

# Modelación de errores de concordancia plural en español LE mediante sistemas dinámicos (suplementario)

4 de enero de 2022

## 1. Modelo de Lokta-Volterra.

Se sigue en su mayoría a Murray (2002). Las ecuaciones diferenciales del modelo de competencia entre especies de Lokta-Volterra rezan:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{N_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

Se tomaron los siguientes parámetros:  $r_1 = r_2 = 0,5$ ;  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$ ;  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1,5$ . Con lo cual, el punto interior *saddle* fue  $P_4 = \left( \frac{1-1,5}{1-(1,5)^2}; \frac{1-1,5}{1-(1,5)^2} \right) = (0,4; 0,4)$ , y los atractores son:  $(1, 0) = \text{"correcto"}$  y  $(0, 1) = \text{"error"}$ . Para la integración numérica se realizaron 100 iteraciones.

### 1.1. Estrategia para establecer la condición inicial

La Tabla 1 muestra los «contextos» utilizados para sesgar el flujo:

Tipo de Error	Variables («contextos»)
género	Mod = "3"; Fabs = "1"; EST1 = "1"
«e» epentética	FamLex = "1"; Morf = "1"; EST2 = "1", EST5 = "1"
plural	Fabs = "1"; FamLex = "1"; Morf = "1", "2" ; Epen = "2"
mixto	Fabs = 1, FamLex = 1, EST1 = "1", EST5 = "1"

Cuadro 1: Variables asociadas a tipos de errores.

Se tomó la siguiente estrategia para sesgar el flujo hacia alguno de los dos atractores:

1. Calcular la distancia entre las variables de cada contexto de la tabla 1 y las mismas variables en la instancia en cuestión. Se cuentan cuántas de ellas *no* coinciden en sus valores. También se computa la igualdad consigo misma, la cual es *cero*. O sea:  $m_i = \#variables\ diferentes; i = 1, \dots, 5$ . Luego se calcula la probabilidad para cada  $m_i$  bajo una distribución logística<sup>1</sup> *truncada* entre  $-1$  y  $4$ , con locación igual a  $2$  y escala de  $1$ . Ya que los posibles valores de  $m_i$  van entre  $0$  y  $4$ . La función de densidad para estos valores es:  $P(0) \approx 0,08$ ,  $P(1) \approx 0,26$ ,  $P(2) \approx 0,54$ ,  $P(3) \approx 0,82$ ,  $P(4) = 1$ .
2. Se calcula la siguiente suma pesada:  $E = w \times media(P(m_1), \dots, P(m_5)) + (1 - w) \times e_{antes}$ ; donde  $e_{antes}$  es la proporción de errores hasta la instancia anterior y  $w \in (0, 1)$  se parametrizó utilizando el error cuadrático de predicción:  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (p_{sim,i} - p_{error,i})^2}$ , donde  $p_{sim}$  es la proporción de instancias marcadas como "error" de la simulación (o sea, aquellas en donde gana el atractor "error") y  $p_{real}$  la proporción de errores real, para cada aprendiente. Se elige el valor de  $w$  con  $RMSE$  mínimo. Se obtuvo  $w = 0,71$ .
3. Se toma como condición inicial para las ecuaciones diferenciales  $N_0 = (1 - E, E)$ . Si  $E < \frac{1}{2}$ , gana el atractor "correcto"; y si  $E > \frac{1}{2}$ , gana el atractor "error". Si  $E = \frac{1}{2}$ , se elige al azar entre los valores  $\{0,25, 0,75\}$ . Esto último es así dado que la condición inicial  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  lleva el flujo hacia el nodo *saddle*  $P_4$  (porque el punto inicial se encuentra sobre la *separatrix*).

<sup>1</sup>La función de distribución acumulada de la distribución logística es:  $F(X < x; \mu, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{-(x-\mu)/\sigma}}$ ; con:  $x \in (-\infty, +\infty)$ , locación  $\mu \in \mathbb{R}$  y escala  $\sigma > 0$ .

Se ejemplifica el procedimiento con la instancia “les idiomas” [SONIA, sesión 2, línea 111]. La instancia posee las siguientes variables: Mod = “0”; Fabs = “0”; FamLex = “0”; Morf = “1”; Epen = “0”; Est1 = “0”; Est2 = “0”; Est5 = “0”. Además, la proporción de error hasta la instancia anterior es  $e_{antes} = 0,2$ . Por supuesto, consigo misma la distancia es *cero*. Con el contexto que baja la chance de error de plural, la distancia es *cuatro* (de las cuatro variables que conforman el contexto, la instancia no coincide en sus valores con ninguna [comparar con el Cuadro 1]). Respecto de los contextos de “e-epentética”, “plural” y “mixto” la distancia es *tres*. Por lo tanto:  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 3$ ,  $m_4 = 3$ ,  $m_5 = 4$ . Las probabilidades según la distribución logística truncada son:  $P(0) \approx 0,08$ ;  $P(3) \approx 0,82$ ;  $P(4) = 1$ . Con lo cual el promedio de las probabilidades de las distancias resulta:  $\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 P(m_i) = \frac{1}{5} (0,08 + 0,82 + 0,82 + 0,82 + 1) = 0,71$ . Con lo cual:  $E = w \times media(P(m_1), \dots, P(m_5)) + (1 - w) e_{antes} = 0,71 \times 0,71 + 0,29 \times 0,2 = 0,56$ . Por lo tanto, las condiciones iniciales son  $N_0 = (1 - E, E) = (0,44, 0,56)$ . Dado que  $0,56 > 0,5$ , el flujo se dirige hacia el atractor  $(0, 1) = \text{“error”}$ .

## 1.2. Análisis de estabilidad.

En primer lugar se lleva el modelo al formato adimensional, lo cual produce un modelo equivalente con menos parámetros. Sea:  $u_1 = \frac{N_1}{K_1} \rightarrow N_1 = K_1 u_1$ ;  $u_2 = \frac{N_2}{K_2} \rightarrow N_2 = K_2 u_2$ ;  $\tau = r_1 t \rightarrow t = \frac{\tau}{r_1}$ ;  $a_{12} = \alpha_{12} \frac{K_2}{K_1}$ ;  $a_{21} = \alpha_{21} \frac{K_1}{K_2}$ ;  $\rho = \frac{r_2}{r_1}$ . Con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(K_1 u_1)}{d(\tau/r_1)} &= K_1 r_1 \frac{d(u_1)}{d(\tau)} = r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{K_2}{K_1} u_2 \right) = \frac{r_1}{r_1} \frac{N_1}{K_1} \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} u_2 \right) \\ \frac{d(K_2 u_2)}{d(\tau/r_1)} &= K_2 r_1 \frac{d(u_2)}{d(\tau)} = r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \frac{K_1}{K_2} u_1 \right) = \frac{r_2}{r_1} \frac{N_2}{K_2} \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} u_1 \right) \end{aligned}$$

Y se llega al modelo reducido, reemplazando por  $u_1, u_2, \rho$  en la parte derecha.

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2) &= \frac{du_1}{d\tau} = u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2) \\ f_2(u_1, u_2) &= \frac{du_2}{d\tau} = \rho u_2 (1 - u_2 - a_{21} u_1) \end{aligned}$$

Los puntos fijos son las soluciones simultaneas de:  $f_1(u_1, u_2) = u_1 = 0$  y  $f_2(u_1, u_2) = u_2 = 0$ . Esto sucede si:  $P_1 = (u_1^* = 0, u_2^* = 0)$ ,  $P_2 = (u_1^* = 1, u_2^* = 0)$ ,  $P_3 = (u_1^* = 0, u_2^* = 1)$ . Para  $P_4$  debe resolverse el sistema:  $u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1 - a_{12} u_2$ ;  $u_2 (1 - u_2 - a_{21} u_1) = 0 \Leftrightarrow u_2 = 1 - a_{21} u_1$ . Y sustituyendo para calcular  $u_1^*$ :  $u_1 = 1 - a_{12} u_2 = 1 - a_{12} (1 - a_{21} u_1) = 1 - a_{12} + a_{21} a_{12} u_1 \Rightarrow u_1 - a_{21} a_{12} u_1 = 1 - a_{12} \Rightarrow (1 - a_{12} a_{21}) u_1 = 1 - a_{12} \Rightarrow u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12} a_{21}}$ .

