# Práctica 6 - Lógica de primer orden -

**Ejercicio 1.** Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas para los siguientes lenguajes, en donde $f$ es un símbolo unario y $g$ es binario:

a. $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(n) = \sqrt{n}$, $g_I(n, m) = n + m$.

b. $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(n) = n^2$, $g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.

c. $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$g_I(n, m) = n^2 - n$, $c_I = d_I = 0$.

**Ejercicio 2.** En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados. Cuando sea posible determinar si el enunciado es verdadero o falso en la interpretación correspondiente.

a. $\forall x \forall y (P(x, y) \to \exists z((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$, donde $P$ y $Q$ son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa $x$ es un número racional.

b. $\forall x(Q(x) \to \exists y(R(y) \wedge P(y, x)))$, donde $P$ es un símbolo de predicado binario, $Q$ y $R$ son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x, y)$ significa $x$ nace en el día $y$, $Q_I(x)$ significa $x$ es un día, y $R_I(x)$ significa $x$ es un hombre libre.

c. $\forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \to P(f(x, y)))$, donde $Q$ y $P$ son símbolos de predicados unarios, $f$ es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa $x$ es par, $P_I(x)$ significa $x$ es impar, y $f_I(x, y) = x + y$.

**Ejercicio 3.** Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

a. Existen al menos dos elementos.

b. Existen exactamente dos elementos.

c. Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario $P$, escribir:

d. Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad $P$.

e. Si existe un elemento que cumple la propiedad $P$, es único.

f. Existe un elemento que cumple la propiedad $P$ y es único.

**Ejercicio 4.** Considerar un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario $f$. Escribir una fórmula $\varphi$ que cumpla $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $f_{\mathcal{A}}$ es inyectiva pero no sobreyectiva. ¿Es $\varphi$ satisfacible? ¿Es satisfacible por un modelo finito?

**Ejercicio 5.** * Sea $P$ un símbolo de relación unario y sea $f$ un símbolo de función binario. Para cada una de las fórmulas $\forall x \forall y\ f(x, y) = x$, $\exists x \forall y\ f(x, y) = y$, $\exists x(P(x) \wedge \forall y\ P(f(x, y)))$ hallar una interpretación que la satisfaga y otra que no la satisfaga.

**Ejercicio 6.** Decimos que un elemento $e$ del universo de una interpretación $\mathcal{I}$ es *distinguible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ con una sola variable libre $x$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi(x)[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

Dar un ejemplo de un lenguaje sin constantes y una interpretación de dicho lenguaje con universo infinito tal que todo elemento del universo de la interpretación dada sea distinguible.

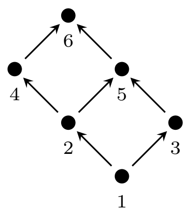
**Ejercicio 7.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$$

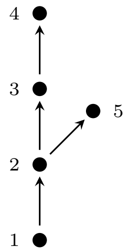
donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

**Ejercicio 8.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles,

a)




b)




*Observación:* Estos esquemas se conocen como "Diagramas de Hasse" y la relación que describen es la menor relación reflexiva y transitiva que contiene a los pares explicitados en el diagrama. Por ejemplo, en a), se tienen los pares $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 6)$ entre otros aunque no estén explícitamente en el esquema.

**Ejercicio 9.** Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n + 1$ elementos, y tiene la propiedad que $n$ elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

**Ejercicio 10.** Dada una interpretación $\mathcal{I}$ con universo $A$, decimos que una relación $R \subseteq A^n$ es *expresable* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con $n$ variables libres tal que para toda valuacií $v$ cumpla $\mathcal{I} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[v]$ sii $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R$. Demostrar que las siguientes relaciones son expresables.

a. $\mathcal{I}_1 = \langle \mathbb{N}, *, = \rangle$ con $*$ el producto de naturales.
   $R_1 = \{(n, m) : n \text{ divide a } m\}$.
   $P_1 = \{n : n \text{ es primo}\}$.

b. $\mathcal{I}_2 = \langle \mathbb{N}, +, =, 0, 1 \rangle$ con $+$ la suma de naturales.
   $R_2 = \{(n, m) : n < m\}$.

c. $\mathcal{I}_3 = \langle L, \circ, = \rangle$ con $L$ el conjunto de todas las listas, $\circ$ la concatenación de listas.
   $R_3 = \{(a, b) : a \text{ es sublista de } b\}$.

**Ejercicio 11.** Decimos que una clase de modelos $\mathsf{K}$ es *definible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una sentencia $\varphi$ tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ y valuación $v$ cumpla $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ sii $\mathcal{I} \in \mathsf{K}$. Demostrar que las siguientes clases de modelos son definibles con su respectivo lenguaje.

a. $\mathcal{L}_0 = \{=\}$. $\mathsf{K}_0 = \emptyset$.

b. $\mathcal{L}_1 = \{=\}$. $\mathsf{K}_1 = \{$todas las interpretaciones$\}$.

c. $\mathcal{L}_2 = \{P, =\}$ con $P$ predicado binario. $\mathsf{K}_2 = \{\mathcal{I} : P^{\mathcal{I}}$ es reflexivo y transitivo$\}$.

d. $\mathcal{L}_3 = \{f, g, =\}$ con $f, g$ funciones unarias. $\mathsf{K}_3 = \{\mathcal{I} : \operatorname{Im} f^{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{Im} g^{\mathcal{I}}\}$.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.