Métodos Numéricos
2024

Normas vectoriales y matriciales
Número de condición

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Normas vectoriales

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $f(x) > 0$ si $x \neq 0$
- $f(x) = 0$ sii $x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Normas vectoriales

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $f(x) > 0$ si $x \neq 0$
- $f(x) = 0$ sii $x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Ejemplos

- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
- $||x||_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$

Ejemplo

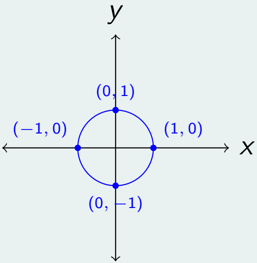
x=(-1,3,6,-7)

- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{95}$
- $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |-1| + |3| + |6| + |-7| = 17$
- $||x||_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i| = \max\{|-1|, |3|, |6|, |-7|\} = 7$

"Circunferencia" de radio 1

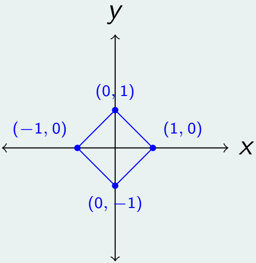
$$||x||_2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$



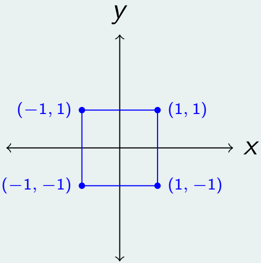
$$||x||_1 = 1$$

$$|x_1| + |x_2| = 1$$



$$||x||_\infty = 1$$

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$$



Normas matriciales

$F : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $F(A) > 0$ si $A \neq 0$
- $F(A) = 0$ sii $A = 0$
- $F(\alpha A) = |\alpha| F(A)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $F(A + B) \leq F(A) + F(B)$
- $F(AB) \leq F(A)F(B)$ (propiedad adicional, son normas sub-multiplicativas, $m = n$)

Normas matriciales

Ejemplo

- Norma de Frobenius $||A||_F = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)}$

Normas matriciales

Ejemplo

- Norma de Frobenius $||A||_F = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Normas matriciales

Ejemplo

- Norma de Frobenius $||A||_F = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$||A||_F = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 + (-3)^2}$$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en $\mathbb{R}^m$ y f_2 un norma definida en $\mathbb{R}^n$
$F : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x\neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en $\mathbb{R}^m$ y f_2 un norma definida en $\mathbb{R}^n$
$F : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x\neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

$$F(A) = \max_{x: f_2(x)=1} f_1(Ax)$$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en $\mathbb{R}^m$ y f_2 un norma definida en $\mathbb{R}^n$
$F : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x\neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

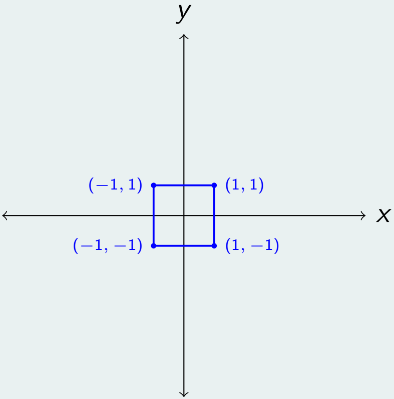
$$F(A) = \max_{x:f_2(x)=1} f_1(Ax)$$

Ejemplo para n=m

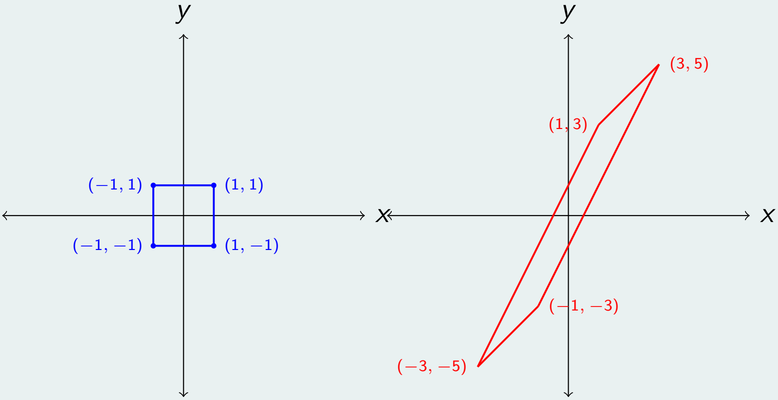
- Norma 1 $\longrightarrow ||A||_1 = \max_{x:||x||_1=1} ||Ax||_1$
- Norma 2 $\longrightarrow ||A||_2 = \max_{x:||x||_2=1} ||Ax||_2$
- Norma p $\longrightarrow ||A||_p = \max_{x:||x||_p=1} ||Ax||_p$
- Norma $\infty \longrightarrow ||A||_\infty = \max_{x:||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$