Y análogamente para  $u_2^*$ ; obteniéndose:

$$P_4 = \left( u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12} a_{21}}, u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12} a_{21}} \right); a_{12} a_{21} \neq 1 \text{ (con lo cual se está en el primer cuadrante: } u_1^* \geq 0; u_2^* \geq 0).$$

Con el objetivo de descubrir el tipo de punto fijo, se hace necesario calcular el Jacobiano y evaluarlo en el punto fijo en cuestión  $J(u_1^*, u_2^*)$ :

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}_{u_1^*, u_2^*} = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1 - a_{12} u_2 & -a_{12} u_1 \\ -\rho a_{21} u_2 & \rho (1 - 2u_2 - a_{21} u_1) \end{pmatrix}_{u_1^*, u_2^*}$$

Luego hay que calcular la traza y el determinante de  $J$ :  $Tr(J) = J_{11} + J_{22}$ ,  $det(J) = J_{11} J_{22} - J_{21} J_{12}$ . Los autovalores de  $J$  serán entonces:  $\lambda_{1,2} = \frac{Tr(J) \pm \sqrt{[Tr(J)]^2 - 4det(J)}}{2}$ . Por último los puntos fijos se clasifican siguiendo el Cuadro (se incluyen solamente los tipos pertinentes para el análisis):

	$Tr(J) < 0$	$Tr(J) > 0$
$[Tr(J)]^2 > 4det(J)$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ : Atractor (estable)	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ : Repulsor (inestable)
$det(J) < 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ : Saddle (inestable)	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ : Saddle (inestable)

Cuadro 2: Clasificación de Puntos Fijos.

Siguiendo lo expuesto, se aplica la fórmula para los autovalores y se clasifica los puntos fijos según el Cuadro anterior.

$P_1 = (u_1^* = 0, u_2^* = 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ ;  $det(J) = \rho$ ;  $Tr(J) = (1 + \rho)$ ;  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \rho) \pm \sqrt{(1 + \rho)^2 - 4\rho} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \rho$ ;  $\lambda_2 = 1$ . Clasificación: como  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , es Repulsor.

$P_2 = (u_1^* = 1, u_2^* = 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} -1 & -a_{12} \\ 0 & \rho(1 - a_{21}) \end{pmatrix}$ ;  $det(J) = -\rho(1 - a_{21})$ ;  $Tr(J) = \rho(1 - a_{21}) - 1$ ;

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \rho(1 - a_{21}) - 1 \pm \sqrt{(\rho(1 - a_{21}) - 1)^2 - [4(-\rho)(1 - a_{21})]} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = \rho(1 - a_{21})$ . Clasificación: si  $a_{21} > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , por lo tanto es Atractor. En cambio, si  $a_{21} < 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ , por lo tanto es Saddle (notar que  $\det(J) < 0$ ).

$P_3 = (u_1^* = 0, u_2^* = 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 1 - a_{12} & 0 \\ -\rho a_{21} & -\rho \end{pmatrix}$ ;  $\det(J) = -\rho(1 - a_{12})$ ;  $Tr(J) = (1 - a_{12}) - \rho$ ;

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 - a_{12}) - \rho \pm \sqrt{((1 - a_{12}) - \rho)^2 - [4(-\rho)(1 - a_{12})]} \right\} \Rightarrow \lambda_2 = 1 - a_{12}; \lambda_1 = -\rho$ . Clasificación: Si  $a_{12} > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , por lo tanto es Atractor. En cambio, si  $a_{12} < 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ , por lo tanto es Saddle (notar que  $\det(J) < 0$ ).

$P_4 = (u_1^* = \frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}, u_2^* = \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}})$ :  $J = (1 - a_{12}a_{21})^{-1} \begin{pmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ \rho a_{21}(a_{21} - 1) & \rho(a_{21} - 1) \end{pmatrix}$ ;

Para el determinante se aplica la regla:  $\det(cA) = c^n \det(A)$ ;  $A_{n \times n}$ . Con lo cual:

$$\begin{aligned} \det(J) &= (1 - a_{12}a_{21})^{-2} [(a_{12} - 1)\rho(a_{21} - 1) - \rho a_{21}(a_{21} - 1)a_{12}(a_{12} - 1)] \\ &= (1 - a_{12}a_{21})^{-2} \rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

Para la traza se usó la regla:  $Tr(cA) = cTr(A)$ ;  $A_{n \times n}$ . Por lo tanto:

$$Tr(J) = (1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)].$$

Y los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ (1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)] \pm \left\{ [(1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]]^2 - 4(1 - a_{12}a_{21})^{-2} \rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1 - a_{12}a_{21})^{-1} [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)] \pm (1 - a_{12}a_{21})^{-1} \left\{ [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]^2 - 4\rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

con lo cual se tiene:

$$\lambda_{1,2} = [2(1 - a_{12}a_{21})]^{-1} \left[ (a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1) \pm \left\{ [(a_{12} - 1) + \rho(a_{21} - 1)]^2 - 4\rho(a_{12} - 1)(a_{21} - 1)(1 - a_{12}a_{21}) \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

Clasificación: si  $a_{12} < 1; a_{21} < 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , por lo tanto es un Atractor. Por otra parte si  $a_{12} > 1; a_{21} > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  y el punto fijo es un Saddle.

## 2. Teoría de los juegos evolutiva.

Se presentan conceptos clave de teoría de los juegos evolucionista (se sigue a: Weibull, 1997). Se restringe el tratamiento a la forma normal de juegos finitos. Sea  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de jugadores ( $n \in \mathbb{N}$ ). Para cada jugador  $i \in I$ , sea  $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$  su conjunto de estrategias puras ( $m_i > 2$ ). Además, sea  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  el vector de estrategias para el jugador  $i$ , su perfil de estrategias puras. La función de utilidad  $u_i : s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n \rightarrow \mathbb{R}$  asocia un pago o ganancia a las estrategias. Con dos jugadores las funciones de pago  $u_1$  y  $u_2$  se representan como una matriz de dimensión  $m_1 \times m_2$ . La matriz del primer jugador se denota  $A = (a_{hk})$  donde  $a_{hk} = u_1(h, k)$  para  $h \in S_1$  y  $k \in S_2$ , es decir, el pago cuando el primer jugador juega la estrategia  $h$  dado que el segundo juega la estrategia  $k$ . Análogamente, para el segundo jugador  $B = (b_{hk})$  donde  $b_{hk} = u_2(h, k)$ . Cada fila de la matriz es una estrategia pura del primer jugador 1 y cada columna, una estrategia pura del jugador 2. Las matrices se pueden combinar en una bi-matriz  $(A, B)$ . En el ejemplo siguiente ("dilema del prisionero") hay dos jugadores  $I = \{1, 2\}$ , cada uno con las mismas dos estrategias  $S_1 = S_2 = (1, 2)$  y  $s_i = (C = "cooperate", D = "defect")$ ; y donde  $a_{11} = u_1(1, 1) = 3$  significa que si el primer jugador juega la estrategia (fila) 1 cuando el segundo también juega la estrategia (columna) 1, entonces recibirá un pago de 3. Análogamente para  $b_{11} = u_2(1, 1)$ .

$$(A, B) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3, 3 & 0, 4 \\ 4, 0 & 2, 2 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**juego simétrico de dos jugadores.** Si hay dos jugadores  $I = \{1, 2\}$  con el mismo número de estrategias  $S_1 = S_2$  y  $u_2(h, k) = u_1(k, h)$ , o sea si  $A^T = B$ . Es decir que el pago cuando el jugador 2 usa la estrategia  $h$  y el jugador 1 la estrategia  $k$  es el mismo que si el jugador 1 usa la estrategia  $k$  y el jugador 2 la estrategia  $h$ . El ejemplo anterior es simétrico. Por otra parte, un juego es *doblemente* simétrico si  $A^T = A$  con  $B = A$ .

