

Modelación de errores de concordancia plural en español LE mediante sistemas dinámicos (suplementario)

18 de noviembre de 2021

1. Modelo de Lokta-Volterra.

Se sigue en su mayoría a Murray (2002). Las ecuaciones diferenciales del modelo de competencia entre especies de Lokta-Volterra rezan:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

Se tomaron los siguientes parámetros: $r_1 = r_2 = 0,5$; $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1,5$. Con lo cual, el punto interior *saddle* fue $P_4 = \left(\frac{1-1,5}{1-(1,5)^2}; \frac{1-1,5}{1-(1,5)^2} \right) = (0,4; 0,4)$, y los atractores son: $(1, 0) = \text{"correcto"}$ y $(0, 1) = \text{"error"}$. Para la integración numérica se realizaron 100 iteraciones.

1.1. Estrategia para establecer la condición inicial

Se tomó la siguiente estrategia para sesgar el flujo hacia alguno de los dos atractores:

1. Calcular la distancia entre las variables de cada contexto de la tabla 2 y las mismas variables en la instancia en cuestión. Se cuentan cuántas de ellas *no* coinciden en sus valores. También se computa la igualdad consigo misma, la cual es *cero*. O sea: $m_i = \#variables\ diferentes; i = 1, \dots, 5$. Luego se calcula la probabilidad para cada m_i bajo una distribución logística¹ *truncada* entre -1 y 4 , con locación igual a 2 y escala de 1 . Ya que los posibles valores de m_i van entre 0 y 4 . La función de densidad para estos valores es: $P(0) \approx 0,08, P(1) \approx 0,26, P(2) \approx 0,54, P(3) \approx 0,82, P(4) = 1$.
2. Se calcula la siguiente suma pesada: $E = w \times media(P(m_1), \dots, P(m_5)) + (1 - w) \times e_{antes}$; donde e_{antes} es la proporción de errores hasta la instancia anterior y $w \in (0, 1)$ se parametrizó utilizando el error cuadrático de predicción: $RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (p_{sim,i} - p_{error,i})^2}$, donde p_{sim} es la proporción de instancias marcadas como "error" de la simulación (o sea, aquellas en donde gana el atractor "error") y p_{real} la proporción de errores real, para cada aprendiente. Se elige el valor de w con $RMSE$ mínimo. Se obtuvo $w = 0,71$.
3. Se toma como condición inicial para las ecuaciones diferenciales $N_0 = (1 - E, E)$. Si $E < \frac{1}{2}$, gana el atractor "correcto"; y si $E > \frac{1}{2}$, gana el atractor "error". Si $E = \frac{1}{2}$, se elige al azar entre los valores $\{0,25, 0,75\}$. Esto último es así dado que la condición inicial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lleva el flujo hacia el nodo *saddle* P_4 (porque el punto inicial se encuentra sobre la *separatrix*).

Se ejemplifica el procedimiento con la instancia "les idiomas" [SONIA, sesión 2, línea 111]. La instancia posee las siguientes variables: Mod = "0"; Fabs = "0"; FamLex = "0"; Morf = "1"; Epen = "0"; Est1 = "0"; Est2 = "0"; Est5 = "0". Además, la proporción de error hasta la instancia anterior es $e_{antes} = 0,2$. Por supuesto, consigo misma la distancia es *cero*. Con el contexto que baja la chance de error de plural, la distancia es *cuatro* (de las cuatro variables que conforman el contexto, la instancia no coincide en sus valores con ninguna [comparar con el Cuadro 1]). Respecto de los contextos de "e-epentética", "plural" y "mixto" la distancia es *tres*. Por lo tanto: $m_1 = 0, m_2 = 3, m_3 = 3, m_4 = 3, m_5 = 4$. Las probabilidades según la distribución logística truncada son: $P(0) \approx 0,08; P(3) \approx 0,82; P(4) = 1$. Con lo cual el promedio de las probabilidades de las distancias resulta: $\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 P(m_i) = \frac{1}{5} (0,08 + 0,82 + 0,82 + 0,82 + 1) = 0,71$. Con lo

¹La función de distribución acumulada de la distribución logística es: $F(X < x; \mu, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{-(x-\mu)/\sigma}}$; con: $x \in (-\infty, +\infty)$, locación $\mu \in \mathbb{R}$ y escala $\sigma > 0$.

cual: $E = w \times \text{media}(P(m_1), \dots, P(m_5)) + (1-w) e_{\text{antes}} = 0,71 \times 0,71 + 0,29 \times 0,2 = 0,56$. Por lo tanto, las condiciones iniciales son $N_0 = (1-E, E) = (0,44, 0,56)$. Dado que $0,56 > 0,5$, el flujo se dirige hacia el atractor $(0, 1) = \text{"error"}$.

1.2. Análisis de estabilidad.

En primer lugar se lleva el modelo al formato adimensional, lo cual produce un modelo equivalente con menos parámetros. Sea: $u_1 = \frac{N_1}{K_1} \rightarrow N_1 = K_1 u_1$; $u_2 = \frac{N_2}{K_2} \rightarrow N_2 = K_2 u_2$; $\tau = r_1 t \rightarrow t = \frac{\tau}{r_1}$; $a_{12} = \alpha_{12} \frac{K_2}{K_1}$; $a_{21} = \alpha_{21} \frac{K_1}{K_2}$; $\rho = \frac{r_2}{r_1}$. Con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(K_1 u_1)}{d(\tau/r_1)} &= K_1 r_1 \frac{d(u_1)}{d(\tau)} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{K_2}{K_1} u_2\right) = \frac{r_1}{r_1} \frac{N_1}{K_1} \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} u_2\right) \\ \frac{d(K_2 u_2)}{d(\tau/r_1)} &= K_2 r_1 \frac{d(u_2)}{d(\tau)} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{K_1}{K_2} u_1\right) = \frac{r_2}{r_1} \frac{N_2}{K_2} \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} u_1\right) \end{aligned}$$

Y se llega al modelo reducido, reemplazando por u_1, u_2, ρ en la parte derecha.

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2) &= \frac{du_1}{d\tau} = u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2) \\ f_2(u_1, u_2) &= \frac{du_2}{d\tau} = \rho u_2 (1 - u_2 - a_{21} u_1) \end{aligned}$$

Los puntos fijos son las soluciones simultaneas de: $f_1(u_1, u_2) = u_1 = 0$ y $f_2(u_1, u_2) = u_2 = 0$. Esto sucede si: $P_1 = (u_1^* = 0, u_2^* = 0)$, $P_2 = (u_1^* = 1, u_2^* = 0)$, $P_3 = (u_1^* = 0, u_2^* = 1)$. Para P_4 debe resolverse el sistema: $u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1 - a_{12} u_2$; $u_2 (1 - u_2 - a_{21} u_1) = 0 \Leftrightarrow u_2 = 1 - a_{21} u_1$. Y sustituyendo para calcular u_1^* : $u_1 = 1 - a_{12} u_2 = 1 - a_{12} (1 - a_{21} u_1) = 1 - a_{12} + a_{21} a_{12} u_1 \Rightarrow u_1 - a_{21} a_{12} u_1 = 1 - a_{12} \Rightarrow (1 - a_{12} a_{21}) u_1 = 1 - a_{12} \Rightarrow u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12} a_{21}}$.

