXX 50 con una evolución lognormal y el pago de sus dividendos con el modelo de Cox-Ingersoll-Ross. Se utilizarán el precio de opciones call sobre el EURO STOXX 50, el precio de opciones call sobre los dividendos y futuros sobre los dividendos para calibrar todos los parámetros libres del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas planteado: la volatilidad del índice, la volatilidad de los dividendos, el valor medio de los dividendos y la velocidad de reversión a la media de los dividendos.

Para realizar esta calibración, se valorarán los productos a través de un método Montecarlo programado en Python y se utilizará el método híbrido de Powell como algoritmo de búsqueda de raíces para encontrar los parámetros del modelo.

Una vez calibrado el modelo, se analizará uno de los posibles usos de este modelo en la industria financiera: el cálculo del VaR por aproximación de Taylor.

**Palabras clave:** Cox-Ingersoll-Ross, Dividendos, Derivados financieros, Montecarlo

Abstract

In this work, we model the EURO STOXX index with a lognormal temporary evolution and the payment of its dividends with a Cox-Ingersoll-Ross model. The price of call options on the EURO STOXX 50 index, the price of call options on the dividends and dividend futures are used for calibrating all the free parameters of the stochastic differential equations system purposed: the volatility of the index, the volatility of the dividends, the mean value of the dividends and the mean reversion speed of the dividends.

For performing this calibration, the three products will be priced using a Montecarlo method programmed in Python, and the Powell’s hybrid method will be used as roots finding algorithm for obtaining the model parameters.

Once the model is calibrated, we will analyse one of its possible uses in the financial industry: the calculation of the VaR through Taylor’s approach.

**Keywords**: Cox-Ingersoll-Ross, Dividends, Financial derivatives, Montecarlo

Índice de contenidos

[1. Introducción y conceptos básicos 8](#_Toc75440866)

[1.1. Motivación 8](#_Toc75440867)

[1.2. Conceptos básicos 10](#_Toc75440868)

[1.2.1. Forwards 10](#_Toc75440869)

[1.2.2. Futuros 12](#_Toc75440870)

[1.2.3. Opciones 12](#_Toc75440871)

[1.3. Estructura del trabajo 15](#_Toc75440872)

[2. Contexto y estado del arte 16](#_Toc75440873)

[2.1. Introducción al cálculo estocástico. 16](#_Toc75440874)

[2.1.1. Movimiento Browniano 17](#_Toc75440875)

[2.1.2. Cálculo de Itô 19](#_Toc75440876)

[2.2. Valoración de derivados. 22](#_Toc75440877)

[2.3. Estado del arte. 23](#_Toc75440878)

[3. Aplicaciones del estudio que se lleva a cabo 25](#_Toc75440879)

[4. Objetivos 28](#_Toc75440880)

[4.1. Objetivo general 28](#_Toc75440881)

[4.2. Objetivos específicos 28](#_Toc75440882)

[5. Descripción de la contribución 29](#_Toc75440883)

[5.1. Modelización de las variables 29](#_Toc75440884)

[5.2. Derivados financieros usados en la calibración 31](#_Toc75440885)

[5.2.1. Opciones sobre el EUROSTOXX 50 31](#_Toc75440886)

[5.2.2. Futuros sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50. 33](#_Toc75440887)

[5.2.3. Opciones sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50 34](#_Toc75440888)

[5.3. Valoración por método Montecarlo 35](#_Toc75440889)

[5.4. Método de Euler-Maruyama 35](#_Toc75440890)

[5.5. Correlación de variables normales utilizando la factorización de Choleski 38](#_Toc75440891)

[5.6. Variables antitéticas 39](#_Toc75440892)

[5.7. Problema por la discretización del modelo continuo 39](#_Toc75440893)

[5.8. Obtención de los datos de mercado 40](#_Toc75440894)

[5.8.1. EUROSTOXX 50 40](#_Toc75440895)

[5.8.2. Ratio de dividendos del EUROSTOXX 50 40](#_Toc75440896)

[5.8.3. Correlación entre el índice y su ratio de dividendos 41](#_Toc75440897)

[5.8.4. Tipo de interés libre de riesgo 41](#_Toc75440898)

[5.8.5. Velocidad de reversión a la media 42](#_Toc75440899)

[5.9. Calibración del modelo 42](#_Toc75440900)

[6. Conclusiones y trabajo futuro 45](#_Toc75440901)

[6.1. Conclusiones 45](#_Toc75440902)

[6.2. Líneas de trabajo futuro 45](#_Toc75440903)

[Referencias bibliográficas 46](#_Toc75440904)

[Anexo I. Artículo 48](#_Toc75440905)

[Anexo A. Código Python 49](#_Toc75440906)

Índice de figuras

[Figura 1. Número de contratos negociados (Fernández, 2020) 8](#_Toc75440951)

[Figura 2. Datos históricos EUROSTOXX 50. (Investing.com, s. f.) 16](#_Toc75440952)

Índice de tablas

[Tabla 1. Número de contratos negocias en Eurex. (Eurex, s. f.) 10](#_Toc77249266)

[Tabla 2. Resumen de modelos de tipos de interés instantáneos. (Brigo & Mercurio, 2006) 30](#_Toc77249267)

[Tabla 3. Vencimientos de productos para la calibración. Elaboración propia. 32](#_Toc77249268)

[Tabla 4. Parámetros calibrados. Elaboración propia. 43](#_Toc77249269)

[Tabla 5. Comparación entre precios de mercado y precios calculados. Elaboración propia. 44](#_Toc77249270)

# Introducción y conceptos básicos

## Motivación

En la actualidad, los derivados financieros son herramientas básicas en la industria de las finanzas. Son usados por todo tipo de compañías: bancos, bancos centrales, energéticas, farmacéuticas, compañías de seguros, gobiernos, fondos de inversiones…

Para poder apreciar la relevancia de estos instrumentos, la Figura 1 muestra el número de contratos negociados (en millones) en los principales mercados de intercambio de derivados durante 2019.

Figura 1. Número de contratos negociados. (Fernández, 2020)

Comenzamos este trabajo definiendo el concepto de derivado financiero: “Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otras variables subyacentes más básicas” (Hull, 2014, p.1). A lo largo de este trabajo, aprenderemos a utilizar diferentes modelos que se usan en la actualidad para calcular el valor de derivados financieros y propondremos uno que tenga en cuenta el riesgo que surge debido a los dividendos.

La valoración de estos instrumentos es fundamental para la gestión de riesgos, debido a que diferentes reguladores de instituciones financieras como el ECB[[1]](#footnote-1) o asociaciones de participantes en los mercados financieros como ICMA[[2]](#footnote-2) o IFRS[[3]](#footnote-3), exigen a las entidades que manejan este tipo de instrumentos el cálculo de diferentes medidas del riesgo al que se exponen, como el VaR[[4]](#footnote-4) o las griegas. Actualmente, se ha publicado una normativa que está pendiente de ser implantada en todas las instituciones (Basel Committee on Banking Supervition, 2019). El cálculo de estas medidas es fundamental para las instituciones y debe realizarse con la mayor precisión posible, ya que el capital que deben reservar para hacer frente a posibles pérdidas depende de ellas.

Los diferentes derivados financieros suelen clasificarse y gestionarse en conjunto según el tipo de subyacente. Los principales subyacentes que se negocian en los mercados son:

* Acciones e índices bursátiles (como IBEX 35, EURO STOXX 50, DOW JONES, NIKKEI 225 o S&P 500).
* Índices de tipos de interés (como EURIBOR, EONIA, €STR, SOFR o LIBOR).
* Tipos de cambio de divisas (como EUR/USD, EUR/GBP o USD/JPY).
* Materias primas (como trigo, maíz, oro o recursos energéticos).

Como primera toma de contacto en la valoración de derivados, todos los subyacentes se pueden modelar con la misma dinámica y llegar a las mismas fórmulas de valoración. En la práctica, cada subyacente tiene unas particularidades diferentes y tienen sus propias dinámicas de evolución que las recogen.

Durante este trabajo, nos centraremos en modelizar derivados de acciones. Concretamente, el índice que elegiremos es el EURO STOXX 50, ya que es uno de los principales índices de Europa y existen muchos tipos diferentes de derivados sobre él. De los diferentes mercados organizados que se indican en la figura 1, el EURO STOXX 50 es negociado en Eurex.

La Tabla 1 muestra el número de derivados financieros (opciones y futuros) por subyacente que se comerciaron en Eurex el día 1 de junio de 2021:

|  |  |
| --- | --- |
| Subyacente | Número de contratos negociados |
| Tipos de interés | 5,196,321 |
| Acciones | 847,505 |
| Índices bursátiles | 2,775,741 |
| Tipos de cambio | 142 |
| Dividendos | 82,029 |
| Materias primas | 0 |

Tabla 1. Número de contratos negocias en Eurex. (Eurex, s. f.)

Otra regulación emitida por la European Commission que hace necesario el desarrollo de modelos de valoración de derivados es PRIIPs[[5]](#footnote-5) (Commission delegated regulation, 2017). El objetivo de esta regulación es que las instituciones financieras que ofrecen derivados financieros a clientes minoristas entreguen estos un documento en el que se indique claramente el riesgo al que se exponen y los posibles resultados de su inversión en diferentes escenarios, tanto favorables como desfavorables.

## Conceptos básicos

En esta sección veremos en detalle los derivados financieros sobre acciones más sencillos que se negocian en los mercados organizados mencionado en la sección anterior.

### Forwards

Un forward es un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado. Si llamamos al momento en el que se realizará la venta, al precio del subyacente en el instante y al precio de venta que se ha fijado, entonces el valor del contrato forward en el momento en el que se realiza la venta final será:

Nótese que este valor está calculado desde el punto de vista de la persona que ha comprado el contrato, y por tanto, va a comprar en el futuro el subyacente. Esto significa que si el precio del subyacente en el instante es mayor al precio fijado (), el comprador del contrato forward obtendrá beneficios, ya que podría comprar el subyacente a precio y venderlo al momento en el mercado a precio , por lo que obtendrá de beneficio la cantidad .

En caso contrario, si el precio del subyacente en el instante es menor al precio fijado (), se puede razonar de la misma manera para ver el comprador del forward habrá perdido la cantidad , ya que se está viendo obligado a comprar el subyacente a un precio más caro del valor real.

La Figura 2 muestra el valor del contrato forward en el momento de vencimiento del mismo en función del valor del subyacente.

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Figura 2. Payoff de un contrato forward comprado.

Este tipo de derivado financiero suele negociarse de manera privada en las dos partes, por lo que no se ven en los diferentes mercados financieros que se mencionan en la sección 1.1.

