

Métodos Numéricos-2024

Autovalores



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A si existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A si existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Radio espectral de A : $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A sii existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Radio espectral de A : $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

- $A - \lambda I$ es una matriz singular

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A sii existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Radio espectral de A : $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

- $A - \lambda I$ es una matriz singular
- Polinomio característico: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
 λ es autovalor sii λ es raíz de $P(\lambda)$

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A sii existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Radio espectral de A : $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

- $A - \lambda I$ es una matriz singular
- Polinomio característico: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
 λ es autovalor sii λ es raíz de $P(\lambda)$
- A tiene n autovalores, algunos pueden tener multiplicidad mayor a 1.

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A sii existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Radio espectral de A : $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

- $A - \lambda I$ es una matriz singular
- Polinomio característico: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
 λ es autovalor sii λ es raíz de $P(\lambda)$
- A tiene n autovalores, algunos pueden tener multiplicidad mayor a 1.
- Si v es autovector, entonces αv es autovector.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -6 & -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -6 & -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (7 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} + \\ &(-6) \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 - \lambda & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -6 & -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (7 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} + \\ &\quad (-6) \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 - \lambda & 0 \end{bmatrix} \\ &= (7 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda) + (-6)(-(2 - \lambda)3) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -6 & -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (7 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 - \lambda \end{bmatrix} + \\ &\quad (-6) \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 - \lambda & 0 \end{bmatrix} \\ &= (7 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda) + (-6)(-(2 - \lambda)3) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$\text{Autovalores: } \lambda^1 = 2 \quad \lambda^2 = 4 \quad \lambda^3 = 1$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = 2$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = 2$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$5v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$$

$$-6v_1 - 2v_2 - 4v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = 2$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$5v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0 \implies v_1 = -v_3 \quad v_2 = v_3$$

$$-6v_1 - 2v_2 - 4v_3 = 0$$

$$v^1 = (-1, 1, 1)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^2 = 4$

$$(A - \lambda^2 I)v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^2 = 4$

$$(A - \lambda^2 I)v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$3v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$0v_1 - 2v_2 + 0v_3 = 0$$

$$-6v_1 - 2v_2 - 6v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^2 = 4$

$$(A - \lambda^2 I)v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$3v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$0v_1 - 2v_2 + 0v_3 = 0 \implies v_1 = -v_3 \quad v_2 = 0$$

$$-6v_1 - 2v_2 - 6v_3 = 0$$

$$v^2 = (-1, 0, 1)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 1$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 1$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$6v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$0v_1 + 1v_2 + 0v_3 = 0$$

$$-6v_1 - 2v_2 - 3v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 1$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$6v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$$

$$0v_1 + 1v_2 + 0v_3 = 0 \implies v_3 = -2v_1 \quad v_2 = 0$$

$$-6v_1 - 2v_2 - 3v_3 = 0$$

$$v^3 = (1, 0, -2)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = 2 \quad v^1 = (-1, 1, 1)$$

$$\lambda^2 = 4 \quad v^2 = (-1, 0, 1)$$

$$\lambda^3 = 1 \quad v^3 = (1, 0, -2)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = 2 \quad v^1 = (-1, 1, 1)$$

$$\lambda^2 = 4 \quad v^2 = (-1, 0, 1)$$

$$\lambda^3 = 1 \quad v^3 = (1, 0, -2)$$

Observación

3 autovalores distintos

3 autovectores (uno por autovalor) linealmente independientes
(BASE!)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$\text{Autovalores: } \lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda^3 = 2$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0 \implies v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$v^1 = (1, 0, 0) \quad v^2 = (0, 1, 0)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 - 1v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 - 1v_2 + 1v_3 = 0 \implies v_1 = v_3 \quad v_2 = v_3$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$$

$$v^3 = (1, 1, 1)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0), v^2 = (0, 1, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (1, 1, 1)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0), v^2 = (0, 1, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (1, 1, 1)$$

Observación

3 autovalores, uno de ellos con multiplicidad 2

3 autovectores (uno por autovalor contando multiplicidad)
linealmente independientes (BASE!)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$\text{Autovalores: } \lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda^3 = 2$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$0v_1 + 1v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$0v_1 + 1v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0 \implies v_2 + v_3 = 0 \quad v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0$$

$$v^1 = (1, 0, 0)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$0v_1 - 1v_2 + 1v_3 = 0$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

$$0v_1 - 1v_2 + 1v_3 = 0 \implies v_1 = 2v_2 \quad v_3 = v_2$$

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$$

$$v^3 = (2, 1, 1)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (2, 1, 1)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (2, 1, 1)$$

Observación

3 autovalores, uno de ellos con multiplicidad 2

2 autovectores (uno por autovalor distinto) linealmente independientes (NO es base!)