Y análogamente para u_2^* ; obteniéndose:

$$P_4 = \left(u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12} a_{21}}, u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12} a_{21}}\right); a_{12} a_{21} \neq 1 \text{ (con lo cual se está en el primer cuadrante: } u_1^* \geq 0; u_2^* \geq 0).$$

Con el objetivo de descubrir el tipo de punto fijo, se hace necesario calcular el Jacobiano y evaluarlo en el punto fijo en cuestión $J(u_1^*, u_2^*)$:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}_{u_1^*, u_2^*} = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1 - a_{12} u_2 & -a_{12} u_1 \\ -\rho a_{21} u_2 & \rho (1 - 2u_2 - a_{21} u_1) \end{pmatrix}_{u_1^*, u_2^*}$$

Luego hay que calcular la traza y el determinante de J : $Tr(J) = J_{11} + J_{22}$, $det(J) = J_{11} J_{22} - J_{21} J_{12}$. Los autovalores de J serán entonces: $\lambda_{1,2} = \frac{Tr(J) \pm \sqrt{[Tr(J)]^2 - 4det(J)}}{2}$. Por último los puntos fijos se clasifican siguiendo el Cuadro (se incluyen solamente los tipos pertinentes para el análisis):

	$Tr(J) < 0$	$Tr(J) > 0$
$[Tr(J)]^2 > 4det(J)$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: Atractor (estable)	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: Repulsor (inestable)
$det(J) < 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: Saddle (inestable)	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: Saddle (inestable)

Cuadro 1: Clasificación de Puntos Fijos.

Siguiendo lo expuesto, se aplica la fórmula para los autovalores y se clasifica los puntos fijos según el Cuadro anterior.

$P_1 = (u_1^* = 0, u_2^* = 0)$: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$; $det(J) = \rho$; $Tr(J) = (1 + \rho)$; $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \rho) \pm \sqrt{(1 + \rho)^2 - 4\rho} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \rho; \lambda_2 = 1$. Clasificación: como $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, es Repulsor.

$P_2 = (u_1^* = 1, u_2^* = 0)$: $J = \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} \\ 0 & \rho(1 - a_{21}) \end{pmatrix}$; $det(J) = -\rho(1 - a_{21})$; $Tr(J) = \rho(1 - a_{21}) - 1$;

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \rho(1 - a_{21}) - 1 \pm \sqrt{(\rho(1 - a_{21}) - 1)^2 - [4(-\rho)(1 - a_{21})]} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = \rho(1 - a_{21})$. Clasificación: si $a_{21} > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, por lo tanto es Atractor. En cambio, si $a_{21} < 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, por lo tanto es Saddle (notar que $det(J) < 0$).

$P_3 = (u_1^* = 0, u_2^* = 1)$: $J = \begin{pmatrix} 1 - a_{12} & 0 \\ -\rho a_{21} & -\rho \end{pmatrix}$; $det(J) = -\rho(1 - a_{12})$; $Tr(J) = (1 - a_{12}) - \rho$;

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 - a_{12}) - \rho \pm \sqrt{((1 - a_{12}) - \rho)^2 - [4(-\rho)(1 - a_{12})]} \right\} \Rightarrow \lambda_2 = 1 - a_{12}; \lambda_1 = -\rho$. Clasificación: Si $a_{12} > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, por lo tanto es Atractor. En cambio, si $a_{21} < 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, por lo tanto es Saddle (notar que $det(J) < 0$).

$$P_4 = \left(u_1^* = \frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}, u_2^* = \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}} \right); \quad J = (1 - a_{12}a_{21})^{-1} \begin{pmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & \rho(a_{21} - 1) \end{pmatrix};$$

Para el determinante se aplica la regla: $\det(cA) = c^n \det(A)$; $A_{n \times n}$. Con lo cual:

$$\begin{aligned} \det(J) &= (1 - a_{12}a_{21})^{-2} [(a_{12} - 1)\rho(a_{21} - 1) - \rho a_{21}(a_{21} - 1)a_{12}(a_{12} - 1)] \\ &= (1 - a_{12}a_{21})^{-2} \rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

Para la traza se usó la regla: $\text{Tr}(cA) = c\text{Tr}(A)$; $A_{n \times n}$. Por lo tanto:

$$\text{Tr}(J) = (1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)].$$

Y los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[(1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)] \pm \left\{ [(1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]]^2 - 4(1 - a_{12}a_{21})^{-2} \rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)] \pm (1 - a_{12}a_{21})^{-1} \{ [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]^2 - 4\rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \}^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

con lo cual se tiene:

$$\lambda_{1,2} = [2(1 - a_{12}a_{21})]^{-1} \left[(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1) \pm \left\{ [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]^2 - 4\rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

Clasificación: si $a_{12} < 1$; $a_{21} < 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, por lo tanto es un Atractor. Por otra parte si $a_{12} > 1$; $a_{21} > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ y el punto fijo es un Saddle.

2. Teoría de los juegos evolutiva.

Se presentan conceptos clave de teoría de los juegos evolucionista (se sigue a: Weibull, 1997). Se restringe el tratamiento a la forma normal de juegos finitos. Sea $I = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de jugadores ($n \in \mathbb{N}$). Para cada jugador $i \in I$, sea $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ su conjunto de estrategias puras ($m_i > 2$). Además, sea $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ el vector de estrategias para el jugador i , su *perfil* de estrategias puras. La función de utilidad $u_i : s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n \rightarrow \mathbb{R}$ asocia un pago o ganancia a las estrategias. Con dos jugadores las funciones de pago u_1 y u_2 se representan como una matriz de dimensión $m_1 \times m_2$. La matriz del primer jugador se denota $A = (a_{hk})$ donde $a_{hk} = u_1(h, k)$ para $h \in S_1$ y $k \in S_2$, es decir, el pago cuando el primer jugador juega la estrategia h dado que el segundo juega la estrategia k . Análogamente, para el segundo jugador $B = (b_{hk})$ donde $b_{hk} = u_2(h, k)$. Cada fila de la matriz es una estrategia pura del primer jugador 1 y cada columna, una estrategia pura del jugador 2. Las matrices se pueden combinar en una bi-matriz (A, B) . En el ejemplo siguiente (“dilema del prisionero”) hay dos jugadores $I = \{1, 2\}$, cada uno con las mismas dos estrategias $S_1 = S_2 = (1, 2)$ y $s_i = (C = \text{“cooperate”}, D = \text{“defect”})$; y donde $a_{11} = u_1(1, 1) = 3$ significa que si el primer jugador juega la estrategia (fila) 1 cuando el segundo también juega la estrategia (columna) 1, entonces recibirá un pago de 3. Análogamente para $b_{11} = u_2(1, 1)$.