Normas matriciales inducidas

Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

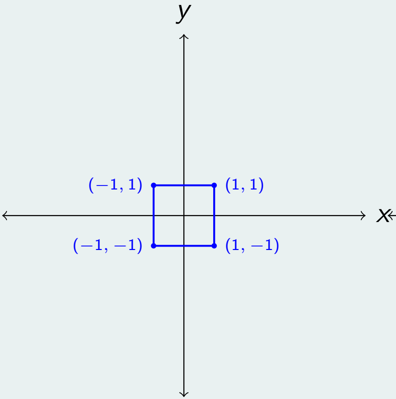


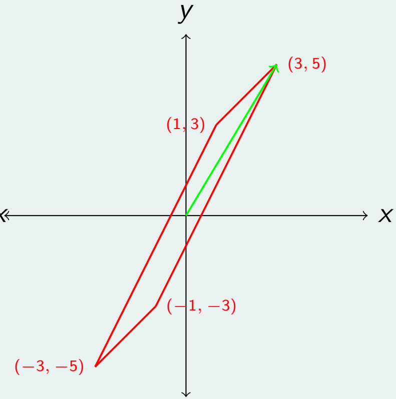
Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



Normas matriciales inducidas

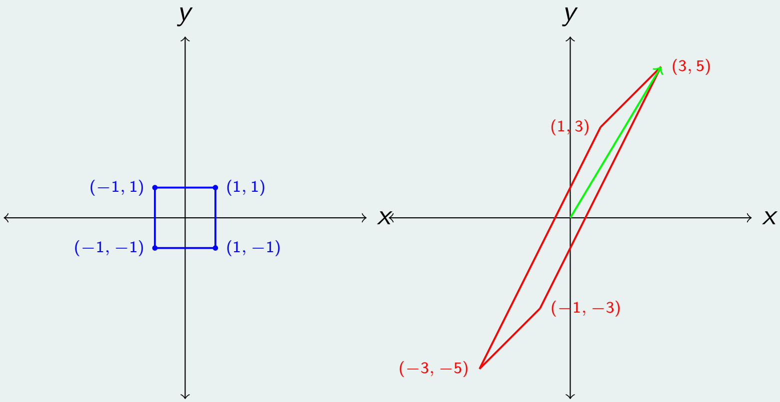
Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$





Normas matriciales inducidas

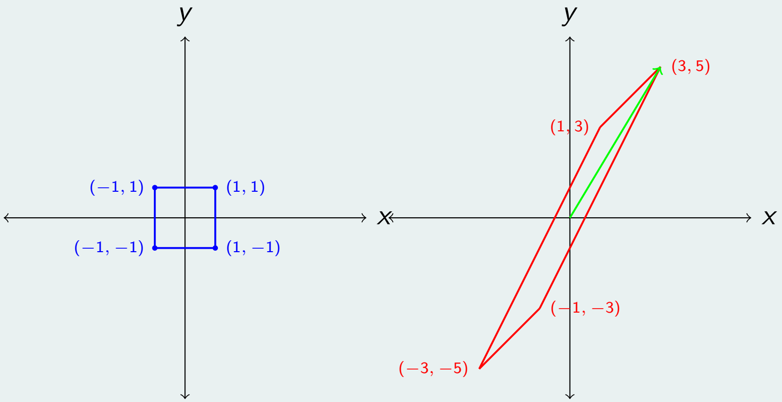
Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



$$||A||_\infty = 5$$

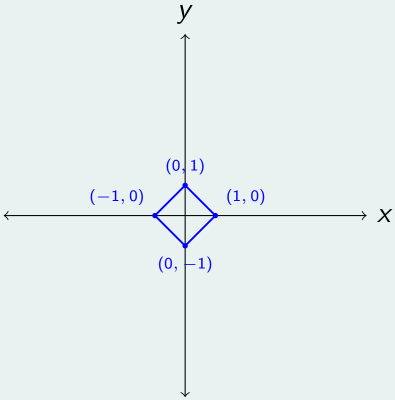
Normas matriciales inducidas

Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



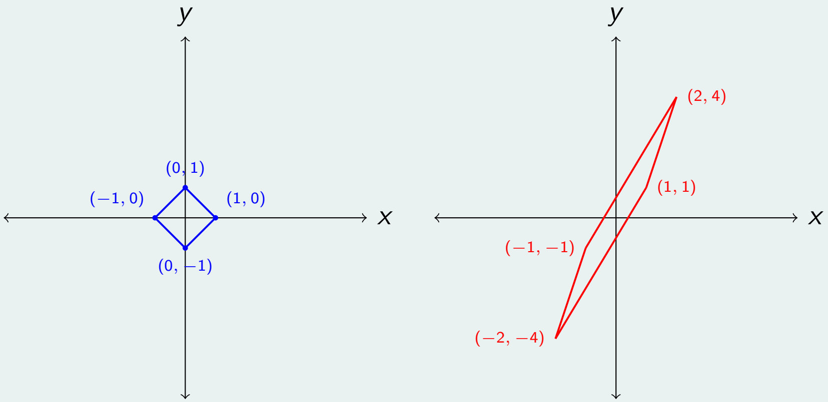
$$||A||_\infty = 5 \qquad ||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



