

Métodos Numéricos 2024

Factorización QR



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

- Columnas ortogonales de norma 2 igual a 1

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

- Columnas ortogonales de norma 2 igual a 1
- Filas ortogonales de norma 2 igual a 1

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

- Columnas ortogonales de norma 2 igual a 1
- Filas ortogonales de norma 2 igual a 1
- $\|Q\|_2 = 1$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

- Columnas ortogonales de norma 2 igual a 1
- Filas ortogonales de norma 2 igual a 1
- $\|Q\|_2 = 1$
- $\kappa_2(Q) = 1$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

- Columnas ortogonales de norma 2 igual a 1
- Filas ortogonales de norma 2 igual a 1
- $\|Q\|_2 = 1$
- $\kappa_2(Q) = 1$
- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

Matrices Ortogonales

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Q es ortogonal sii $QQ^t = Q^tQ = I$

- Columnas ortogonales de norma 2 igual a 1
- Filas ortogonales de norma 2 igual a 1
- $\|Q\|_2 = 1$
- $\kappa_2(Q) = 1$
- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$
- Producto de ortogonales es ortogonal

Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que

$$A = QR$$

Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que

$$A = QR$$

$$Ax = b$$

Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que

$$A = QR$$

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que

$$A = QR$$

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

$$Q^t QRx = Q^t b$$

Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que

$$A = QR$$

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

$$Q^t QRx = Q^t b$$

$$Rx = Q^t b$$

Factorización QR

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tal que

$$A = QR$$

$$Ax = b$$

$$QRx = b$$

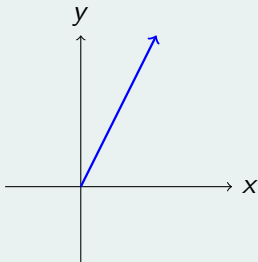
$$Q^t QRx = Q^t b$$

$$Rx = Q^t b$$

Sistema triangular superior, $\mathcal{O}(n^2)$

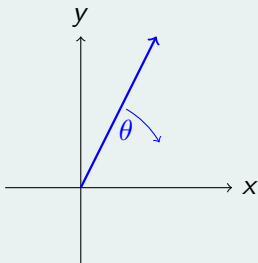
Método de Givens (rotaciones)

Dado un ángulo θ , sea la transformación lineal que rota a todo vector del plano en ángulo θ en sentido horario.



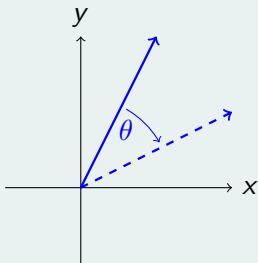
Método de Givens (rotaciones)

Dado un ángulo θ , sea la transformación lineal que rota a todo vector del plano en ángulo θ en sentido horario.



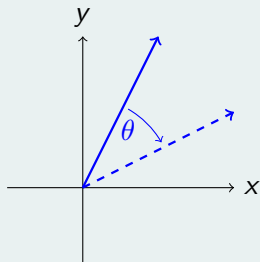
Método de Givens (rotaciones)

Dado un ángulo θ , sea la transformación lineal que rota a todo vector del plano en ángulo θ en sentido horario.



Método de Givens (rotaciones)

Dado un ángulo θ , sea la transformación lineal que rota a todo vector del plano en ángulo θ en sentido horario.



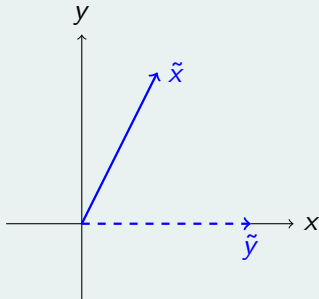
$$W = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

W es ortogonal y
 $\|Wx\|_2 = \|x\|_2$

Método de Givens (rotaciones)

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in R^2$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, se busca la rotación W tal que

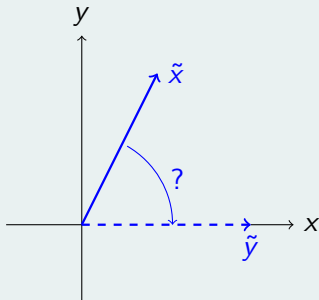
$$W\tilde{x} = \tilde{y}$$



Método de Givens (rotaciones)

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in R^2$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, se busca la rotación W tal que

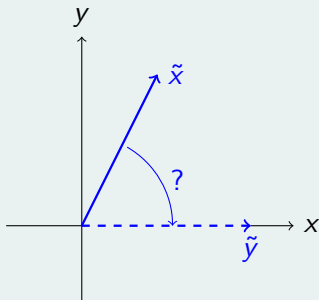
$$W\tilde{x} = \tilde{y}$$



Método de Givens (rotaciones)

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in R^2$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, se busca la rotación W tal que

$$W\tilde{x} = \tilde{y}$$



$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe W tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$.