**estrategia mixta.** Una estrategia mixta para el jugador  $i$  es una distribución de probabilidad sobre el conjunto  $S_i$  de estrategias puras. El perfil de estrategias mixtas para  $i$  es el vector  $x_{ih} = (x_1, \dots, x_{m_i})^T \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ , donde cada componente  $h$  indica la probabilidad asociada a la estrategia pura  $h$  (y  $m$  es el número de estrategias puras). Ya que todas las probabilidades son no-negativas y suman uno, dicho vector pertenece al *simplex* unitario  $\Delta_i$  de dimensión

$m_i - 1$  definido como:  $\Delta_i = \left\{ x_i \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \right\}$ . Los v rtices del simplex son  $e_i^1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_i^2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$ ,  $e_i^{m_i} = (0, 0, \dots, 1)$ , los cuales se corresponden con las estrategias puras. Las funciones de pago asociadas con los perfiles de estrategias mixtas  $x_1 \in \Delta_1$  y  $x_2 \in \Delta_2$  para dos jugadores serán la esperanzas:

$$u_1(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} a_{hk} x_{2k} = x_1^T A x_2$$

$$u_2(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} b_{hk} x_{2k} = x_1^T B x_2$$

Por ejemplo, sea el siguiente juego ("batalla de los sexos"):

$$(A, B) = \begin{array}{cc|cc} & & F & B \\ F & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ B & 1/3 & 0, 0 & 1, 2 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

las estrategias son  $s_1 = s_2 = (B = "Ballet", F = "Football")$  y las probabilidades asociadas (estrategias mixtas) son  $x_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  y  $x_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . La ganancia esperada de los jugadores<sup>2</sup> son  $u_1(x) = u_2(x) = \frac{2}{3}$ .

**dominancia estricta.** Una estrategia domina estrictamente a otra si obtiene siempre un pago más alto, cualquiera sea la estrategia que juegue el otro jugador. Es decir:  $y_i \in \Delta_i$  domina estrictamente a  $x_i \in \Delta_i$  si  $u_i(y_i, z_{-i}) > u_i(x_i, z_{-i})$ . Por ejemplo, en el juego del "dilema del prisionero" la estrategia pura  $D = "defect"$  domina estrictamente a  $C = "cooperate"$ . En efecto, para el jugador 1,  $u_1(D, C) = 4$ ,  $u_1(D, D) = 2$  es mayor que  $u_1(C, C) = 3$ ,  $u_1(C, D) = 0$ . Sin importar si 2 juega  $D$  o  $C$ , jugar la estrategia  $D$  paga siempre más para el jugador 1.

**mejor respuesta (BR).** Una mejor respuesta para el jugador  $i$  frente al perfil de estrategias  $y$  del otro jugador es una estrategia pura  $s_i \in S_i$  tal que ninguna otra estrategia que el jugador tenga disponible le d e un mejor pago frente a  $y$ . En el "dilema del prisionero" si cualquier jugador juega la estrategia  $C$  lo mejor que puede hacer el otro es jugar  $D$ ; y, si cualquier jugador juega  $D$ , lo mejor que puede hacer el otro también es jugar  $D$ . Por lo tanto,  $D$ , es mejor respuesta.

Una mejor respuesta  $BR$  para el jugador  $i$  frente al perfil de estrategias  $y \in \Delta_{-i}$  del otro jugador es una estrategia mixta  $x_i \in \Delta_i$  tal que ninguna otra estrategia mixta que el jugador tenga disponible le de un mejor pago frente a  $y$ . Formalmente:

$$BR_i(y) = \{x \in \Delta_i : u(x, y) > u(w, y), \forall w \in \Delta_i\}$$

**equilibrio de Nash (NE).** Para un juego bimatricial  $(h^*, k^*)$  hay equilibrio de Nash si un jugador supone que el otro se queda con una determinada estrategia de una fila / columna, al otro no le conviene pasarse de fila / columna. O sea si el jugador 2 elige la columna  $k^*$  y el 1 elige la fila  $h^*$ , al jugador 1 no le conviene desviarse y elegir otra estrategia (elegir otra fila  $-h$ ) porque pierde ganancia. Lo mismo sucede desde la perspectiva del jugador 2. En el "dilema del prisionero"  $(e^2, e^2) = (2, 2)$  es el equilibrio de Nash.

$$Nash = \begin{cases} a_{h^*, k^*} \geq a_{-h, j^*} \\ b_{h^*, k^*} \geq b_{h^*, -j} \end{cases}$$

En el caso de las estrategias mixtas, el perfil de estrategias mixtas  $x_{ih}^* = (x_1^*, \dots, x_{m_i}^*) \in \Delta_i$  es un equilibrio de Nash si para todo jugador  $i = 1, \dots, N$  y para todo  $x_i \in \Delta_i$ , se tiene que:  $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$ . O sea que para el jugador  $i$ , la estrategia mixta  $x_i^*$  es una mejor respuesta a  $x_{-i}^*$ . Para estrategias mixtas, existe al menos un equilibrio de Nash. En el caso de la "batalla de los sexos" hay dos equilibrios de Nash puros:  $(1, 2)$  y  $(2, 1)$ . El equilibrio mixto es<sup>3</sup>:  $(x_{1h}^* = (p_1^*, 1 - p_1^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), x_{2h}^* = (p_2^*, 1 - p_2^*) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ .

<sup>2</sup>Efectivamente,

$$u_1(x) = x_1^T A x_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$u_2(x) = x_1^T B x_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

<sup>3</sup>Para encontrar  $p_1^*$  se resuelve:

$$(p_1^*, 1 - p_1^*) B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p_1^*, 1 - p_1^*) B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p_1^* = 2(1 - p_1^*) \Leftrightarrow p_1^* = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - p_1^* = \frac{1}{3}$$

Para encontrar  $p_2^*$  se resuelve:

$$(1, 0) A \begin{pmatrix} p_2^* \\ 1 - p_2^* \end{pmatrix} = (0, 1) A \begin{pmatrix} p_2^* \\ 1 - p_2^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2p_2^* = (1 - p_2^*) \Leftrightarrow p_2^* = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - p_2^* = \frac{2}{3}$$

En ambos casos es un *Nash estricto* si la desigualdad es estricta ( $>$ ). En otras palabras, un NE es un par de respuestas  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_1 \times \Delta_2 = \Delta$  tal que  $\bar{x}$  es una mejor respuesta a  $\bar{y}$  e  $\bar{y}$  es una mejor respuesta a  $\bar{x}$ . En un Nash estricto,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  son las *únicas* mejores respuestas, la una contra la otra.

**Estrategia evolutivamente estable (ESS).** Supóngase una población grande de individuos que son seleccionados aleatoriamente para jugar un juego simétrico de a dos. Cada individuo está programado para jugar las mismas estrategias puras. Sea  $S = \{1, 2, \dots, k\}$  el conjunto de dichas estrategias. Sea  $\Delta_i = \left\{x \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1\right\}$  el conjunto de estados poblacionales, o sea que cada  $x_i$  en el vector  $x = (x_1, \dots, x_k)$  es la fracción de individuos que juega la estrategia  $i \in S$  (notar que  $\Delta$  es idéntico formalmente al conjunto de estrategias mixtas). Supóngase, además, que inicialmente el estado poblacional es  $x \in \Delta$ , entonces la ganancia poblacional promedio (“fitness”) es  $u(x, x) = x^T A x$ . A continuación, entra a la población un *pequeño grupo* de mutantes con fracción poblacional  $\epsilon$  que juega el perfil  $y \in \Delta$ . Entonces, luego de la introducción de los mutantes, el estado poblacional será  $w = (\epsilon y + (1 - \epsilon)x)$ . Luego de la introducción de los mutantes, la ganancia poblacional promedio (“fitness”) de los no-mutantes que son apareados aleatoriamente con mutantes será  $u(x, y) = x^T A y$ . La ganancia promedio de los no-mutantes será  $u(x, w) = u(x, \epsilon y + (1 - \epsilon)x) = \epsilon u(x, y) + (1 - \epsilon)u(x, x)$ . Análogamente, la ganancia promedio de los mutantes será:  $u(y, w) = u(y, \epsilon y + (1 - \epsilon)x) = \epsilon u(y, y) + (1 - \epsilon)u(y, x)$ . Se supone que las “fuerzas evolutivas” no van a seleccionar a la estrategia del mutante si su “fitness” resulta ser menor que el del no-mutante. Es decir si:

$$u(x, w) = \epsilon u(x, y) + (1 - \epsilon)u(x, x) > u(y, w) = \epsilon u(y, y) + (1 - \epsilon)u(y, x)$$

Se dice que  $x$  es una estrategia evolutivamente estable (ESS) si para todo  $x \neq y$  y para todo  $\epsilon < 1$  vale la desigualdad anterior. Es decir que  $x$  es resistente a las perturbaciones. Los mutantes no pueden invadir la población y eventualmente se extinguen. Ahora bien, la desigualdad anterior puede escribirse como:

$$u(x, x) - u(y, x) + \epsilon \{u(x, y) - u(x, x) + u(y, x) - u(y, y)\} > 0; \epsilon < 1.$$

Es fácil ver que para que esta última desigualdad sea cierta deben cumplirse las condiciones: (1)  $u(x, x) \geq u(y, x)$ ; o sea es un equilibrio de Nash; (2) si  $u(x, x) = u(y, x)$ , es necesario que sea cierto que:  $u(x, y) > u(y, y)$ .