Algunas propiedades

- λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$

Algunas propiedades

- λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$
- λ autovalor de A y v autovector asociado $\Rightarrow (\lambda)^k$ es autovalor de A^k con v autovector asociado.

Algunas propiedades

- λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$
- λ autovalor de A y v autovector asociado $\Rightarrow (\lambda)^k$ es autovalor de A^k con v autovector asociado.
- Q matriz ortogonal \Rightarrow sus autovalores reales son 1 o -1

Algunas propiedades

- λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$
- λ autovalor de A y v autovector asociado $\Rightarrow (\lambda)^k$ es autovalor de A^k con v autovector asociado.
- Q matriz ortogonal \Rightarrow sus autovalores reales son 1 o -1
- Si $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ son autovalores distintos con autovectores asociados v^1, v^2, \dots, v^k , entonces los autovectores son linealmente independientes.

Algunas propiedades

- λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$
- λ autovalor de A y v autovector asociado $\Rightarrow (\lambda)^k$ es autovalor de A^k con v autovector asociado.
- Q matriz ortogonal \Rightarrow sus autovalores reales son 1 o -1
- Si $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ son autovalores distintos con autovectores asociados v^1, v^2, \dots, v^k , entonces los autovectores son linealmente independientes.
- A y A^t tienen los mismos autovalores.

Disco de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|$ para $i = 1, \dots, n$

Disco de Gershgorin

$$D_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Disco de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|$ para $i = 1, \dots, n$

Disco de Gershgorin

$$D_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Sea λ autovalor de $A \implies \lambda \in D_i$ para algún $i = 1, \dots, n$

Disco de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|$ para $i = 1, \dots, n$

Disco de Gershgorin

$$D_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Sea λ autovalor de $A \implies \lambda \in D_i$ para algún $i = 1, \dots, n$

Si $M = D_{i_1} \cup D_{i_2} \dots D_{i_m}$ es disjunto con la unión de los restantes discos D_j entonces hay exactamente m autovalores de A (contados con su multiplicidad) en M .

Disco de Gershgorin-Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 3 \quad \lambda^3 = -2$$

Disco de Gershgorin-Ejemplos

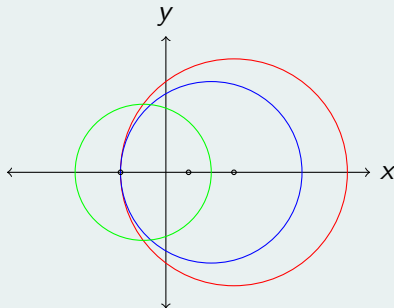
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 3 \quad \lambda^3 = -2$$

$$D_1 = \{x : |x - 3| \leq 5\}$$

$$D_2 = \{x : |x - 2| \leq 4\}$$

$$D_3 = \{x : |x + 1| \leq 3\}$$



Disco de Gershgorin-Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda^1 = i \quad \lambda^2 = -i \quad \lambda^3 = 4$$

Disco de Gershgorin-Ejemplos

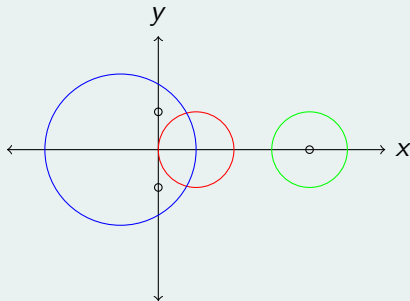
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = i \quad \lambda^2 = -i \quad \lambda^3 = 4$$

$$D_1 = \{x : |x - 1| \leq 1\}$$

$$D_2 = \{x : |x + 1| \leq 2\}$$

$$D_3 = \{x : |x - 4| \leq 1\}$$



Definición: $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son matrices semejantes si existe $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matriz inversible, tal que

$$A = P^{-1}BP$$

Definición: $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son matrices semejantes si existe $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matriz inversible, tal que

$$A = P^{-1}BP$$

Propiedad: Si A y B son semejantes tienen los mismos autovalores.