Los principales riesgos de este tipo de derivados son el riesgo generado por el valor que vaya a tener el subyacente y el riesgo a que una de las dos partes no pueda afrontar su parte del contrato, bien porque no tenga el dinero para pagar una de las dos partes, o bien porque la otra parte no disponga del subyacente para entregarlo.

### Futuros

Los futuros son derivados financieros muy parecidos a los forwards. Se trata también de un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado, por lo que la fórmula para valorar el producto en la fecha final es la misma.

La principal diferencia de este tipo de contratos es que se acuerda ir realizando pagos cada día. El primer día se paga la diferencia , y el resto de día se va pagando la diferencia con el día anterior (con y ). De esta manera, se elimina el riesgo de que al final del contrato, el precio a pagar sea muy elevado y se cometa un impago.

Si sumamos todos los pagos que se han ido haciendo durante la vida del futuro, vemos que el valor del contrato es equivalente al del forward:

Este tipo de contratos, con menos riesgos, son negociados en los mercados organizados, y son unos de los que utilizaremos para calibrar el modelo de valoración que se propone en este trabajo. Lo que se negocia en estos mercados es el precio , que denominan comúnmente “precio del futuro”.

### Opciones

Las opciones son contratos en los que una parte le da la opción a la otra de comprar (o vender) un determinado subyacente a un precio fijado en una fecha futura. Las opciones en las que se otorga el derecho (pero no la obligación) de comprar se llaman “opciones call”, mientras que en las opciones en las que se otorga el derecho a vender se llaman “opciones put”.

Si utilizamos la misma notación que en el apartado 1.2.1, el valor de una opción call en el instante de finalización del contrato será:

La parte de la ecuación es igual que la del forward. Cuando , el comprado de la opción call ejercerá su derecho a comprar el subyacente al precio más barato que su precio real. Sin embargo, cuando , al comprador de la opción no le será rentable ejercitar su derecho a comprar, ya que si quisiera el subyacente podría comprarlo en el mercado directamente a un precio más barato que el precio que fijó en el contrato de la opción, por lo que la opción no valdrá nada.

Análogamente, se razona que el valor de una opción put en el instante de vencimiento de la opción es:

La Figura 3 muestra el valor de una opción call y una opción put en el instante en función del precio del subyacente .

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamenteGráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Figura 3. Payoff de una opción call (izquierda) y de una opción put (derecha). Elaboración propia.

Durante toda esta sección, hemos hablado del valor de los derivados financieros en el momento de su vencimiento . Todos ellos dependen del valor del subyacente en ese instante, por lo que de manera natural aparecen las siguientes dudas:

* ¿Es posible conocer o predecir el valor de (y por tanto ) en el instante de compra de un derivado financiero?
* ¿Cuál es el precio “justo” de compra de un derivado financiero , ya sea un forward, un futuro o una opción?

La respuesta a estas preguntas las veremos en la sección 2, donde aprenderemos técnicas matemáticas de valoración de derivados.

## Estructura del trabajo

Este trabajo se divide en cinco secciones diferentes:

* La sección 0, donde se han introducido los conceptos más básicos sobre derivados financieros. Hemos visto la cantidad de contratos que se negocian en los mercados organizados, la importancia de disponer de modelos de valoración debido a diferentes regulaciones financieras y hemos presentado los derivados financieros más sencillos.
* La sección 2, donde presentaremos las técnicas matemáticas para valorar derivados (cálculo estocástico) y veremos algunos modelos existentes que incluyen los dividendos como variable aleatoria también.
* La sección 3, donde detallaremos las aplicaciones de la valoración de derivados que ya hemos presentado en la introducción y veremos las mejoras que incluye el tener en cuenta los dividendos como factor de riesgo.
* La sección 0, donde veremos los objetivos del desarrollo de la aportación de este trabajo, tanto de manera general como específica.
* La sección 5, donde plantearemos un modelo de evolución para un índice bursátil y para sus dividendos. Calibraremos este modelo para valorar ciertos derivados financieros y ser capaces de medir riesgos.

# Contexto y estado del arte

## Introducción al cálculo estocástico.

Para comenzar nuestro estudio, necesitamos encontrar una forma adecuada de tratar la variable que queremos modelizar. La siguiente gráfica muestra el valor del índice EUROSTOXX 50 cada día durante un periodo de 13 meses, de fecha más reciente a más antigua.

Figura 4. Datos históricos EUROSTOXX 50. (Investing.com, 2020)

Si observamos el precio del índice, vemos que varía aleatoriamente, por lo que a lo largo de este trabajo, consideraremos que es un variable aleatoria en cada instante de tiempo , es decir, es un proceso estocástico. Visualmente, sus caminos (trayectorias) son continuos y no diferenciable en todo .

El tratamiento de las variables aleatorias requiere de conocimientos de generales de teoría de la probabilidad, que se encuentra dentro de la rama de las matemáticas de teoría de la medida. En esta sección no introduciremos los conceptos más básicos, si no que partiremos de la base de que se conoce todo lo expuesto en los capítulos 1 y 2 de (Shreve, 2004). Concretamente, los conceptos que asumimos conocidos son los de espacio de probabilidad, medida de probabilidad, variables aleatorias, esperanza, integral de Lebesgue, los teoremas de convergencia de integrales, el teorema de Radon-Nikodým, esperanzas condicionadas y dependencias entre variables aleatorias.

### Movimiento Browniano

El objetivo de esta sección es construir un movimiento Browniano , que será la pieza fundamental de la parte aleatoria de la variable .

Definimos el camino aleatorio simétrico de pasos como:

donde son variables aleatorias independientes que pueden tomar los valores y con la misma probabilidad.

La Figura 5 muestra un posible resultado de la variable , con pasos.

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Figura 5. Camino aleatorio simétrico. Elaboración propia.

Esta variable aleatoria empieza a parecerse a lo que necesitamos para modelar el EUROSTOXX 50, pero necesitamos que el tamaño de los pasos, tanto en altura como en separación no sea tan grande. Para ello, definimos camino aleatorio simétrico escalado como:

donde es un parámetro que fija el tamaño de la escala.

La Figura 6 muestra tres caminos aleatorios simétricos escalados con diferente parámetro , que toma los valores y y con .

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Figura 6. Caminos aleatorios simétricos escalados. Elaboración propia.

Este tipo de variable aleatoria nos valdría para aproximar el índice que queremos modelar, sin embargo, para poder ver todas las propiedades del cálculo estocástico, necesitamos llegar al movimiento Browniano.

Un movimiento Browniano se definirá como el proceso estocástico obtenida como:

.

Esta variable aleatoria tiene la propiedad de que cualquier incremento (con ) se distribuye como una variable aleatoria normal con esperanza y varianza .

Además, un movimiento Browniano cumple que en a lo largo de un intervalo , acumula unidades de variación cuadrática. Esto nos lleva a afirmar que cuando es pequeño. Esta propiedad se suele escribir de la forma

y jugará un papel crítico en el cálculo de Itô presentado en la sección 2.1.2.

A parte del movimiento Browniano, en la valoración de derivados financieros necesitaremos utilizar el concepto de filtración. La definición técnica puede encontrarse en la definición 3.3.3 de (Shreve, 2004), aquí presentaremos las propiedades que definen el concepto.

Una filtración para un movimiento Browniano es una colección de -álgebras que satisface:

* A tiempo hay al menos tanta información disponible en la -álgebra como había en un tiempo anterior en la -álgebra .
* La información disponible en un tiempo es suficiente para evaluar el movimiento Browniano en ese instante.
* Cualquier incremento del movimiento Browniano después de un tiempo es independiente de la información disponible en .

Además, dado un proceso estocástico , decimos que está adaptado a la filtración si para cada instante , la variable aleatoria es -medible.

### Cálculo de Itô

En el cálculo clásico, cuando tenemos una función diferenciable y queremos realizar la integral de Lebesgue de una función , podemos utilizar la fórmula

En el caso del cálculo estocástico, cuando , no es posible utilizar la misma fórmula que en cálculo clásico, ya que un movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto. Por ello, debemos definir un nuevo concepto de integral que llamaremos integral de Itô.

En el caso en el que el proceso sea simple, es decir, sea constante en cada intervalo de una cierta partición de , definimos la integral de Itô (con y ) como

Como se puede ver en esta definición, la integral de Itô será también un proceso estocástico. En caso de que el integrando no sea un proceso simple, podríamos aproximarlo por un proceso simple eligiendo una partición del intervalo , de manera que en cada punto , tome el valor constante hasta el punto . La gráfica x muestra un ejemplo de esta aproximación, donde la gráfica continua sería el proceso y la gráfica a rayas sería la aproximación .

Añadiendo más puntos a la partición, podemos crear una sucesión de procesos simples de manera que converja a , es decir,

De esta forma, podemos definir la integral de Itô de un proceso adaptado que varía continuamente como

La integral de Itô cumple las siguientes propiedades:

* Como es una función que depende del límite de integración superior , los caminos de son continuos.
* es -medible para todo .
* Isometría de Itô: .
* Su variación cuadrática es .

Una vez sabemos hacer integrales con respecto a un movimiento Browniano, también nos interesa obtener una generalización de la regla de la cadena para el cálculo estocástico. Concretamente, nos interesaría ser capaces de derivar expresiones del tipo , donde es una función diferenciable.

Si en lugar de , tuviéramos una función diferenciable , la regla de la cadena clásica nos diría que

o en notación diferencial

En el caso del cálculo estocástico, se generaliza esta expresión con la fórmula de Itô-Doeblin, que en su forma diferencial sería

Podemos ver que el primer término es análogo al de la regla de la cadena, pero además, se añade un segundo término debido a la variación cuadrática del movimiento Browniano.

Para utilizar estos resultados en la valoración de derivados, tenemos que generalizarlos un poco más, ya que no modelizaremos nuestras variables como movimientos Brownianos directamente, sino que será procesos de Itô.

Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma

donde es un valor inicial fijo y y son procesos estocásticos adaptados a la filtración asociada al movimiento Browniano.

En su forma diferencia, un proceso de Itô se escribiría como . Nos será muy útil utilizar procesos de Itô porque aparecen de forma diferencia el término con , que es el que aporta la variación cuadrática y el término con , que aunque pueda ser aleatorio también, no aporta variación cuadrática.

La fórmula de Itô- Doeblin para un proceso de Itô al que se le aplica una función es

donde y son las diferentes derivadas parciales de .

En este trabajo, llamaremos al valor del índice EUROSTOXX 50 y lo modelaremos utilizando el proceso de Itô

de manera que , con , donde es el valor inicial del índice y y serán parámetros del modelo.