$$(A, B) = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3, 3 & 0, 4 \\ 4, 0 & 2, 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

juego simétrico de dos jugadores. Si hay dos jugadores $I = \{1, 2\}$ con el mismo número de estrategias $S_1 = S_2$ y $u_2(h, k) = u_1(k, h)$, o sea si $A^T = B$. Es decir que el pago cuando el jugador 2 usa la estrategia h y el jugador 1 la estrategia k es el mismo que si el jugador 1 usa la estrategia k y el jugador 2 la estrategia h . El ejemplo anterior es simétrico. Por otra parte, un juego es *doblemente* simétrico si $A^T = A$ con $B = A$.

estrategia mixta. Una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_i de estrategias puras. El perfil de estrategias mixtas para i es el vector $x_{ih} = (x_1, \dots, x_{m_i})^T \in \mathbb{R}_+^{m_i}$, donde cada componente h indica la probabilidad asociada a la estrategia pura h (y m es el número de estrategias puras). Ya que todas las probabilidades son no-negativas y suman *uno*, dicho vector pertenece al *simplex* unitario Δ_i de dimensión $m_i - 1$ definido como: $\Delta_i = \left\{ x_i \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \right\}$. Los vértices del simplex son $e_i^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_i^2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_i^{m_i} = (0, 0, \dots, 1)$, los cuales se corresponden con las estrategias puras. Las funciones de pago asociadas con los perfiles de estrategias mixtas $x_1 \in \Delta_1$ y $x_2 \in \Delta_2$ para dos jugadores serán la esperanzas:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} a_{hk} x_{2k} = x_1^T A x_2 \\ u_2(x) &= \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} b_{hk} x_{2k} = x_1^T B x_2 \end{aligned}$$

Por ejemplo, sea el siguiente juego (“batalla de los sexos”):

$$(A, B) = \begin{array}{cc|cc} & & F & B \\ F & 2/3 & 2, 1 & 0, 0 \\ B & 1/3 & 0, 0 & 1, 2 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

las estrategias son $s_1 = s_2 = (B = \text{"Ballet"}, F = \text{"Football"})$ y las probabilidades asociadas (estrategias mixtas) son $x_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y $x_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. La ganancia esperada de los jugadores² son $u_1(x) = u_2(x) = \frac{2}{3}$.

dominancia estricta. Una estrategia domina estrictamente a otra si obtiene siempre un pago más alto, cualquiera sea la estrategia que juegue el otro jugador. Es decir: $y_i \in \Delta_i$ domina estrictamente a $x_i \in \Delta_i$ si $u_i(y_i, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$. Por ejemplo, en el juego del "dilema del prisionero" la estrategia pura $D = \text{"defect"}$ domina estrictamente a $C = \text{"cooperate"}$. En efecto, para el jugador 1, $u_1(D, C) = 4$, $u_1(D, D) = 2$ es mayor que $u_1(C, C) = 3$, $u_1(C, D) = 0$. Sin importar si 2 juega D o C , jugar la estrategia D paga siempre más para el jugador 1.

mejor respuesta (BR). Una mejor respuesta para el jugador i frente al perfil de estrategias y del otro jugador es una estrategia pura $s_i \in S_i$ tal que ninguna otra estrategia que el jugador tenga disponible le dé un mejor pago frente a y . En el "dilema del prisionero" si cualquier jugador juega la estrategia C lo mejor que puede hacer el otro es jugar D ; y, si cualquier jugador juega D , lo mejor que puede hacer el otro también es jugar D . Por lo tanto, D , es mejor respuesta.

Una mejor respuesta BR para el jugador i frente al perfil de estrategias $y \in \Delta_{-i}$ del otro jugador es una estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ tal que ninguna otra estrategia mixta que el jugador tenga disponible le de un mejor pago frente a y . Formalmente:

$$BR_i(y) = \{x \in \Delta_i : u(x, y) \geq u(w, y), \forall w \in \Delta_i\}$$

equilibrio de Nash (NE). Para un juego bimatricial (h^*, k^*) hay equilibrio de Nash si un jugador supone que el otro se queda con una determinada estrategia de una fila / columna, al otro no le conviene pasarse de fila / columna. O sea si el jugador 2 elige la columna k^* y el 1 elige la fila h^* , al jugador 1 no le conviene desviarse y elegir otra estrategia (elegir otra fila $-h$) porque pierde ganancia. Lo mismo sucede desde la perspectiva del jugador 2. En el "dilema del prisionero" $(e^2, e^2) = (2, 2)$ es el equilibrio de Nash.

$$Nash = \begin{cases} a_{h^*, k^*} \geq a_{-h, j^*} \\ b_{h^*, k^*} \geq b_{h^*, -j} \end{cases}$$

En el caso de las estrategias mixtas, el perfil de estrategias mixtas $x_{ih}^* = (x_1^*, \dots, x_{m_i}^*) \in \Delta_i$ es un equilibrio de Nash si para todo jugador $i = 1, \dots, N$ y para todo $x_i \in \Delta_i$, se tiene que: $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$. O sea que para el jugador i , la estrategia mixta x_i^* es una mejor respuesta a x_{-i}^* . Para estrategias mixtas, existe al menos un equilibrio de Nash. En el caso de la "batalla de los sexos" hay dos equilibrios de Nash puros: $(1, 2)$ y $(2, 1)$. El equilibrio mixto es³: $(x_{1h}^* = (p_1^*, 1 - p_1^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), x_{2h}^* = (p_2^*, 1 - p_2^*) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$.

En ambos casos es un *Nash estricto* si la desigualdad es estricta ($>$). En otras palabras, un NE es un par de respuestas $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_1 \times \Delta_2 = \Delta$ tal que \bar{x} es una mejor respuesta a \bar{y} y \bar{y} es una mejor respuesta a \bar{x} . En un Nash estricto, \bar{x} e \bar{y} son las *únicas* mejores respuestas, la una contra la otra.

