Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Clase 06 - 15/05/2024

Métodos Numéricos - 1er Cuatrimestre 2024
Gonzalo Ruarte

Definiciones

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$

Definiciones

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$
- Entonces A se puede factorizar como $A = U\Sigma V^t$ donde:

Definiciones

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$
- Entonces A se puede factorizar como $A = U \Sigma V^t$ donde:
    - $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es ortogonal.
    - $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal.
    - $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal.

Definiciones

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$
- Entonces A se puede factorizar como $A = U \Sigma V^t$ donde:
  - $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es ortogonal.
  - $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal.
  - $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal.
  - $\sigma_{11} \geqslant \sigma_{22} \ldots \geqslant \sigma_{rr} > 0$
  - $\sigma_{ii} = 0 \; \forall \; i > r$

Definiciones

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$
- Entonces A se puede factorizar como $A = U\Sigma V^t$ donde:
  - $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es ortogonal.
  - $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal.
  - $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal.
  - $\sigma_{11} \geqslant \sigma_{22} \ldots \geqslant \sigma_{rr} > 0$
  - $\sigma_{ii} = 0 \ \forall \ i > r$
  - Los σ_{ii} son los valores singulares (en general los notamos con σ_i en lugar de σ_{ii}).

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$.

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior?

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- AA^t

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t$ (es simétrica)

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U \Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U \Sigma V^t)^t = U \Sigma V^t V \Sigma^t U^t$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ ($\Sigma = \Sigma^t$?)

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^t A = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^t A = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$ $(D = D'?)$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^t A = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^t A = VD' V^t$ con $D' = \Sigma^t \Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^t A = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^t A v_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^tA = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^tAv_i = V\Sigma^t\Sigma V^t v_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^tA = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^tAv_i = V\Sigma^t\Sigma V^t v_i = V\Sigma^t\Sigma e_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^tA = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^tAv_i = V\Sigma^t\Sigma V^t v_i = V\Sigma^t\Sigma e_i = V\Sigma^t\sigma_i e_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^tA = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^tAv_i = V\Sigma^t\Sigma V^t v_i = V\Sigma^t\Sigma e_i = V\Sigma^t\sigma_i e_i = V\Sigma^t e_i\sigma_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^tA = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^tAv_i = V\Sigma^t\Sigma V^t v_i = V\Sigma^t\Sigma e_i = V\Sigma^t\sigma_i e_i = V\Sigma^t e_i\sigma_i = Ve_i\sigma_i\sigma_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$ $= UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^tA = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t\Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^tAv_i = V\Sigma^t\Sigma V^t v_i = V\Sigma^t\Sigma e_i = V\Sigma^t\sigma_i e_i = V\Sigma^t e_i\sigma_i = Ve_i\sigma_i\sigma_i$ $= v_i\sigma_i^2 = \sigma_i^2 v_i$

Propiedades

- Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, qué podemos decir de B si es simétrica? (recordar práctica 5).
- $B = QDQ^t$
- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. ¿Cómo podemos hacer uso de la propiedad anterior? ¿Podemos construir una matriz simétrica a partir de A?
- $AA^t = (AA^t)^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t = UDU^t$ con $D = \Sigma\Sigma^t$
- Con un razonamiento similar llegamos a $A^t A = VD'V^t$ con $D' = \Sigma^t \Sigma$
- Qué podemos decir de U y de V?
- Sea v_i columna de V con $1 \leqslant i \leqslant n$ (para u_i y U el razonamiento es similar):
- $A^t A v_i = V\Sigma^t \Sigma V^t v_i = V\Sigma^t \Sigma e_i = V\Sigma^t \sigma_i e_i = V\Sigma^t e_i \sigma_i = V e_i \sigma_i \sigma_i = v_i \sigma_i^2 = \sigma_i^2 v_i$, entonces v_i es autovector de $A^t A$ con autovalor σ_i^2 asociado.

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i$

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i$

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i$

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = Ue_i\sigma_i$

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = Ue_i\sigma_i = u_i\sigma_i$ $\Rightarrow u_i = Av_i/\sigma_i$
- Análogamente $v_i = A^t u_i/\sigma_i$

$$A^t = V\Sigma U^t \Rightarrow A^t u_i = V\Sigma U^t u_i = V\Sigma e_i = V e_i \sigma_i = v_i \sigma_i$$

$$\Rightarrow v_i = \frac{A^t u_i}{\sigma_i}$$

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = Ue_i\sigma_i = u_i\sigma_i$ $\Rightarrow u_i = Av_i/\sigma_i$
- Análogamente $v_i = A^t u_i/\sigma_i$
- De qué nos sirve esto?

Propiedades

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con rango $r \leqslant min(n, m)$ tal que $A = U\Sigma V^t$. Sean v_i, u_i columnas de V y de U respectivamente con $1 \leqslant i \leqslant r$.
- $A = U\Sigma V^t \Rightarrow Av_i = U\Sigma V^t v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = Ue_i\sigma_i = u_i\sigma_i$
  $\Rightarrow u_i = Av_i/\sigma_i$
- Análogamente $v_i = A^t u_i/\sigma_i$
- De qué nos sirve esto? En principio podemos obtener las primeras r columnas de U a partir de V (y Σ) y viceversa.
- Para las columnas restantes qué hacemos? Nos basta con calcular los autovectores y autovalores de $A^t A$ para conseguir tanto V como U?