Si se aplica la fórmula de Itô, se puede ver que

Este proceso recibe el nombre de movimiento Browniano geométrico.

Para el caso del ratio de dividendos , utilizaremos el modelo de evolución de Cox-Ingersoll-Ross

donde , y serán parámetros del modelo. En este caso, el modelo es más complejo y la fórmula de Itô no nos ayudará en el trabajo.

## Valoración de derivados

Ahora que tenemos las herramientas matemáticas para modelizar los subyacentes de los que dependen los derivados financieros que introducimos al final del capítulo 1.2:

* ¿Es posible conocer o predecir el valor de (y por tanto ) en el instante de compra de un derivado financiero?

Como hemos visto, será un proceso estocástico adaptado a la filtración asociada a un determinado movimiento Browniano que utilizamos para modelizarlo. Al estar adaptado a dicha filtración, únicamente será posible conocer el valor de a partir del instante , por lo que la respuesta a esta pregunta es negativa.

* ¿Cuál es el precio “justo” de compra de un derivado financiero , ya sea un forward, un futuro o una opción?

El hecho de desconocer el valor de en el instante no nos limita a la hora de poner un precio a un derivado financiero. Para responder a esta pregunta, nos remitimos al final de la sección 5.2.4 de (Shreve, 2004). La fórmula de valoración de riesgo neutro de un derivad financiero es

Para el caso concreto de la valoración de futuros, nos referimos a la sección 5.6.2 de la misma referencia, donde se concluye que el precio de un futuro sobre un subyacente es

## Estado del arte

La valoración de derivados financieros con modelos en los que los dividendos son estocásticos no es común, ya que hoy en día, no existen demasiados derivados sobre los dividendos que permitan calibrar los parámetros.

Cuando el ratio de dividendos no se considera estocástico, si no que se toma como un parámetro determinista más o cuando el pago de dividendos discretos se considera conocido, la fórmulas de valoración de opciones, futuro y forwards son conocidas. Estas fórmulas de valoración y su deducción se pueden encontrar en (Hull, 2014) y (Shreve, 2004).

Sin embargo, al pasar a un modelo estocástico, estás formulas pueden complicarse demasiado, llegando incluso a no ser podidas obtener de manera cerrada.

En (Lioui, 2006), se presenta una fórmula de valoración obtenida con una evolución lognormal para el índice de equity y una evolución para el ratio de dividendos y para otra variable que no analizaremos en este trabajo (el precio de mercado del riesgo) dadas por procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados.

En (Phewchean & Wu, 2019), se realiza un estudio muy similar al anterior, en el que se utiliza otro modelo más complejo para el precio de mercado del riesgo.

En (Vatiwutipong & Phewchean, 2019) se presenta un estudio de un modelo de dividendos estocásticos que también utiliza un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. En este caso, el estudio consiste en ajustar los parámetros a datos históricos del índice en cuestión. Se trata de un tipo de estudio diferente al que realizaremos en este trabajo, donde lo que pretendemos es calibrar los parámetros con los datos de un instante presente para obtener como va a evolucionar el subyacente.

Estas tres referencias tienen en común el modelo que utilizan para los dividendos estocásticos. Al usar ese modelo en concreto, se pueden obtener fórmulas cerradas, pero este presenta una característica que podría ser de controversia. El ratio de dividendos podría tomar valores negativos. En este trabajo, utilizaremos el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, que por la forma de construirlo, hace que esto no pueda ocurrir. Aunque para ello, tenemos que pagar un precio por haber complicado el modelo: No se pueden obtener fórmulas cerradas para valorar los productos. Por tanto, tendremos que ver métodos alternativos para hallar los precios de los productos que utilizaremos para calibrar.

# Aplicaciones del estudio que se lleva a cabo

La valoración de derivados financieros con el modelo propuesto se puede utilizar en los siguientes ámbitos:

* Valoración de derivados:

Además de valorar los productos con los que hemos calibrado el modelo, se pueden valorar productos mucho más complejos, productos para los que incluso no haya precio en ningún mercado organizado y se negocien internamente entre entidades financieras. Algunos ejemplos de estos payoffs son:

* + Opciones asiáticas: En este tipo de opciones, en lugar de mirar el valor del subyacente en la fecha de vencimiento, se hace una media del valor que toma en unas fechas específicas , de modo que el payoff es
  + Opciones con barrera: En este tipo de opciones, el payoff es igual que el de las opciones call o put que ya hemos visto, pero condicionado a que el subyacente pase (o que no pase también) de un determinado valor durante la vida del contrato. En caso de que no se cumpla esta condición, el producto no tendría valor.
  + Opciones americanas: En este tipo de opciones, el payoff también es igual al de las opciones call o put, pero se otorga el derecho al comprador de a ejecutar el contrato en cualquier momento, en lugar de ser únicamente en la fecha de vencimiento.
* Griegas: Gestión de riesgos de mercado. Límites mesas trading. Regulación FRTB.

Como ya comentamos en la introducción, se llama griegas a las derivadas del precio de un instrumento financiero con respecto a las variables de las que depende. Las griegas miden el riesgo de dicho instrumento, ya que mientras mayor sea el valor de una griega, más puede variar su precio en función de lo que cambie la variable.

Esto hace que las griegas sean una métrica importante para las entidades financieras en la gestión de riesgos. Tan importante es, que la regulación FRTB, que entrará en vigor en 2022, exige a las entidades calcular las griegas de todos los productos financieros de sus libros de trading y reservar un determinado capital que depende de ellas para hacer posible a posibles pérdidas.

Algunos ejemplos de las instrucciones para calcular las griegas expuestas en (Basel Committee on Banking Supervition, 2019) son:

* + *“(21.21) Delta equity spot: the sensitivity is measured by changing the equity spot price by 1 percentage point (ie 0.01 in relative terms) and dividing the resulting change in the market value of the instrument () by 0.01 (ie 1%) as follows, where:*
    - *is a given equity;*
    - *is the market value of equity ; and*
    - *is the market value of instrument as a function of the price of equity .*
  + *(21.25) (1) Vega, , is defined as the change in the market value of the option as a resulto f a small amount of change to the implied volitlity .”*
* Cálculo del VaR:

El VaR que introdujimos en la sección 1 para un determinado instrumento financiero se define como el percentil 5% de la distribución resultante de valorar dicho instrumento variando únicamente el precio del subyacente, que tomará 252 valores calculados como el precio en el día del cálculo multiplicado por uno más la variación porcentual diaria que ha tenido durante el año anterior.

Esta definición nos permite afirmar que estamos seguros al de que, si el precio del subyacente variara como en el año anterior, nuestro instrumento no perdería un valor superior al VaR calculado.

En la actualidad, el VaR debe ser calculado obligatoriamente por todas las entidades financieras, y es la métrica de referencia que se usa para calcular el capital que se debe reservar para riesgo hasta que entre en vigor la normativa FRTB mencionada anteriormente.

En la nueva normativa, se propone pasar de la métrica VaR a ES[[6]](#footnote-6), que se calcula de forma parecida. La única diferencia es que en lugar de tomar el percentil 5%, se debe hacer una media de todo lo que está por debajo, de modo que se trata con más cuidado la cola de la distribución.

* Regulación PRIIPs:

Esta regulación pretende proteger a los clientes minoristas que pueden desconocer los instrumentos financieros que compran. La regulación obliga a entregar una hoja de información del producto que se vende, llamada KID[[7]](#footnote-7), en la que se deben explicar lo riesgos del producto, se debe indicar con un número del 1 al 7 el nivel de riesgo del producto y se deben simular los resultados de producto en diferentes escenarios, tanto favorables como desfavorables.

Tanto para calcular el nivel de riesgo del producto, como para simular los escenarios, se debe valorar el producto con una simulación Montecarlo similar a la propuesta en este trabajo. Los detalles de esta simulación se pueden encontrar en (European Supervisory Authorities, 2016)

# Objetivos

## Objetivo general

El principal objetivo de este trabajo es aprender las técnicas y teoría matemática usadas en la actualidad para valorar derivados financieros. Aprenderemos estas técnicas modelizando un índice bursátil y sus dividendos con un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas.

## Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general, pasaremos por los siguientes puntos:

* Plantear las ecuaciones que describen la evolución de las dos variables modelizadas.
* Discretizar el sistema de ecuaciones apropiadamente para poder aplicar el método Montecarlo.
* Desarrollos en Python:
  + El código de un método Montecarlo que simule las variables.
  + La valoración de futuros y opciones con el método Montecarlo.
  + El código de un algoritmo de optimización que calibre los parámetros del modelo para obtener los precios de mercado con el método Montecarlo.
  + El cálculo de las griegas usando el modelo calibrado.
  + El cálculo del VaR y el Expected Shortfall.

# Descripción de la contribución

En esta sección se propone un modelo de evolución de un índice bursátil más complejo que la evolución lognormal expuesta en el capítulo 2.1.2.

Concretamente, además de modelar el índice, también se modelan los dividendos de manera estocástica.

## Modelización de las variables

El modelo propuesto es el siguiente:

donde:

* es el valor del índice EUROSTOXX 50 en el instante .
* es el tipo de interés libre de riesgo.
* es el ratio de dividendos pagados por el índice en el instante .
* y son dos movimientos Brownianos.
* es la volatilidad del índice.
* es la volatilidad del ratio de dividendos.
* es la velocidad de reversión a la media del ratio de dividendos.
* es el valor medio de los dividendos.
* es la correlación entre los movimientos Brownianos.

El modelo de evolución para el ratio de dividendos es conocido como Cox-Ingersoll-Ross. Es común en la industria financiera utilizar este modelo para los tipos de interés, en lugar de para el ratio de dividendos. El estudio de este TFM consiste en ver si podemos calibrar este modelo para replicar los precios que se cotizan en el mercado de una serie de derivados financieros, y así poder medir riesgos asociados a los dividendos que no se podían estudiar sin usar algún modelo para la evolución de estos.

Existen muchos modelos de evolución que se podrían utilizar para este tipo de procesos. La Tabla 2 muestra diferentes modelos, indica si cumple la condición y la distribución de probabiidad que sigue (en nuestro caso, los usaremos para la variable en lugar de para el tipo de interés ).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Modelo | Dinámica |  |  |
| Vasicek |  | No | Normal |
| Cox-Ingersoll-Ross |  | Si | Chi cuadrado no central |
| Dothan |  | Si | Lognormal |
| Exponential Vasicek |  | Si | Lognormal |
| Hull-White |  | No | Normal |
| Black-Karasinki |  | Si | Lognormal |
| Mercurio-Moraleda |  | Si | Lognormal |
| Cox-Ingersoll-Ross ++ |  | Si | Chi cuadrado no central desplazada |
| Extended Exponential Vasicek |  | Si | Lognormal desplazada |

Tabla 2. Resumen de modelos de tipos de interés instantáneos. (Brigo & Mercurio, 2006)

La elección del modelo de Cox-Ingersoll-Ross para el ratio de dividendos en este trabajo se debe a que es el modelo más sencillo que por construcción, asegura que el valor del subyacente modelado siempre será positivo en unas determinadas condiciones que serán comprobadas.