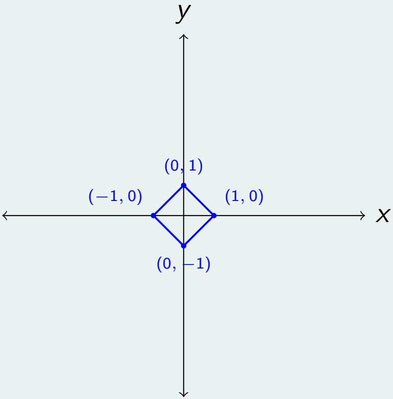
Normas matriciales inducidas

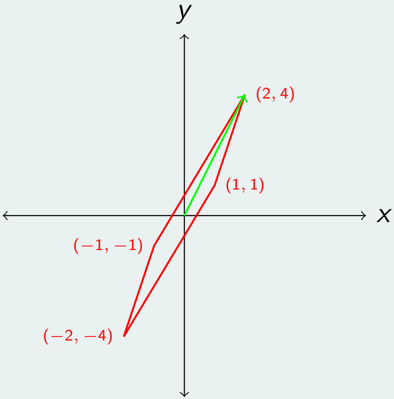
Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



Normas matriciales inducidas

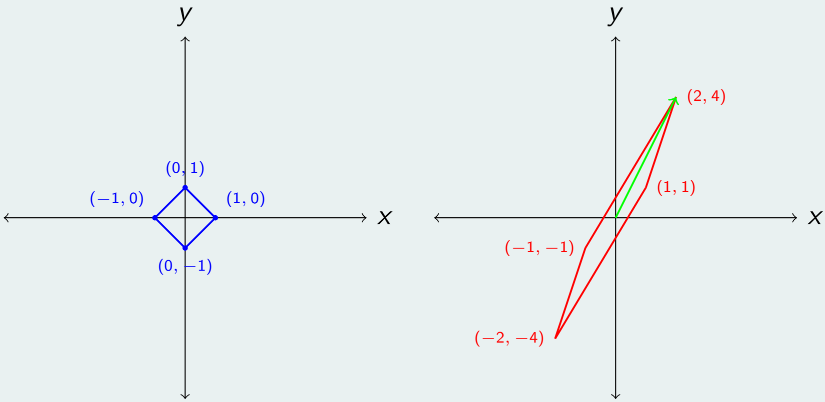
Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$





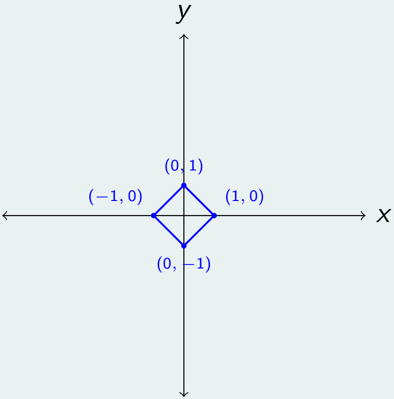
Normas matriciales inducidas

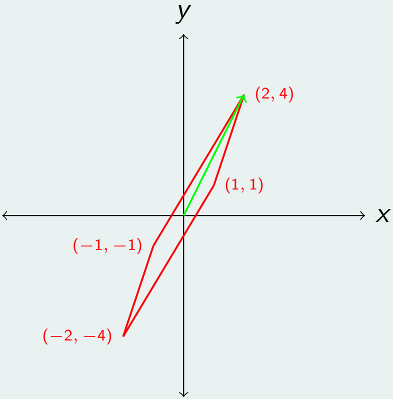
Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



$||A||_1 = 6$

Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$





$$||A||_1 = 6$$

$$||A||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

x

Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

x $\qquad$ x

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

x x

Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

x x

$||A||_2 \approx 4.67083$

Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

x x

$||A||_2 \approx 4.67083$

$||A||_2 = \sqrt{\max |\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A^t A}$

Número de condición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||.||$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

Número de condición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||.||$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

- Si $||.||$ es una norma inducida, $\kappa(I) = 1$

Número de condición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||.||$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

