Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Métodos iterativos - Convergencia - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de métodos iterativos usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19).
Este documento incluye la demostración de convergencia de un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Proposición: *Sean $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el sistema de ecuaciones $x = Tx + c$ y x^* solución del sistema. La sucesión $\{x^k\}_0^\infty$ definida por $x^k = Tx^{k-1} + c$ converge a x^* para cualquier x^0 inicial $\Leftrightarrow \rho(T) < 1$*

Demostración:
$\Leftarrow$)
Como $\rho(T) < 1$, entonces $(I - T)$ es inversible. Entonces el sistema $x = Tx + c \Leftrightarrow (I - T)x = c \Leftrightarrow x^* = (I - T)^{-1}c$
La sucesión está definida por

$$x^k = Tx^{k-1} + c$$

A x^{k-1} lo podemos expresar en función de la $k - 2$. Si reemplazamos esta expresión nos queda

$$x^k = T(Tx^{k-2} + c) + c = T^2x^{k-2} + Tc + c$$

Si ahora hacemos lo mismo para x^{k-2}

$$x^k = T^2x^{k-2} + Tc + c = T^2(Tx^{k-3} + c) + Tc + c = T^3x^{k-3} + T^2c + Tc + c$$

Si seguimos con estos reemplazos hasta llegar a x^0, obtenemos

$$x^k = T^kx^0 + T^{k-1}c + \ldots + Tc + c$$

$$x^k = T^kx^0 + (T^{k-1} + \ldots + T + I)c$$

Como $\rho(T) < 1$, sabemos que $\lim\limits_{k\to\infty} T^k = 0$ y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k = (I - T)^{-1}$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \lim_{k\to\infty} T^kx^0 + \lim_{k\to\infty}(T^{k-1} + \ldots + T + I)c$$

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0 + (I - T)^{-1}c$$

Entonces el límite de la sucesión existe, no depende del x^0 inicial y es x^* la solución del sistema.
$\Rightarrow$)
Debemos ver $\rho(T) < 1$ sabiendo que la sucesión converge independientemente del x^0 inicial.
Sabemos $\rho(T) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} T^k \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} T^k z = 0 \forall z \neq 0, z \in \mathbb{R}^n$.
Dadas estas equivalencias, vamos a demostrar que $\lim_{k\to\infty} T^k z = 0 \quad \forall z \neq 0$.
Sea $z \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $x^0 = x^* - z$. Recordamos que $x^* = Tx^* + c$ y $x^k = Tx^{k-1} + c$

$$\lim_{k\to\infty} T^k z = \lim_{k\to\infty} T^k (x^* - x^0)$$

$$\lim_{k\to\infty} T^k z = \lim_{k\to\infty} T^{k-1}(Tx^* - Tx^0) = \lim_{k\to\infty} T^{k-1}(x^* - c - x^1 + c)$$

$$\lim_{k\to\infty} T^k z = \lim_{k\to\infty} T^{k-1}(x^* - x^1) = \lim_{k\to\infty} T^{k-2}(Tx^* - Tx^1)$$

$$\lim_{k\to\infty} T^k z = \lim_{k\to\infty} T^{k-2}(x^* - c - x^2 + c) = \lim_{k\to\infty} T^{k-2}(x^* - x^2)$$

Si seguimos haciendo los reemplazos

$$\lim_{k\to\infty} T^k z = \lim_{k\to\infty} T^0(x^* - x^k) = \lim_{k\to\infty} (x^* - x^k)$$

Este último límite es 0 ya que la sucesión converge a x^* independientemente del x^0.

∎

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Métodos iterativos - Error - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de métodos iterativos usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19).
Este documento incluye la demostración de una cota del error de un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Proposición: *Sean $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $||T|| < 1$ para una norma inducida entonces*

1. *La sucesión $x^k = Tx^{k-1} + c$ converge a $x^* = (I-T)^{-1}c$ para cualquier x^0 inicial*
2. $||x^* - x^k|| \leq ||T||^k ||x^* - x^0||$
3. $||x^* - x^k|| \leq \frac{||T||^k}{1-||T||} ||x^1 - x^0||$

Demostración:

1. Hay una propiedad que establece que $|\rho(A)| \leq ||A||$ para toda norma inducida. Entonces $|\rho(T)| \leq ||T|| < 1$. Por lo tanto estamos en condiciones del teorema general de convergencia y podemos concluir que la sucesión converge para cualquier x^0.