En resumen:  $x$  es ESS si y solo si:

- $(x, x)$  es un equilibrio de Nash, o sea:  $u(x, x) = x^T A x \geq u(y, x) = y^T A x$ .
- Si sucede que  $x^T A p = y^T A x$ , entonces:  $u(x, y) = x^T A y > u(y, y) = y^T A y$ .

Obsérvese que si  $x$  es un Nash estricto entonces es ESS (porque no se da la segunda condición). A modo de ejemplo, considérese el siguiente “juego de coordinación”:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Los equilibrios de Nash son  $NE = \{e^1, e^2, \hat{x}\}$  donde  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  es la estrategia mixta<sup>4</sup>. Las dos primeras puras son Nash estrictos, por lo tanto son ESS. Para examinar si la estrategia mixta es ESS, supóngase la estrategia mixta del mutante  $y = (p, 1 - p)$ . Primero se debe ver si hay un Nash estricto:  $x^T A x \geq y^T A x$ ; no lo hay porque  $x^T A x = y^T A x = \frac{8}{3}$ . O sea que tanto los mutantes como los no-mutantes cuando son seleccionados para jugar contra los mutantes reciben un “fitness”<sup>5</sup> de  $\frac{8}{3}$ . Como se cumple la igualdad se debe verificar la segunda condición:  $x^T A y > y^T A y$ ; pero  $x^T A y = \frac{11}{3} - \frac{9}{3}p$  y  $y^T A y = 4p^2 - 9p + 7$ ; con lo cual:  $\frac{11}{3} - \frac{9}{3}p > 4p^2 - 9p + 7 \iff -4p^2 + 6p - \frac{10}{3} > 0$  ( $p \in (0, 1)$ ) no es cierta, entonces<sup>6</sup>:  $x^T A y < y^T A y$ . Por lo tanto, los no-mutantes que se aparean aleatoriamente con mutantes tienen un “fitness” *menor* que los mutantes que se aparean aleatoriamente con mutantes. Como no se cumple ninguna de las dos condiciones,  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  *no* es ESS.

<sup>4</sup>La cual se encuentra resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ 1 - p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ 1 - p^* \end{pmatrix} \iff 2p + 3(1 - p^*) = 4(1 - p^*) \Rightarrow p^* = \frac{1}{3}, (1 - p^*) = \frac{2}{3}$$

<sup>5</sup>Esto se ve calculando:

$$x^T A x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \text{ e } y^T A x = \begin{pmatrix} p & 1 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 4 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

<sup>6</sup>

Effectivamente:

$$x^T A x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \frac{2}{3}p + \frac{11}{3}(1 - p) = \frac{11}{3} - \frac{9}{3}p$$

$$y^T A y = \begin{pmatrix} p & 1 - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 - 4p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = 2p + (7 - 4p)(1 - p) = 4p^2 - 9p + 7$$

Sea ahora el siguiente juego simétrico generalizado para dos jugadores cuya matriz de pago es  $A$ . Substrayendo  $a_{21}$  de la primera columna y  $a_{12}$  de la segunda columna, se obtiene la matriz normalizada equivalente  $A^*$  que resulta ser doblemente simétrica, donde  $a_1 = a_{11} - a_{21}$  y  $a_2 = a_{22} - a_{12}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Cuando  $a_1 > 0, a_2 > 0$ , para el juego de coordinación se tiene:  $NE = \left\{ (e^1, e^1), (e^2, e^2), (\hat{x}, \hat{x}); \hat{x} = \left( \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) \right\}$  y  $ESS = \{e^1, e^2\}$ .

## 2.1. Dinámica del replicador: análisis de estabilidad.

En la sección anterior se ha visto que  $ESS \Rightarrow NE$  (pero la recíproca no es cierta, excepto si se trata de un  $NE$  estricto). Sin embargo, ambos conceptos representan equilibrios estáticos. En este apartado se supone ahora que cada individuo está programado para usar una estrategia pura, que *replica* a su descendencia. La dinámica del replicador muestra cómo la distribución de estrategias puras de la población cambia con el tiempo siguiendo un proceso de selección, y que dicha distribución converge a un  $ESS$ . Se presenta el modelo para el caso de dos jugadores. Sea  $t \in [0, \infty)$  el tiempo continuo; y denótese  $x_1(t)$  a la fracción de individuos que juega la estrategia pura 1 en el tiempo  $t$ . En consecuencia,  $x_2(t) = 1 - x_1(t)$  será la fracción de individuos que juega la estrategia pura 2 en el tiempo  $t$ . Por tanto, el estado de la población es  $x(t) = [x_1(t), 1 - x_1(t)] \in \Delta$ . Ahora bien, sea el juego simétrico  $2 \times 2$ :  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . El pago promedio de un individuo que usa la estrategia 1 es:

$$u(e^1, x) = e_1^T A \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 - x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 - x(t) \end{pmatrix} = ax(t) + b(1 - x(t))$$

Por otro lado, el pago promedio de un individuo contra cualquier otro (promedio poblacional) será:

$$u(x, x) = \begin{pmatrix} x(t) & 1 - x(t) \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 - x(t) \end{pmatrix} = ax^2 + bx(t)(1 - x(t)) + c(1 - x(t))x(t) + d(1 - x(t))^2$$

Las ecuaciones diferenciales para la dinámica del replicador son pues:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 [u(e^1, x) - u(x, x)] = x_1 (1 - x_1) [x_1 (a + d - b - c) + b - d]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la fracción poblacional de la estrategia 1 es proporcional a la diferencia entre su "fitness" y el "fitness" poblacional. Si esta diferencia es positiva, la tasa de crecimiento aumentará; y habrá más individuos jugando dicha estrategia en la próxima generación, en  $t + dt$ . Ya que  $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$ , la dimensión del sistema es 1. Por lo tanto, se concentrará el análisis en la primera ecuación. Sus puntos fijos serán los que hagan que  $\dot{x}_1 = 0$ , lo cual sucede cuando  $P_1 = (x_1^* = 1)$ ,  $P_2 = (x_1^* = 0)$ ,  $P_3 = \left(x_1^* = \frac{d-b}{a+d-b-c}\right)$ .

