Método de la Potencia

Métodos Numéricos

17 de Mayo de 2024

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A si existe una solución no trivial x del sistema

$$Ax = \lambda x$$

- En este caso, x es llamado autovector asociado a λ.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de A si existe una solución no trivial x del sistema

$$Ax = \lambda x$$

- En este caso, x es llamado autovector asociado a λ.

Veamos un ejemplo más gráfico

Repaso: Propiedades

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Intuición

Podemos encontrar una base donde la transformación lineal A se comporta como si fuese diagonal.

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable?

Repaso: Propiedades

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Intuición

Podemos encontrar una base donde la transformación lineal A se comporta como si fuese diagonal.

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable?

No!

Repaso: Propiedades

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Intuición

Podemos encontrar una base donde la transformación lineal A se comporta como si fuese diagonal.

¿Toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable?

No!

Teorema

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sí y solo sí A tiene n autovectores linealmente independientes (las columnas de P).

Más teoremas

Teorema Espectral

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Consecuencia: Existe P, y $P^{-1} = P^t$. Luego, $A = PDP^t$.

Más teoremas

Teorema Espectral

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Consecuencia: Existe P, y $P^{-1} = P^t$. Luego, $A = PDP^t$.

Obs: Vale la vuelta!

Cálculo de autovalores/autovectores

¿Qué nos motiva?

Cálculo de autovalores/autovectores

¿Qué nos motiva?

- En el tp vamos a querer diagonalizar la matriz de covarianza $C_X = \frac{1}{n-1} X^t X$
- Con eso obtendremos luego la transformación asociada a PCA.

Cálculo de autovalores/autovectores

¿Qué nos motiva?

- En el tp vamos a querer diagonalizar la matriz de covarianza $C_X = \frac{1}{n-1} X^t X$
- Con eso obtendremos luego la transformación asociada a PCA.

Obs: C_X es simétrica semidefinida positiva. ¿Es garantía suficiente para el método de la potencia?

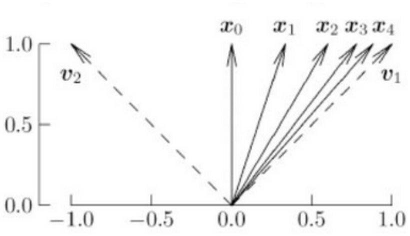
Cálculo de autovalores/autovectores

¿Qué nos motiva?

- En el tp vamos a querer diagonalizar la matriz de covarianza $C_X = \frac{1}{n-1} X^t X$
- Con eso obtendremos luego la transformación asociada a PCA.

Obs: C_X es simétrica semidefinida positiva. ¿Es garantía suficiente para el método de la potencia? Veamos...

Método de la Potencia
Dibujito



Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el <u>Método de la Potencia</u> para calcular λ_1 y v_1.

1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
2. $v \leftarrow x_0$.
3. Para $i = 1, \ldots, niter$
4. $v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
5. Fin Para
6. $\lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
7. Devolver λ, v.

Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el Método de la Potencia para calcular λ_1 y v_1.

1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
2. $v \leftarrow x_0$.
3. Para $i = 1, \ldots, niter$
4. $v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
5. Fin Para
6. $\lambda \leftarrow \frac{v^t Bv}{v^t v}$
7. Devolver λ, v.

Pará.

Método de la Potencia

Algoritmo

Podemos considerar el Método de la Potencia para calcular λ_1 y v_1.

1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
2. $\quad v \leftarrow x_0$.
3. $\quad$ Para $i = 1, \ldots, niter$
4. $\qquad v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
5. $\quad$ Fin Para
6. $\quad \lambda \leftarrow \frac{v^t B v}{v^t v}$
7. $\quad$ Devolver λ, v.

Pará. ¿Qué hipótesis necesitamos?

Cálculo de autovalores/autovectores

Una vez que tenemos λ_1 y v_1, como seguimos?

Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que:

- Sus autovalores son distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$
- Tiene una base ortonormal de autovectores.

Cálculo de autovalores/autovectores

Una vez que tenemos λ_1 y v_1, como seguimos?

Deflación (de Hotelling)

Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que:

- Sus autovalores son distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$
- Tiene una base ortonormal de autovectores.

Cálculo de autovalores/autovectores

Una vez que tenemos λ_1 y v_1, como seguimos?

Deflación (de Hotelling)

Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que:

- Sus autovalores son distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$
- Tiene una base ortonormal de autovectores.

Entonces, la matriz $B - \lambda_1 v_1 v_1^t$ tiene autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_n$.

Cálculo de autovalores/autovectores

Una vez que tenemos λ_1 y v_1, como seguimos?

Deflación (de Hotelling)

Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que:

- Sus autovalores son distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$
- Tiene una base ortonormal de autovectores.

Entonces, la matriz $B - \lambda_1 v_1 v_1^t$ tiene autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_n$.

- $(B - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_1 = B v_1 - \lambda_1 v_1 (v_1^t v_1) = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0 v_1$.
- $(B - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_i = B v_i - \lambda_1 v_1 \underbrace{(v_1^t v_i)}_{0} = \lambda_i v_i$.

Observación

En el caso de PCA, no hace falta que todos los autovalores tengan magnitudes distintas.