**Métodos Numéricos**
1er Cuatrimestre 2024
**Práctica 7**
Métodos Iterativos

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. En los siguientes casos, calcular las primeras dos iteraciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel correspondientes al sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, comenzando con $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,375 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Se define el *radio espectral* $\rho(A)$ de $A$ por $\rho(A) := \text{máx}\{|\lambda|; \lambda \text{ es autovalor de } A\}$. Demostrar que $\rho(A) \leqslant \|A\|$ para cualquier norma consistente.

3. Analizar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

donde $|\rho| < 1$, comenzando con $x^{(0)} \neq (0, 0)^t$.

4. Probar que el método de Jacobi converge para sistemas de ecuaciones lineales de $2 \times 2$ cuya matriz es simétrica definida positiva.

5. Sea $A$ una matriz de $n \times n$ tal que $A$ se expresa en la forma $A := M - N$, donde $M, N$ son matrices de $n \times n$ y $M$ es no singular. Sea $R := M^{-1}N$. A fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, dado un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario consideramos la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geqslant 0} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x^{(k+1)} := Rx^{(k)} + c$, donde $c = M^{-1}b$.

   a) Demostrar que si $\|R\| < 1$ para alguna norma subordinada, entonces $x^{(k)}$ converge a una solución del sistema $Ax = b$.

   b) Demostrar que si $A$ es singular entonces $\rho(R) \geqslant 1$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Escribimos $A = D - L - U$, donde $D, L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D$ es diagonal, $L$ es triangular inferior con ceros en la diagonal y $U$ es triangular superior con ceros en la diagonal. Demostrar que si $A$ es estrictamente diagonal dominante por filas, entonces $\|D^{-1}(L + U)\|_\infty < 1$.

7. Se desea usar el método iterativo de Jacobi para la siguiente matriz compuesta, donde $I$ y $S$ son matrices de $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} I & S \\ S^t & I \end{pmatrix},$$

a) Plantear la iteración de Jacobi, tomando el vector $x^{(i)}$ en bloques $x_1^{(i)}$ y $x_2^{(i)}$ de $n$ coordenadas cada bloque:
$$x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

b) Calcular la expresión del error $e^{(i)} = x^{(i)} - x^*$, donde $x^*$ es la solución buscada, expresada en bloques como en el item anterior.

c) Demostrar que la iteración de Jacobi converge si $\rho(SS^t) < 1$
(*Sugerencia*: Expresar $e^{(i)}$ en función de $e^{(i-2)}$).

8. Sean las matrices abajo indicadas $A_1$ y $A_2$, y sean $J_1$ y $J_2$ las matrices de iteración del método de Jacobi asociadas a $A_1$ y $A_2$ respectivamente.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ -9/10 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Probar que $\rho(J_1) > \rho(J_2)$

b) Ejecutar el método de Jacobi para resolver el sistema $A_1x = b$ y $A_2x = b$ (para algún $b$) y comparar la cantidad de iteraciones realizadas.

c) Concluir que que una mayor dominancia diagonal[1] no necesariamente implica una convergencia más rápida del método de Jacobi.

9. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} x = b$ donde $a \in \mathbb{R}$, puede resolverse bajo ciertas condiciones mediante el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix} x^{(k)} + \omega b \qquad \text{para } k = 0, \ldots$$

a) ¿Para qué valores de $a$ converge el método cuando $\omega = 1$?

b) Para $a = 0,5$, encontrar el valor de $\omega \in \{0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3\}$ que minimiza el radio espectral de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}.$$

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, con $\lambda_i$ autovalores de $A$ tal que $1 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ y sea $\omega$ una constante positiva. Se define el siguiente algoritmo iterativo, para $i = 1, \ldots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1 - \omega a_{ii}) x_i^{(k)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega\, a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

a) Hallar el esquema de iteración de forma matricial y verificar que si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema $Ax = b$.

[1] Definimos *dominancia diagonal por filas* de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como $dd_f(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{|a_{ii}|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$. De manera similar se define la dominancia diagonal por columnas.

b) Demostrar que el esquema iterativo planteado converge para cualquier $x^{(0)}$ inicial si y solo si $\omega < 2/\lambda_n$.
(*Sugerencia*: usar que si $\lambda$ es autovalor de $A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces los autovalores de $\alpha I + \beta A$ son $\alpha + \beta\lambda$).

11. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con columnas linealmente independientes, $b \in \mathbb{R}^m$ y $\omega \in \mathbb{R}$ una constante no nula. Se desea resolver el sistema $A^tAx = A^tb$ mediante un esquema iterativo. Dado un $x^{(0)}$ inicial, se propone el siguiente algoritmo:

$x := x^{(0)}$
$r := b - Ax^{(0)}$
**while** $x$ *no converja a la solución* **do**
  $d := \omega A^t r$
  $x := x + d$
  $r := r - Ad$
**end**

a) Probar que si el esquema iterativo converge, lo hace a una solución del sistema planteado. ¿Cuál es la matriz que gobierna la iteración del esquema? (*Sugerencia*: Probar que en cada iteración $r = b - Ax$).

b) Demostrar que el esquema converge si y sólo si $0 < \omega < 2/\lambda_{max}$ con $\lambda_{max}$ el mayor autovalor de la matriz $A^tA$.

12. Sea $A = QR$ la factorización $QR$ de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $1 < r_{11} \leqslant r_{22} \leqslant \ldots \leqslant r_{nn}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea hallar la solución del sistema

$$(I - Q^tA)x = b \tag{1}$$

a) Para resolver el sistema (1), se propone el siguiente sistema iterativo, con $\omega$ una constante no nula:

$$x^{(k+1)} = (\,(1-\omega)I + \omega R\,)\,x^{(k)} + \omega b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

i) Demostrar que, si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución de (1).

ii) Hallar los valores de $\omega$ para los cuales se puede asegurar la convergencia del método.

b) Demostrar que Jacobi y Gauss-Seidel convergen en a lo sumo $n$ pasos a la solución del sistema (1).

13. Se desea resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha I & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

donde $A$ y $C$ son matrices cuadradas y triangulares superiores. Se propone el siguiente algoritmo iterativo dado un $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^t$ inicial:

- Paso 1: Realizar una iteración de Jacobi para mejorar el valor de $x_1$ para el sistema $Ax_1 = b_1 - Bx_2$
- Paso 2: Realizar una iteración de Gauss-Seidel para mejorar el valor de $x_2$ para el sistema $Cx_2 = b_2 - \alpha x_1$, utilizando el valor de $x_1$ obtenido en el Paso 1.

- Volver al Paso 1 utilizando el $x_2$ hallado en el Paso 2.

a) Escribir, para cada Paso por separado, la iteración matricial que actualiza $x_1$ en el Paso 1 y $x_2$ en el Paso 2.

b) Escribir la iteración en forma matricial para obtener $\mathbf{x}^{(k)}$ en función de $\mathbf{x}^{(k-1)}$, siendo $\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)^t$, y mostrar cuál es la matriz que gobierna la iteración.

## Resolver en computadora

i) Resolver usando Jacobi y Gauss–Seidel, y comparar los resultados obtenidos (comenzando con $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ )

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Funciones útiles

- En Matlab no existen funciones predefinidas para Jacobi ni Gauss–Seidel, pero las siguientes funciones son útiles para construirlos:

```
d = diag(A); %retorna la diagonal de la matriz A en un vector d
B = diag(d); %retorna la matriz B conteniendo en su diagonal el vector d
B = tril(A); %parte triangular inferior de la matriz A
B = triu(A); %parte triangular superior de la matriz A
```

  En ambos casos, **tril** y **triu** permiten un segundo parámero para incluir más (o menos) diagonales además de la principal, dependiendo si este parámero es positivo (o negativo). Usando estas funciones, se pueden generar las matrices $D$, $L$ y $U$ de la separación $A = D - L - U$ con las siguientes sentencias:

```
D = diag(diag(A));
L = tril(-A,-1);
U = triu(-A,1);
```

- En Python, existen rutinas similares de indexación con Numpy[2].

## Referencias

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis.* Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.

[2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing.* Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.

[3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

[2] http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.indexing.html