En el caso de los juegos simétricos de  $2 \times 2$  con matriz normalizada:  $A = \begin{pmatrix} a_1 = a - b & 0 \\ 0 & a_2 = d - b \end{pmatrix}$ , y cuando  $a_1 a_2 > 0$ , la dinámica del replicador está gobernada por las ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_1 [u(e^1, x) - u(x, x)] = x_1 (1 - x_1) [a_1 x_1 - a_2 (1 - x_1)]$$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

Como en realidad hay una sola dimensión, los puntos fijos son las soluciones de:  $f_1(x_1) = \dot{x}_1 = 0$ . Estos son:  $P_1 = (x_1^* = 1)$ ,  $P_2 = (x_1^* = 0)$ ,  $P_3 = \left(x_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)$ . Con el objetivo de descubrir el tipo de punto fijo, se hace necesario calcular la derivada con respecto a  $x_1$  y evaluarla en el punto fijo en cuestión:  $\lambda = \left[ \frac{df_1(x)}{dx} \right]_{x^*}$ . Si  $\lambda < 0$ , el punto fijo es atractor, si  $\lambda > 0$ , es repulsor. Si  $\lambda = 0$  puede ser atractor, repulsor o saddle; y es necesario examinar el signo la segunda derivada. Si es un saddle, la segunda derivada tiene el *mismo* signo en un punto  $x = x^* \pm \epsilon$ , a ambos lados de  $x^*$ . En un saddle, el punto fijo atrae en una dirección y repele en la otra (o atrae a la izquierda y repele a la derecha o viceversa). Para el caso de un atractor con  $\lambda = 0$ , la segunda derivada cambia de signo cuando pasa por  $x^*$ : es positiva en un punto a la izquierda

de  $x^*$  y negativa a la derecha de  $x^*$ ; y al revés con un repulsor: es negativa en un punto a la izquierda de  $x^*$  y positiva a su derecha. Aplicando lo dicho, se examina cada punto fijo.

$$f'_1(x_1) = -3(a_1 + a_2)x_1^2 + 2(a_1 + 2a_2)x_1 - a_2$$

- $P_1 = (x_1^* = 1) \Rightarrow f'_1(1) = -a_1$ . Si  $a_1 > 0 \Rightarrow f'_1(1) < 0$ , entonces es atractor. Si  $a_1 < 0 \Rightarrow f'_1(1) > 0$ , entonces es repulsor.
- $P_2 = (x_1^* = 0) \Rightarrow f'_1(0) = -a_2$ . Si  $a_2 > 0 \Rightarrow f'_1(0) < 0$ , entonces es atractor. Si  $a_2 < 0 \Rightarrow f'_1(0) > 0$ , entonces es repulsor.
- $P_3 = \left(x_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) \Rightarrow f'_1\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$ . Sea  $a_1 a_2 > 0$ . Si  $a_1, a_2 > 0 \Rightarrow f'_1(0) > 0$ , entonces es repulsor. Si  $a_1, a_2 < 0 \Rightarrow f'_1(0) < 0$ , entonces es atractor.

## 2.2. Estrategia para establecer la condición inicial.

La estrategia 1 fue “error” y la otra, “correcto”. Por la dinámica del replicador, las condiciones iniciales  $x_1^0 > \frac{1}{4}$  serán atraídas hacia la estrategia “error” y con  $x_1^0 < \frac{1}{4}$  habrá atracción hacia la estrategia “correcto”. En consecuencia, el sesgo del modelo depende enteramente de las condiciones iniciales, como en el modelo de *Lokta-Volterra*. Se aplica el siguiente mecanismo para determinarlo.

1. Calcular la distancia entre las variables de cada contexto de la tabla 1 y las mismas variables en la instancia en cuestión. Se cuentan cuántas de ellas *no* coinciden en sus valores. No se incluye la similitud consigo misma. O sea:  $m_i = \#variables\ diferentes; i = 1, \dots, 4$ .
2. Establecer  $\theta = (\theta_1 \neq \frac{1}{4}, \theta_2 \neq \frac{3}{4})$  y asignar  $p(\theta_j) = (e_{antes}, 1 - e_{antes})$ , donde  $e_{antes}$  es la proporción de errores hasta la instancia anterior. Luego, para cada contexto  $i$  establecer la distribución de probabilidades a posteriori de  $\theta_j$  utilizando la regla de Bayes:  $p(\theta_j | x = m_i) = \frac{p(\theta_j)p(x=m_i|\theta_j)}{\sum_j p(\theta_j)p(x=m_i|\theta_j)}$ ;  $j = 1, 2$  donde  $x \sim Binom(n = c, p = \theta_j)$ , con  $c =$  número de variables en el contexto; luego elegir de acuerdo al máximo a posteriori (MAP):  $\max(p(\hat{\theta}_1), p(\hat{\theta}_2))$  (se asigna  $\theta_j$  de acuerdo a la probabilidad a posteriori más alta).
3. A continuación se cuentan las veces que se asignó  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , en los contextos y se asigna a la variable  $E$  el  $\theta_j$  con conteo máximo. Si hay empate se toma la media de los máximos de las posteriores. Por último, el vector de condiciones iniciales resulta  $x^0 = (x_1^0 = 1 - E, x_2^0 = E)$ . Por lo tanto si  $x_1^0 < \frac{1}{4}$ , gana el atractor “error”, y si  $x_1^0 > \frac{1}{4}$ , gana el atractor “correcto”. El vector  $\theta$  se parametrizó utilizando el error cuadrático de predicción:  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (p_{sim,i} - p_{error,i})^2}$ , donde  $p_{sim}$  es la proporción de instancias marcadas como “error” de la simulación (o sea, aquellas en donde gana el atractor “error”) y  $p_{real}$  la proporción de errores real, para cada aprendiz. Se elige el valor de  $\theta$  con  $RMSE$  mínimo. Se obtuvo  $\theta = (\theta_1 = 0,26, \theta_2 = 0,88)$ .

Se ejemplifica el procedimiento con la instancia “los estudio” [SONIA, sesión 4, línea 179]. La instancia posee las siguientes variables: Mod = “0”; Fabs = “1”; FamLex = “1”; Morf = “1”; Epen = “0”; Est1 = “1”; Est2 = “0”; Est5 = “0”. Además, el error hasta la instancia anterior es  $e_{antes} = 0,5$ . Con el contexto que baja la chance de error de género, la distancia es *uno* (de las cuatro variables que conforman el contexto, la instancia no coincide en sus valores con una [comparar con el Cuadro 1]). Respecto de los contextos de “e-epentética”, “plural” y “mixto” las distancias son, respectivamente: *dos, uno, uno*. Por lo tanto:  $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 1, m_4 = 1$ . Además,  $e_{antes} \approx 0,28$ . Se considera  $m_1$ . Los valores a elegir para  $\hat{x}_1^0$  son  $\theta = (\theta_1 = 0,24, \theta_2 = 0,85)$ . Para ello se aplica la regla bayesiana con un prior  $p(\theta_j) = (e_{antes} = 0,29, 1 - e_{antes} = 0,71)$ , de la siguiente forma. Como hay cuatro variables en el contexto fijemos  $n = 4$  e indiquemos los valores de las verosimilitudes  $p(x = i | \theta_j)$ , con  $i = \{0, \dots, 4\}$  y  $j = \{1, 2\}$ , como se observa en la siguiente tabla.

$\theta_j$	$p(\theta_j)$	$p(x = i   \theta_j)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$\theta_1 = 0,26$	0,29	$p(x = i   \theta_1)$	0,4052	<b>0,4271</b>	0,1501	0,0176
$\theta_2 = 0,88$	0,71	$p(x = i   \theta_2)$	0,0017	<b>0,0380</b>	0,2788	0,6815

La siguiente tabla muestra la probabilidad conjunta y la marginal:

$\theta_j$	$p(\theta_j)p(x = i   \theta_j)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$\theta_1 = 0,26$	$0,29p(x = i   \theta_1)$	$0,29 \times 0,4052 = 0,1175$	<b>0,1239</b>	0,0435	0,0051
$\theta_2 = 0,88$	$0,71p(x = i   \theta_2)$	$0,71 \times 0,0017 = 0,0012$	<b>0,0270</b>	0,1979	0,4838
Marginal	$\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x = i   \theta_j)$	0,1187	<b>0,1508</b>	0,2414	0,4889

Por último, la posterior normalizada es:

$\frac{p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$\frac{p(\theta_1)p(x=i \theta_1)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}$	$\frac{0,1175}{0,1187} = 0,9897$	<b>0,8211</b>	0,1802	0,0104
$\frac{p(\theta_2)p(x=i \theta_2)}{\sum_{\theta} p(\theta_j)p(x=i \theta_j)}$	$\frac{0,0012}{0,1187} = 0,0103$	<b>0,1789</b>	0,8197	0,9895

Como para  $m_1$ ,  $x = 1$  y  $n = 3$ , la posterior es  $p(\theta_j | x = 1) = (0,82, 0,18)$ . Con lo cual el máximo a posteriori es 0,82. Por lo tanto se elige  $\theta_1 = 0,26$ . Si esto se repite con el resto de los valores de  $m_i$ , se obtiene que se elige siempre  $\theta_1$ , con lo cual el conteo es: (4,0), cuyo máximo corresponde a  $\theta_1 = 0,26$ . Si el conteo hubiera dado empatado (2,2) se hubiera elegido  $\theta$  según la media de los máximos a posteriori (en este caso todos correspondientes a  $\theta_1$ ). En consecuencia  $E = 0,26$  y  $x^0 = (0,74, 0,26)$ , con lo cual  $x_1^0 = 1 - E = 0,74 > 0,25$  y el flujo es atraído hacia el atractor “error”.

