Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2024

Práctica 4

Matrices ortogonales

Factorización QR

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   a) ¿Qué quiere decir que x sea ortogonal a y?

   b) Probar que $x \perp y$ (x, y no nulos) $\Rightarrow \{x, y\}$ es l.i.

   c) Dar un ejemplo de 2 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales, y 2 que no lo sean.

   d) ¿Es cierto que $\perp$ define una relación transitiva en $\mathbb{R}^n$?

2. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

   a) $Q^{-1} = Q^t$

   b) Las columnas de Q forman un conjunto ortonormal[1].

   c) Las filas de Q forman un conjunto ortonormal[1].

   d) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

   Interpretar (d) geométricamente.
   Sugerencia: para demostrar la implicación ($d \Rightarrow b$) usar que $x^t y = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$.

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonales. Probar que $A \cdot B$ es ortogonal.

4. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal. Probar que:

   a) $det(Q) = 1$ ó -1

   b) $\kappa_2\ (Q) = 1$

5. Sea $u_1, \ldots, u_n$ una base ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$, la coordenada de x respecto de u_k es igual a $u_k^t x$, para cualquier $k = 1, \ldots, n$.

6. ¿Cuáles de las siguientes matrices es necesariamente ortogonal?

   a) Permutación

   b) Simétrica definida positiva

   c) No singular

   d) Diagonal

7. Hallar la descomposición QR de la matriz A según los métodos de Givens y Householder, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$$

[1] $\{v_1, \ldots, v_n\}$ con $v_i \in \mathbb{R}^n$ se dice ortonormal si $v_i^t v_j = 0$ ($\forall i \neq j$) y $v_i^t v_i = 1$ ($\forall i : 1 \leqslant i \leqslant n$).

8. Verificar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y tiene descomposición QR, entonces R es no singular.

9. a) Sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y triangular superior. Demostrar que $\forall j = 1, \ldots, n$, $col_j(C) = \pm e_j$, donde e_j es el j-ésimo canónico de $\mathbb{R}^n$.

   b) Demostrar que si A es no singular, entonces la factorización $A = QR$ es única si los elementos de la diagonal de R son positivos.

10. Sea $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz ortogonal tal que:

$$Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿cuál debería ser el valor de α?

11. Sea $b \neq 0$ y la matriz A definida de la siguiente manera. Mostrar que si A es ortogonal, entonces sus elementos se pueden tomar como senos y cosenos de un ángulo θ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

12. Dadas dos matrices de Givens de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, G_1 y G_2, con ángulos θ y ω respectivamente, calcular e interpretar geométricamente G_1^2, G_1G_2 y $G_1^tG_1$. Pista: recordar las relaciones trigonométricas:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Para G_1, determinar el ángulo θ tal que

$$G_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

13. Sea $G \in \mathbb{R}^n$ una matriz de rotación de Givens con un ángulo asociado $\theta \in [-\pi, \pi)$. Demostrar que G es definida positiva si y sólo si $|\theta| < \pi/2$.

14. Considerar la transformación de Householder $P := I - 2uu^t$ con $u = e_i$. Calcular explícitamente P e interpretar geométricamente Px con $x \in \mathbb{R}^n$.

15. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\|_2 = 1$. Demostrar que la matriz $Q := I - 2uu^t$ es ortogonal y simétrica.

16. Sean x, y dos vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Demostrar que la elección $v := x - y$ conduce a una transformación de Householder $H := I - \frac{2vv^t}{\|v\|^2}$ tal que $Hx = y$ y $Hy = x$.

17. Sea $U = I - 2uu^t$ un reflector ortogonal. Sea x tal que $x = v + w$ con v múltiplo de u y w ortogonal a u. Mostrar que $Ux = -v + w$. Interpretar geométricamente en $\mathbb{R}^n$.

18. Sea $H_v = I - 2(vv^t)/(v^tv)$ la transformación de Housholder asociada al vector $v \in \mathbb{R}^n$.

   a) Sean dos matrices $V, W \in \mathbb{R}^{n\times k}$, y sea $G = I + VW^t$. Mostrar que $H_vG = I + VW^t + vw^t$, con $w = \dfrac{-2(v + WV^tv)}{v^tv}$.

¡ b) Demostrar que el producto de k reflectores de Householder puede escribirse como $I + VW^t$, con $V, W \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

19. Demostrar que cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede factorizarse como $A = QL$, con Q ortogonal y L triangular inferior.
Sugerencia: considerar la factorización QR de la matriz A con las columnas de A en orden inverso, es decir, de AP, con P una matriz de permutación conveniente.

20. Se desea hallar la factorización $A = RQ$ de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con R triangular superior y Q ortogonal. Sea $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular superior tal que $R = P\widetilde{R}^t P$ y $Q = P\widetilde{Q}^t$, donde $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de permutación definida como:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que R es triangular superior y Q es ortogonal.

b) Probar que $A = RQ$ si y sólo si $(PA)^t = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ es la factorización QR de $(PA)^t$.

c) Describir un algoritmo para realizar la factorización RQ asumiendo disponible una función que calcula la factorización QR.

Resolver en computadora

i Sea el sistema lineal $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Usando los métodos de Householder y Givens, se pide:

a) Resolver el sistema

b) Calcular explícitamente la factorización QR de A

c) Calcular la cantidad de operaciones realizadas

ii Para cada una de las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{6\times 4}$, calcular el rango de cada matriz y su factorización QR. Observar la forma de la matriz R para cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Funciones útiles

Tanto Matlab[1] como Numpy[2] proveen funciones para calcular la descomposición QR de una matriz.

- En Matlab:

```
[Q,R] = qr(A)
```

- En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A = matrix([[8,2],[2,4],[5,3]], float)
Q, R = qr(A)
```

Notar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ no es cuadrada, como en el ejemplo, la matriz R retornada es de $k \times n$ donde $k = \text{mín}(m, n)$.

Referencias

[1] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[2] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

[1] http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/qr.html
[2] http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.qr.html