2. Partimos del error y veamos como ir acotando. Sabemos que $x^* = Tx^* + c$ y que $x^k = Tx^{k-1} + c$.

$$||x^* - x^k|| = ||Tx^* + c - Tx^{k-1} - c|| = ||Tx^* - Tx^{k-1}|| = ||T(x^* - x^{k-1})|| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por norma inducida}}}{\leq} ||T||||x^* - x^{k-1}||$$

Volviendo a aplicar el mismo reeemplazo

$$||x^* - x^k|| \leq ||T||||Tx^* + c - Tx^{k-2} - c|| = ||T||||Tx^* - Tx^{k-2}|| = ||T||||T(x^* - x^{k-2})|| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por norma inducida}}}{\leq} ||T||^2||x^* - x^{k-2}||$$

Repitiendo el proceso, llegamos a:

$$||x^* - x^k|| \leq ||T||^k ||x^* - x^0||$$

3. Veamos primero la diferencia entre dos iteradas sucesivas

$$||x^{k+1} - x^k|| = ||Tx^k + c - Tx^{k-1} - c|| = ||T(x^k - x^{k-1})|| \leq ||T|| ||x^k - x^{k-1}||$$

Si seguimos reemplazado llegamos a que

$$||x^{k+1} - x^k|| \leq ||T||^k ||x^1 - x^0||$$

Consideremos ahora dos iteradas j y k con $j > k$:

$$||x^j - x^k|| = ||x^j - x^{j-1} + x^{j-1} - x^{j-2} + x^{j-2} - \ldots - x^{k+1} + x^{k+1} - x^k|| \leq ||x^j - x^{j-1}|| + ||x^{j-1} - x^{j-2}|| + \ldots + ||x^{k+1} - x^k||$$

Usando la cota anterior:

$$||x^j - x^k|| \leq (||T||^{j-1} + ||T||^{j-2} + \ldots + ||T||^k)||x^1 - x^0|| = ||T||^k (\sum_{i=0}^{j-1-k} ||T||^i) ||x^1 - x^0||$$

Si ahora tomamos límite con $j \to \infty$, como $\{x^j\}_{j=0}^{\infty}$ converge a x^* y $\sum_{i=0}^{j-1-k} ||T||^i = \frac{1}{1-||T||}$ ya que $||T|| < 1$, obtenemos

$$||x^* - x^k|| \leq \frac{||T||^k}{(1 - ||T||)} ||x^1 - x^0||$$

$\blacksquare$

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Métodos iterativos - Gauss Seidel en EDD - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de métodos iterativos usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19).
Este documento incluye la demostración de convergencia del método de Gauss Seidel para el caso de matrices estrictamente diagonal dominante.

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz estrictamente diagonal dominante. El método de Gauss Seidel converge independientemente del x^0 inicial.*

Demostración:
Escribimos a la matriz como $A = D - L - U$ donde D matriz diagonal con $d_{ii} = a_{ii}$, L matriz estrictamente triangular inferior con $l_{ij} = -a_{ij}$ para $i > j$ y U matriz estrictamente triangular superior con $u_{ij} = -a_{ij}$ para $i < j$. La matriz de iteración del método de Gauss Seidel es $T_{GS} = (D - L)^{-1}U$. Para poder asegurar la convergencia debemos ver que $\rho(T_{GS}) < 1$.

Recordamos que $\rho(T_{GS}) = \max_{\lambda \text{ autov de } T_{GS}} |\lambda|$.