Método de Givens (rotaciones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe W tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$WA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$WA = R$$

$$W^t WA = W^t R$$

$$A = QR$$

Método de Givens (rotaciones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$.

Método de Givens (rotaciones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{12} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{12} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{12}A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \textcolor{red}{0} & * & \cdots & * \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \textcolor{red}{0} & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & \cdots & a_{3n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Sean $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 \\ a_{31}^1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe $W \in R^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$.

Método de Givens (rotaciones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 \\ a_{31}^1 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Existe $W \in R^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11} & 0 & \mathbf{w}_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{w}_{31} & 0 & \mathbf{w}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 \\ a_{31}^1 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Existe $W \in R^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11} & 0 & \mathbf{w}_{13} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{w}_{31} & 0 & \mathbf{w}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ 0 & a_{32}^2 & \cdots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Sean $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^{i-1} \\ a_{i1}^{i-1} \end{pmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $W \in R^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$.

Método de Givens (rotaciones)

Sean $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^{i-1} \\ a_{i1}^{i-1} \end{pmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $W \in R^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11} & 0 & \cdots & \mathbf{w}_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{w}_{i1} & 0 & \cdots & \mathbf{w}_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Sean $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11}^{i-1} \\ a_{i1}^{i-1} \end{pmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $W \in R^{2 \times 2}$ tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$. Sea

$$W_{1i} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11} & 0 & \cdots & \mathbf{w}_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{w}_{i1} & 0 & \cdots & \mathbf{w}_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{1n} \cdots W_{13} W_{12} A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & * & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{32}^{(n-1)} & \cdots & a_{3n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(n-1)} & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Para $i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$, sea

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{w_{ii}} & \dots & \mathbf{w_{ij}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{w_{ji}} & \dots & \mathbf{w_{jj}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Para $i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$, sea

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{w_{ii}} & \cdots & \mathbf{w_{ij}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{w_{ji}} & \cdots & \mathbf{w_{jj}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{n-1n} W_{n-2n} W_{n-2n-1} \cdots W_{1n} \cdots W_{12} A = R$$

Método de Givens (rotaciones)

Para $i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$, sea

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{w_{ii}} & \cdots & \mathbf{w_{ij}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{w_{ji}} & \cdots & \mathbf{w_{jj}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{n-1n} W_{n-2n} W_{n-2n-1} \cdots W_{1n} \cdots W_{12} A = R$$

$$A = W_{12}^t \cdots W_{1n}^t \cdots W_{n-2n-1}^t W_{n-2n}^t W_{n-1n}^t R$$

Método de Givens (rotaciones)

Para $i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$, sea

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{w}_{ii} & \cdots & \mathbf{w}_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{w}_{ji} & \cdots & \mathbf{w}_{jj} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{n-1n} W_{n-2n} W_{n-2n-1} \cdots W_{1n} \cdots W_{12} A = R$$

$$A = W_{12}^t \cdots W_{1n}^t \cdots W_{n-2n-1}^t W_{n-2n}^t W_{n-1n}^t R$$

$$A = QR$$

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

Costo total: $(n-1)(4n+2n+2+2+1)$

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

Costo total: $(n-1)(4n+2n+2+2+1)$

- i -ésima columna:

W_{ij} actúa entre las filas i y j para $j = i+1, \dots, n$

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

Costo total: $(n-1)(4n+2n+2+2+1)$

- i -ésima columna:

W_{ij} actúa entre las filas i y j para $j = i+1, \dots, n$

Costo: $4(n-i+1)$ productos + $2(n-i+1)$ sumas

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

Costo total: $(n-1)(4n+2n+2+2+1)$

- i -ésima columna:

W_{ij} actúa entre las filas i y j para $j = i+1, \dots, n$

Costo: $4(n-i+1)$ productos + $2(n-i+1)$ sumas

Costo total $(n-i)(4(n-i+1)+2(n-i+1)+2+2+1)$

Método de Givens (rotaciones)

Costo

$$W_{n-1n} W_{n-2n-1} W_{n-2n} \dots W_{1n} \dots W_{13} W_{12} A = R$$

Calcular cada W_{ij} : 2 productos + 2 cocientes + 1 raíz

- Primera columna:

W_{1j} actúa entre las filas 1 y j para $j = 2, \dots, n$

Costo: $4n$ productos + $2n$ sumas

Costo total: $(n-1)(4n + 2n + 2 + 2 + 1)$

- i -ésima columna:

W_{ij} actúa entre las filas i y j para $j = i+1, \dots, n$

Costo: $4(n-i+1)$ productos + $2(n-i+1)$ sumas

Costo total $(n-i)(4(n-i+1) + 2(n-i+1) + 2 + 2 + 1)$

Costo total del algoritmo

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(4(n-i+1) + 2(n-i+1) + 2 + 2 + 1) = \mathcal{O}\left(\frac{4}{3}n^3\right)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (0, 3)$, busquemos W , rotación en plano, tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (3, 0)$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (0, 3)$, busquemos W , rotación en plano, tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (3, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{3} & \frac{3}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{0}{3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (0, 3)$, busquemos W , rotación en plano, tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (3, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{3} & \frac{3}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{0}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow W_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

$$W_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

$$W_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (3, 4)$, busquemos W , rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (5, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

$$W_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (3, 4)$, busquemos W , rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (5, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow W_{13} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (20, -15)$, busquemos W , rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (25, 0)$

Ejemplo

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ \textcolor{red}{0} & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ \textcolor{red}{0} & 20 & 14 \\ \textcolor{red}{0} & -15 & 2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (20, -15)$, busquemos W , rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (25, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{25} & \frac{-15}{25} \\ \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

$$W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -4 \\ \textcolor{red}{0} & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ \textcolor{red}{0} & 20 & 14 \\ \textcolor{red}{0} & -15 & 2 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (20, -15)$, busquemos W , rotación en el plano tal que $W\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (25, 0)$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{25} & \frac{-15}{25} \\ \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix} \Rightarrow W_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{25} & \frac{-15}{25} \\ 0 & \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

$$W_{23}W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{25} & \frac{-15}{25} \\ 0 & \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Método de Givens (rotaciones)

Ejemplo

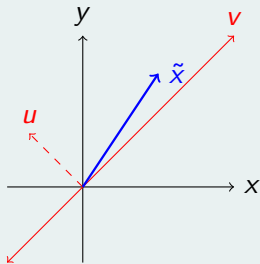
$$W_{23}W_{13}W_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{25} & \frac{-15}{25} \\ 0 & \frac{15}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Q = W_{12}^t W_{13}^t W_{23}^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-20}{25} & \frac{-15}{25} \\ \frac{15}{25} & \frac{12}{25} & \frac{-16}{25} \\ \frac{20}{25} & \frac{-9}{25} & \frac{12}{25} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

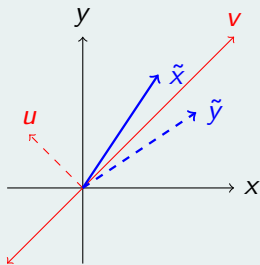
Método de Householder (reflexiones)

Una reflexión es una transformación lineal que *refleja* a todo vector respecto a un plano.



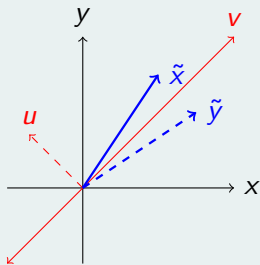
Método de Householder (reflexiones)

Una reflexión es una transformación lineal que *refleja* a todo vector respecto a un plano.



Método de Householder (reflexiones)

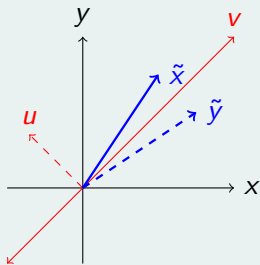
Una reflexión es una transformación lineal que *refleja* a todo vector respecto a un plano.



$$H\tilde{x} = \tilde{y}$$

Método de Householder (reflexiones)

Una reflexión es una transformación lineal que *refleja* a todo vector respecto a un plano.

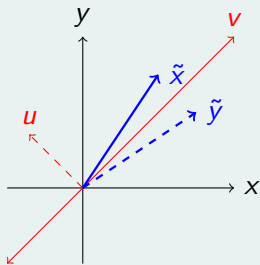


$$H\tilde{x} = \tilde{y}$$

$$Hu = -u$$

Método de Householder (reflexiones)

Una reflexión es una transformación lineal que *refleja* a todo vector respecto a un plano.



$$H\tilde{x} = \tilde{y}$$

$$Hu = -u$$

$$Hv = v$$

Como v y u forman una base, entonces $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$. Además, la reflexión de \tilde{x} es $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$.