Estrategia evolutivamente estable (ESS). Supóngase una población grande de individuos que son seleccionados aleatoriamente para jugar un juego simétrico de a dos. Cada individuo está programado para jugar las mismas estrategias puras. Sea $S = \{1, 2, \dots, k\}$ el conjunto de dichas estrategias. Sea $\Delta_i = \left\{x \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1\right\}$ el conjunto de estados poblacionales, o sea que cada x_i en el vector $x = (x_1, \dots, x_k)$ es la fracción de individuos que juega la estrategia $i \in S$

²Efectivamente,

$$u_1(x) = x_1^T A x_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$u_2(x) = x_1^T B x_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

³Para encontrar p_1^* se resuelve:

$$(p_1^*, 1 - p_1^*) B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p_1^*, 1 - p_1^*) B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p_1^* = 2(1 - p_1^*) \Leftrightarrow p_1^* = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - p_1^* = \frac{1}{3}$$

Para encontrar p_2^* se resuelve:

$$(1, 0) A \begin{pmatrix} p_2^* \\ 1 - p_2^* \end{pmatrix} = (0, 1) A \begin{pmatrix} p_2^* \\ 1 - p_2^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2p_2^* = (1 - p_2^*) \Leftrightarrow p_2^* = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - p_2^* = \frac{2}{3}$$

(notar que Δ es idéntico formalmente al conjunto de estrategias mixtas). Supóngase, además, que inicialmente el estado poblacional es $x \in \Delta$, entonces la ganancia poblacional promedio (“fitness”) es $u(x, x) = x^T A x$. A continuación, entra a la población un *pequeño grupo* de mutantes con fracción poblacional ϵ que juega el perfil $y \in \Delta$. Entonces, luego de la introducción de los mutantes, el estado poblacional será $w = (\epsilon y + (1 - \epsilon)x)$. Luego de la introducción de los mutantes, la ganancia poblacional promedio (“fitness”) de los no-mutantes que son apareados aleatoriamente con mutantes será $u(x, y) = x^T A y$. La ganancia promedio de los no-mutantes será $u(x, w) = u(x, \epsilon y + (1 - \epsilon)x) = \epsilon u(x, y) + (1 - \epsilon)u(x, x)$. Análogamente, la ganancia promedio de los mutantes será: $u(y, w) = u(y, \epsilon y + (1 - \epsilon)x) = \epsilon u(y, y) + (1 - \epsilon)u(y, x)$. Se supone que las “fuerzas evolutivas” no van a seleccionar a la estrategia del mutante si su “fitness” resulta ser menor que el del no-mutante. Es decir si:

$$u(x, w) = \epsilon u(x, y) + (1 - \epsilon)u(x, x) > u(y, w) = \epsilon u(y, y) + (1 - \epsilon)u(y, x)$$

Se dice que x es una estrategia evolutivamente estable (ESS) si para todo $x \neq y$ y para todo $\epsilon < 1$ vale la desigualdad anterior. Es decir que x es resistente a las perturbaciones. Los mutantes no pueden invadir la población y eventualmente se extinguen. Ahora bien, la desigualdad anterior puede escribirse como:

$$u(x, x) - u(y, x) + \epsilon \{u(x, y) - u(x, x) + u(y, x) - u(y, y)\} > 0; \epsilon < 1.$$

Es fácil ver que para que esta última desigualdad sea cierta deben cumplirse las condiciones: (1) $u(x, x) \geq u(y, x)$; o sea es un equilibrio de Nash; (2) si $u(x, x) = u(y, x)$, es necesario que sea cierto que: $u(x, y) > u(y, y)$.

En resumen: x es ESS si y solo si:

- (x, x) es un equilibrio de Nash, o sea: $u(x, x) = x^T A x \geq u(y, x) = y^T A x$.
- Si sucede que $x^T A p = y^T A x$, entonces: $u(x, y) = x^T A y > u(y, y) = y^T A y$.

Obsérvese que si x es un Nash estricto entonces es ESS (porque no se da la segunda condición). A modo de ejemplo, considérese el siguiente “juego de coordinación”:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Los equilibrios de Nash son $NE = \{e^1, e^2, \hat{x}\}$ donde $\hat{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ es la estrategia mixta⁴. Las dos primeras puras son Nash estrictos, por lo tanto son ESS. Para examinar si la estrategia mixta es ESS, supóngase la estrategia mixta del mutante $y = (p, 1 - p)$. Primero se debe ver si hay un Nash estricto: $x^T A x \geq y^T A x$; no lo hay porque $x^T A x = y^T A x = \frac{8}{3}$. O sea que tanto los mutantes como los no-mutantes cuando son seleccionados para jugar contra los mutantes reciben un “fitness”⁵ de $\frac{8}{3}$. Como se cumple la igualdad se debe verificar la segunda condición: $x^T A y > y^T A y$; pero $x^T A y = \frac{11}{3} - \frac{9}{3}p$ y $y^T A y = 4p^2 - 9p + 7$; con lo cual: $\frac{11}{3} - \frac{9}{3}p > 4p^2 - 9p + 7 \iff -4p^2 + 6p - \frac{10}{3} > 0$ ($p \in (0, 1)$) no es cierta, entonces⁶: $x^T A y < y^T A y$. Por lo tanto, los no-mutantes que se aparean aleatoriamente con mutantes tienen un “fitness” *menor* que los mutantes que se aparean aleatoriamente con mutantes. Como no se cumple ninguna de las dos condiciones, $\hat{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *no* es ESS.

Sea ahora el siguiente juego simétrico generalizado para dos jugadores cuya matriz de pago es A . Substrayendo a_{21} de la primera columna y a_{12} de la segunda columna, se obtiene la matriz normalizada equivalente A^* que resulta ser doblemente simétrica, donde $a_1 = a_{11} - a_{21}$ y $a_2 = a_{22} - a_{12}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies A^* = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Cuando $a_1 > 0, a_2 > 0$, para el juego de coordinación se tiene: $NE = \{(e^1, e^1), (e^2, e^2), (\hat{x}, \hat{x}); \hat{x} = (\frac{a_2}{a_1 + a_2}, \frac{a_1}{a_1 + a_2})\}$ y $ESS = \{e^1, e^2\}$.

⁴La cual se encuentra resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ 1 - p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ 1 - p^* \end{pmatrix} \iff 2p + 3(1 - p^*) = 4(1 - p^*) \Rightarrow p^* = \frac{1}{3}, (1 - p^*) = \frac{2}{3}$$

⁵Esto se ve calculando:

$$x^T A x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \text{ e } y^T A x = \begin{pmatrix} p & 1 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 4 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

⁶

Effectivamente:

$$x^T A x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \frac{2}{3}p + \frac{11}{3}(1 - p) = \frac{11}{3} - \frac{9}{3}p$$

$$y^T A y = \begin{pmatrix} p & 1 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 - 4p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = 2p + (7 - 4p)(1 - p) = 4p^2 - 9p + 7$$

2.1. Dinámica del replicador: análisis de estabilidad.

En la sección anterior se ha visto que $ESS \Rightarrow NE$ (pero la recíproca no es cierta, excepto si se trata de un NE estricto). Sin embargo, ambos conceptos representan equilibrios estáticos. En este apartado se supone ahora que cada individuo está programado para usar una estrategia pura, que *replica* a su descendencia. La dinámica del replicador muestra cómo la distribución de estrategias puras de la población cambia con el tiempo siguiendo un proceso de selección, y que dicha distribución converge a un ESS . Se presenta el modelo para el caso de dos jugadores. Sea $t \in [0, \infty)$ el tiempo continuo; y denótese $x_1(t)$ a la fracción de individuos que juega la estrategia pura 1 en el tiempo t . En consecuencia, $x_2(t) = 1 - x_1(t)$ será la fracción de individuos que juega la estrategia pura 2 en el tiempo t . Por tanto, el estado de la población es $x(t) = [x_1(t), 1 - x_1(t)] \in \Delta$. Ahora bien, sea el juego simétrico 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. El pago promedio de un individuo que usa la estrategia 1 es:

$$u(e^1, x) = e_1^T A \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 - x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 - x(t) \end{pmatrix} = ax(t) + b(1 - x(t))$$

