

Práctica N° 3 - Demostración en Lógica Proposicional

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

SEMÁNTICA

Ejercicio 1

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (fórmulas):

- | | |
|--|---|
| I. $(\neg P \vee Q)$ | V. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q))$ |
| II. $(P \vee (S \wedge T) \vee Q)$ | VI. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q)) \Leftrightarrow (P \vee (S \wedge T) \vee Q)$ |
| III. $\neg(Q \vee S)$ | VII. $(\neg Q \wedge \neg S)$ |
| IV. $(\neg P \vee S) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg S)$ | |

cuando el valor de verdad de P y Q es V, mientras que el de S y T es F.

Ejercicio 2

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos \neg (negación), \wedge (conjunción), \vee (disyunción), \Rightarrow (implicación) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos \neg y \vee . **Sugerencia:** hacer inducción en la estructura de la fórmula.

Ejercicio 3

Sean τ , σ , ρ y ζ proposiciones tales que $\tau \Rightarrow \sigma$ es tautología y $\rho \Rightarrow \zeta$ es contradicción. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias y demostrarlo:

- I. $(\tau \Rightarrow \sigma) \vee (\rho \Rightarrow \zeta)$
- II. $(\tau \Rightarrow \rho) \vee (\sigma \Rightarrow \zeta)$
- III. $(\rho \Rightarrow \sigma) \vee (\zeta \Rightarrow \sigma)$

Ejercicio 4

Probar que cualquier fórmula que sea una tautología contiene un \neg o una \Rightarrow .

DEDUCCIÓN NATURAL

✓ Ejercicio 5 ★

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula σ es un teorema si y sólo si vale $\vdash \sigma$:

- | | |
|--|--|
| ✓ I. <i>Modus ponens</i> relativizado:
$(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau$ | ✓ VII. de Morgan (I): $\neg(\rho \vee \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$ |
| ✓ II. Reducción al absurdo: $(\rho \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\rho$ | ✓ VIII. de Morgan (II): $\neg(\rho \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \vee \neg\sigma)$. Para la dirección \Rightarrow es necesario usar principios de razonamiento clásicos. |
| ✓ III. Introducción de la doble negación: $\rho \Rightarrow \neg\neg\rho$ | ✓ IX. Conmutatividad (\wedge): $(\rho \wedge \sigma) \Rightarrow (\sigma \wedge \rho)$ |
| ✓ IV. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg\rho \Rightarrow \neg\rho$ | ✓ X. Asociatividad (\wedge): $((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \Leftrightarrow (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau))$ |
| ✓ V. Contraposición: $(\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg\sigma \Rightarrow \neg\rho)$ | ✓ XI. Conmutatividad (\vee): $(\rho \vee \sigma) \Rightarrow (\sigma \vee \rho)$ |
| ✓ VI. Adjunción: $((\rho \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Leftrightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)$ | ✓ XII. Asociatividad (\vee): $((\rho \vee \sigma) \vee \tau) \Leftrightarrow (\rho \vee (\sigma \vee \tau))$ |

¿Encuentra alguna relación entre teoremas de adjunción, asociatividad y conmutatividad con algunas de las propiedades demostradas en la práctica 2?

Ejercicio 6 ★

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas. Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

- | | |
|--|---|
| ✓ I. Absurdo clásico: $(\neg\tau \Rightarrow \perp) \Rightarrow \tau$ | ✓ V. Contraposición clásica: $(\neg\rho \Rightarrow \neg\tau) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho)$ |
| ✓ II. Ley de Peirce: $((\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$ | ✓ VI. Análisis de casos: $(\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\neg\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$ |
| 0 III. Tercero excluido: $\tau \vee \neg\tau$ | |
| ✓ IV. Consecuencia milagrosa: $(\neg\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$ | VII. Implicación vs. disyunción: $(\tau \Rightarrow \rho) \Leftrightarrow (\neg\tau \vee \rho)$ |

Ejercicio 7

Probar las siguientes propiedades:

- I. **Debilitamiento.** Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.
Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.
- II. **Regla de corte.** Si $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido y $\Gamma \vdash \tau$ es válido, entonces $\Gamma \vdash \sigma$ es válido.

Ejercicio 8

Si $[\tau_1, \dots, \tau_n]$ es una lista de fórmulas, definimos la notación $[\tau_1, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ inductivamente:

$$\begin{aligned} ([\] \Rightarrow^* \sigma) &= \sigma \\ ([\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) &= \tau_1 \Rightarrow ([\tau_2, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) \end{aligned}$$

Probar por inducción en n que $\tau_1, \dots, \tau_n \vdash \sigma$ es válido si y sólo si $[\tau_1, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ es válido.

Ejercicio 9

Probar los siguientes teoremas:

- I. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow P)$
- II. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$

Ejercicio 10

Demostrar las siguientes tautologías utilizando deducción natural.

- I. $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
- II. $(R \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((R \wedge Q) \Rightarrow P)$
- III. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg(R \wedge Q)$

EJERCICIOS EXTRA DE DEDUCCIÓN NATURAL

Ejercicio 11

Probar que los siguientes secuentes son válidos sin usar principios de razonamiento clásicos:

- | | |
|---|--|
| I. $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$ | VIII. $Q \Rightarrow R \vdash (P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)$ |
| II. $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$ | IX. $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$ |
| III. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q), P \vdash Q$ | X. $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ |
| IV. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$ | XI. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$ |
| V. $\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow P$ | XII. $\neg P \vee Q \vdash P \Rightarrow Q$ |
| VI. $P \Rightarrow \neg Q, Q \vdash \neg P$ | XIII. $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \vdash \neg P$ |
| VII. $P \Rightarrow Q \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge R)$ | XIV. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P, \neg R \vdash \neg Q$ |

Ejercicio 12

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

- | | |
|---|--|
| I. $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R, \neg R, P \vdash Q$ | VII. $P \Rightarrow (Q \wedge R) \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ |
| II. $\neg P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow P$ | VIII. $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow (Q \wedge R)$ |
| III. $P \vee Q \vdash R \Rightarrow (P \vee Q) \wedge R$ | IX. $P \vee (P \wedge Q) \vdash P$ |
| IV. $(P \vee (Q \Rightarrow P)) \wedge Q \vdash P$ | X. $P \Rightarrow (Q \vee R), Q \Rightarrow S, R \Rightarrow S \vdash P \Rightarrow S$ |
| V. $P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)$ | XI. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$ |
| VI. $P \Rightarrow Q \vdash ((P \wedge Q) \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow (P \wedge Q))$ | |

Ejercicio 13

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

- | | |
|--|--|
| I. $\neg P \Rightarrow \neg Q \vdash Q \Rightarrow P$ | VI. $\neg(\neg P \vee Q) \vdash P$ |
| II. $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$ | VII. $\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$ |
| III. $\neg P, P \vee Q \vdash Q$ | VIII. $P \wedge Q \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$ |
| IV. $P \vee Q, \neg Q \vee R \vdash P \vee R$ | IX. $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$ |
| V. $P \wedge \neg P \vdash \neg(R \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)$ | |