Método de Householder (reflexiones)

Como v y u forman una base, entonces $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$. Además, la reflexión de \tilde{x} es $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$.

Entonces, buscamos H tal que $H\tilde{x} = \alpha v - \beta u$

Método de Householder (reflexiones)

Como v y u forman una base, entonces $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$. Además, la reflexión de \tilde{x} es $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$.

Entonces, buscamos H tal que $H\tilde{x} = \alpha v - \beta u$

$$\alpha v - \beta u = \alpha v + \beta u - 2\beta u$$

Método de Householder (reflexiones)

Como v y u forman una base, entonces $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$. Además, la reflexión de \tilde{x} es $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$.

Entonces, buscamos H tal que $H\tilde{x} = \alpha v - \beta u$

$$\alpha v - \beta u = \alpha v + \beta u - 2\beta u$$

$$H\tilde{x} = I\tilde{x} - W\tilde{x} \text{ tal que } W\tilde{x} = \alpha Wv + \beta Wu = 2\beta u$$

Método de Householder (reflexiones)

Como v y u forman una base, entonces $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$. Además, la reflexión de \tilde{x} es $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$.

Entonces, buscamos H tal que $H\tilde{x} = \alpha v - \beta u$

$$\alpha v - \beta u = \alpha v + \beta u - 2\beta u$$

$$H\tilde{x} = I\tilde{x} - W\tilde{x} \text{ tal que } W\tilde{x} = \alpha Wv + \beta Wu = 2\beta u$$

Necesitamos que $Wv = 0$ y $Wu = 2u$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Si definimos $W = 2P$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Si definimos $W = 2P$

$$H = I - 2P$$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Si definimos $W = 2P$

$$H = I - 2P$$

$$H\tilde{x} = (I - 2P)(\alpha v + \beta u) =$$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Si definimos $W = 2P$

$$H = I - 2P$$

$$H\tilde{x} = (I - 2P)(\alpha v + \beta u) =$$

$$I(\alpha v + \beta u) - 2P(\alpha v + \beta u) =$$

Método de Householder (reflexiones)

Sea $P = uu^t$ y asumamos $\|u\|_2 = 1$

- P es simétrica.
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Si definimos $W = 2P$

$$H = I - 2P$$

$$H\tilde{x} = (I - 2P)(\alpha v + \beta u) =$$

$$I(\alpha v + \beta u) - 2P(\alpha v + \beta u) =$$

$$\alpha v + \beta u - 2\beta u = \tilde{y}$$

Propiedades de H

$$H = I - 2uu^t$$

Propiedades de H

$$H = I - 2uu^t$$

- H es simétrica

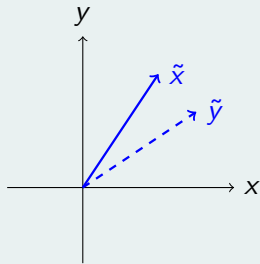
Propiedades de H

$$H = I - 2uu^t$$

- H es simétrica
- H es ortogonal

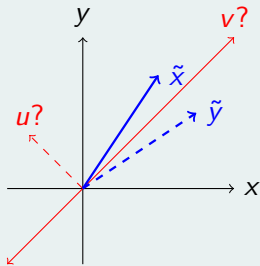
Método de Householder (reflexiones)

Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $\|\tilde{x}\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$. Existe una transformación de Householder tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.



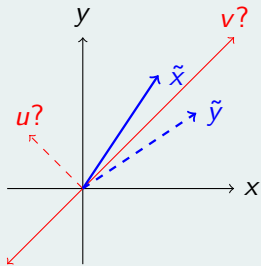
Método de Householder (reflexiones)

Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $\|\tilde{x}\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$. Existe una transformación de Householder tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.