Por otro lado, el pago promedio de un individuo contra cualquier otro (promedio poblacional) será:

$$u(x, x) = \begin{pmatrix} x(t) & 1 - x(t) \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 - x(t) \end{pmatrix} = ax^2 + bx(t)(1 - x(t)) + c(1 - x(t))x(t) + d(1 - x(t))^2$$

Las ecuaciones diferenciales para la dinámica del replicador son pues:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 [u(e^1, x) - u(x, x)] = x_1(1 - x_1) [x_1(a + d - b - c) + b - d]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la fracción poblacional de la estrategia 1 es proporcional a la diferencia entre su “fitness” y el “fitness” poblacional. Si esta diferencia es positiva, la tasa de crecimiento aumentará; y habrá más individuos jugando dicha estrategia en la próxima generación, en $t + dt$. Ya que $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$, la dimensión del sistema es 1. Por lo tanto, se concentrará el análisis en la primera ecuación. Sus puntos fijos serán los que hagan que $\dot{x}_1 = 0$, lo cual sucede cuando $P_1 = (x_1^* = 1)$, $P_2 = (x_1^* = 0)$, $P_3 = \left(x_1^* = \frac{d-b}{a+d-b-c}\right)$.

En el caso de los juegos simétricos de 2×2 con matriz normalizada: $A = \begin{pmatrix} a_1 = a - b & 0 \\ 0 & a_2 = d - b \end{pmatrix}$, y cuando $a_1 a_2 > 0$, la dinámica del replicador está gobernada por las ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_1 [u(e^1, x) - u(x, x)] = x_1(1 - x_1) [a_1 x_1 - a_2(1 - x_1)]$$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

Como en realidad hay una sola dimensión, los puntos fijos son las soluciones de: $f_1(x_1) = \dot{x}_1 = 0$. Estos son: $P_1 = (x_1^* = 1)$, $P_2 = (x_1^* = 0)$, $P_3 = \left(x_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)$. Con el objetivo de descubrir el tipo de punto fijo, se hace necesario calcular la derivada con respecto a x_1 y evaluarla en el punto fijo en cuestión: $\lambda = \left[\frac{df_1(x)}{dx}\right]_{x^*}$. Si $\lambda < 0$, el punto fijo es atractor, si $\lambda > 0$, es repulsor. Si $\lambda = 0$ puede ser atractor, repulsor o saddle; y es necesario examinar el signo la segunda derivada. Si es un saddle, la segunda derivada tiene el *mismo* signo en un punto $x = x^* \pm \epsilon$, a ambos lados de x^* . En un saddle, el punto fijo atrae en una dirección y repele en la otra (o atrae a la izquierda y repele a la derecha o viceversa). Para el caso de un atractor con $\lambda = 0$, la segunda derivada cambia de signo cuando pasa por x^* : es positiva en un punto a la izquierda de x^* y negativa a la derecha de x^* ; y al revés con un repulsor: es negativa en un punto a la izquierda de x^* y positiva a su derecha. Aplicando lo dicho, se examina cada punto fijo.

$$f_1'(x_1) = -3(a_1 + a_2)x_1^2 + 2(a_1 + 2a_2)x_1 - a_2$$

- $P_1 = (x_1^* = 1) \Rightarrow f_1'(1) = -a_1$. Si $a_1 > 0 \Rightarrow f_1'(1) < 0$, entonces es atractor. Si $a_1 < 0 \Rightarrow f_1'(1) > 0$, entonces es repulsor.
- $P_2 = (x_1^* = 0) \Rightarrow f_1'(0) = -a_2$. Si $a_2 > 0 \Rightarrow f_1'(0) < 0$, entonces es atractor. Si $a_2 < 0 \Rightarrow f_1'(0) > 0$, entonces es repulsor.
- $P_3 = \left(x_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) \Rightarrow f_1'\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$. Sea $a_1 a_2 > 0$. Si $a_1, a_2 > 0 \Rightarrow f_1'(0) > 0$, entonces es repulsor. Si $a_1, a_2 < 0 \Rightarrow f_1'(0) < 0$, entonces es atractor.

2.2. Estrategia para establecer la condición inicial.

La estrategia 1 fue “error” y la otra, “correcto”. Por la dinámica del replicador, las condiciones iniciales $x_1^0 > \frac{1}{4}$ serán atraídas hacia la estrategia “error” y con $x_1^0 < \frac{1}{4}$ habrá atracción hacia la estrategia “correcto”. En consecuencia, el sesgo del modelo depende enteramente de las condiciones iniciales, como en el modelo de *Lokta-Volterra*. Se aplica el siguiente mecanismo para determinarlo.

1. Calcular la distancia entre las variables de cada contexto de la tabla 1 y las mismas variables en la instancia en cuestión. Se cuentan cuántas de ellas *no* coinciden en sus valores. No se incluye la similitud consigo misma. O sea: $m_i = \# \text{variables diferentes}; i = 1, \dots, 4$.
2. Establecer $\theta = (\theta_1 \neq \frac{1}{4}, \theta_2 \neq \frac{3}{4})$ y asignar $p(\theta_j) = (e_{antes}, 1 - e_{antes})$, donde e_{antes} es la proporción de errores hasta la instancia anterior. Luego, para cada contexto i establecer la distribución de probabilidades a posteriori de θ_j utilizando la regla de Bayes: $p(\theta_j | x = m_i) = \frac{p(\theta_j)p(x=m_i|\theta_j)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=m_i|\theta_j)}$; $j = 1, 2$ donde $x \sim \text{Binom}(n = c, p = \theta_j)$, con $c =$ número de variables en el contexto; luego elegir de acuerdo al máximo a posteriori (MAP): $\max(p(\hat{\theta}_1), p(\hat{\theta}_2))$ (se asigna θ_j de acuerdo a la probabilidad a posteriori más alta).
3. A continuación se cuentan las veces que se asignó θ_1 y θ_2 , en los contextos y se asigna a la variable E el θ_j con conteo máximo. Si hay empate se toma la media de los máximos de las posteriores. Por último, el vector de condiciones iniciales resulta $x^0 = (x_1^0 = 1 - E, x_2^0 = E)$. Por lo tanto si $x_1^0 < \frac{1}{4}$, gana el atractor “error”, y si $x_1^0 > \frac{1}{4}$, gana el atractor “correcto”. El vector θ se parametrizó utilizando el error cuadrático de predicción: $RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (p_{sim,i} - p_{error,i})^2}$, donde p_{sim} es la proporción de instancias marcadas como “error” de la simulación (o sea, aquellas en donde gana el atractor “error”) y p_{real} la proporción de errores real, para cada aprendiente. Se elige el valor de θ con $RMSE$ mínimo. Se obtuvo $\theta = (\theta_1 = 0,26, \theta_2 = 0,88)$.