Propiedades

- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

Propiedades

- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.
- Entonces $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{r\times n-r}$, $\Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m-r\times r}$, $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m-r\times n-r}$, $U_{11} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $U_{12} \in \mathbb{R}^{m\times m-r}$, $V_{11} \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $V_{21} \in \mathbb{R}^{n-r\times n}$.

Propiedades

- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.
- Entonces $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{r\times n-r}, \Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m-r\times r}, \Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m-r\times n-r}$, $U_{11} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $U_{12} \in \mathbb{R}^{m\times m-r}$, $V_{11} \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $V_{21} \in \mathbb{R}^{n-r\times n}$.
- Además $\Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22} = 0$

Propiedades

- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.
- Entonces $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{r \times n-r}, \Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m-r \times r}, \Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m-r \times n-r}$, $U_{11} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $U_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m-r}$, $V_{11} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $V_{21} \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$.
- Además $\Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22} = 0$
- Resumen: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$

Propiedades

- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.
- Entonces $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{r \times n-r}, \Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m-r \times r}, \Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m-r \times n-r}$, $U_{11} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $U_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m-r}$, $V_{11} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $V_{21} \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$.
- Además $\Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22} = 0$
- Resumen: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$
- Si hacemos las cuentas nos queda $A = U_{11} \Sigma_{11} V_{11}$.

Propiedades

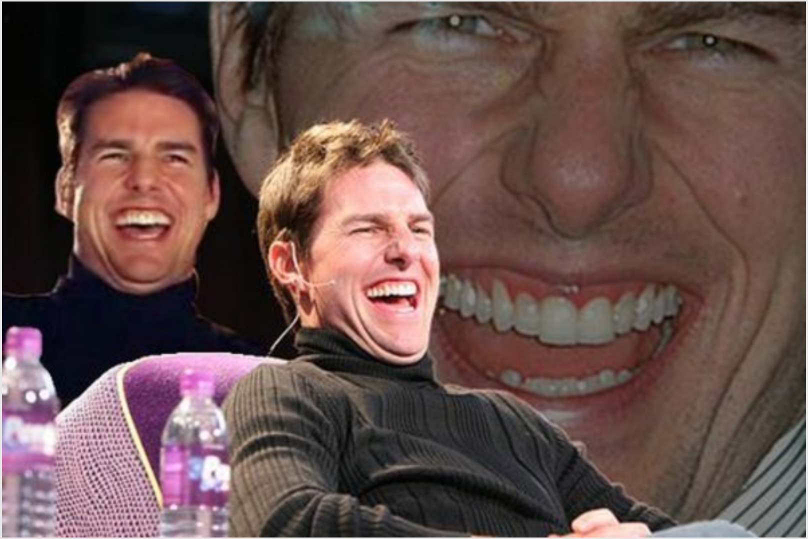
- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.
- Entonces $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{r \times n-r}$, $\Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m-r \times r}$, $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m-r \times n-r}$, $U_{11} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $U_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m-r}$, $V_{11} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $V_{21} \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$.
- Además $\Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22} = 0$
- Resumen: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$
- Si hacemos las cuentas nos queda $A = U_{11} \Sigma_{11} V_{11}$.
- La slide anterior nos decía que de las primeras r columnas de U podemos ir a las primeras r columnas de V trivialmente y viceversa.

Propiedades

- Pensemos la factorización SVD en bloques: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ con $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.
- Entonces $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{r \times n-r}, \Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m-r \times r}, \Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m-r \times n-r}, U_{11} \in \mathbb{R}^{m \times r}, U_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m-r}, V_{11} \in \mathbb{R}^{r \times n}, V_{21} \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$.
- Además $\Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22} = 0$
- Resumen: $A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$
- Si hacemos las cuentas nos queda $A = U_{11}\Sigma_{11}V_{11}$.
- La slide anterior nos decía que de las primeras r columnas de U podemos ir a las primeras r columnas de V trivialmente y viceversa.
- Ahora además sabemos que para las columnas de U restantes (o filas de V^t) debemos completarlas de forma tal que nos quede una matriz ortogonal, pero no es necesario conseguir los autovectores y autovalores tanto de A^tA como de AA^t, con una sola de ellas nos basta.

Con esto pueden hacer toda la práctica 6.

Con esto pueden hacer toda la práctica 6.



Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t$

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t$

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$
- Nombro $D = \Sigma\Sigma^t$, y obtengo $A = UDU^t$

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$
- Nombro $D = \Sigma\Sigma^t$, y obtengo $A = UDU^t$
- Si en Σ los valores de la diagonal están ordenados de mayor a menor, en D también porque son los mismos valores al cuadrado.