### 3. Ascenso de gradiente de armonía

#### 3.1. análisis de bifurcación.

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria con  $q \in [0, 5]$  y  $e \in [-1, 1]$ .

$$\frac{dx}{dt} = -4x - 4qx(x-1)(x+1) + e = -4x - 4qx(x^2 - 1) + e = -4x + 4qx(1 - x^2) + e = -4x + q(4x - 4x^3) + e = (-4 + 4q)x - 4qx^3 + e$$

Para que esto se parezca a la forma normal de una bifurcación tridente super-crítica imperfecta, es necesario deshacerse de los coeficientes del término cúbico. Para ello, sea la sustitución  $x = \alpha u$ , con  $\alpha$  a determinarse. Con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha u)}{dt} &= (-4 + 4q)\alpha u - 4q(\alpha u)^3 + e \\ \frac{\alpha du}{dt} &= (-4 + 4q)\alpha u - 4q\alpha^3 u^3 + e \\ \frac{du}{dt} &= (-4 + 4q)\frac{\alpha}{\alpha} u - 4q\frac{\alpha^3}{\alpha} u^3 + \frac{1}{\alpha} e \\ \frac{du}{dt} &= (-4 + 4q)u - 4q\alpha^2 u^3 + \frac{1}{\alpha} e \end{aligned}$$

tomando:  $\alpha = \frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}}$ ; y reemplazando:

$$\frac{du}{dt} = (-4 + 4q)u - 4q\left(\frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}}\right)^2 u^3 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}}\right)} e = (-4 + 4q)u - u^3 + 2\sqrt{q}e$$

y considerando  $r = -4 + 4q$  ( $r \in [-4; 16]$ ) y  $h = 2\sqrt{q}e$  ( $h \in [-4,472136; 4,472136]$ ), se obtiene la forma normal de la bifurcación tridente super-crítica imperfecta:

$$\frac{du}{dt} = ru - u^3 + h$$

Considérese primero el caso con  $h = 0$  ( $q = 0$  o bien  $e = 0$ ). Para hallar los puntos críticos se resuelve:  $\frac{du}{dt} = ru - u^3 = 0$ , con  $r = -4 < 0 \Rightarrow q = 0$ . Entonces:  $u(r - u^2) = 0 \Rightarrow u^* = 0$ . Es decir que con  $r < 0$  solo está el punto fijo  $u^* = 0$ . Para analizar la estabilidad, es preciso examinar el signo de la primera derivada:  $f^{(1)}(u) = r - 3u^2$ , evaluada en  $u = u^*$ . Aquí:  $u_1^* = 0$ :  $f^{(1)}(0) = r = -4 < 0$ , con lo cual es estable (atractor). No hay bifurcación. Ahora veamos el caso en que  $e = 0$  y  $q > 0$ . Si  $0 < q < 1$  entonces  $r < 0$  y tenemos el mismo caso que antes con un punto fijo estable. Pero si  $q > 1 \Rightarrow r > 0$  aparece una bifurcación tridente super-crítica. Para hallar los puntos críticos se resuelve:  $\frac{du}{dt} = ru - u^3 = 0$ , con  $r > 0 \Rightarrow q > 1$ . Se encuentran tres puntos críticos:  $u_1^* = 0$ ;  $u_2^* = \sqrt{r}$ ;  $u_3^* = -\sqrt{r}$  (obsérvese la simetría de los puntos dos y tres respecto del primero). Se examina el signo de la primera derivada:  $f^{(1)}(u) = r - 3u^2$ , evaluada en  $u = u^*$ .

- $u_1^* = 0$ :  $f^{(1)}(0) = r$ . Si  $r > 0 \Rightarrow q > 1$  es inestable (repulsor). Ahora bien si:  $r = 0 \Rightarrow q = 1$  (y  $e = 0$ ), la derivada es cero pero el punto no es un *saddle* ya que la segunda derivada  $f^{(2)}(u) = 1 - 6u$  evaluada en  $u_1^* - \epsilon$ , tiene signo positivo a la izquierda del punto fijo y a su derecha,  $u_1^* + \epsilon$ , tiene signo negativo. Por lo tanto sigue siendo un punto estable pero débil (el flujo se acerca a  $u_1^* = 0$  más lentamente).



- Los otros dos puntos fijos solo existen con  $r > 0 \Rightarrow q > 1$ . En primer lugar,  $u_2^* = \sqrt{r}$ :  $f^{(1)}(\sqrt{r}) = r - 3r = -2r$ , por lo tanto es atractor. Para el último:  $u_3^* = -\sqrt{r}$ :  $f^{(1)}(-\sqrt{r}) = r - 3((-1)^2(\sqrt{r})^2) = r - 3r = -2r$ , por tanto también es atractor.

En suma, en  $r \leq 0 \Rightarrow q \leq 1$  ( $e = 0$ ) hay un solo punto fijo  $u_1^* = 0$  y es estable. En  $r = 0 \Rightarrow q = 1$  ( $e = 0$ ) dicho punto sufre la bifurcación tridente (y es débilmente estable). Luego de la bifurcación, para  $r > 0 \Rightarrow q > 1$  ( $e = 0$ ), aparecen dos puntos fijos a distancia simétrica del anterior:  $u_2^* = \sqrt{r}$  y  $u_3^* = -\sqrt{r}$ , ambos estables y el punto  $u_1^* = 0$  se convierte en inestable.

En el caso de  $h \neq 0$  ( $q \neq 0$  y  $e \neq 0$ ), aparece el fenómeno de una bifurcación tridente super-crítica imperfecta. En dicho caso, la constante  $h$  es un parámetro de perturbación del sistema que rompe la simetría. Ahora el comportamiento del sistema pasa a depender de dos parámetros:  $h = \frac{1}{\alpha}e$  y  $r = -4 + 4q$ , con  $\alpha = (2q^{\frac{1}{2}})^{-1}$ . Los puntos fijos se encuentran donde se intersectan  $f(u) = ru - u^3$  y  $g(u) = h$ . O sea:

$$\underbrace{ru - u^3}_{f(u)} + \underbrace{h}_{g(u)} = 0 \Rightarrow ru - u^3 = -h \Rightarrow f(u) = -g(u)$$

En el siguiente gráfico se muestra la dinámica del sistema para  $r < 0 \Rightarrow 0 < q < 1$  (izquierda) y  $r > 0 \Rightarrow 1 < q \leq 5$  (derecha).

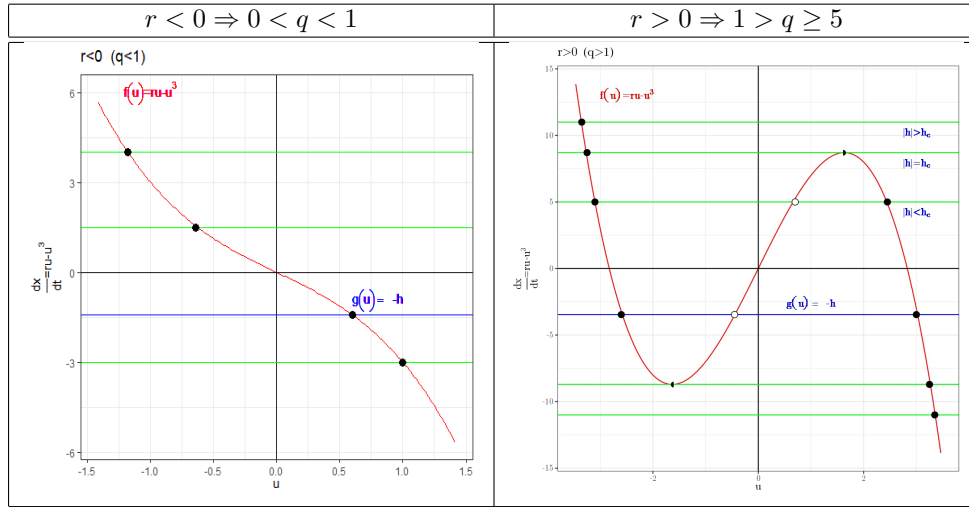


Figura 1: Bifurcación tridente super-crítica imperfecta.

