Some Class
Random Examples

Your Name

Contents

Chapter 1

Question 1

Ejercicio 1. Mostrar que, dado un k fijo, la función constante $f(x) = k$ puede defnirse usando las funciones iniciales y composición (sin usar recursión primitiva).

Solution: Cualquier $k \in \mathbb{N}$ puede ser construido aplicando sucesivamente la funcion $s(x)$ a la funcion $n(x)$.

$$f(x) = s_k(x) = \underbrace{s(s(\ldots s(n(x))\ldots))}_{k \text{ veces}} \tag{1.1}$$

Ya que $s(n(x))$ es composicion de funciones primitivas, es primitiva recursiva. Razonando de forma inductiva, cada vez que aplicamos $s(x)$ a un cierto $s_{k-1}(x)$, obtenemos un $s_k(x)$ que de nuevo, por composicion, es primitiva recursiva.

Question 2

Ejercicio 2. Probar que las signicntes funciones son primitivas recursivas, mostrando que pueden obtenerse a partir des funciones iniciales usando composición y/o recursion primitiva:

$$f_1(x,y) = x + y \quad f_2(x,y) = x \cdot y \quad f_3(x,y) = x^y \quad f_4(x,y) = \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{y \text{ veces}}$$

$$g_1(x) = x \dot{-} 1 \quad g_2(x,y) = x \dot{-} y \quad g_3(x,y) = \max\{x,y\} \quad g_4(x,y) = \min\{x,y\}$$

$Observaciones$: Se asume que $f_4(x,0) = 1$. $\quad x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } y \leqslant x \\ 0 & \text{si } y > x \end{cases}$

Solution: $f_1(x,y) = x + y$

$$\begin{aligned} f_1(x,0) &= 0 = n(x) \\ f_1(x,y) &= \underbrace{((\ldots((0+1)+1)\ldots+1)+1)+1}_{y\ veces} \\ f_1(x,y) &= f_1(x,y-1)+1 \\ &= s(f_1(x,y-1)) \end{aligned}$$

Pero para que cierre la aridad con el esquema de recursion primitiva, debemos encontrar una funcion g tal que: $f_1(x,y) = g(f(x,y-1),x,y-1)$, esto se arregla tomando $g(x,y,z) = s(u_1^3(x,y,z))$ Entonces nos queda:

$$f_1(x,y) = g(f(x,y-1),x,y-1) = s(u_1^3(f(x,y-1),x,y-1)) \tag{1.2}$$

Solution: $f_2(x,y) = x.y$

$$\begin{aligned}
&f_2(x,0) = n(x)\\
&f_2(x,y) = f_2(x,y-1) + x = f_1(f_2(x,y-1),x)\\
&f_2(x,y) = f1(u_1^3(f_2(x,y-1),x,y-1),\ u_2^3(f_2(x,y-1),x,y-1))\\
&f_2(x,y) = g(f_2(x,y-1),x,y-1)
\end{aligned}$$

Con $g(x,y,z) = f_1(u_1^3(x,y,z), u_2^3(x,y,z))$, ya que g se obtiene por coposicion de funciones PR, entonces tambien es PR.

Solution: $f_3(x,y) = x^y$

$$\begin{aligned}
&f_3(x,0) = 1\\
&f_3(x,y) = f_3(x,y-1).x = f_2(f_3(x,y-1),x)\\
&f_3(x,y) = f_2(u_1^3(f_3(x,y-1),x,y-1), u_2^3(f_3(x,y-1),x,y-1))\\
&f_3(x,y) = g(f_3(x,y-1),x,y-1)
\end{aligned}$$

Con $g(x,y,z) = f_2(u_1^3(x,y,z), u_2^3(x,y,z))$, ya que g se obtiene por coposicion de funciones PR, entonces tambien es PR.

Solution: $f_4(x,y) = \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{y \text{ veces}}$

$$\begin{aligned}
&f_4(x,0) = 1\\
&f_4(x,y) = f_4(x,y-1)^x = f_3(f_4(x,y-1),x)\\
&f_4(x,y) = f_3(u_1^3(f_4(x,y-1),x,y-1), u_2^3(f_4(x,y-1),x,y-1))
\end{aligned}$$

Con $g(x,y,z) = f_3(u_1^3(x,y,z), u_2^3(x,y,z))$, ya que g se obtiene por coposicion de funciones PR, entonces tambien es PR.

Solution: $g_1(x) = x \dot{-} 1$

$$\begin{aligned}
&g_1(0) = n(x)\\
&g_1(x) = u_2^2(g_1(x), x-1)
\end{aligned}$$

Solution: $g_2(x,y) = x \dot{-} y$

$$\begin{aligned}
&g_2(x,0) = u_1^1(x)\\
&g_2(x,y) = g_2(x,y-1) - 1 = g_1(g_2(x,y-1))\\
&g_2(x,y) = g_1(u_1^3(g_2(x,y-1),x,y-1))\\
&g_2(x,y) = g(g_2(x,y-1),x,y-1)
\end{aligned}$$

Con $g(x,y,z) = g_2(u_1^3(x,y,z))$, ya que g se obtiene por coposicion de funciones PR, entonces tambien es PR.