Método de Householder (reflexiones)

Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $\|\tilde{x}\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$. Existe una transformación de Householder tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.



$$v = \tilde{x} + \tilde{y}$$

$$u = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$$

$$H = I - 2 \frac{(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{y})^t}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2^2}$$

Método de Householder (reflexiones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe H tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

Método de Householder (reflexiones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe H tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$HA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Método de Householder (reflexiones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe H tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$HA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$HA = R$$

Método de Householder (reflexiones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe H tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$HA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$HA = R$$

$$H^t HA = H^t R$$

Método de Householder (reflexiones)

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ y $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Existe H tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$HA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$HA = R$$

$$H^t HA = H^t R$$

$$A = QR$$

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$$

Existe $H_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $H_1 \tilde{x} = \tilde{y}$.

$$H_1 = I - 2u_1 u_1^t \text{ con } u_1 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$$

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$$

Existe $H_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $H_1 \tilde{x} = \tilde{y}$.

$$H_1 = I - 2u_1 u_1^t \text{ con } u_1 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$$

$$H_1 A = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \textcolor{red}{0} & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \textcolor{red}{0} & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{bmatrix} = A^1$$

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{22}^1 \\ a_{32}^1 \\ \vdots \\ a_{n2}^1 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Existe $H \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$$H = I - 2u_2u_2^t \text{ con } u_2 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{22}^1 \\ a_{32}^1 \\ \vdots \\ a_{n2}^1 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Existe $H \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$H = I - 2u_2u_2^t$ con $u_2 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sea $H_2 \in R^{n \times n}$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I - 2u_2u_2^t \end{bmatrix}$$

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{22}^1 \\ a_{32}^1 \\ \vdots \\ a_{n2}^1 \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} ||\tilde{x}||_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Existe $H \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$.

$H = I - 2u_2u_2^t$ con $u_2 = \frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{||\tilde{x}-\tilde{y}||_2}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sea $H_2 \in R^{n \times n}$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I - 2u_2u_2^t \end{bmatrix}$$

$$H_2 A^1 = \begin{bmatrix} a_{12}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \mathbf{0} & ||\tilde{x}||_2 & a_{23}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{33}^2 & \cdots & a_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{n3}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix} = A^2$$

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{ii}^{(i-1)} \\ a_{i+1i}^{(i-1)} \\ \vdots \\ a_{ni}^{(i-1)} \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-i+1}$$

Existe $H \in \mathbb{R}^{(n-i+1) \times (n-i+1)}$ tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$. $H = I - 2u_i u_i^t$ con $u_i = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$, con $u_i \in \mathbb{R}^{n-i+1}$.

Método de Householder (reflexiones)

$$\text{Sean } \tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{ii}^{(i-1)} \\ a_{i+1i}^{(i-1)} \\ \vdots \\ a_{ni}^{(i-1)} \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{y} = \begin{pmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-i+1}$$

Existe $H \in R^{(n-i+1) \times (n-i+1)}$ tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$. $H = I - 2u_i u_i^t$ con $u_i = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2}$, con $u_i \in \mathbb{R}^{n-i+1}$.

Sea $H_i \in R^{n \times n}$

$$H_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - 2u_i u_i^t \end{bmatrix}$$

con $I \in R^{i-1 \times i-1}$

Método de Householder (reflexiones)

$$H_i A^{(i-1)} = \begin{bmatrix} a_{12}^{(i-1)} & a_{12}^{(i-1)} & \cdots & a_{1i}^{(i-1)} & a_{1i+1}^{(i-1)} & \cdots & a_{1n}^{(i-1)} \\ 0 & a_{22}^{(i-1)} & \cdots & a_{2i}^{(i-1)} & a_{2i+1}^{(i-1)} & \cdots & a_{2n}^{(i-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \|\tilde{x}\|_2 & a_{ii+1}^i & \cdots & a_{in}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{i+1i+1}^i & \cdots & a_{i+1n}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ni+1}^i & \cdots & a_{nn}^i \end{bmatrix} = A^i$$

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

$$A = H_1^t \dots H_{n-2}^t H_{n-1}^t R$$

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

$$A = H_1^t \dots H_{n-2}^t H_{n-1}^t R$$

$$A = QR$$

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

Método de Householder (reflexiones)

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \qquad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \qquad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo de u_1^tA : n (n productos + $(n-1)$ sumas)

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \qquad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo de u_1^tA : n (n productos + $(n-1)$ sumas)

Costo de $u_1(u_1^tA)$ n^2 productos

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \qquad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo de u_1^tA : n (n productos + $(n-1)$ sumas)

Costo de $u_1(u_1^tA)$ n^2 productos

Costo total: $2n^2 + n(n-1)$

Método de Householder (reflexiones)

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \quad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo de u_1^tA : n (n productos + $(n-1)$ sumas)

Costo de $u_1(u_1^tA)$ n^2 productos

Costo total: $2n^2 + n(n-1)$

- i -ésima columna:

$$H_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - 2u_iu_i^t \end{bmatrix} \text{ actúa en matriz } (n-i+1) \times (n-i+1)$$