- Si $||.||$ es una norma inducida, $\kappa(I) = 1$
- Si $||.||$ es una norma sub-multiplicativa $\kappa(A) \geq 1$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06{\color{red}6} \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\textcolor{red}{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0.068 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0.068 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (934, -1169)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

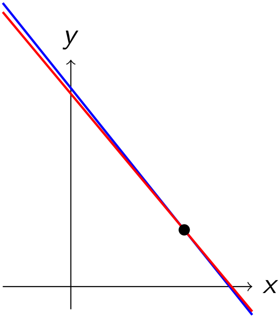
$$A = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}$$

$$||A||_\infty = 1.502$$

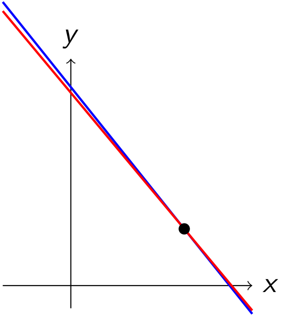
$$||A^{-1}||_\infty = 1168000$$

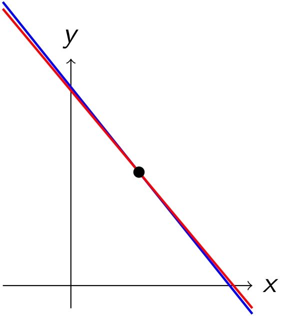
$$\kappa_\infty(A) \approx 1.7 \times 10^6$$

Interpretación Gráfica

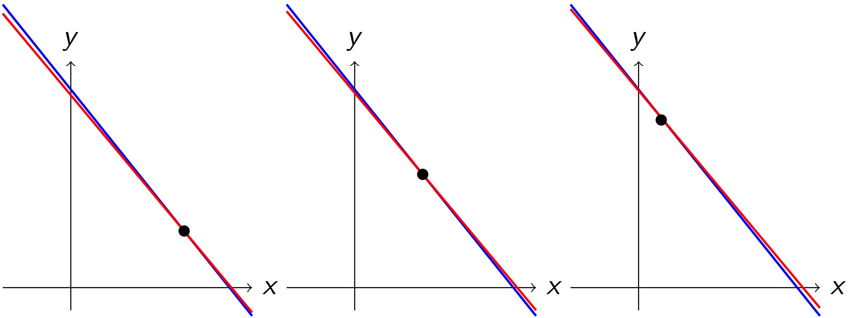


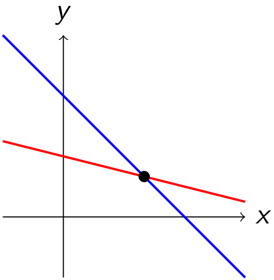
Interpretación Gráfica



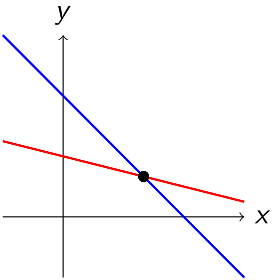


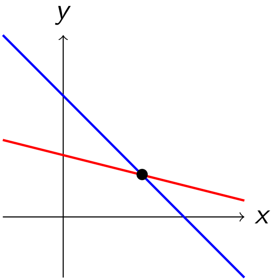
Interpretación Gráfica



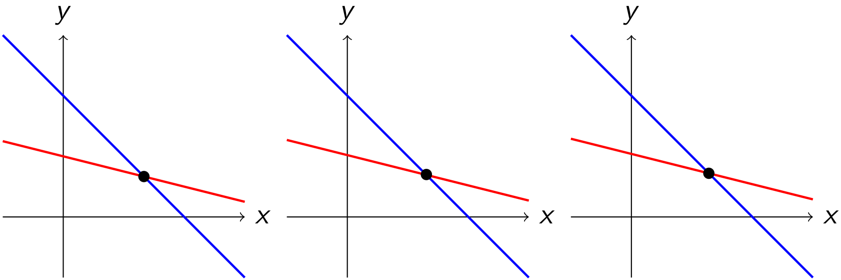

y
x

Interpretación Gráfica





Interpretación Gráfica



Cota del error

$b - \tilde{b} = r$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||.||$ una norma matricial inducida. Sea $\tilde{x}$ solución aproximada del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$ y $r = Ax - A\tilde{x} = b - \tilde{b}$

$$\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||} \leq ||A||\,||A^{-1}||\frac{||b-\tilde{b}||}{||b||}$$

Normas: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Numerical Methods, Germund Dahlquist and Ake Bjorck, Dover, 2003.
- Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Nicholas Higham, SIAM, 2002.
- Matrix Analysis, Roger Horn and Charles Johnson, Cambridge University Press, 2012.
- Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Carl Meyer, SIAM, 2010.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.