En el caso  $r < 0 \Rightarrow q < 1$  ambas funciones se intersectan siempre en un punto, no importa el valor de  $-h$ . Dicho punto fijo es siempre estable. En el gráfico de la Figura 1 (izquierda) se muestra en la recta azul  $h = 1,414214$  con  $q = \frac{1}{2}$  [ $\Rightarrow r = -2$ ] y  $e = 1$ , cuya intersección es el punto fijo  $u^* \approx 0,56$ . Si  $q = 1 \Rightarrow r = 0$ ,  $f(u) = -u^3$ . También hay un punto fijo en  $-u^3 + h = 0 \Rightarrow u^3 = h \Rightarrow u^* = h^{\frac{1}{3}}$  ( $h > 0$ ). Como  $f^{(1)}(u) = -3u^2$ , evaluada en  $u = u^*$  es:  $f^{(1)}(u^*) = -3h^{\frac{2}{3}} < 0$ , el punto fijo también es estable.

En lo que atañe al caso  $r > 0 \Rightarrow q > 1$ , puede haber un punto fijo o tres, dependiendo del punto crítico que intersecta con  $h_c(r)$ . En el punto crítico, la función  $g(u)$  es tangente a  $f(u)$  y, dado que allí hay un punto máximo o mínimo,  $f^{(1)}(u) = 0$ . La condición de tangencia establece que  $f^{(1)}(u) = g^{(1)}(u)$ . Con lo cual se tiene:

$$f^{(1)}(u) = r - 3u^2; g^{(1)}(u) = 0; \Rightarrow f^{(1)}(u) = g^{(1)}(u) \Leftrightarrow r - 3u^2 = 0 \Leftrightarrow u_c^* = \pm\sqrt{\frac{r}{3}}.$$

Luego en dicho punto crítico  $h_c(r)$  resulta:

$$h_c(r) = ru - u^3 = r\sqrt{\frac{r}{3}} - \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)r\sqrt{\frac{r}{3}} = \frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}$$

Según se trate del máximo o del mínimo de  $f(u)$ , se tendrá:  $h = \pm h_c(r) = \frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}$ . Luego en los puntos  $(\pm u_c^*, \pm h_c(r)) = (\pm\sqrt{\frac{r}{3}}, \pm\frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}})$  se lleva a cabo una bifurcación *saddle node*. Se tienen los casos:

condición	puntos fijos	estabilidad
$ h  > h_c$	un punto fijo	estable
$ h  < h_c$	tres puntos fijos	dos estables y uno inestable
$ h  = h_c$	punto fijo crítico $u_c^*$	<i>saddle node</i>

Cuadro 3: Puntos fijos para:  $r > 0 \Rightarrow q > 1$

Mírese la Figura 1 a la derecha, comenzando desde arriba. Cuando  $|h| > h_c = \frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}$ , hay un único punto fijo estable. Luego en  $|h| = h_c$  se produce una bifurcación *saddle node*. Y a partir de allí, en  $|h| < h_c$  hay dos puntos fijos más, uno inestable y otro estable. Los puntos estables se encuentran a ambos lados del inestable pero no a distancia simétrica. En consecuencia se ha obtenido el resultado de una bifurcación tridente super-crítica pero a través de una bifurcación *saddle-node*. En la Figura 1,  $h = 3,464102$  (recta en azul),  $r = 8$ ,  $q = 3$ ,  $e = 1$ ; la intersección con la recta azul muestra los tres puntos fijos:  $u_1^* \approx -2,58$  (estable),  $u_2^* \approx -0,44$  (inestable) y  $u_3^* \approx 3,02$  (estable).

### 3.2. Ejemplo.

El parámetro de sesgo  $e$  se calcula de la siguiente manera.

1. Se usa la medida de Jaccard para calcular la distancia entre las variables de cada contexto de la tabla 1 y las mismas variables en la instancia en cuestión. No se incluye la similaridad consigo misma. El índice de Jaccard mide la similitud entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ . Es la cardinalidad de la intersección entre ambos conjuntos, dividido por la cardinalidad de su unión<sup>7</sup>:  $J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|}$ . La distancia de Jaccard es  $d_{jaccard} = 1 - J(A, B) \in [0, 1]$ , siendo cero si ambas variables coinciden en todos los valores de las variables que comparten. Por lo tanto:  $m_i = J(\text{instancia}, \text{contexto})$ ;  $i = 1, \dots, 4$ .
2. Se calcula un *kernel* gaussiano como:  $K = \exp\left\{-\frac{1}{2\text{error}_{antes}} [\text{mediana}(m_1 + \dots + m_4)]^2\right\}$ ; donde  $\text{error}_{antes}$  es la proporción de errores hasta la instancia anterior.
3. Se calcula el percentil correspondiente a  $K$ , bajo una distribución logística truncada entre  $-1$  y  $1$ , centrada en  $0$  y con escala  $1$  (o sea, con  $P(X < -1) = 0$ ,  $P(X < 0) = 0,5$  y  $P(X < 1) = 1$ ). Este es el valor de  $x$  al cual se sesga el modelo.
4. Dados  $t, q \in [0, 5]$ , se corre el modelo hasta  $t = q = 5$  (partiendo de  $x(0) = -1$ ) y se declara “error” si el valor final de  $x(t) > s$ . En caso contrario se declara “correcto”.  $s$  es una barrera que declara cuán cerca es necesario estar del atractor “error”  $x = 1$ . Se lo parametrizó mediante el error cuadrático de predicción:  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (p_{sim,i} - p_{error,i})^2}$ , donde  $p_{sim}$  es la proporción de instancias marcadas como “error” de la simulación (o sea, aquellas en donde gana el atractor “error”) y  $p_{real}$  la proporción de errores real, para cada aprendiz. Se elige el valor de  $\theta$  con  $RMSE$  mínimo. Se obtuvo  $s = 0,89$ .

Se ilustra el procedimiento con la instancia errónea “muchas lugares” [SONIA, sesión 4, línea 56]. La instancia posee las siguientes variables: Mod = “2”; Fabs = “0”; FamLex = “1”; Epen = “1”; Morf = “2”; Est1 = “0”; Eest2 = “0”; Est5 = “0”. Además el error hasta la instancia anterior es  $\text{error}_{antes} = 0,214$ . Entonces el conjunto de valores de la instancia es  $A = \{0, 1, 0, 0\}$  y el del último contexto es  $B = \{1, 1, 1, 1\}$ ; y  $|A \cap B| = 1$ ,  $|A \cup B| = 4$ . El índice de Jaccard para el último contexto es  $J(A, B) = \frac{1}{4} = 0,25$ ; con lo cual  $m_4 = 1 - J(A, B) = 0,75$ . Para el resto de los contextos son:  $m_1 = 0,33$ ,  $m_2 = 0,5$ ,  $m_3 = 0,22$ . Luego se calcula el kernel gaussiano como:  $K = \frac{1}{2(0,214)} e^{-[\text{mediana}(0,33; 0,5; 0,22; 0,75)]^2} \approx 0,67$ . Y su percentil bajo la distribución logística truncada es  $qlogis(0,67) = 0,317$ ; y por tanto:  $e = 0,317$ . Como se observa en la Figura que sigue, en  $q = 0$ , hay un solo atractor con máximo aproximadamente en  $0$ . Luego se comienzan a formar dos atractores. Eventualmente el sistema termina en  $x(t = 5) = 0,947$ . Como  $x(t = 5) > 0,89$ , se declara “error”.

<sup>7</sup>Dados dos vectores  $A$  y  $B$  con la misma cantidad de elementos; el índice se calcula como:  $J(A, B) = \text{sum}(A \times B) / (\text{sum}(A^2) + \text{sum}(B^2) - \text{sum}(A \times B))$ .