Se ejemplifica el procedimiento con la instancia “los estudio” [SONIA, sesión 4, línea 179]. La instancia posee las siguientes variables: Mod = “0”; Fabs = “1”; FamLex = “1”; Morf = “1”; Epen = “0”; Est1 = “1”; Est2 = “0”; Est5 = “0”. Además, el error hasta la instancia anterior es $e_{antes} = 0,5$. Con el contexto que baja la chance de error de género, la distancia es *uno* (de las cuatro variables que conforman el contexto, la instancia no coincide en sus valores con una [comparar con el Cuadro 1]). Respecto de los contextos de “e-epentética”, “plural” y “mixto” las distancias son, respectivamente: *dos, uno, uno*. Por lo tanto: $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 1, m_4 = 1$. Además, $e_{antes} \approx 0,28$. Se considera m_1 . Los valores a elegir para \hat{x}_1^0 son $\theta = (\theta_1 = 0,24, \theta_2 = 0,85)$. Para ello se aplica la regla bayesiana con un prior $p(\theta_j) = (e_{antes} = 0,29, 1 - e_{antes} = 0,71)$, de la siguiente forma. Como hay cuatro variables en el contexto fijemos $n = 4$ e indiquemos los valores de las verosimilitudes $p(x = i | \theta_j)$, con $i = \{0, \dots, 4\}$ y $j = \{1, 2\}$, como se observa en la siguiente tabla.

θ_j	$p(\theta_j)$	$p(x = i \theta_j)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$\theta_1 = 0,26$	0,29	$p(x = i \theta_1)$	0,4052	0,4271	0,1501	0,0176
$\theta_2 = 0,88$	0,71	$p(x = i \theta_2)$	0,0017	0,0380	0,2788	0,6815

La siguiente tabla muestra la probabilidad conjunta y la marginal:

θ_j	$p(\theta_j)p(x = i \theta_j)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$\theta_1 = 0,26$	$0,29p(x = i \theta_1)$	$0,29 \times 0,4052 = 0,1175$	0,1239	0,0435	0,0051
$\theta_2 = 0,88$	$0,71p(x = i \theta_2)$	$0,71 \times 0,0017 = 0,0012$	0,0270	0,1979	0,4838
Marginal	$\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x = i \theta_j)$	0,1187	0,1508	0,2414	0,4889

Por último, la posterior normalizada es:

$\frac{p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$\frac{p(\theta_1)p(x=i \theta_1)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}$	$\frac{0,1175}{0,1187} = 0,9897$	0,8211	0,1802	0,0104
$\frac{p(\theta_2)p(x=i \theta_2)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}$	$\frac{0,0012}{0,1187} = 0,0103$	0,1789	0,8197	0,9895

Como para $m_1, x = 1$ y $n = 3$, la posterior es $p(\theta_j | x = 1) = (0,82, 0,18)$. Con lo cual el máximo a posteriori es 0,82. Por lo tanto se elige $\theta_1 = 0,26$. Si esto se repite con el resto de los valores de m_i , se obtiene que se elige siempre θ_1 , con lo cual el conteo es: (4,0), cuyo máximo corresponde a $\theta_1 = 0,26$. Si el conteo hubiera dado empatado (2,2) se hubiera elegido θ según la media de los máximos a posteriori (en este caso todos correspondientes a θ_1). En consecuencia $E = 0,26$ y $x^0 = (0,74, 0,26)$, con lo cual $x_1^0 = 1 - E = 0,74 > 0,25$ y el flujo es atraído hacia el atractor “error”.

3. Ascenso de gradiente de armonía

3.1. análisis de bifurcación.

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria con $q \in [0, 5]$ y $e \in [-1, 1]$.

$$\frac{dx}{dt} = -4x - 4qx(x-1)(x+1) + e = -4x - 4qx(x^2 - 1) + e = -4x + 4qx(1 - x^2) + e = -4x + q(4x - 4x^3) + e = (-4 + 4q)x - 4qx^3 + e$$

Para que esto se parezca a la forma normal de una bifurcación tridente super-crítica imperfecta, es necesario deshacerse de los coeficientes del término cúbico. Para ello, sea la sustitución $x = \alpha u$, con α a determinarse. Con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha u)}{dt} &= (-4 + 4q)\alpha u - 4q(\alpha u)^3 + e \\ \frac{\alpha du}{dt} &= (-4 + 4q)\alpha u - 4q\alpha^3 u^3 + e \\ \frac{du}{dt} &= (-4 + 4q)\frac{\alpha}{\alpha} u - 4q\frac{\alpha^3}{\alpha} u^3 + \frac{1}{\alpha} e \\ \frac{du}{dt} &= (-4 + 4q)u - 4q\alpha^2 u^3 + \frac{1}{\alpha} e \end{aligned}$$

tomando: $\alpha = \frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}}$; y reemplazando:

$$\frac{du}{dt} = (-4 + 4q)u - 4q\left(\frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}}\right)^2 u^3 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}}\right)} e = (-4 + 4q)u - u^3 + 2\sqrt{q}e$$

y considerando $r = -4 + 4q$ ($r \in [-4; 16]$) y $h = 2\sqrt{q}e$ ($h \in [-4,472136; 4,472136]$), se obtiene la forma normal de la bifurcación tridente super-crítica imperfecta:

$$\frac{du}{dt} = ru - u^3 + h$$

Considérese primero el caso con $h = 0$ ($q = 0$ o bien $e = 0$). Para hallar los puntos críticos se resuelve: $\frac{du}{dt} = ru - u^3 = 0$, con $r = -4 < 0 \Rightarrow q = 0$. Entonces: $u(r - u^2) = 0 \Rightarrow u^* = 0$. Es decir que con $r < 0$ solo está el punto fijo $u^* = 0$. Para analizar la estabilidad, es preciso examinar el signo de la primera derivada: $f^{(1)}(u) = r - 3u^2$, evaluada en $u = u^*$. Aquí: $u_1^* = 0$: $f^{(1)}(0) = r = -4 < 0$, con lo cual es estable (atractor). No hay bifurcación. Ahora veamos el caso en que $e = 0$ y $q > 0$. Si $0 < q < 1$ entonces $r < 0$ y tenemos el mismo caso que antes con un punto fijo estable. Pero si $q > 1 \Rightarrow r > 0$ aparece una bifurcación tridente super-crítica. Para hallar los puntos críticos se resuelve: $\frac{du}{dt} = ru - u^3 = 0$, con $r > 0 \Rightarrow q > 1$. Se encuentran tres puntos críticos: $u_1^* = 0$; $u_2^* = \sqrt{r}$; $u_3^* = -\sqrt{r}$ (obsérvese la simetría de los puntos dos y tres respecto del primero). Se examina el signo de la primera derivada: $f^{(1)}(u) = r - 3u^2$, evaluada en $u = u^*$.