Si nos fijamos en la notación utilizada para los parámetros del modelo , y , no se incluye dependencia temporal. Esta notación ha sido elegida por simplicidad, pero a la hora de realizar la calibración, asumiremos que los parámetros tienen una dependencia temporal, de manera que serán constantes en varios intervalos, determinados por el vencimiento de los productos que usaremos en la calibración. Estos intervalos tendrán una longitud de un año cada uno.

## Derivados financieros usados en la calibración

De todos los productos presentados en la sección 1.2 usaremos tres de ellos para calibrar el modelo.

La motivación para usar estos tres productos es que aparte de ser los más simples, sus precios son públicos y gratuitos. Todos los precios utilizados en este trabajo se han obtenido de la web del mercado europeo de productos financieros Eurex (*Eurex*, 2020).

### Opciones sobre el EUROSTOXX 50

El subyacente sobre el que el pago de este producto es calculado es el EUROSTOXX 50, que en el modelo presentado en esta sección está representado por el valor de .

Utilizaremos las opciones call, aunque podríamos haber utilizado indistintamente las opciones put. Como vimos en la sección 1.2.3, el pago en el momento del vencimiento de este producto sería

En la web donde se obtienen los precios, podemos ver que existen precios para diferentes strikes . En este trabajo hemos utilizado los precios para el strike K que es igual al precio del EUROSTOXX 50 en el momento en el que estamos valorando los productos. Este momento elegido[[8]](#footnote-8) se trata del cierre de mercado del día 01/04/2020. Concretamente, este valor (en EUR) se trata de

Si nos fijamos en la web de Eurex, no se venden opciones con este strike en concreto. Los strikes más cercanos a este son y , luego para obtener los precios que buscamos, interpolaremos linealmente el precio entre estos dos strikes.

Los vencimientos de las cuatro opciones que utilizamos son:

|  |  |
| --- | --- |
| Etiqueta | Fecha |
| T1 | 18/12/2020 |
| T2 | 17/12/2021 |
| T3 | 16/12/2022 |
| T4 | 15/12/2023 |

Tabla 3. Vencimientos de productos para la calibración. Elaboración propia.

Comúnmente, en los mercados organizados, los vencimientos de los productos que se comercian coinciden con el tercer viernes no festivo del mes en cuestión.

Finalmente, los precios de mercado (en EUR) de estas opciones call son:

Estos precios son los que introduciremos como input en el algoritmo de optimización. Según la fórmula de valoración de riesgo neutro presentada en la sección 2.2, estos precios pueden de ser calculados a través de nuestro modelo teórico propuesto como:

En la sección 5.3 veremos cómo calcular este precio teórico con un método Montecarlo.

### Futuros sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50.

Trabajar con derivados sobre los dividendos del EUROSTOXX 50 no es tan sencillo como trabajar con el índice en sí mismo. En este caso, los productos que encontramos en el mercado no tienen como subyacente la variable directamente.

Esta variable la hemos definido como ratio de dividendos pagados en un instante , lo que quiere decir que la cantidad de dividendos pagados () en dicho instante (en EUR) es

En nuestro caso, como veremos en la sección 5.4, discretizaremos el tiempo en nuestro problema en intervalos de un día. Por tanto, representa los dividendos pagados en un cierto día , con siendo la duración de un día en años.

El índice de dividendos sobre el que se construyen los derivados es EUROSTOXX 50 DVP, que incluye no solo los dividendos pagados en un día, sino los dividendos totales acumulados a lo largo de un año. Es decir, este índice se calcula como

donde:

* es el día de comienzo del año en el que se calcula el índice.
* coincide con el instante en el que se está calculando el índice .

Al igual que en el caso de las opciones sobre el EUROSTOXX 50, tomaremos los precios de los futuros sobre el índice EUROSTOXX 50 DVP en los vencimientos mostrado en la Tabla 3.

Los precios de mercado de los futuros (en EUR) para estos cuatro vencimientos son:

Al igual que en el caso anterior, estos precios también los usaremos como input en el algoritmo de optimización. Según la teoría explicada en la sección 2.2, estos precios pueden de ser calculados a través de nuestro modelo teórico propuesto como:

Hay que tener cuidado a la hora de simular el valor de cuando el vencimiento es mayor a un año, ya que no hay que acumular los valores de los dividendos pagados en el año anterior.

### Opciones sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50

Una vez ya sabemos calcular el índice EUROSTOXX 50 DVP, podemos seguir el mismo procedimiento que el indicado en la sección 5.2.1 para valorar opciones call sobre este índice. En este caso, el pago a vencimiento de este producto sería

A diferencia de las opciones sobre EUROSTOXX 50, en este caso no tomaremos el precio de las opciones con strike igual al valor del índice . Esto es debido a que como se trata de un derivado financiero nuevo, no es un producto líquido[[9]](#footnote-9). Por ello, ahora tomaremos el strike para el que más transacciones se han realizado, que en este caso, se trata de

Los vencimientos que usamos para estas opciones volverán a ser los de la Tabla 3, y los respectivos precios serán

La fórmula de valoración de riesgo neutro nos vuelve a dar la misma estructura para calcular el precio con nuestro modelo teórico:

## Valoración por método Montecarlo

En esta sección vamos a ver como se utiliza un método Montecarlo para valorar derivados financieros.

La esencia de este método consiste en aplicar el teorema central del límite de Lindeberg-Levy (Wackerly, Dennis et al., 2014):

Dada una sucesión de variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas con esperanza y varianza . Cuando se acerca a infinito, la sucesión de variables aleatorias converge en distribución a una normal , donde

es el estadístico media.

En nuestro caso, el valor de un derivado financiero se calcula a través de una esperanza matemática

Si tomamos como variable aleatoria, podemos realizar simulaciones con el método de Euler-Maruyama que explicaremos en la siguiente sección. De esta manera contendríamos una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por el teorema centra del límite, si es un valor suficientemente grande el estadístico es una buena aproximación de , ya que .

## Método de Euler-Maruyama

Una vez sabemos que podemos valorar los derivados financieros simulando el pago de los productos una cierta cantidad de veces , debemos encontrar un método para realizar dicha simulación.

El método más sencillo que se puede usar para obtener una aproximación numérica de la solución de una ecuación diferencial estocástica es el método de Euler-Maruyama (E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard, 1992).

La idea de este método es discretizar la parte no estocástica de la ecuación utilizando el método de Euler y discretizar la parte estocástica aproximando las variaciones pequeñas del movimiento Browniano con variables normales aleatorias con esperanza cero y varianza .

Si nuestra ecuación diferencial estocástica consiste en un proceso de Itô de la forma

con condición inicial y , entonces la aproximación de Euler-Maruyama de la solución de la ecuación diferencia estocástica es la cadena de Markov definida de la siguiente forma:

* Partimos el intervalo en subintervalos iguales de longitud es decir, y
* Fijamos el valor inicial .
* Definimos de manera recursiva para como , donde .

Como vimos en la sección 2.1.1, la variables aleatorias son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas, con esperanza nula y varianza .

Si aplicamos el método a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, el esquema de discretización nos quedaría de la siguiente manera:

Debemos tener cuidado con las variables normales que utilizaremos para calcular y , ya que partíamos de movimiento Brownianos con correlación. En el algoritmo de Python que se presenta en este trabajo, se parten de dos variables normales independientes y después son correladas utilizando la factorización de Cholesky de la matriz de covarianzas de las variables. Este método es detallado en la próxima sección.

Si nos fijamos en las ecuaciones anteriores, en la primera de ellas hay un término de orden multiplicando toda la parte derecha. Este término está relacionado con el comportamiento exponencial de la ecuación que vimos en la sección 2.1.2. Este comportamiento exponencial hace que el esquema de discretización propuesto presente una varianza elevada en el valor de . Para evitar un alto error en el método Montecarlo, es conveniente trabajar con la variable aleatoria en lugar de . Una vez obtengamos el valor de , tomaremos su exponencial para hallar la variable deseada.

Esta transformación de la ecuación diferencial estocástica se puede realizar mediante la fórmula de Itô explicada en la sección 2.1.2, donde la función de transformación es (esta transformación no depende del tiempo). Si la aplicamos a :

Las derivadas parciales de serían

luego la fórmula de Itô quedaría

Obtenemos y simplificamos el término , teniendo en cuenta, que como vimos en la sección 2.1.1, y también y :

Sustituyendo y en la fórmula de Itô

Despejando y simplificando términos, la ecuación que obtenemos para es

Como se puede observar, esta ecuación no tiene el problema del término de orden de la variable subyacente en el lado derecho.

Finalmente, el esquema de discretización queda de la siguiente manera

## Correlación de variables normales utilizando la factorización de Cholesky

En esta sección se explica el método para correlar variables aleatorias utilizando la factorización de Cholesky de la matriz de covarianzas de las variables.

Tomemos una matriz cualquiera y supongamos que se puede descomponer en un producto de matrices de la forma , donde indica la matriz transpuesta de . Si partimos de un vector de variables normales independientes, podemos estudiar la matriz de covarianzas de la variable aleatoria . Por las propiedades de linealidad de las operaciones con variables normales, la variable seguirá siendo un vector de variables normales que ya no tienen por qué ser independientes.

Por definición, la matriz de covarianzas es la matriz (en nuestro caso particular, la media es cero ). Si operamos

Como la esperanza es un operador lineal

Como es un vector de variables normales independientes, su matriz de covarianzas es , es decir, la identidad. Luego

Como se ha demostrado, si queremos obtenemos variables normales con una cierta matriz de correlación, simplemente tenemos que partir de un vector de variables aleatorias normales independientes y multiplicarlo por una matriz tal que la matriz de covarianzas que buscamos cumpla .

En el caso de las variables aleatorias normales, su matriz de covarianzas siempre es simétrica y definida positiva por definición. Por tanto, siempre se podrá utilizar la factorización de Cholesky para obtener la matriz (Meyer, 2010).

