Lógica y Computabilidad
Verano 2023
Primer Parcial

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

▷ Resolver cada ejercicio en **una hoja separada**. ▷ Poner nombre y LU en todas las hojas. ▷ Sólo puede usarse una hoja de apuntes personales. ▷ Se debe justificar **todas** las respuestas. ▷ El parcial se aprueba con al menos 2 ejercicios complementamente bien resueltos.	Nombre y Apellido: Libreta Universitaria:	Nota: Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4

Ejercicio 1. Dada una función $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ y k_1 y k_2 constantes, definimos la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h(0) &= k_1 \\ h(1) &= k_2 \\ h(t+2) &= g(\max\{h(t), h(t+1)\}, t+1) \end{aligned}$$

a) Demostrar que si g es primitiva recursiva, h también lo es.

b) Considerar la función g definida por:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

i. ¿Es g una función primitiva recursiva?

ii. **(opcional)**¿Existen valores de k_1 y k_2 para los cuales h es primitiva recursiva?

Ejercicio 2. a) Considerar la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Escribir un programa en el lenguaje $\mathcal{S}$ que compute f.

b) Sea P el siguiente pseudo-programa en el lenguaje $\mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} & Y \leftarrow X_1 \\ [A]\ & \text{IF} X_2 = 0 \ \text{ GOTO E} \\ & Y \leftarrow Y + 1 \\ & Y \leftarrow Y + 1 \\ & X_2 \leftarrow X_2 - 1 \\ & \text{GOTO A} \end{aligned}$$

Dar fórmulas para $\Psi_P^{(1)}, \Psi_P^{(2)}, \Psi_P^{(3)}$.

c) Sea P un programa en $\mathcal{S}$ que no tiene ninguna instrucción del tipo IF $V \neq 0$ GOTO L
Demostrar que $\Psi_P(x) \leq |\#(P) + 1|$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una función total $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$g_n(x) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } |x+1| = n \text{ y } \Phi_x(2023)\downarrow \text{ en exactamente } t \text{ pasos} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Siendo $g(n, x) = g_n(x)$, ¿es $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ una función computable?

Ejercicio 4. a) Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el siguiente conjunto:

$$A_k = \{z | \Phi_k(x) = z \text{ para algún } x \in \mathbb{N}\}$$

Luego, definimos $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

i. ¿Son todos los A_k computables? ¿Son todos los A_k c.e.?

ii. ¿Es A computable? ¿Es A un conjunto c.e.?

b) Decidir si el siguiente conjunto es computable, c.e. o co-c.e:

$$\{x : \Phi_x(0)\downarrow \text{ y } \Phi_x(0) = 314\}$$