- $u_1^* = 0$: $f^{(1)}(0) = r$. Si $r > 0 \Rightarrow q > 1$ es inestable (repulsor). Ahora bien si: $r = 0 \Rightarrow q = 1$ (y $e = 0$), la derivada es cero pero el punto no es un *saddle* ya que la segunda derivada $f^{(2)}(u) = 1 - 6u$ evaluada en $u_1^* - \epsilon$, tiene signo positivo a la izquierda del punto fijo y a su derecha, $u_1^* + \epsilon$, tiene signo negativo. Por lo tanto sigue siendo un punto estable pero débil (el flujo se acerca a $u_1^* = 0$ más lentamente).
- Los otros dos puntos fijos solo existen con $r > 0 \Rightarrow q > 1$. En primer lugar, $u_2^* = \sqrt{r}$: $f^{(1)}(\sqrt{r}) = r - 3r = -2r$, por lo tanto es atractor. Para el último: $u_3^* = -\sqrt{r}$: $f^{(1)}(-\sqrt{r}) = r - 3((-1)^2(\sqrt{r})^2) = r - 3r = -2r$, por lo tanto también es atractor.

En suma, en $r \leq 0 \Rightarrow q \leq 1$ ($e = 0$) hay un solo punto fijo $u_1^* = 0$ y es estable. En $r = 0 \Rightarrow q = 1$ ($e = 0$) dicho punto sufre la bifurcación tridente (y es débilmente estable). Luego de la bifurcación, para $r > 0 \Rightarrow q > 1$ ($e = 0$), aparecen dos puntos fijos a distancia simétrica del anterior: $u_2^* = \sqrt{r}$ y $u_3^* = -\sqrt{r}$, ambos estables y el punto $u_1^* = 0$ se convierte en inestable.

En el caso de $h \neq 0$ ($q \neq 0$ y $e \neq 0$), aparece el fenómeno de una bifurcación tridente super-crítica imperfecta. En dicho caso, la constante h es un parámetro de perturbación del sistema que rompe la simetría. Ahora el comportamiento del sistema pasa a depender de dos parámetros: $h = \frac{1}{\alpha}e$ y $r = -4 + 4q$, con $\alpha = \left(2q^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. Los puntos fijos se encuentran donde se intersectan $f(u) = ru - u^3$ y $g(u) = h$. O sea:

$$\underbrace{ru - u^3}_{f(u)} + \underbrace{h}_{g(u)} = 0 \Rightarrow ru - u^3 = -h \Rightarrow f(u) = -g(u)$$

En el siguiente gráfico se muestra la dinámica del sistema para $r < 0 \Rightarrow q < 1$ (izquierda) y $r > 0 \Rightarrow q > 1$ (derecha).

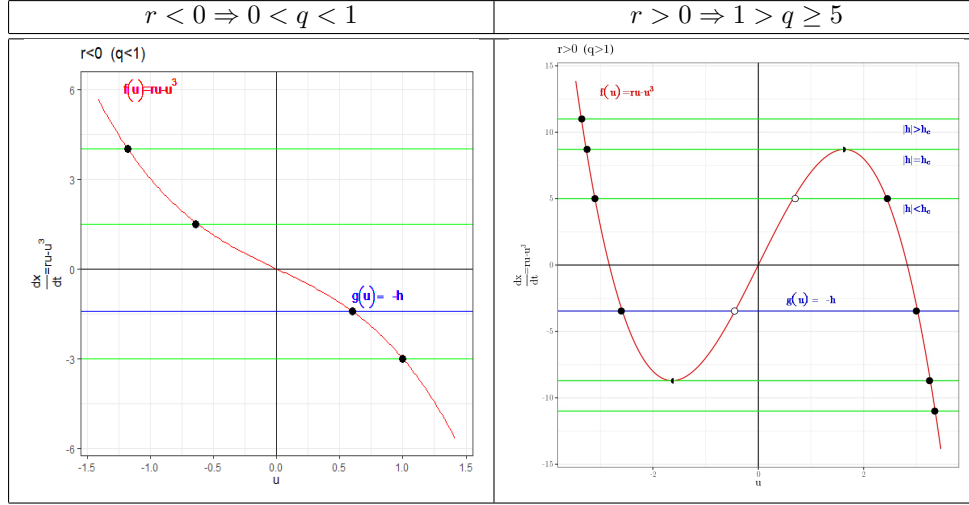


Figura 1: Bifurcación tridente super-crítica imperfecta.

En el caso $r < 0 \Rightarrow q < 1$ ambas funciones se intersectan siempre en un punto, no importa el valor de $-h$. Dicho punto fijo es siempre estable. En el gráfico de la Figura 1 (izquierda) se muestra en la recta azul $h = 1,414214$ con $q = \frac{1}{2}$ [$\Rightarrow r = -2$] y $e = 1$, cuya intersección es el punto fijo $u^* \approx 0,56$. Si $q = 1 \Rightarrow r = 0$, $f(u) = -u^3$. También hay un punto fijo en $-u^3 + h = 0 \Rightarrow u^3 = h \Rightarrow u^* = h^{\frac{1}{3}}$ ($h > 0$). Como $f^{(1)}(u) = -3u^2$, evaluada en $u = u^*$ es: $f^{(1)}(u^*) = -3h^{\frac{2}{3}} < 0$, el punto fijo también es estable.

En lo que atañe al caso $r > 0 \Rightarrow q > 1$, puede haber un punto fijo o tres, dependiendo del punto crítico que intersecta con $h_c(r)$. En el punto crítico, la función $g(u)$ es tangente a $f(u)$ y, dado que allí hay un punto máximo o mínimo, $f^{(1)}(u) = 0$. La condición de tangencia establece que $f^{(1)}(u) = g^{(1)}(u)$. Con lo cual se tiene:

$$f^{(1)}(u) = r - 3u^2; g^{(1)}(u) = 0; \Rightarrow f^{(1)}(u) = g^{(1)}(u) \Leftrightarrow r - 3u^2 = 0 \Leftrightarrow u_c^* = \pm\sqrt{\frac{r}{3}}.$$

Luego en dicho punto crítico $h_c(r)$ resulta:

$$h_c(r) = ru - u^3 = r\sqrt{\frac{r}{3}} - \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)r\sqrt{\frac{r}{3}} = \frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}$$