Método de Householder (reflexiones)

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \quad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo de u_1^tA : n (n productos + $(n-1)$ sumas)

Costo de $u_1(u_1^tA)$ n^2 productos

Costo total: $2n^2 + n(n-1)$

- i -ésima columna:

$$H_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - 2u_iu_i^t \end{bmatrix} \text{ actúa en matriz } (n-i+1) \times (n-i+1)$$

Costo total: $2(n-i+1)^2 + (n-i+1)(n-i)$

Método de Householder (reflexiones)

Costo

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1A = R$$

- Primera columna:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t \quad H_1A = A - 2u_1u_1^tA$$

Costo de u_1^tA : n (n productos + $(n-1)$ sumas)

Costo de $u_1(u_1^tA)$ n^2 productos

Costo total: $2n^2 + n(n-1)$

- i -ésima columna:

$$H_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - 2u_iu_i^t \end{bmatrix} \text{ actúa en matriz } (n-i+1) \times (n-i+1)$$

Costo total: $2(n-i+1)^2 + (n-i+1)(n-i)$

Costo total del algoritmo

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i+1)^2 + 2(n-i+1)(n-i) = \mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (1, -2, 2)$. Buscamos H_1 , reflexión, tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (3, 0, 0)$.

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (1, -2, 2)$. Buscamos H_1 , reflexión, tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (3, 0, 0)$.

$$\text{Definimos } u_1 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, -2, 2)$$

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (1, -2, 2)$. Buscamos H_1 , reflexión, tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (3, 0, 0)$.

$$\text{Definimos } u_1 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, -2, 2)$$

$$H_1 = I - 2u_1u_1^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(I - 2uu^t)A = A - 2uu^tA$$

Ejemplo

$$(I - 2u_1 u_1^t)A = A - 2uu^t A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} =$$

Ejemplo

$$(I - 2u_1 u_1^t)A = A - 2uu^t A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 102 \end{bmatrix} =$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$(I - 2u_1 u_1^t)A = A - 2uu^t A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 102 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & -34 \\ -2 & 4 & -34 \\ 2 & -4 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & -9 & 54 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & -9 & 54 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (-9, 12)$. Buscamos H , reflexión, tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (15, 0)$.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & -9 & 54 \\ \textcolor{red}{0} & 12 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (-9, 12)$. Buscamos H , reflexión, tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (15, 0)$.

$$\text{Definimos } u_2 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{720}}(-24, 12)$$

$$H = I - 2u_2u_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 12 \end{bmatrix}$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & -9 & 54 \\ \textcolor{red}{0} & 12 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Sea $\tilde{x} = (-9, 12)$. Buscamos H , reflexión, tal que $H\tilde{x} = \tilde{y}$ con $\tilde{y} = (15, 0)$.

$$\text{Definimos } u_2 = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{720}}(-24, 12)$$

$$H = I - 2u_2u_2^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(I - 2u_2u_2^t)\tilde{A} = \tilde{A} - 2u_2u_2^t\tilde{A}$$

Ejemplo

$$(I - 2u_2u_2^t)\tilde{A} = \tilde{A} - 2u_2u_2^t\tilde{A}$$

Ejemplo

$$(I - 2u_2u_2^t)\tilde{A} = \tilde{A} - 2u_2u_2^t\tilde{A}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} =$$

Ejemplo

$$(I - 2u_2u_2^t)\tilde{A} = \tilde{A} - 2u_2u_2^t\tilde{A}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360 & -1260 \end{bmatrix} =$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$(I - 2u_2u_2^t)\tilde{A} = \tilde{A} - 2u_2u_2^t\tilde{A}$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} - \frac{2}{720} \begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360 & -1260 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -24 & 84 \\ 12 & -42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -30 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Definiendo $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$

Ejemplo

Definiendo $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ resulta entonces que

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

Definiendo $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ resulta entonces que

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A = H_1^t H_2^t \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A = [I - 2u_1 u_1^t] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - 2u_2 u_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Método de Householder (reflexiones)

Ejemplo

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - 2u_2u_2^t \end{bmatrix} - 2u_1u_1^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I - 2u_2u_2^t \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-2}{3} & \frac{5}{15} & \frac{10}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{15} & \frac{11}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A no singular. Existen únicas $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior con $r_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ tal que

$$A = QR$$

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Nicholas Higham, SIAM, 2002.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.