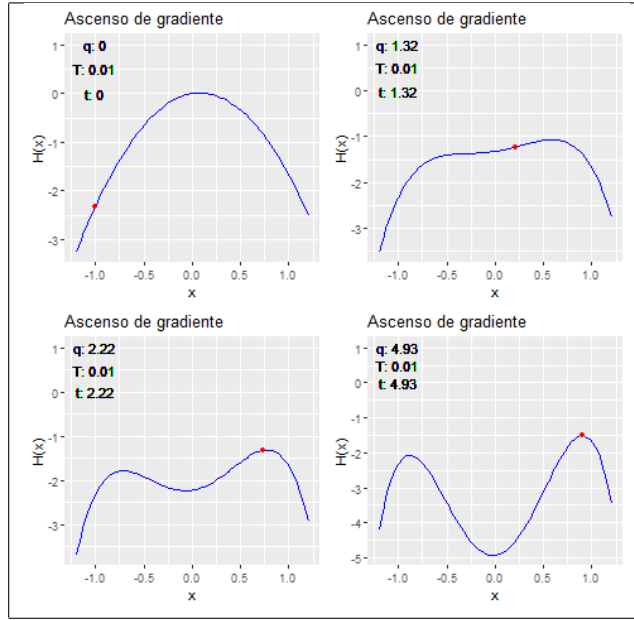


Figura 2: Ascenso de gradiente de armonía para la instancia “muchas lugares” [SONIA, sesión 4, línea 56]; según  $q = 0$  (arriba izquierda),  $q = 1,32$  (arriba derecha),  $q = 2,22$  (abajo izquierda),  $q = 4,93$  (abajo derecha).

#### 4. Comparación de simulaciones con datos reales.

Las siguientes Figuras muestra gráficos que comparan los datos reales y los de la simulación respecto de la proporción de errores en la serie temporal de sesiones.

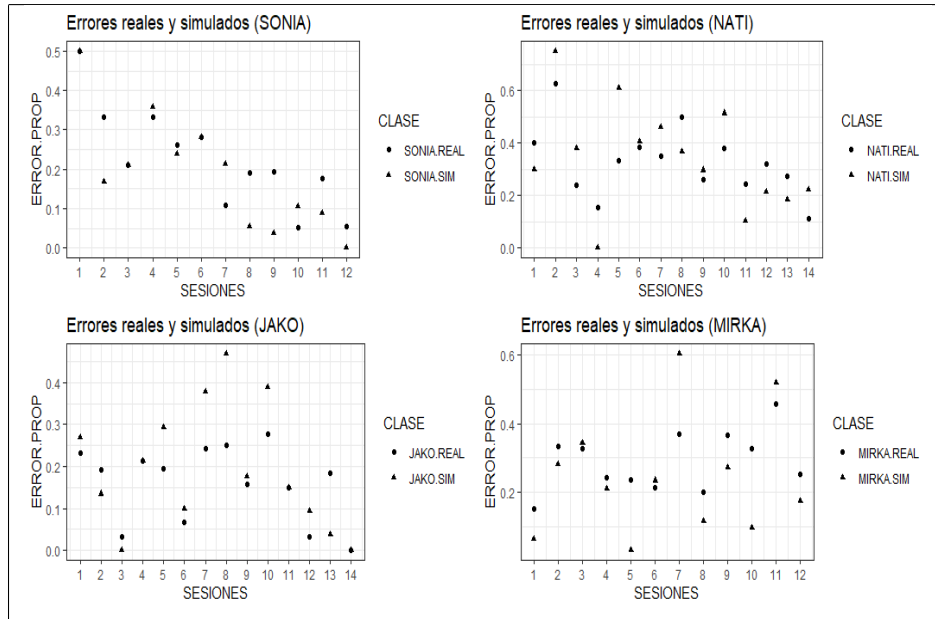


Figura 3: Modelo de Lokta-Volterra. Comparación entre proporción de errores predicha por el modelo (SIM) y proporción de errores en los datos (REAL), según sesiones

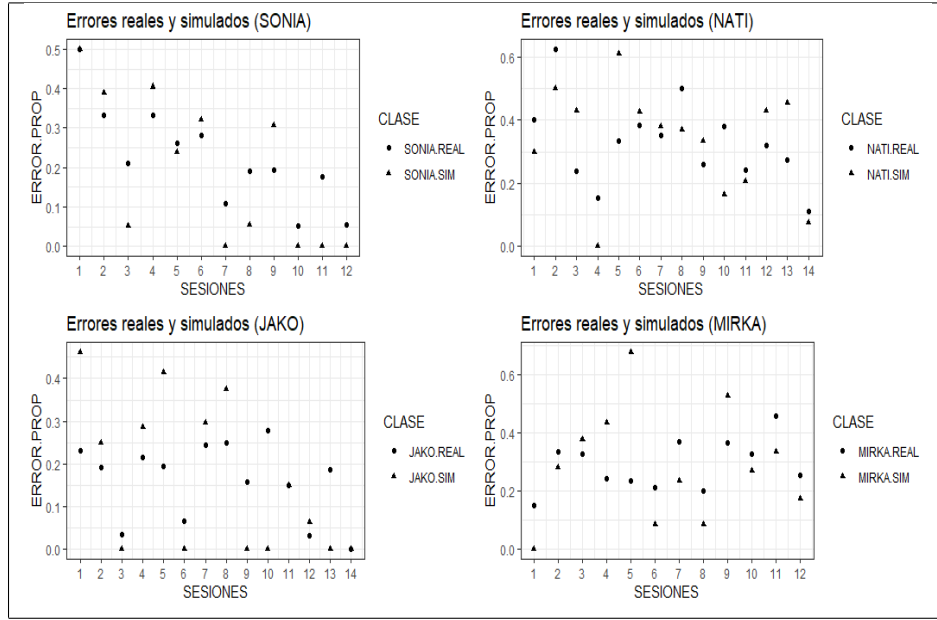


Figura 4: Modelo basado en dinámica del replicador. Comparación entre proporción de errores predicha por el modelo (SIM) y proporción de errores en los datos (REAL), según sesiones

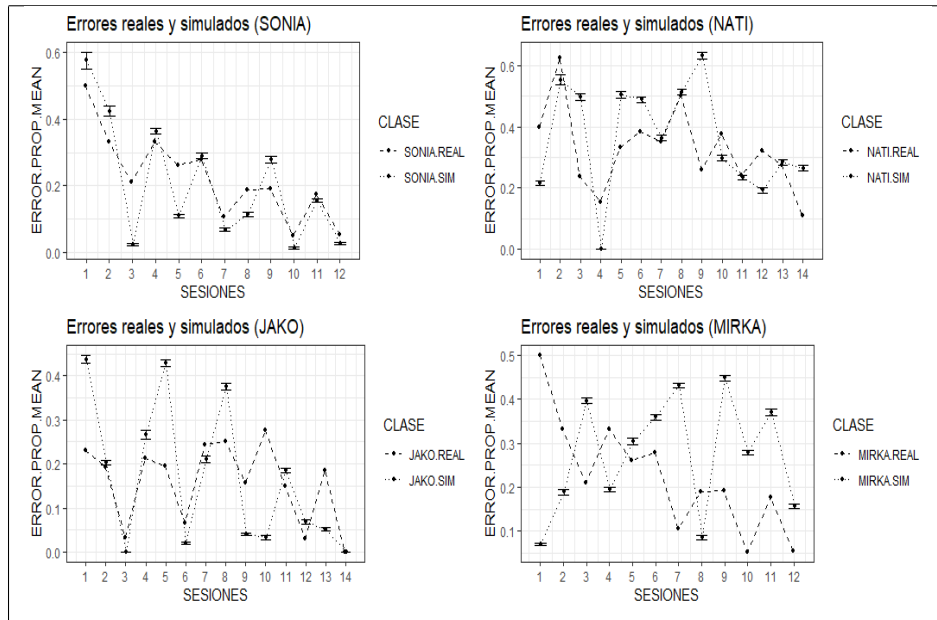


Figura 5: Modelo basado en ascenso de gradiente de armonía (50 simulaciones). Comparación entre proporción media de errores predicha por el modelo (SIM) y proporción de errores en los datos (REAL), según sesiones. Las barras indican el error estándar.

## Referencias

- Murray, James D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. 3.<sup>a</sup> ed. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer.
- Weibull, Jörgen W. (1997). *Evolutionary game theory*. MIT Press.