Según se trate del máximo o del mínimo de $f(u)$, se tendrá: $h = \pm h_c(r) = \frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}$. Luego en los puntos $(\pm u_c^*, \pm h_c(r)) = (\pm\sqrt{\frac{r}{3}}, \pm\frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}})$ se lleva a cabo una bifurcación *saddle node*. Se tienen los casos:

condición	puntos fijos	estabilidad
$ h > h_c$	un punto fijo	estable
$ h < h_c$	tres puntos fijos	dos estables y uno inestable
$ h = h_c$	punto fijo crítico u_c^*	<i>saddle node</i>

Cuadro 2: Puntos fijos para: $r > 0 \Rightarrow q > 1$

Mírese la Figura 1 a la derecha, comenzando desde arriba. Cuando $|h| > h_c = \frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}$, hay un único punto fijo estable. Luego en $|h| = h_c$ se produce una bifurcación *saddle node*. Y a partir de allí, en $|h| < h_c$ hay dos puntos fijos más, uno inestable y otro estable. Los puntos estables se encuentran a ambos lados del inestable pero no a distancia simétrica. En consecuencia se ha obtenido el resultado de una bifurcación tridente super-crítica pero a través de una bifurcación *saddle-node*. En la Figura 1, $h = 3,464102$ (recta en azul), $r = 8$, $q = 3$, $e = 1$; la intersección con la recta azul muestra los tres puntos fijos: $u_1^* \approx -2,58$ (estable), $u_2^* \approx -0,44$ (inestable) y $u_1^* \approx 3,02$ (estable).

3.2. Ejemplo.

El parámetro de sesgo e se calcula de la siguiente manera.

1. Se usa la medida de Jaccard para calcular la distancia entre las variables de cada contexto de la tabla 1 y las mismas variables en la instancia en cuestión. No se incluye la similaridad consigo misma. El índice de Jaccard mide la similitud entre dos conjuntos A y B . Es la cardinalidad de la intersección entre ambos conjuntos, dividido por la cardinalidad de su unión⁷: $J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|}$. La distancia de Jaccard es $d_{jaccard} = 1 - J(A, B) \in [0, 1]$, siendo cero si ambas variables coinciden en todos los valores de las variables que comparten. Por lo tanto: $m_i = J(instancia, contexto); i = 1, \dots, 4$.
2. Se calcula un *kernel* gaussiano como: $K = \exp\left\{-\frac{1}{2error_{antes}} [mediana(m_1 + \dots + m_4)]^2\right\}$; donde $error_{antes}$ es la proporción de errores hasta la instancia anterior.
3. Se calcula el percentil correspondiente a K , bajo una distribución logística truncada entre -1 y 1 , centrada en 0 y con escala 1 (o sea, con $P(X < -1) = 0$, $P(X < 0) = 0,5$ y $P(X < 1) = 1$). Este es el valor de x al cual se sesga el modelo.
4. Dados $t, q \in [0, 5]$, se corre el modelo hasta $t = q = 5$ (partiendo de $x(0) = -1$) y se declara “error” si el valor final de $x(t) > s$. En caso contrario se declara “correcto”. s es una barrera que declara cuán cerca es necesario estar del atractor “error” $x = 1$. Se lo parametrizó mediante el error cuadrático de predicción: $RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (p_{sim,i} - p_{error,i})^2}$, donde p_{sim} es la proporción de instancias marcadas como “error” de la simulación (o sea, aquellas en donde gana el atractor “error”) y p_{real} la proporción de errores real, para cada aprendiz. Se elige el valor de θ con $RMSE$ mínimo. Se obtuvo $s = 0,89$.

Se ilustra el procedimiento con la instancia errónea “muchas lugares” [SONIA, sesión 4, línea 56]. La instancia posee las siguientes variables: Mod = “2”; Fabs = “0”; FamLex = “1”; Epen = “1”; Morf = “2”; Est1 = “0”; Eest2 = “0”; Est5 = “0”. Además el error hasta la instancia anterior es $error_{antes} = 0,214$. Entonces el conjunto de valores de la instancia es $A = \{0, 1, 0, 0\}$ y el del último contexto es $B = \{1, 1, 1, 1\}$; y $|A \cap B| = 1$, $|A \cup B| = 4$. El índice de Jaccard para el último contexto es $J(A, B) = \frac{1}{4} = 0,25$; con lo cual $m_4 = 1 - J(A, B) = 0,75$. Para el resto de los contextos son: $m_1 = 0,33$, $m_2 = 0,5$, $m_3 = 0,22$. Luego se calcula el kernel gaussiano como: $K = \frac{1}{2(0,214)} e^{-[mediana(0,33; 0,5; 0,22; 0,75)]^2} \approx 0,67$. Y su percentil bajo la distribución logística truncada es $qlogis(0,67) = 0,317$; y por tanto: $e = 0,317$. Como se observa en la Figura que sigue, en $q = 0$, hay un solo atractor con máximo aproximadamente en 0 . Luego se comienzan a formar dos atractores. Eventualmente el sistema termina en $x(t = 5) = 0,947$. Como $x(t = 5) > 0,89$, se declara “error”.

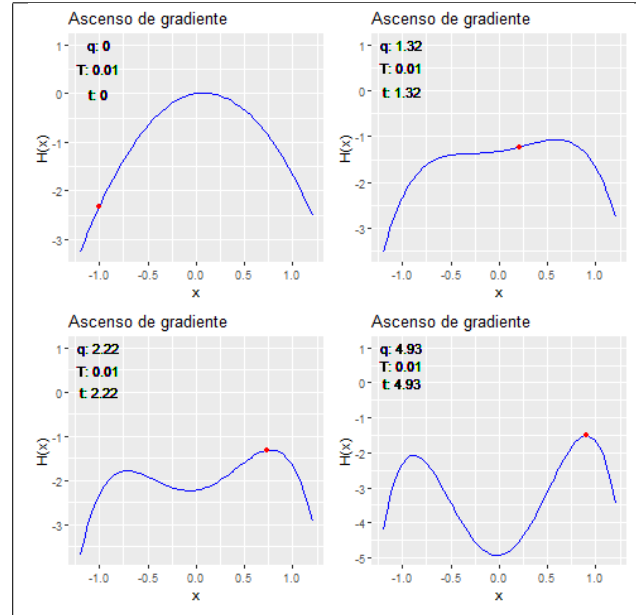


Figura 2: Ascenso de gradiente de armonía para la instancia “muchas lugares” [SONIA, sesión 4, línea 56]; según $q = 0$ (arriba izquierda), $q = 1,32$ (arriba derecha), $q = 2,22$ (abajo izquierda), $q = 4,93$ (abajo derecha).

⁷Dados dos vectores A y B con la misma cantidad de elementos; el índice se calcula como: $J(A, B) = \frac{\sum(A \times B)}{(\sum(A^2) + \sum(B^2) - \sum(A \times B))}$.

Referencias

- Murray, James D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. 3.^a ed. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer.
- Weibull, Jörgen W. (1997). *Evolutionary game theory*. MIT Press.