Definición: $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son matrices semejantes si existe $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matriz inversible, tal que

$$A = P^{-1}BP$$

Propiedad: Si A y B son semejantes tienen los mismos autovalores.

Definición: A es diagonalizable por semejanza si es semejante a una matriz diagonal.

Definición: $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son matrices semejantes si existe $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matriz inversible, tal que

$$A = P^{-1}BP$$

Propiedad: Si A y B son semejantes tienen los mismos autovalores.

Definición: A es diagonalizable por semejanza si es semejante a una matriz diagonal.

Propiedad: A es diagonalizable por semejanza sii los autovectores forman una base.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = 2 \quad v^1 = (-1, 1, 1)$$

$$\lambda^2 = 4 \quad v^2 = (-1, 0, 1)$$

$$\lambda^3 = 1 \quad v^3 = (1, 0, -2)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = 2 \quad v^1 = (-1, 1, 1)$$

$$\lambda^2 = 4 \quad v^2 = (-1, 0, 1)$$

$$\lambda^3 = 1 \quad v^3 = (1, 0, -2)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = P^{-1}DP$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0), v^2 = (0, 1, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (1, 1, 1)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0), v^2 = (0, 1, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (1, 1, 1)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = P^{-1}DP$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A es simétrica, sus autovalores son reales.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A es simétrica, sus autovalores son reales.
- Si A tiene un autovalor real, entonces existe un autovector asociado con coeficientes reales.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A es simétrica, sus autovalores son reales.
- Si A tiene un autovalor real, entonces existe un autovector asociado con coeficientes reales.
- Sea A es simétrica y λ^1 y λ^2 autovalores distintos con v^1 y v^2 autovectores asociados. Entonces v^1 y v^2 son ortogonales.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A es simétrica, sus autovalores son reales.
- Si A tiene un autovalor real, entonces existe un autovector asociado con coeficientes reales.
- Sea A es simétrica y λ^1 y λ^2 autovalores distintos con v^1 y v^2 autovectores asociados. Entonces v^1 y v^2 son ortogonales.
- Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal. λ es autovalor de $A \Leftrightarrow \lambda$ es autovalor de $Q^t A Q$.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A tiene todos sus autovalores reales, existe $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal tal que $Q^t A Q = T$ con $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz triangular superior.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A tiene todos sus autovalores reales, existe $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal tal que $Q^t A Q = T$ con $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz triangular superior.
- Si A es simétrica, entonces T es diagonal. Los elementos de la diagonal de T son los autovalores y las columnas de Q los autovectores.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A tiene todos sus autovalores reales, existe $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal tal que $Q^t A Q = T$ con $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz triangular superior.
- Si A es simétrica, entonces T es diagonal. Los elementos de la diagonal de T son los autovalores y las columnas de Q los autovectores.
- Si A es simétrica tiene base de autovectores.

Autovalores-Método de la potencia

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ sus n autovalores con v^1, \dots, v^n los autovectores asociados que conforman una base.

Supongamos que $|\lambda^1| > |\lambda^2|, \dots, \geq |\lambda^n|$.

Autovalores-Método de la potencia

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ sus n autovalores con v^1, \dots, v^n los autovectores asociados que conforman una base.

Supongamos que $|\lambda^1| > |\lambda^2|, \dots, \geq |\lambda^n|$.

Dado $q^0 \in \mathbb{R}^n$, $\|q^0\|_2 = 1$, la sucesión $\{q^k\}$ definida como

$$q^k = \frac{A^k q^0}{\|A^k q^0\|}$$

Para $k=1, \dots$

$$z^k = Aq^{k-1}$$

$$q^k = \frac{z^k}{\|z^k\|_2} = \frac{Aq^{k-1}}{\|Aq^{k-1}\|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v_1$$

converge al autovector v^1 . Además $\lambda_k = (q^k)^t A q^k$ converge a λ^1 .

Autovalores-Método de deflación

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

λ^1 autovalor con v^1 autovector asociado, $\|v^1\|_2 = 1$

Sea $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal tal que $Hv^1 = e_1$

$$HAH^t = \begin{bmatrix} \lambda^1 & a^t \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Como A y HAH^t tienen los mismo autovalores, los otros autovalores de A corresponden a los autovalores de B .

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Analysis, Roger Horn and Charles Johnson, Cambridge Univ Press, 2010.
- Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Carl Meyer, SIAM, 2000.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Pearson, 2018.
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.