Sea λ autovalor de T_{GS} y $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ autovector asociado. Queremos ver $|\lambda| < 1$.
Como $v \neq 0$, existe al menos un coeficiente v_k no nulo tal que $|v_k| = ||v||_\infty$.
Por definición de autovalor, sabemos que

$$T_{GS}v = \lambda v$$

Usando la expresión de T_{GS}

$$(D - L)^{-1}Uv = \lambda v$$

Multiplicando por $(D - L)$ a ambos lados

$$Uv = \lambda(D - L)v$$

En particular, considerano la fila k y recordando quienes son lo coeficientes de D, L y U, tenemos

$$-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}v_j = \lambda(\sum_{j=1}^{k} a_{kj}v_j)$$

Separamos el término $k-$ésimo

$$-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}v_j = \lambda(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}v_j) + \lambda a_{kk}v_k$$

Pasamos restando

$$-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}v_j - \lambda(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}v_j) = \lambda a_{kk}v_k$$

Tomamos módulo

$$|-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}v_j - \lambda(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}v_j)| = |\lambda||a_{kk}||v_k|$$

Usamos que el módulo de una suma es menor o igual a la suma de los módulos

$$\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}||v_j| + |\lambda|(\sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}||v_j|) \geq |\lambda||a_{kk}||v_k|$$

Como $|v_k| > 0$ podemos pasar dividiendo

$$\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|\frac{|v_j|}{|v_k|} + |\lambda|(\sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|\frac{|v_j|}{|v_k|}) \geq |\lambda||a_{kk}|$$

Como $|\frac{|v_j|}{|v_k|} \leq 1$ por la elección de v_k, entonces podemos mayorar reemplazando por 1

$$\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}| + |\lambda|(\sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|) \geq |\lambda||a_{kk}|$$

Juntamos los términos que multiplican a $|\lambda|$

$$\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}| \geq |\lambda|(|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|)$$

Por ser A estrictamente diagonal dominante se verifica que $|a_{kk}| > \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|$. Por lo tanto el término que acompaña a $|\lambda|$ es positivo y podemos obtener

$$\frac{\sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|} \geq |\lambda|$$

Nuevamente, por ser A estrictamente diagonal dominante se verifica que este cociente es < 1.

Concluimos que cualquier autovalor de T_{GS} tiene módulo menor a 1 y entonces $\rho(T_{GS}) < 1$ por lo tanto la sucesión de Gauss Seidel converge desde cualquier x^0 inicial.

∎

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Métodos iterativos - Gauss Seidel en SDP - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de métodos iterativos usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19).
Este documento incluye la demostración de convergencia del método de Gauss Seidel para el caso de matrices simétricas definidas positivas.

Como paso previo al análisis de convergencia de Gauss Seidel vamos a probar una propiedad que nos resultará útil

Lema: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A - B - B^t$ es simétrica definida positiva. Entonces*

1. $A - B$ *es inversible*
2. $\rho(-(A - B)^{-1}B) < 1$

Demostración:

1. Supongamos que $A-B$ es singular. Entonces existe $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tal que $(A-B)v = 0$. Si multiplicamos por v^t, obtenemos
$$v^t(A - B)v = 0$$
$$v^tAv = v^tBv$$
Como A y $A - B - B^t$ son simétricas definidas positivas y $v \neq 0$
$$v^t(A)v = v^tBv > 0$$
$$v^t(A - B)v - v^tB^tv = v^t(A - B - B^t)v > 0$$
Pero como $v^t(A - B)v = 0$, entonces $v^tB^tv < 0$ lo cual nos lleva a una contradicción. Entonces $A - B$ es inversible.

2. Sea λ autovalor de $-(A-B)^{-1}B$ y w el autovector asociado. Queremos ver que $|\lambda| < 1$. Por definición

$$-(A-B)^{-1}Bw = \lambda w$$

Multiplicando por $(A-B)$

$$-Bw = \lambda(A-B)w$$

Multiplicando por w^t

$$-w^tBw = \lambda w^t(A-B)w = \lambda w^tAw - \lambda w^tBw$$

Agrupando los términos

$$(\lambda-1)w^tBw = \lambda w^tAw$$

Como A es definida positiva entonces $w^tAw > 0$ y por lo tanto podemos afirmar que $\lambda \neq 1$. Entonces podemos dividir por $\lambda - 1$

$$w^tBw = \frac{\lambda}{(\lambda-1)}w^tAw$$

Por otro lado tenemos que $A - B - B^t$ es simétrica definida positiva, entonces

$$w^t(A-B-B^t)w > 0$$

Distribuyendo

$$w^tAw - w^tBw - w^tB^tw > 0$$

Usando que $w^tBw = w^tB^tw$

$$w^tAw - 2w^tBw > 0$$

Usando que $w^tBw = \frac{\lambda}{(\lambda-1)}w^tAw$

$$w^tAw - 2\frac{\lambda}{(\lambda-1)}w^tAw > 0$$

$$(1-2\frac{\lambda}{(\lambda-1)})w^tAw > 0$$

Como A es definida positiva, entonces $(1-2\frac{\lambda}{(\lambda-1)})$ debe ser > 0.

