Práctica N$^{\text{o}}$ 5 - Inferencia de tipos

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Gramáticas a tener en cuenta:

- Términos **anotados**
  $M ::= x \mid \lambda x\!:\!\sigma.M \mid M\,M \mid \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M$
  $\mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(M) \mid \mathsf{pred}(M) \mid \mathsf{isZero}(M) \mid \mu x\!:\sigma.M$

  Donde la letra x representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$
- Términos **sin anotaciones**
  $U ::= x \mid \lambda x.U \mid U\ U \mid \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{if}\ U\ \mathsf{then}\ U\ \mathsf{else}\ U \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(U) \mid \mathsf{pred}(U) \mid \mathsf{isZero}(U) \mid \mu x.U$
- Tipos
  $\tau ::= \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid \tau \to \tau \mid X_n$
  Donde n es un número natural, de tal modo que X_n representa una *variable de tipos* arbitraria tomada de un conjunto $\mathfrak{T} = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$.
  Nota: también podemos referirnos a las variables de tipos como *incógnitas*.

Ejercicio 1

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que lo sean, indicar a qué gramática pertenecen (tipos, términos anotados o términos sin anotaciones).

I. $\lambda x\!: \mathsf{Bool}.\mathsf{succ}(x)$
II. $\lambda x.\mathsf{isZero}(x)$
III. $X_1 \to \sigma$
IV. $\mathit{erase}(f\ y)$
V. X_1
VI. $X_1 \to (\mathsf{Bool} \to X_2)$
VII. $\lambda x\!: X_1 \to X_2.\,\mathsf{if\ zero\ then\ True\ else\ zero\ succ(True)}$
VIII. $\mathit{erase}(\lambda f\!: \mathsf{Bool} \to \mathsf{s}.\lambda y\!: \mathsf{Bool}.f\ y)$

Ejercicio 2

Determinar el resultado de aplicar la sustitución S a las siguientes expresiones

I. $S = \{X_1 := \mathsf{Nat}\}$ $\quad S(\{x : X_1 \to \mathsf{Bool}\})$
II. $S = \{X_1 := X_2 \to X_3,\ X_4 := \mathsf{Bool}\}$ $\quad S(\{x : X_4 \to \mathsf{Bool}\}) \vdash S(\lambda x\!: X_1 \to \mathsf{Bool}.x)\!: S(\mathsf{Nat} \to X_2)$

Ejercicio 3

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* ("most general unifier").

$X_1 \to X_2$	Nat	$X_2 \to \mathsf{Bool}$	$X_3 \to X_4 \to X_5$
X_1	$\mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}$	$(\mathsf{Nat} \to X_2) \to \mathsf{Bool}$	$\mathsf{Nat} \to X_2 \to \mathsf{Bool}$

Ejercicio 4

Decidir, utilizando el método del árbol, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

I. $\lambda z.$ if z then zero else succ(zero)

II. $\lambda y.$ succ(($\lambda x.x$) y)

III. $\lambda x.$ if isZero(x) then x else (if x then x else x)

IV. $\lambda x.\lambda y.$ if x then y else succ(zero)

V. if True then ($\lambda x.$zero)zero else ($\lambda x.$zero)False

VI. ($\lambda f.$ if True then $f$zero else f False) ($\lambda x.$ zero)

VII. $\lambda x.\lambda y.\lambda z.$ if z then y else succ(x)

Ejercicio 5 ★

Utilizando el árbol de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ z\ x\ y\ z$
- $\lambda x.\ x\ (w\ (\lambda y.w\ y))$
- $\lambda x.\lambda y.\ xy$
- $\lambda x.\lambda y.\ yx$
- $\lambda x.(\lambda x.\ x)$
- $\lambda x.(\lambda y.\ y)x$
- $(\lambda z.\lambda x.\ x\ (z\ (\lambda y.\ z)))$ True

Ejercicio 6 *(Numerales de Church)*

Indicar tipos σ y τ apropiados de modo que los términos de la forma $\lambda y : \sigma.\lambda x : \tau.y^n(x)$ resulten tipables para todo n natural. El par (σ, τ) debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación: $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$. *Sugerencia:* empezar haciendo inferencia para $n = 2$ – es decir, calcular $\mathbb{W}(\lambda y.\lambda x.y(yx))$ – y generalizar el resultado.

Ejercicio 7

I. Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión: $\lambda y.(x\ y)\ (\lambda z.x_2)$

II. Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.

III. ¿Qué ocurriría si x_2 fuera x?

Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como: $\tau ::= \ldots \mid \tau \times \tau$

Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \ldots \mid \langle M, M\rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \sigma \times \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \tau}$$

Se extiende el algoritmo $\mathbb{W}$ con las siguientes reglas:

$\mathbb{W}(\langle U_1, U_2\rangle) \stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \vdash S\langle M, N\rangle : S(\sigma \times \tau)$
donde:

- $\mathbb{W}(U_1) = \Gamma_1 \vdash M : \sigma$
- $\mathbb{W}(U_2) = \Gamma_1 \vdash N : \tau$
- $S =$mgu $\{\rho \stackrel{?}{=} \phi \mid x : \rho \in \Gamma_1 \wedge x : \phi \in \Gamma_2\}$

$\mathbb{W}(\pi_1(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \vdash S\pi_1(M) : S\sigma$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \rho$
- $S =$mgu $\{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \times \tau\}$

$\mathbb{W}(\pi_2(U)) \stackrel{def}{=} S\Gamma \vdash S\pi_2(M) : S\tau$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \rho$
- $S =$mgu $\{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \times \tau\}$

I. Tipar la expresión $(\lambda f.\langle f,\underline{2}\rangle)\ (\lambda x.x\ \underline{1})$ utilizando la versión extendida del algoritmo.

II. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo.
$(\lambda f.\langle f\ \underline{2},\ f\ \mathsf{True}\rangle)\ (\lambda x.x)$
Mostrar en qué punto el algoritmo falla y por qué motivo.

Ejercicio 9 ★

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \tau & ::= & \dots \mid \tau + \tau \\ M & ::= & \dots \mid \mathsf{left}_\tau(M) \mid \mathsf{right}_\tau(M) \mid \mathsf{case}\ M\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow M \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow M \end{array}$$

$\mathbb{W}(\mathsf{left}(U)) \stackrel{def}{=} \Gamma \vdash \mathsf{left}_X(M) : \sigma + X$

donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \sigma$
- X variable fresca.

$\mathbb{W}(\mathsf{right}(U)) \stackrel{def}{=} \Gamma \vdash \mathsf{right}_X(M) : X + \tau$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \tau$
- X variable fresca.

$\mathbb{W}(\mathsf{case}\ U_1\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow U_2 \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow U_3) \stackrel{def}{=}$
$S\Gamma_1 \cup S\Gamma_{2'} \cup S\Gamma_{3'} \vdash S(\mathsf{case}\ M_1\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow M_2 \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow M_3) : S\tau_2$
donde:

- $\mathbb{W}(U_1) = \Gamma_1 \vdash M_1 : \tau_1$
- $\mathbb{W}(U_2) = \Gamma_2 \vdash M_2 : \tau_2$
- $\mathbb{W}(U_3) = \Gamma_3 \vdash M_3 : \tau_3$
- $\tau_x = \begin{cases} \alpha \text{ si } x : \alpha \in \Gamma_2 \\ \text{Variable fresca en otro caso} \end{cases}$
- $\tau_y = \begin{cases} \beta \text{ si } y : \beta \in \Gamma_3 \\ \text{Variable fresca en otro caso} \end{cases}$
- $\Gamma_{2'} = \Gamma_2 \ominus \{x\}$
- $\Gamma_{3'} = \Gamma_3 \ominus \{y\}$
- $S = $ mgu $(\{\tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_x + \tau_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup \{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \mid z : \rho \in \Gamma_i \wedge z : \sigma \in \Gamma_j \wedge i, j \in \{1, 2', 3'\}\})$

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

I. $\mathsf{case}\ \mathsf{left}(\underline{1})\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow \mathsf{True}$

II. $\mathsf{case}\ \mathsf{right}(z)\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

III. $\mathsf{case}\ \mathsf{right}(\mathsf{zero})\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

IV. $\mathsf{case}\ x\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow \mathsf{isZero}(x) \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

V. $\mathsf{case}\ \mathsf{left}(z)\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

VI. $\mathsf{case}\ z\ \mathsf{of}\ \mathsf{left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \mathsf{right}(y) \rightsquigarrow y$

Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} \tau & ::= & \ldots \mid [\tau] \\ M & ::= & \ldots \mid [\,]_\tau \mid M :: M \mid \mathsf{foldr}\, M\, \mathsf{base} \hookrightarrow M;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow M \end{array}$$

$\mathbb{W}([\,]) \overset{def}{=} \emptyset \vdash [\,]_X : [X]$ con X variable fresca

$\mathbb{W}(U :: V) \overset{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \vdash S(M :: N) : S\tau$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \vdash M : \sigma$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \vdash N : \tau$
- $S = \text{mgu}\ (\{\tau \overset{?}{=} [\sigma]\} \cup \{\rho \overset{?}{=} \phi \mid x : \rho \in \Gamma_1 \wedge x : \phi \in \Gamma_2\})$

$\mathbb{W}(\mathsf{foldr}\, U\, \mathsf{base} \hookrightarrow V;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow W) \overset{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_{3'} \vdash S(\mathsf{foldr}\, M\, \mathsf{base} \hookrightarrow N;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow O) : S\sigma_2$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \vdash M : \sigma_1$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \vdash N : \sigma_2$
- $\mathbb{W}(W) = \Gamma_3 \vdash O : \sigma_3$
- $\Gamma_{3'} = \Gamma_3 \ominus \{h, r\}$
- $\tau_h = \begin{cases} \alpha \text{ si } h : \alpha \in \Gamma_3, \\ \text{variable fresca si no} \end{cases}$
- $\tau_r = \begin{cases} \beta \text{ si } r : \beta \in \Gamma_3, \\ \text{variable fresca si no} \end{cases}$
- $S = \text{mgu}\ (\{\sigma_1 \overset{?}{=} [\tau_h], \sigma_2 \overset{?}{=} \sigma_3, \sigma_3 \overset{?}{=} \tau_r\} \cup \{\rho \overset{?}{=} \sigma \mid x : \rho \in \Gamma_i \wedge x : \sigma \in \Gamma_j \wedge i, j \in \{1, 2, 3'\}\})$

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

I. $\mathsf{foldr}\ \ x :: [\,]\ \ \mathsf{base} \hookrightarrow [\,];\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow \mathsf{isZero}(h) :: r$

II. $\mathsf{foldr}\ \ (\lambda x.\mathsf{succ}(x)) :: [\,]\ \ \mathsf{base} \hookrightarrow [\,];\ \mathsf{rec}(x, r) \hookrightarrow \mathsf{if}\ p\ x\ \mathsf{then}\ x :: r\ \mathsf{else}\ r$

III. $\mathsf{foldr}\ \ x\ \ \mathsf{base} \hookrightarrow x;\ \mathsf{rec}(h, r) \hookrightarrow \mathsf{isZero}(h) :: r$

IV. $\mathsf{foldr}\ \ x\ \ \mathsf{base} \hookrightarrow \mathsf{True};\ \mathsf{rec}(h, x) \hookrightarrow x$