Concretamente, en el caso que nos ocupa en este trabajo, con dos variables aleatorias normales con correlación , la factorización de Choleski queda de la forma

## Variables antitéticas

Dado que vamos a realizar simulaciones de más de tres años de nuestras variables aleatorias, vamos a requerir una gran cantidad de capacidad de computación si queremos simular un número de caminos elevado con el método Montecarlo.

Utilizar un número elevado de caminos hará que reduzcamos la desviación estándar del precio del producto que calculamos, ya que como vimos en la sección 5.3, la varianza tiene una relación inversamente proporcional al número de variables simuladas.

Computacionalmente, la generación de las variables aleatorias consume una gran cantidad de tiempo, por lo que es útil buscar otras formas de reducir la varianza del método Montecarlo.

Una forma muy sencilla es utilizar variables antitéticas (Kroese et al., 2011). Este método consiste en tomar, además de los caminos simulados, los correspondientes caminos asociados a las variables aleatorias

De esta manera, obtenemos el doble de caminos sin tener que generar variable aleatorias nuevas y sin cambiar la media de nuestras variables aleatorias normales. Este método aportará una reducción en un factor de la desviación estándar del precio calculado.

## Problema por la discretización del modelo continuo

A pesar de que en la sección 5.1 se indicaba el que modelo de Cox-Ingersoll- Ross asegura que la variable modelizada siempre es positiva bajo unas ciertas condiciones, esta propiedad puede perderse debido a la discretización de problema de tiempo continuo.

Si nos fijamos en la ecuación del modelo

el factor es el que evita que el valor de baje de cero, ya que cuando se hace pequeño, al estar dentro de una raíz cuadrada, el término se anula prácticamente. Esto hace que en esos instantes, el término dominante acerque el valor de a la media , por lo que nunca puede hacerse negativo.

Al discretizar el tiempo, puede pasar que alguno de los saltos cuando es pequeño, no se esté anulando el factor como se ha explicado anteriormente. El hecho de que pueda hacerse negativo no debería de tener mucha importancia, ya que rápidamente volvería a ser positivo en el siguiente paso de la discretización. El problema surge por el hecho de que aparezca en la raíz cuadrada. Si se hace negativo, el cálculo daría un número complejo y el algoritmo se pararía. Para evitar este error, si en algún paso de nuestras simulaciones se pasa a un valor de negativo, en nuestro algoritmo lo pondremos como cero, para así poder evitar problemas con el término de la volatilidad.

## Obtención de los datos de mercado

Aunque en la sección 5.2 ya se han indicado los precios de mercado de los productos que vamos a usar como objetivo en el algoritmo de calibración, aún nos siguen faltando algunos datos para hacer funcionar el modelo. En esta sección indicaremos de donde se obtiene cada uno de ellos.

Necesitaremos el valor de dichos datos a fecha 01/04/2020, que es la fecha de simulación a la que estamos valorando todos los productos.

### EUROSTOXX 50

El valor del índice EUROSTOXX 50 es un dato público que se puede encontrar en cualquier buscador web. Su valor (en EUR) a fecha de simulación era

### Ratio de dividendos del EUROSTOXX 50

El valor de este ratio no es un valor que se publique en las webs de compra/venta de productos financieros, ya que es un valor que ha sido creado por el modelo.

El valor que sí que se publica es el del índice EUROSTOXX 50 DVP, que como comentábamos en la sección 5.2.2, en nuestro modelo lo podemos obtener a partir del valor de y :

Con la idea de esta fórmula, podemos recuperar la serie histórica del valor de a partir del índice EUROSTOXX 50 y el índice EUROSTOXX 50 DVP.

A fecha de simulación, su valor era

### Correlación entre el índice y su ratio de dividendos

Utilizando las series históricas del EUROSTOXX 50 y de su ratio de dividendos durante el año previo a la fecha de simulación, el coeficiente de correlación que se obtiene es

mediante la fórmula de Pearson:

### Tipo de interés libre de riesgo

El tipo de interés libre de riesgo que introduciremos en este modelo es el tipo de interés del mercado interbancario al máximo plazo disponible, es decir, el tipo de referencia EURIBOR a un año. A fecha de simulación, su valor era

Normalmente, en la industria financiera, no se toma un único tipo de interés. Para valorar derivados financieros sobre índices bursátiles, se suele asumir que el tipo de interés es determinista pero dependiente del tiempo. Con estas asunciones, se calibra una cierta curva observando diferentes tipos de productos como bonos, swaps o préstamos.

Esta metodología permite calcular con más detalle el riesgo de los derivados financieros que estamos valorando a los tipos de interés. En nuestro caso, podríamos haber hecho algo parecido, pero sería demasiado avanzado para este trabajo y nos alejaría de nuestro objetivo principal de estudiar el riesgo de los productos debido a los dividendos.

### Velocidad de reversión a la media

El modelo que hemos aplicado en este trabajo contiene demasiados parámetros que otorgan demasiados grados de libertad con respecto al número de restricciones dadas por los precios de mercados de los productos que vamos a calibrar.

Existen dos maneras de lidiar con este problema:

* Añadir más productos a la calibración para tener el mismo número de restricciones que de parámetros libres en el modelo.
* Fijar el valor de alguno de los parámetros, simplificando el modelo y reduciendo el número de variables a calibrar.

En este trabajo, se opta por la segunda opción, ya que añadir más productos ralentiza el programa de optimización y añadir variables no aporta conocimientos extra para comprender el método que estamos poniendo en práctica.

Fijaremos el siguiente valor para la velocidad de reversión a la media

Podría suceder que la calibración del modelo no tuviera solución para el caso concreto de este valor que hemos fijado. En ese caso, probaríamos otros valores, pero este valor nos va a permitir calibrar bien, como veremos en la siguiente sección.

## Calibración del modelo

Para calibrar el modelo, vamos ajustando los parámetros haciendo bootstrapping.

Empezamos con los precios de los tres productos para el primer vencimiento y buscamos los parámetros que durante el este primer periodo de tiempo nos dan los precios de mercado.

Una vez obtenidos estos parámetros para el primer periodo de tiempo, calculamos los precios de los tres productos para el segundo vencimiento. Durante este segundo vencimiento, tendremos los parámetros que calibramos en el primer tramos, y serán incógnita los parámetros entre el segundo tramo. Se calibran estos parámetros incógnita y se repite este proceso con todos los vencimientos para los que disponemos de datos.

El código implementado devuelve los siguientes parámetros calibrados (redondeados hasta una precisión de seis decimales):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Intervalo |  |  |  |
|  | 0.024737 | 0.298577 | 0.178015 |
|  | 0.039417 | 0.209427 | 0.129734 |
|  | 0.051132 | 0.196489 | 0.127034 |
|  | 0.055940 | 0.205345 | 0.181146 |

Tabla 4. Parámetros calibrados. Elaboración propia.

Una vez tenemos los parámetros del modelo, podemos calcular el precio de todos los productos que hemos usado para calibrar. Así, somos capaces de ver el error del nuestro modelo. Estos precios son mostrados en la Tabla 5, donde se puede comprobar que los precios coinciden y el modelo se ha calibrado correctamente.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Producto | | |  |
| Intervalo | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
|  | 53.100000 | 5.600000 | 239.001600 | Precio de mercado |
| 53.099999 | 5.600008 | 239.001599 | Precio del modelo |
|  | 49.800000 | 4.1900000 | 292.900000 | Precio de mercado |
| 49.800000 | 4.190000 | 292.900000 | Precio del modelo |
|  | 63.600000 | 11.020000 | 312.560400 | Precio de mercado |
| 63.600000 | 11.020000 | 312.560400 | Precio del modelo |
|  | 67.400000 | 16.130000 | 336.769200 | Precio de mercado |
| 67.400000 | 16.130000 | 336.769200 | Precio del modelo |

Tabla 5. Comparación entre precios de mercado y precios calculados. Elaboración propia.

## Cálculo de griegas

Una vez calibrado el modelo, podemos obtener las griegas de cada uno de estos instrumentos financieros. Vamos a ver las dos sensibilidades que pide la normativa FRTB y mencionamos en la sección 3. La Tabla 6 muestra la sensibilidad delta de equity y la Tabla 7 la delta de dividendos.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Vencimiento | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
|  | 53.100000 | 23.479155 | 239.001600 |
|  | 49.800000 | 17.978683 | 292.900000 |
|  | 63.600000 | 37.022108 | 312.560400 |
|  | 67.400000 | 43.801737 | 336.769200 |

Tabla 6. Sensibilidad delta de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.

Como era de esperar en esta sensibilidad, siempre es positiva, ya que los tres payoff depende directamente de . Por tanto, si aumenta, es de esperar el aumente también.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Vencimiento | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
|  | 1,838.938107 | 679.394951 | -919.425731 |
|  | -25.536570 | -9.925978 | -910.892172 |
|  | -45.011097 | -25.462989 | -881.371679 |
|  | -47.795849 | -30.665145 | -859.113682 |

Tabla 7. Sensibilidad delta de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia.

El caso de la delta de dividendos no es tan intuitivo. En las opciones sobre el EUROSTOXX, el payoff depende explícitamente de únicamente. Cómo en la ecuación de evolución propuesta para , los dividendos aparecen restando en el término de , es de esperar que la sensibilidad sea negativa.

En el caso de los futuros sobre los dividendos y las opciones sobre los dividendos, no podemos predecir cual va a ser el signo de la delta de dividendos. Esto es porque en ambos casos, el payoff depende del producto , por lo que el factor aportará una tendencia positiva, mientras que el factor ya hemos visto que aporta una tendencia negativa en cuanto a la sensibilidad a dividendos.

La Tabla 8 muestra la sensibilidad vega de equity y la Tabla 9 la vega de dividendos. Como la regulación no indica con precisión el esquema de diferencias finitas que hay que utilizar para obtener esta sensibilidad, fijamos uno nosotros mismos. El esquema que utilizamos es de diferencias finitas hacia adelante con un paso de 0.0001.

Nótese en este caso que estamos obteniendo una sensibilidad con respecto a un parámetro que depende del tiempo. La regulación indica con respecto a qué tiempos en concreto se debe obtener la sensibilidad vega para luego agregarla de una determinada manera. Por practicidad para nuestro ejemplo, obtendremos la sensibilidad en cada salto de nuestra volatilidad para los productos con el vencimiento en , ya que son los únicos que tienen sensibilidad a los cuatro valores de la volatilidad.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
|  | -0.448997 | 8.780789 | 461.384801 |
|  | 0.408203 | 10.000642 | 467.921482 |
|  | -1.185040 | 7.987847 | 427.770744 |
|  | -4.616025 | -0.332051 | 499.439645 |

Tabla 8. Sensibilidad vega de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
|  | 0.128060 | 0.152205 | 6.607915 |
|  | 0.145831 | 0.174670 | 6.785728 |
|  | 0.085180 | 0.152576 | 8.545754 |
|  | -6.595893 | 34.856358 | 10.739574 |

Tabla 9. Sensibilidad vega de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia.