Esto es válido sii $2\frac{\lambda}{(\lambda-1)} < 1$.

Si $\lambda > 1 \Rightarrow 2\lambda < \lambda - 1 \Rightarrow \lambda < 1$ lo cual es una contradicción.

Si $\lambda \leq -1 \Rightarrow 2\lambda > \lambda - 1 \Rightarrow \lambda > -1$ lo cual es una contradicción.

Como ya teniamos que $\lambda \neq 1$, entonces podemos afirmar que $|\lambda| < 1$.

Concluimos entonces que $\rho(-(A-b)^{-1}B) < 1$

$\blacksquare$

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva. El método de Gauss Seidel converge independientemente del x^0 inicial.*

Demostración:
Sabemos que $A = D - L - U$. Como A es simétrica $\Rightarrow U = L^t$.
De la expresión de A

$$A = D - L - U$$

Usando que $U = L^t$ y pasando términos

$$A + L^t + L = D$$
$$A - (-L^t) - (-L) = D$$

Como A es definida positiva $\Rightarrow d_{ii} > 0$ y por lo tanto D es una matriz diagonal definida positiva. Si llamamos $B = -L^t$, entonces $A - B - B^t$ es simétrica definida positiva y podemos aplicar el lema anterior y afirmar que $\rho(-(A-B)^{-1}B) < 1$

¿Qué matriz es $-(A-B)^{-1}B$?

$$-(A-B)^{-1}B = -(A+L^t)^{-1}(-L^t) = (A+L^t)^{-1}L^t = (D-L)^{-1}U$$

que no es otra cosa que la matriz T_{GS}. Concluimos que $\rho(T_{GS}) < 1$ y el método de Gauss Seidel converge independientemente del x^0 inicial.

$\blacksquare$

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Métodos iterativos - Jacobi en EDD - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de métodos iterativos usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19).
Este documento incluye la demostración de convergencia del método de Jacobi para el caso de matrices estrictamente diagonal dominante.

Proposición: *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz estrictamente diagonal dominante. El método de Jacobi converge independientemente del x^0 inicial.*

Demostración:
Escribimos a la matriz como $A = D - L - U$ donde D matriz diagonal con $d_{ii} = a_{ii}$, L matriz estrictamente triangular inferior con $l_{ij} = -aij$ para $i > j$ y U matriz estrictamente triangular superior con $u_{ij} = -aij$ para $i < j$. La matriz de iteración del método de Jacobi es $T_J = D^{-1}(L + U)$. Para poder asegurar la convergencia debemos ver que $\rho(T_J) < 1$.

Hay una propiedad que establece que $\rho(B) \leq ||B||$ para cualquier norma inducida. Por lo tanto, si mostramos alguna norma inducida de T_J que sea menor a 1 podremos asegurar la convergencia.

Vamos a trabajar con la norma ∞.

$$||T_J||_\infty = \max_{x:||x||_\infty=1} ||T_J x||_\infty$$

Por propiedades de la norma, sabemos que

$$||T_J||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} ||\text{ fila } i \text{ de } T_J||_1$$

Calculamos la norma 1 de las filas:

$$||\text{ fila } i \text{ de } T_J||_1 = \sum_{j=1,\dots,n} |T_{J_{ij}}| \overset{\substack{T_J = D^1(L+U) \\ \uparrow}}{=} \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Como la matriz A es estrictamente diagonal dominante podemos afirmar que $\sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii|}} < 1$ para todas sus filas. Por lo tanto $||T_J||_\infty < 1$, lo que implica que $\rho(T_J) < 1$ y el método de Jacobi es convergente independientemente del x^0 inicial. ■