

## Práctica N° 3 - Demostración en Lógica Proposicional

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

### SEMÁNTICA

#### Ejercicio 1

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (fórmulas):

- |  |   |
|--|---|
| I. $(\neg P \vee Q)$   | V. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q))$   |
| II. $(P \vee (S \wedge T) \vee Q)$                           | VI. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q)) \Leftrightarrow (P \vee (S \wedge T) \vee Q)$ |
| III. $\neg(Q \vee S)$  | VII. $(\neg Q \wedge \neg S)$   |
| IV. $(\neg P \vee S) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg S)$ |   |

cuando el valor de verdad de  $P$  y  $Q$  es V, mientras que el de  $S$  y  $T$  es F.

#### Ejercicio 2

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos  $\neg$  (negación),  $\wedge$  (conjunción),  $\vee$  (disyunción),  $\Rightarrow$  (implicación) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos  $\neg$  y  $\vee$ . **Sugerencia:** hacer inducción en la estructura de la fórmula.

#### Ejercicio 3

Sean  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\zeta$  proposiciones tales que  $\tau \Rightarrow \sigma$  es tautología y  $\rho \Rightarrow \zeta$  es contradicción. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias y demostrarlo:

- I.  $(\tau \Rightarrow \sigma) \vee (\rho \Rightarrow \zeta)$
- II.  $(\tau \Rightarrow \rho) \vee (\sigma \Rightarrow \zeta)$
- III.  $(\rho \Rightarrow \sigma) \vee (\zeta \Rightarrow \sigma)$

#### Ejercicio 4

Probar que cualquier fórmula que sea una tautología contiene un  $\neg$  o una  $\Rightarrow$ .

### DEDUCCIÓN NATURAL

#### Ejercicio 5 ★

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula  $\sigma$  es un teorema si y sólo si vale  $\vdash \sigma$ :

- |  |  |
|--|--|
| ✓ I. <i>Modus ponens</i> relativizado:<br>$(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau$ | ✓ VII. de Morgan (I): $\neg(\rho \vee \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$  |
| ✓ II. Reducción al absurdo: $(\rho \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\rho$  | VIII. de Morgan (II): $\neg(\rho \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \vee \neg\sigma)$ . Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos. |
| ✓ III. Introducción de la doble negación: $\rho \Rightarrow \neg\neg\rho$  | IX. Conmutatividad ( $\wedge$ ): $(\rho \wedge \sigma) \Rightarrow (\sigma \wedge \rho)$   |
| ✓ IV. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg\rho \Rightarrow \neg\rho$   | X. Asociatividad ( $\wedge$ ): $((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \Leftrightarrow (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau))$   |
| ✓ V. Contraposición: $(\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg\sigma \Rightarrow \neg\rho)$   | XI. Conmutatividad ( $\vee$ ): $(\rho \vee \sigma) \Rightarrow (\sigma \vee \rho)$   |
| ✓ VI. Adjunción: $((\rho \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Leftrightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)$  | XII. Asociatividad ( $\vee$ ): $((\rho \vee \sigma) \vee \tau) \Leftrightarrow (\rho \vee (\sigma \vee \tau))$   |

¿Encuentra alguna relación entre teoremas de adjunción, asociatividad y conmutatividad con algunas de las propiedades demostradas en la práctica 2?

### Ejercicio 6 ★

Demostrar en deducción natural que vale  $\vdash \sigma$  para cada una de las siguientes fórmulas. Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

- |  |   |
|--|---|
| I. Absurdo clásico: $(\neg\tau \Rightarrow \perp) \Rightarrow \tau$              | V. Contraposición clásica: $(\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$          |
| II. Ley de Peirce: $((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$ | VI. Análisis de casos: $(\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$ |
| III. Tercero excluido: $\tau \vee \neg\tau$                                      | VII. Implicación vs. disyunción: $(\tau \Rightarrow \rho) \Leftrightarrow (\neg\tau \vee \rho)$           |
| IV. Consecuencia milagrosa: $(\neg\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$       |   |

### Ejercicio 7

Probar las siguientes propiedades:

- I. **Debilitamiento.** Si  $\Gamma \vdash \sigma$  es válido entonces  $\Gamma, \tau \vdash \sigma$  es válido.  
Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.
- II. **Regla de corte.** Si  $\Gamma, \tau \vdash \sigma$  es válido y  $\Gamma \vdash \tau$  es válido, entonces  $\Gamma \vdash \sigma$  es válido.

### Ejercicio 8

Si  $[\tau_1, \dots, \tau_n]$  es una lista de fórmulas, definimos la notación  $[\tau_1, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$  inductivamente:

$$\begin{aligned} ([\ ] \Rightarrow^* \sigma) &= \sigma \\ ([\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) &= \tau_1 \Rightarrow ([\tau_2, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) \end{aligned}$$

Probar por inducción en  $n$  que  $\tau_1, \dots, \tau_n \vdash \sigma$  es válido si y sólo si  $[\tau_1, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$  es válido.

### Ejercicio 9

Probar los siguientes teoremas:

- I.  $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow P)$
- II.  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$

### Ejercicio 10

Demostrar las siguientes tautologías utilizando deducción natural.

- I.  $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- II.  $(R \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((R \wedge Q) \Rightarrow P)$
- III.  $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg(R \wedge Q)$

## EJERCICIOS EXTRA DE DEDUCCIÓN NATURAL

### Ejercicio 11

Probar que los siguientes secuentes son válidos sin usar principios de razonamiento clásicos:

- |   |  |
|---|--|
| I. $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$            | VIII. $Q \Rightarrow R \vdash (P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)$ |
| II. $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$            | IX. $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$                 |
| III. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q), P \vdash Q$                  | X. $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$   |
| IV. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$      | XI. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$  |
| V. $\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow P$                              | XII. $\neg P \vee Q \vdash P \Rightarrow Q$                      |
| VI. $P \Rightarrow \neg Q, Q \vdash \neg P$                         | XIII. $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \vdash \neg P$      |
| VII. $P \Rightarrow Q \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge R)$ | XIV. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P, \neg R \vdash \neg Q$  |

### Ejercicio 12

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

- |   |  |
|---|--|
| I. $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R, \neg R, P \vdash Q$                                      | VII. $P \Rightarrow (Q \wedge R) \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$    |
| II. $\neg P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow P$  | VIII. $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow (Q \wedge R)$   |
| III. $P \vee Q \vdash R \Rightarrow (P \vee Q) \wedge R$                                      | IX. $P \vee (P \wedge Q) \vdash P$   |
| IV. $(P \vee (Q \Rightarrow P)) \wedge Q \vdash P$  | X. $P \Rightarrow (Q \vee R), Q \Rightarrow S, R \Rightarrow S \vdash P \Rightarrow S$ |
| V. $P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)$            | XI. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$                        |
| VI. $P \Rightarrow Q \vdash ((P \wedge Q) \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow (P \wedge Q))$ |  |

### Ejercicio 13

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

- |  |  |
|--|--|
| I. $\neg P \Rightarrow \neg Q \vdash Q \Rightarrow P$                      | VI. $\neg(\neg P \vee Q) \vdash P$                                 |
| II. $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$                           | VII. $\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$ |
| III. $\neg P, P \vee Q \vdash Q$   | VIII. $P \wedge Q \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$                 |
| IV. $P \vee Q, \neg Q \vee R \vdash P \vee R$                              | IX. $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$              |
| V. $P \wedge \neg P \vdash \neg(R \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)$ |  |