En esta ocasión, en ambas sensibilidades no es intuitivo predecir el signo, ya que la volatilidad va en el término estocástico de las ecuaciones de evolución del EUROSTOXX y de los dividendos y no sabemos sin tener la solución analítica como va a contribuir.

## Value at Risk y Expected Shortfall

Ahora vamos a proceder a calcular el VaR y el ES de los tres derivados financieros que vencen en . Para ellos, seguiremos la metodología expuesta en la sección 3. Ambos resultados se muestran en la Tabla 10.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Métrica | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
| VaR | -1.721862 | -1.099131 | -8.603416 |
| ES | -3.304078 | -2.071192 | -16.509075 |

Tabla 10. Value at Risk y Expected Shortfall. Elaboración propia.

Estos cálculos ponen de manifiesto la mejora que aporta el ES en cuanto a la medición de riesgos, ya que al hacer la media de los valores por debajo del percentil, obtenemos un valor más conservador en cuanto riesgo.

El cálculo de ambos parámetros ha sido muy costoso computacionalmente, ya que hemos tenido que ejecutar la simulación Montecarlo 252 veces. Una manera de ahorra tiempo de cálculo es utilizar la delta de equity para hacer una aproximación de Taylor (G. Bartle, Robert & R. Sherbert, Donald, 2011) de la variación del precio de los derivados. La fórmula para aproximar la variación del precio (con el día de valoración y el día con respecto al que queremos calcular la variación) es

donde es la variación porcentual del subyacente con respecto al día anterior, es decir,

De esta manera, nos ahorramos la ejecución de todos los Montecarlo. La tab X muestra el cálculo del VaR y el ES mediante la aproximación de Taylor.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Métrica | Futuro dividendos | Call sobre dividendos | Call sobre EUROSTOXX |
| VaR | -1.721862 | -1.118999 | -8.603413 |
| ES | -3.304078 | -2.147245 | -16.509075 |

Tabla 11. Value at Risk y Expected Shortfall mediante aproximación de Taylor. Elaboración propia.

Si comparamos con los resultados anteriores, ambas métricas son iguales para el futuro de dividendos y la call sobre el EUROSTOXX. Para el caso de la opción call sobre los dividendos, los dos cálculos se separan algo más. Esto puede ser debido a que para este producto, el esquema de diferencias finitas que hemos aplicado no sea lo suficientemente bueno, y sea más conveniente reducir el tamaño del paso o pasar a un esquema de segundo orden.

De cualquier forma, el segundo método ahora bastante tiempo de cálculo. El método de revalorar con el Montecarlo tarda 200 segundos mientras que el método de Taylor tarda 0.0009 segundos.

# Conclusiones y trabajo futuro

## Conclusiones

El modelo ha calibrado bien. *Desarrollar.*

El modelo es usable para la gestión de riesgos. *Desarrollar.*

## Líneas de trabajo futuro

Valorar productos más complejos. *Desarrollar.*

Si no da buenos precios para productos complejos, usarlo para calibrar la b *Desarrollar.*

Obtener fórmulas analíticas. Quizá con un Hull-White se pueda. *Desarrollar.*

Referencias bibliográficas

Basel Committee on Banking Supervition. (2019). *Minimum capital requirements for market risk*. https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf

Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit* (2.a ed.). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34604-3

Commission delegated regulation. (2017). Official Journal of the European Union. *Regulations*. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32017R0653&from=FR

E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.

Eurex. (s. f.). *Market statistics at Eurex*. Recuperado 23 de junio de 2021, de https://www.eurex.com/ex-en/data/statistics/market-statistics-online/100!onlineStats?viewType=0&productGroupId=&productId=&cp=&month=&year=&busDate=20210601

*Eurex*. (2020, mayo 8). https://www.eurex.com/ex-en/

European Supervisory Authorities. (2016). *Final draft regulatory technical standards* (p. 183).

Fernández, R. (2020, diciembre 11). *Mercados intercambio de derivados: Ranking según contratos 2019*. Statista. https://es.statista.com/estadisticas/600804/ranking-de-los-principales-intercambios-de-derivados-en-el-mundo--por-volumen/

G. Bartle, Robert & R. Sherbert, Donald. (2011). Taylor’s Theorem. En *Introduction to Real Analysis* (4.a ed., p. 418). John Wiley & Sons, Inc.

Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9a ed.). Pearson.

Investing.com. (2020, mayo 8). *Euro Stoxx 50 datos históricos*. Investing.com. https://es.investing.com/indices/eu-stoxx50-historical-data

Kroese, D. P., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2011). *Handbook of Monte Carlo Methods* (1.a ed.). Wiley. https://www.wiley.com/en-us/Handbook+of+Monte+Carlo+Methods-p-9781118014967

Lioui, A. (2006). Black‐Scholes‐Merton revisited under stochastic dividend yields. *Journal of Futures Markets*, *26*, 703-732. https://doi.org/10.1002/fut.20208

Meyer, C. D. (2010). *Matrix analysis and applied linear algebra* (Har/Cdr). SIAM.

Phewchean, N., & Wu, Y. (2019). European option pricing model with generalized Ornstein–Uhlenbeck process under stochastic earning yield and stochastic dividend yield. *Advances in Difference Equations*, *2019*. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2210-5

Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag. https://www.springer.com/gp/book/9780387401010

Vatiwutipong, P., & Phewchean, N. (2019). A study of dividend yield model under stochastic earning yield environment in stock exchange of Thailand. *Advances in Difference Equations*, *2019*. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2231-0

Wackerly, Dennis, Mendenhall, William, & Scheaffer, Richard. (2014). *Mathematical Statistics with Applications* (7.a ed.). Cengage Learning.

Anexo I. Artículo

En los trabajos de tipo 3 tienes que hacer un resumen de la memoria en formato artículo (4-6 páginas). El artículo deberá incluirse como anexo dentro de la memoria.

1. Código Python

El código utilizado en este trabajo se encuentra dividido en tres archivos .py. Para ejecutar el programa, los tres archivos deben de encontrarse en la misma carpeta del directorio de trabajo.

El primero de ellos es el archivo funciones.py. Este archivo contiene tres funciones que nos ayudaran a calcular los vectores que contienen la discretización del tiempo y de los parámetros , y :

# -\*- coding: utf-8 -\*-  
"""  
Created on Tue May 5 23:49:23 2020  
  
@author: pablo  
"""  
  
*import* numpy *as* np  
*from* math *import* log, sqrt  
*from* scipy.stats *import* norm  
  
*def* cal\_yf\_from\_mat(*t0*, *T*, *end\_year*):  
 yf = list()  
 yf.append(np.busday\_count(*t0*, *T*[0]) / np.busday\_count(*end\_year*[0], *end\_year*[1]))  
 *for* i *in* range(len(*T*) - 1):  
 yf.append(  
 np.busday\_count(*t0*, *end\_year*[1]) / np.busday\_count(*end\_year*[0], *end\_year*[1]) + i + np.busday\_count(  
 *end\_year*[i + 1], *T*[i + 1]) / np.busday\_count(*end\_year*[i + 1], *end\_year*[i + 2]))  
 *return* yf  
  
*def* days\_yf(*t0*, *T*, *end\_year*):  
 days\_yf = [np.ones(np.busday\_count(*t0*, *T*[0]))/np.busday\_count(*end\_year*[0], *end\_year*[1])]  
 *for* i *in* range(len(*T*) - 1):  
 days\_yf.append(  
 np.concatenate(  
 [np.ones(np.busday\_count(*T*[i], *end\_year*[i+1])) / np.busday\_count(*end\_year*[i], *end\_year*[i+1]),  
 np.ones(np.busday\_count(*end\_year*[i+1], *T*[i+1])) / np.busday\_count(*end\_year*[i+1], *end\_year*[i+2])])  
 )  
 h = [days\_yf[0]]  
 *for* i *in* range(len(days\_yf)-1):  
 h.append(np.concatenate([h[i], days\_yf[i+1]]))  
 *return* days\_yf, h  
  
*def* parametros\_to\_pasos(*param*, *t0*, *maturities*):  
 *if* len(*param*)!=len(*maturities*):  
 print('faltan o sobran valores del parametro')  
 aux = [*param*[0]\*np.ones(np.busday\_count(*t0*,*maturities*[0]))]  
 *for* i *in* range(len(*param*)-1):  
 aux.append(*param*[i+1]\*np.ones(np.busday\_count(*maturities*[i],*maturities*[i+1])))  
 *return* np.concatenate(aux)

El segundo archivo es el fichero montecarlo.py. Este archivo contiene la función HybridStockDividendsMSamples() que se encargará de realizar la simulación Montecarlo que se ha descrito en la sección 5. Además, incluye las funciones PayoffDivFut() y PayoffOptCall(), que calculan el pago a vencimiento (del futuro sobre el índice de dividendos y de las opciones call respectivamente) de cada una de las simulaciones realizadas mediante la función anterior.

