Métodos Numéricos
2024

Matriz simétrica definida positiva

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.
- A sdp $\Leftrightarrow$ $B^t A B$ es sdp con B no singular.

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.
- A sdp $\Leftrightarrow$ $B^t AB$ es sdp con B no singular.
- La submatriz conformada por las filas 2 a n y columnas 2 a n despues del primer paso de la eliminación gaussiana es sdp.

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.
- A sdp $\Leftrightarrow$ $B^t A B$ es sdp con B no singular.
- La submatriz conformada por las filas 2 a n y columnas 2 a n despues del primer paso de la eliminación gaussiana es sdp.
- Se puede realizar el método de eliminación gaussiana sin necesidad de permutar filas.

Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $A = A^t$ simétrica
- $x^t A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Propiedades

- A es no singular.
- $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.
- A sdp $\Leftrightarrow$ $B^t A B$ es sdp con B no singular.
- La submatriz conformada por las filas 2 a n y columnas 2 a n despues del primer paso de la eliminación gaussiana es sdp.
- Se puede realizar el método de eliminación gaussiana sin necesidad de permutar filas.

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Como $L(L^t)$ es triangular inferior (superior) con $1s$ en la diagonal, es inversible.

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Como $L(L^t)$ es triangular inferior (superior) con $1s$ en la diagonal, es inversible.

$$LU = U^t L^t \Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Como $L(L^t)$ es triangular inferior (superior) con $1s$ en la diagonal, es inversible.

$$LU = U^t L^t \Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t$$

$$U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t = D \text{ matriz diagonal}$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Como $L(L^t)$ es triangular inferior (superior) con $1s$ en la diagonal, es inversible.

$$LU = U^t L^t \Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t$$

$$U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t = D \text{ matriz diagonal}$$

$$U = DL^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Como $L(L^t)$ es triangular inferior (superior) con $1s$ en la diagonal, es inversible.

$$LU = U^t L^t \Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t$$

$$U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t = D \text{ matriz diagonal}$$

$$U = DL^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Sea $x \neq 0$ tal que $L^t x = e_i$.

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Sea $x \neq 0$ tal que $L^t x = e_i$.

$$0 < x^t A x = x^t L D L^t x = e_i^t D e_i = d_{ii}$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Sea $x \neq 0$ tal que $L^t x = e_i$.

$$0 < x^t A x = x^t L D L^t x = e_i^t D e_i = d_{ii}$$

$$D = \sqrt{D}\sqrt{D}$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Sea $x \neq 0$ tal que $L^t x = e_i$.

$$0 < x^t A x = x^t L D L^t x = e_i^t D e_i = d_{ii}$$

$$D = \sqrt{D}\sqrt{D}$$

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = \tilde{L}\tilde{L}^t$$

Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Sea $x \neq 0$ tal que $L^t x = e_i$.

$$0 < x^t A x = x^t LDL^t x = e_i^t D e_i = d_{ii}$$

$$D = \sqrt{D}\sqrt{D}$$

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = \tilde{L}\tilde{L}^t$$

$$\boxed{A = \tilde{L}\tilde{L}^t \text{ Factorización de Cholesky}}$$

Factorización de Cholesky

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{l}_{i1} & \tilde{l}_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{l}_{n1} & \tilde{l}_{n2} & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \cdots & \tilde{l}_{n1} \\ 0 & \tilde{l}_{22} & \cdots & \tilde{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}$$

Factorización de Cholesky

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{l}_{i1} & \tilde{l}_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{l}_{n1} & \tilde{l}_{n2} & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \cdots & \tilde{l}_{n1} \\ 0 & \tilde{l}_{22} & \cdots & \tilde{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}$$

$\tilde{l}_{11} = \sqrt{a_{11}}$

Para $j = 2$ a n

$\quad \tilde{l}_{j1} = a_{j1}/\tilde{l}_{11}$

Para $i = 2$ a $n-1$

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik}^2}$$

$\quad$ Para $j = i+1$ a n

$$\tilde{l}_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{jk}\tilde{l}_{ik}}{\tilde{l}_{ii}}$$

$$\tilde{l}_{nn} = \sqrt{(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{l}_{nk}^2)}$$

Matrices SDP: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Computations, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, JHU Press, 2013.
- Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Nicholas Higham, SIAM, 2002.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Analysis, Timohty Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017.
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.