Solution: $g_3(x,y) = \max\{x,y\}$

$$\begin{aligned}
&\max\{x,y\} = (x \leqslant y).y + \alpha(x \leqslant y).x\\
&\max\{x,y\} = f_2((x \leqslant y),y) + f_2(\alpha(x \leqslant y),y)\\
&\max\{x,y\} = f_1(\underbrace{f_2((x \leqslant y),y)}_{h_1}, \underbrace{f_2(\alpha(x \leqslant y),y)}_{h_2})
\end{aligned}$$

Las funciones α (negacion) y $\leqslant$ son las definidas en la clase teorica numero 2. Se puede probar por composicion que h_1 y h_2 son PR. Por lo tanto queda demostrado por composicion que g_3 tambien es PR.

Solution: $g_4(x, y) = \min\{x, y\}$

$$\min\{x, y\} = (x \leqslant y).x + \alpha(x \leqslant y).y$$
$$\min\{x, y\} = f_2((x \leqslant y).x) + f_2(\alpha(x \leqslant y), y)$$
$$\min\{x, y\} = f_1(\underbrace{f_2((x \leqslant y), y)}_{h_1}, \underbrace{f_2(\alpha(x \leqslant y), y)}_{h_2})$$

Las funciones α (negacion) y $\leqslant$ son las definidas en la clase teorica numero 2. Se puede probar por composicion que h_1 y h_2 son PR. Por lo tanto queda demostrado por composicion que g_3 tambien es PR.

Question 3

Ejercicio 3. Sea C_i la clase de funciones iniciales, es decir, aquella que contiene a:

$n(x) = 0 \qquad s(x) = x + 1 \qquad u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$

y sea C_c la (mínima) clase que extiende a C_i y se encuentra cerrada por composición, i.e., si $f, g_1, \ldots g_m$ están en C_c, entonces $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ también lo está.

a. Demostrar que para toda $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, f$ está en C_c sii existe $k \geqslant 0$ tal que, o bien sucede $f(x_1, \ldots, x_n) = k$, o bien para algún i fijo, se tiene $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i + k$.

b. Mostrar que existe una función primitiva recursiva que no está en C_c.

Solution: a)

($\rightarrow$)

Vamos a usar induccion estructural

Casos Base: Veamos que se cumple para las funciones iniciales

$$n(x) = 0, \quad k = 0$$
$$s(x) = x + 1, \quad k = 1$$
$$u_i^n(x_1, ..., x_n) = x_i + 0, \quad k = 0$$

Paso inductivo:

Sea $f \in C$, $f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x1, \ldots, x_n))$. Veamos que o bien $f(x_1, \ldots, x_n) = k$, o bien $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i + k$

Las funciones que componen a h, cumplen con la HI. Por lo tanto, separemos en casos:

Caso $h(x1, \ldots, x_n) = k$: Entonces tenemos que $f(x1, \ldots, x_n) = k = k'$, ya esta!

Caso $h(x1, \ldots, x_n) = x_i + k'$: Entonces tenemos que $f(x1, \ldots, x_n) = g_i(x1, \ldots, x_n)$.

Ahora tenemos 2 sub-casos mas:

Caso $g_i(x1, \ldots, x_n) = k''$: $f(x1, \ldots, x_n) = k' + k'' = k$

Caso $g_i(x1, \ldots, x_n) = x_j + k''$: $f(x1, \ldots, x_n) = x_j + k'' + k' = x_j + k$

En ambos casos, vemos que se cumple lo que queriamos.

($\leftarrow$)

Ya vimos que la funcion $h_k(x) = k$, puede ser definida por composicion y recursion a partir de las funciones iniciales, entonces $h_k \in C$. Entonces $f(x_1, \ldots, x_n) = h_k(u_1^n(x_1, \ldots, x_n)) = k$, xlt $f \in C$

Se puede defnir la funcion $s_k(x) = x + k$ usando sucesivamente la funcion s, por composicion $s_k \in \mathcal{C}$. Xlt $f(x_1, ..., x_n) = x_i + k = s_k(u_i^n(x_1, ..., x_n))$. Y esta ultima al ser composicion de funciones de $\mathcal{C}$, nos asegura que f tambien esta en $\mathcal{C}$.