# -\*- coding: utf-8 -\*-  
"""  
Created on Wed May 6 13:43:14 2020  
  
@author: pablo  
"""  
  
*import* time  
*import* numpy *as* np  
*from* math *import* log, sqrt  
  
*def* HybridStockDividendsMSamples(*S0*,*q0*,*r*,*a\_pasos*,*b*,*volS\_pasos*,*volq\_pasos*,*rho*,*M*,*N*,*h*,*mat\_pos*):  
 # M number of paths.  
 # N number of step of each path.  
   
 a = *a\_pasos*[:*N*]  
 volq = *volq\_pasos*[:*N*]  
 volS = *volS\_pasos*[:*N*]  
   
 S=[[]] \* (*N* + 1)  
 q=[[]] \* (*N* + 1)  
  
 mats = [pos *for* pos *in mat\_pos if* pos<=*N*]  
  
 *if* len(a)!=*N*:  
 print('a está mal')  
 *if* len(*h*)!=*N*:  
 print('h está mal')  
  
 t0 = time.time()  
 np.random.seed(140494)  
 # Calculo de la mtriz aleatoria   
 Cov = np.array([[1, *rho*], [*rho*, 1]])  
 # Descomposición de Cholesky. Diferente que en matlab, python da TriInferior.  
 L = np.linalg.cholesky(Cov).T  
 # Generación de normales independientes  
 Z = np.random.normal(0,1,(*N*,2,*M*))  
 # Transformación para correlacionarlas  
 random\_walk = np.zeros((*N*,2,*M*))  
 *for* k *in* range(*M*):  
 random\_walk[:,:,k] = np.dot(Z[:,:,k],L)  
  
 t1 = time.time()  
 print('Generar números:', t1-t0)  
  
  
 Saux = np.ones(2\**M*) \* log(*S0*)  
 q[0] = np.ones(2\**M*) \* *q0* S[0] = np.exp(Saux)  
 inicio = 0  
 *for* days\_year *in* mats:  
 *if* inicio == 0: # Este if sirve para resetear a 0 el indice de dividendos cada año.  
 Saux += *h*[inicio] \* (np.ones(2 \* *M*) \* (*r* - 0.5 \* volS[inicio] \*\* 2) - q[inicio]) + sqrt(*h*[inicio]) \* volS[  
 inicio] \* np.concatenate((random\_walk[inicio, 0, :], -random\_walk[inicio, 0, :]))  
 qaux = np.maximum(np.zeros(2 \* *M*), q[inicio]) # q se hace negativo por la discretización del problema  
 q[inicio + 1] = q[inicio] + *h*[inicio] \* (a[inicio] \* np.ones(2 \* *M*) - *b* \* q[inicio]) + np.multiply(  
 np.sqrt(qaux \* *h*[inicio]) \* volq[inicio], np.concatenate((random\_walk[inicio, 1, :], -random\_walk[inicio, 1, :])))  
 S[inicio + 1] = np.exp(Saux)  
 *else*:  
 Saux += *h*[inicio] \* (np.ones(2 \* *M*) \* (*r* - 0.5 \* volS[inicio] \*\* 2) - q[inicio]) + sqrt(*h*[inicio]) \* volS[  
 inicio] \* np.concatenate((random\_walk[inicio, 0, :], -random\_walk[inicio, 0, :]))  
 q[inicio + 1] = np.zeros(2 \* *M*)  
 S[inicio + 1] = np.exp(Saux)  
 *for* dia *in* range(inicio + 1, days\_year):  
 Saux += *h*[dia] \* (np.ones(2 \* *M*) \* (*r* - 0.5 \* volS[dia] \*\* 2) - q[dia]) + sqrt(*h*[dia]) \* volS[  
 dia] \* np.concatenate((random\_walk[dia, 0, :], -random\_walk[dia, 0, :]))  
 qaux = np.maximum(np.zeros(2 \* *M*), q[dia]) # q se hace negativo por la discretización del problema  
 q[dia + 1] = q[dia] + *h*[dia] \* (a[dia] \* np.ones(2 \* *M*) - *b* \* q[dia]) + np.multiply(  
 np.sqrt(qaux \* *h*[dia]) \* volq[dia], np.concatenate((random\_walk[dia, 1, :], -random\_walk[dia, 1, :])))  
 S[dia + 1] = np.exp(Saux)  
 inicio = days\_year  
  
 t2 = time.time()  
 print('Cálculo caminos:', t2 - t1)  
 *return* S, q  
  
*def* PayoffDivFut(*S*,*q*,*h*):  
 result = np.zeros(len(*S*[0]))  
 *for* i *in* range(len(*h*)):  
 result += np.multiply(*S*[i],*q*[i])\**h*[i]  
 *return* result  
  
*def* PayoffOptCall(*S*, *K*):  
 *return* np.maximum(*S* - *K* \* np.ones(len(*S*)), np.zeros(len(*S*)))

El último fichero es el llamado optimización.py. Este archivo define dos funciones necesarias para poner en marcha el algoritmo de optimización para calibrar el modelo, pricer() y f\_objetivo(). Una vez definidas las funciones, en este archivo se cargan todos los datos de mercado necesario para realizar la valoración y se pone en marcha algoritmo descrito en la sección 5.9. Finalmente, se imprimen por pantalla los parámetros del modelo calibrados y los precios de los productos que se calculan con dichos parámetros.

# -\*- coding: utf-8 -\*-  
"""  
Created on Wed May 6 01:37:59 2020  
  
@author: pablo  
"""  
  
*from* montecarlo *import* \*  
*from* funciones *import* cal\_yf\_from\_mat, days\_yf, parametros\_to\_pasos  
*from* math *import* exp  
*from* scipy.optimize *import* fsolve  
  
*def* pricer(*S0*, *q0*, *r*, *a*, *b*, *vols*, *volq*, *rho*, *M*, *h\_previo*, *h\_elegido*, *mat\_position*):  
 a\_pasos = parametros\_to\_pasos(*a*, t0, T\_futdiv)  
 volq\_pasos = parametros\_to\_pasos(*volq*, t0, T\_futdiv)  
 vols\_pasos = parametros\_to\_pasos(*vols*, t0, T\_opt\_sx5e)  
  
 # Número de pasos N en la simulación  
 N = len(*h\_elegido*)  
 N\_previo = len(*h\_previo*)  
  
 # Cálculos usando normrnd y correlacionando variables después  
 S, q = HybridStockDividendsMSamples(*S0*, *q0*, *r*, a\_pasos, *b*, vols\_pasos, volq\_pasos, *rho*, *M*, N, *h\_elegido*, *mat\_position*)  
  
 payoffs\_divfut = PayoffDivFut(S[N\_previo:N + 1], q[N\_previo:N + 1], *h\_elegido*[N\_previo:N])  
 payoffs\_divopt = exp(-*r* \* yf\_futdiv[0]) \* PayoffOptCall(payoffs\_divfut, K\_div)  
 payoffs\_eqopt = exp(-*r* \* yf\_futdiv[0]) \* PayoffOptCall(S[N], *S0*)  
  
 *return* [np.mean(payoffs\_divfut), np.mean(payoffs\_divopt), np.mean(payoffs\_eqopt)]  
  
*def* f\_objetivo(*S0*, *q0*, *r*, *a*, *b*, *vols*, *volq*, *rho*, *M*, *h\_previo*, *h\_elegido*, *mat\_position*, *objetivos*):  
 prices = pricer(*S0*, *q0*, *r*, *a*, *b*, *vols*, *volq*, *rho*, *M*, *h\_previo*, *h\_elegido*, *mat\_position*)  
 *return* [x1 - x2 *for* x1, x2 *in* zip(prices, *objetivos*)]  
  
*if* \_\_name\_\_ == '\_\_main\_\_':  
 T\_opt\_sx5e = ['2020-12-18',  
 '2021-12-17',  
 '2022-12-16',  
 '2023-12-15']  
 T\_futdiv = ['2020-12-18',  
 '2021-12-17',  
 '2022-12-16',  
 '2023-12-15']  
 T\_endyear = ['2020-01-01',  
 '2021-01-01',  
 '2022-01-01',  
 '2023-01-01',  
 '2024-01-01']  
  
 t0 = '2020-04-01'  
 days\_futdiv = [np.busday\_count(t0, fecha) *for* fecha *in* T\_futdiv]  
 days\_opt\_sx5e = [np.busday\_count(t0, fecha) *for* fecha *in* T\_opt\_sx5e]  
  
 # Year fractions maturities  
 yf\_futdiv = cal\_yf\_from\_mat(t0, T\_futdiv, T\_endyear)  
  
 # Steps for each maturity.  
 days\_yf, h = days\_yf(t0, T\_futdiv, T\_endyear)  
 mat\_position = [len(hs) *for* hs *in* h]  
  
 h1 = h[0]  
 h2 = h[1]  
 h3 = h[2]  
 h4 = h[3]  
  
 div\_fut\_prices = [53.1, 49.8, 63.6, 67.4]  
 div\_call\_opt\_prices = [5.60, 4.19, 11.02, 16.13] # Excel. Tomo el strike 65, que es el más líquido.  
 eurostoxx\_call\_opt\_prices = [239.0016, 292.9, 312.5604, 336.7692]  
  
 # Datos del problema  
 S0 = 2680.3 # También es el strike de las call sobre el eurostoxx  
 q0 = 0.019967966 #0.022794603  
 M = 2 \*\* 14  
 K\_div = 65 # Strike dividend call options  
 rho = -0.189292925  
 r = -0.00168  
  
 # Parametros a calibrar  
 b = 0.001 # Criterio experto  
 a = [0.01, 0.01, 0.01, 0.01]  
 vols = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1]  
 volq = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1]  
  
 # Objetivos  
 objetivos = [[div\_fut\_prices[i], div\_call\_opt\_prices[i], eurostoxx\_call\_opt\_prices[i]] *for* i *in* range(4)]  
  
 prices\_0 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1, mat\_position)  
  
 f0 = *lambda* x: f\_objetivo(S0,  
 q0,  
 r,  
 [x[0], a[1], a[2], a[3]],  
 b,  
 [x[1], vols[1], vols[2], vols[3]],  
 [x[2], volq[1], volq[2], volq[3]],  
 rho,  
 M,  
 [1],  
 h1,  
 mat\_position,  
 objetivos[0])  
  
 initial\_guess = [0.01, 0.1, 0.1]  
 [a\_sol0, vols\_sol0, volq\_sol0] = fsolve(f0, initial\_guess, xtol=10e-7)  
 a[0] = a\_sol0  
 vols[0] = vols\_sol0  
 volq[0] = volq\_sol0  
   
 f1 = *lambda* x: f\_objetivo(S0,  
 q0,  
 r,  
 [a[0], x[0], a[2], a[3]],  
 b,  
 [vols[0], x[1], vols[2], vols[3]],  
 [volq[0], x[2], volq[2], volq[3]],  
 rho,  
 M,  
 h1,  
 h2,  
 mat\_position,  
 objetivos[1])  
   
 [a\_sol1, vols\_sol1, volq\_sol1] = fsolve(f1, [a\_sol0, vols\_sol0, volq\_sol0], xtol=10e-7)  
 a[1] = a\_sol1  
 vols[1] = vols\_sol1  
 volq[1] = volq\_sol1  
   
 f2 = *lambda* x: f\_objetivo(S0,  
 q0,  
 r,  
 [a[0], a[1], x[0], a[3]],  
 b,  
 [vols[0], vols[1], x[1], vols[3]],  
 [volq[0], volq[1], x[2], volq[3]],  
 rho,  
 M,  
 h2,  
 h3,  
 mat\_position,  
 objetivos[2])  
   
 [a\_sol2, vols\_sol2, volq\_sol2] = fsolve(f2, [a\_sol1, vols\_sol1, volq\_sol1], xtol=10e-7)  
 a[2] = a\_sol2  
 vols[2] = vols\_sol2  
 volq[2] = volq\_sol2  
   
 f3 = *lambda* x: f\_objetivo(S0,  
 q0,  
 r,  
 [a[0], a[1], a[2], x[0]],  
 b,  
 [vols[0], vols[1], vols[2], x[1]],  
 [volq[0], volq[1], volq[2], x[2]],  
 rho,  
 M,  
 h3,  
 h4,  
 mat\_position,  
 objetivos[3])  
   