Question 4

Question 5

Question 6

Question 7

Question 8

Question 9

Question 10

1.1 Random Examples

Definition 1.1.1: Limit of Sequence in $\mathbb{R}$

Let $\{s_n\}$ be a sequence in $\mathbb{R}$. We say

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

where $s \in \mathbb{R}$ if $\forall$ real numbers $\epsilon > 0$ $\exists$ natural number N such that for $n > N$

$$s - \epsilon < s_n < s + \epsilon \text{ i.e. } |s - s_n| < \epsilon$$

Question 11

Is the set $x-$axis$\setminus\{$Origin$\}$ a closed set

Solution: We have to take its complement and check whether that set is a open set i.e. if it is a union of open balls

Note:-

We will do topology in Normed Linear Space (Mainly $\mathbb{R}^n$ and occasionally $\mathbb{C}^n$)using the language of Metric Space

Claim 1.1.1 Topology

Topology is cool

Example 1.1.1 (Open Set and Close Set)

Open Set:
- ϕ
- $\bigcup\limits_{x \in X} B_r(x)$ (Any $r > 0$ will do)
- $B_r(x)$ is open

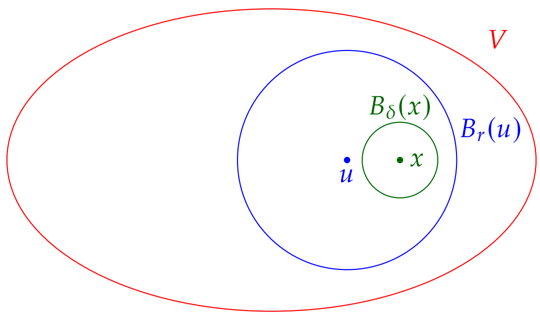
Closed Set:
- $X, \ \phi$
- $\overline{B_r(x)}$

$x-$axis $\cup$ $y-$axis

Theorem 1.1.1

If $x \in$ open set V then $\exists\ \delta > 0$ such that $B_\delta(x) \subset V$

Proof: By openness of V, $x \in B_r(u) \subset V$



Given $x \in B_r(u) \subset V$, we want $\delta > 0$ such that $x \in B_\delta(x) \subset B_r(u) \subset V$. Let $d = d(u, x)$. Choose δ such that $d + \delta < r$ (e.g. $\delta < \frac{r-d}{2}$)

If $y \in B_\delta(x)$ we will be done by showing that $d(u, y) < r$ but

$$d(u, y) \leqslant d(u, x) + d(x, y) < d + \delta < r$$

☺

Corollary 1.1.1

By the result of the proof, we can then show...

Lenma 1.1.1

Suppose $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ is subspace of $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1.1

$1 + 1 = 2$.

1.2 Random

Definition 1.2.1: Normed Linear Space and Norm $\|\cdot\|$

Let V be a vector space over $\mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$). A norm on V is function $\|\cdot\|$ $V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ satisfying

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0\ \forall\ x \in V$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C}),\ x \in V$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\ \forall\ x, y \in V$ (Triangle Inequality/Subadditivity)

And V is called a normed linear space.
• Same definition works with V a vector space over $\mathbb{C}$ (again $\|\cdot\| \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$) where 2 becomes $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ $\forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ x \in V$, where for $\lambda = a + ib$, $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Example 1.2.1 ($p-$Norm)
$V = \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Define for $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(In school $p = 2$)

Special Case $p = 1$: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$ is clearly a norm by usual triangle inequality.
Special Case $p \to \infty$ ($\mathbb{R}^m$ with $\|\cdot\|_\infty$): $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_m|\}$
For $m = 1$ these $p-$norms are nothing but $|x|$. Now exercise

Question 12

Prove that triangle inequality is true if $p \geqslant 1$ for $p-$norms. (What goes wrong for $p < 1$?)

Solution: **For Property 3 for norm-2**

When field is $\mathbb{R}$:

We have to show

$$\sum_i (x_i + y_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_i x_i^2} + \sqrt{\sum_i y_i^2}\right)^2$$

$$\implies \sum_i (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) \leqslant \sum_i x_i^2 + 2\sqrt{\left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i y_i^2\right]} + \sum_i y_i^2$$

$$\implies \left[\sum_i x_i y_i\right]^2 \leqslant \left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i y_i^2\right]$$

So in other words prove $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ where

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$$

Note:-

- $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is $\mathbb{R}-$linear in each slot i.e.

$$\langle rx + x', y \rangle = r\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \text{ and similarly for second slot}$$

Here in $\langle x, y \rangle$ x is in first slot and y is in second slot.

Now the statement is just the Cauchy-Schwartz Inequality. For proof

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

expand everything of $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle$ which is going to give a quadratic equation in variable λ

$$\begin{aligned}
\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

Now unless $x = \lambda y$ we have $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle > 0$ Hence the quadratic equation has no root therefore the discriminant is greater than zero.

When field is $\mathbb{C}$:

Modify the definition by

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \overline{x_i} y_i$$

Then we still have $\langle x, x \rangle \geqslant 0$

1.3 Algorithms

Algorithm 1: what

Input: This is some input
Output: This is some output

```
/* This is a comment */
some code here;
x ← 0;
y ← 0;
if x > 5 then
|  x is greater than 5 ;                    // This is also a comment
else
|  x is less than or equal to 5;
end
foreach y in 0..5 do
|  y ← y + 1;
end
for y in 0..5 do
|  y ← y − 1;
end
while x > 5 do
|  x ← x − 1;
end
return Return something here;
```