 [a\_sol3, vols\_sol3, volq\_sol3] = fsolve(f3, [a\_sol2, vols\_sol2, volq\_sol2], xtol=10e-7)  
 a[3] = a\_sol3  
 vols[3] = vols\_sol3  
 volq[3] = volq\_sol3  
  
 print('Param solver 1:', a\_sol0, vols\_sol0, volq\_sol0) # 2^15 0.015506635921427488 0.29514724550393595 0.1656479699860158  
 # 2^16 0.015512465425311258 0.29648353534605315 0.16555735571639657  
 # 2^17 0.01549042738583047 0.29837489136838047 0.16497912181648908  
 # 2^18 0.015541662125404594 0.2970416411412151 0.16578548959864273  
 # 2^19 0.015539355389007983 0.29778113130425526 0.1658044809216574  
  
 print('Param solver 2:', a\_sol1, vols\_sol1, volq\_sol1)  
 print('Param solver 3:', a\_sol2, vols\_sol2, volq\_sol2)  
 print('Param solver 4:', a\_sol3, vols\_sol3, volq\_sol3)  
  
 prices\_1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1, mat\_position)  
 prices\_2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1, h2, mat\_position)  
 prices\_3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2, h3, mat\_position)  
 prices\_4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
  
 # print('Precios sin calibración:', prices\_0)  
 print('Precios con calibración 1:', prices\_1)  
 print('Precios de mercado 1', objetivos[0], '\n')  
 print('Precios con calibración 2:', prices\_2)  
 print('Precios de mercado 2', objetivos[1], '\n')  
 print('Precios con calibración 3:', prices\_3)  
 print('Precios de mercado 3', objetivos[2], '\n')  
 print('Precios con calibración 4:', prices\_4)  
 print('Precios de mercado 4', objetivos[3], '\n')

Además de estos tres ficheros, se ha utilizado adicionalmente uno más para calcular las sensibilidades de la sección 5.9, llamado sensibilidades.py:

# -\*- coding: utf-8 -\*-  
"""  
Created on Thu Jul 15 16:00:50 2021  
  
@author: pablo  
"""  
  
*from* montecarlo *import* \*  
*from* funciones *import* cal\_yf\_from\_mat, days\_yf, parametros\_to\_pasos  
*from* math *import* exp  
*import* numpy *as* np  
  
*def* pricer(*S0*, *q0*, *r*, *a*, *b*, *vols*, *volq*, *rho*, *M*, *h\_previo*, *h\_elegido*, *mat\_position*):  
 a\_pasos = parametros\_to\_pasos(*a*, t0, T\_futdiv)  
 volq\_pasos = parametros\_to\_pasos(*volq*, t0, T\_futdiv)  
 vols\_pasos = parametros\_to\_pasos(*vols*, t0, T\_opt\_sx5e)  
  
 # Número de pasos N en la simulación  
 N = len(*h\_elegido*)  
 N\_previo = len(*h\_previo*)  
  
 # Cálculos usando normrnd y correlacionando variables después  
 S, q = HybridStockDividendsMSamples(*S0*, *q0*, *r*, a\_pasos, *b*, vols\_pasos, volq\_pasos, *rho*, *M*, N, *h\_elegido*, *mat\_position*)  
  
 payoffs\_divfut = PayoffDivFut(S[N\_previo:N + 1], q[N\_previo:N + 1], *h\_elegido*[N\_previo:N])  
 payoffs\_divopt = exp(-*r* \* yf\_futdiv[0]) \* PayoffOptCall(payoffs\_divfut, K\_div)  
 payoffs\_eqopt = exp(-*r* \* yf\_futdiv[0]) \* PayoffOptCall(S[N], *S0*)  
  
 *return* [np.mean(payoffs\_divfut), np.mean(payoffs\_divopt), np.mean(payoffs\_eqopt)]  
  
T\_opt\_sx5e = ['2020-12-18',  
 '2021-12-17',  
 '2022-12-16',  
 '2023-12-15']  
T\_futdiv = ['2020-12-18',  
 '2021-12-17',  
 '2022-12-16',  
 '2023-12-15']  
T\_endyear = ['2020-01-01',  
 '2021-01-01',  
 '2022-01-01',  
 '2023-01-01',  
 '2024-01-01']  
  
t0 = '2020-04-01'  
days\_futdiv = [np.busday\_count(t0, fecha) *for* fecha *in* T\_futdiv]  
days\_opt\_sx5e = [np.busday\_count(t0, fecha) *for* fecha *in* T\_opt\_sx5e]  
  
# Year fractions maturities  
yf\_futdiv = cal\_yf\_from\_mat(t0, T\_futdiv, T\_endyear)  
  
# Steps for each maturity.  
days\_yf, h = days\_yf(t0, T\_futdiv, T\_endyear)  
mat\_position = [len(hs) *for* hs *in* h]  
  
h1 = h[0]  
h2 = h[1]  
h3 = h[2]  
h4 = h[3]  
  
div\_fut\_prices = [53.1, 49.8, 63.6, 67.4]  
div\_call\_opt\_prices = [5.60, 4.19, 11.02, 16.13] # Excel. Tomo el strike 65, que es el más líquido.  
eurostoxx\_call\_opt\_prices = [239.0016, 292.9, 312.5604, 336.7692]  
  
objetivos = [[div\_fut\_prices[i], div\_call\_opt\_prices[i], eurostoxx\_call\_opt\_prices[i]] *for* i *in* range(4)]  
  
  
# Datos del problema  
S0 = 2680.3 # También es el strike de las call sobre el eurostoxx  
q0 = 0.019967966  
M = 2 \*\* 12  
K\_div = 65 # Strike dividend call options  
rho = -0.189292925  
r = -0.00168  
  
# Parametros  
b = 0.001 # Criterio experto  
a = [0.024632889670984207, 0.03943332940236466, 0.051152059755964985, 0.0559917559120302]  
vols = [0.2941956753706126, 0.2115385477314622, 0.2084001707439573, 0.21062649631184904]  
volq = [0.17712546432086035, 0.1297972709969229, 0.1263240067709712, 0.1761761314040222]  
  
prices\_1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1, mat\_position)  
prices\_2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1, h2, mat\_position)  
prices\_3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2, h3, mat\_position)  
prices\_4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
  
prices\_1\_eqbump = pricer(S0\*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1, mat\_position)  
prices\_2\_eqbump = pricer(S0\*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1, h2, mat\_position)  
prices\_3\_eqbump = pricer(S0\*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2, h3, mat\_position)  
prices\_4\_eqbump = pricer(S0\*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
  
prices\_1\_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1, mat\_position)  
prices\_2\_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1, h2, mat\_position)  
prices\_3\_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2, h3, mat\_position)  
prices\_4\_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
  
eq\_delta\_1 = [(shift-base)/0.01 *for* shift, base *in* zip(prices\_1\_eqbump, prices\_1)]  
eq\_delta\_2 = [(shift-base)/0.01 *for* shift, base *in* zip(prices\_2\_eqbump, prices\_2)]  
eq\_delta\_3 = [(shift-base)/0.01 *for* shift, base *in* zip(prices\_3\_eqbump, prices\_3)]  
eq\_delta\_4 = [(shift-base)/0.01 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_eqbump, prices\_4)]  
  
div\_delta\_1 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_1\_divbump, prices\_1)]  
div\_delta\_2 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_2\_divbump, prices\_2)]  
div\_delta\_3 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_3\_divbump, prices\_3)]  
div\_delta\_4 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_divbump, prices\_4)]  
  
vols1 = [vols[0]+0.0001, vols[1], vols[2], vols[3]]  
vols2 = [vols[0], vols[1]+0.0001, vols[2], vols[3]]  
vols3 = [vols[0], vols[1], vols[2]+0.0001, vols[3]]  
vols4 = [vols[0], vols[1], vols[2], vols[3]+0.0001]  
  
prices\_4\_eqvol1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols1, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
prices\_4\_eqvol2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols2, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
prices\_4\_eqvol3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols3, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
prices\_4\_eqvol4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols4, volq, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
  
eq\_vega\_1 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_eqvol1, prices\_4)]  
eq\_vega\_2 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_eqvol2, prices\_4)]  
eq\_vega\_3 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_eqvol3, prices\_4)]  
eq\_vega\_4 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_eqvol4, prices\_4)]  
  
volq1 = [volq[0]+0.0001, volq[1], volq[2], volq[3]]  
volq2 = [volq[0], volq[1]+0.0001, volq[2], volq[3]]  
volq3 = [volq[0], volq[1], volq[2]+0.0001, volq[3]]  
volq4 = [volq[0], volq[1], volq[2], volq[3]+0.0001]  
  
prices\_4\_divvol1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq1, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
prices\_4\_divvol2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq2, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
prices\_4\_divvol3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq3, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
prices\_4\_divvol4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq4, rho, M, h3, h4, mat\_position)  
  
div\_vega\_1 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_divvol1, prices\_4)]  
div\_vega\_2 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_divvol2, prices\_4)]  
div\_vega\_3 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_divvol3, prices\_4)]  
div\_vega\_4 = [(shift-base)/0.0001 *for* shift, base *in* zip(prices\_4\_divvol4, prices\_4)]

Para calcular el VaR y el Expected Shortfall tanto con el Montecarlo como con la aproximación de Taylor, utilizamos el script var.py:

1. ECB: European Central Bank [↑](#footnote-ref-1)
2. ICMA: International Capital Market Association [↑](#footnote-ref-2)
3. IFRS: International Financial Reporting Standards [↑](#footnote-ref-3)
4. VaR: Value at Risk [↑](#footnote-ref-4)
5. PRIIPs: Packaged retail investment and insurance products [↑](#footnote-ref-5)
6. Expected Shortfall [↑](#footnote-ref-6)
7. KID: Key information document. [↑](#footnote-ref-7)
8. Se trata de un día elegido al azar, es el día en el que este TFM comenzó. [↑](#footnote-ref-8)
9. Liquidez: El concepto de liquidez en el ámbito de los productos financieros está relacionado con la cantidad de contratos sobre un determinado producto que se negocian en el mercado. Un producto con poca liquidez (es decir, que no se haya negociado demasiado) no es un producto fiable a la hora de tomar precios, ya que al no haberse negociado, el mercado no nos aporta fiabilidad ni su opinión sobre el producto. [↑](#footnote-ref-9)