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$
- Nombro $D = \Sigma\Sigma^t$, y obtengo $A = UDU^t$
- Si en Σ los valores de la diagonal están ordenados de mayor a menor, en D también porque son los mismos valores al cuadrado.
- Obtuve una diagonalización (ortogonal) de A que a su vez cumple con la definición de SVD.

Ejercicio

7) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

- A es SDP $\Rightarrow A = LL^t$
- $L = U\Sigma V^t$
- Por ej 1 P6 U son los autovectores de A puestos como columnas. Por definición de SVD en Σ están ordenados de mayor a menor los valores singulares de L.
- $LL^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$
- Nombro $D = \Sigma\Sigma^t$, y obtengo $A = UDU^t$
- Si en Σ los valores de la diagonal están ordenados de mayor a menor, en D también porque son los mismos valores al cuadrado.
- Obtuve una diagonalización (ortogonal) de A que a su vez cumple con la definición de SVD.
- Por lo tanto los valores singulares de A coinciden con sus autovalores.

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular A^tA y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^tA)_{ij} =$

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.
- Entonces $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal con sus elementos de la diagonal positivos.

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.
- Entonces $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal con sus elementos de la diagonal positivos.
- Sus autovectores son la base canónica (matriz identidad).

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.
- Entonces $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal con sus elementos de la diagonal positivos.
- Sus autovectores son la base canónica (matriz identidad).
- Si $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ... \geqslant \alpha_n$, entonces podría decir que $\Sigma = D$ con $d_{ii} = \alpha_i$ y $V = I_n$

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.
- Entonces $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal con sus elementos de la diagonal positivos.
- Sus autovectores son la base canónica (matriz identidad).
- Si $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ... \geqslant \alpha_n$, entonces podría decir que $\Sigma = D$ con $d_{ii} = \alpha_i$ y $V = I_n$
- Para obtener U pongo los w_i / α_i como columnas (para que tengan norma $= 1$) y completo con el complemento ortogonal.

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.
- Entonces $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal con sus elementos de la diagonal positivos.
- Sus autovectores son la base canónica (matriz identidad).
- Si $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ... \geqslant \alpha_n$, entonces podría decir que $\Sigma = D$ con $d_{ii} = \alpha_i$ y $V = I_n$
- Para obtener U pongo los w_i / α_i como columnas (para que tengan norma $= 1$) y completo con el complemento ortogonal.
- Como no estamos seguros de que $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ... \geqslant \alpha_n$ defino matrices de permutación B y C que reordenan los elementos de D de mayor a menor.

Ejercicio

8) Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortogonales $w1, w2, ..., wn$ donde $||w_i||_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

- A tiene columnas ortogonales $\Rightarrow (A^t A)_{ij} = \ \alpha_i^2$ si i=j, 0 sino.
- Entonces $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal con sus elementos de la diagonal positivos.
- Sus autovectores son la base canónica (matriz identidad).
- Si $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ... \geqslant \alpha_n$, entonces podría decir que $\Sigma = D$ con $d_{ii} = \alpha_i$ y $V = I_n$
- Para obtener U pongo los w_i/α_i como columnas (para que tengan norma $= 1$) y completo con el complemento ortogonal.
- Como no estamos seguros de que $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant ... \geqslant \alpha_n$ defino matrices de permutación B y C que reordenan los elementos de D de mayor a menor.
- Entonces $A = UB^t BDCC^t V^t = U' \Sigma' V'^t$ donde $U' = UB^t, \Sigma' = BDC, V'^t = C^t V^t = C^t$

Ejercicio

9) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geqslant n$, con A = Q $\binom{R}{0}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

- $A = Q\binom{R}{0} = Q\binom{U\Sigma V^t}{0}$

Ejercicio

9) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con A = Q $\binom{R}{0}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

- $A = Q\binom{R}{0} = Q\binom{U\Sigma V^t}{0}$
- Podemos reescribir esto convenientemente como una multiplicación de matrices?

Ejercicio

9) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con A = Q $\binom{R}{0}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

- $A = Q\binom{R}{0} = Q\binom{U\Sigma V^t}{0}$
- Podemos reescribir esto convenientemente como una multiplicación de matrices?
- $\binom{U\Sigma V^t}{0} = \binom{U\Sigma}{0} V^t$

Ejercicio

9) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con A = Q $\binom{R}{0}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

- $A = Q\binom{R}{0} = Q\binom{U\Sigma V^t}{0}$
- Podemos reescribir esto convenientemente como una multiplicación de matrices?
- $\binom{U\Sigma V^t}{0} = \binom{U\Sigma}{0} V^t$
- $\binom{U\Sigma}{0} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \binom{\Sigma}{0}$ metemos la I para asegurarnos la ortogonalidad de la matriz.

Ejercicio

9) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geqslant n$, con A = Q $\binom{R}{0}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

- $A = Q\binom{R}{0} = Q\binom{U\Sigma V^t}{0}$
- Podemos reescribir esto convenientemente como una multiplicación de matrices?
- $\binom{U\Sigma V^t}{0} = \binom{U\Sigma}{0} V^t$
- $\binom{U\Sigma}{0} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\binom{\Sigma}{0}$ metemos la I para asegurarnos la ortogonalidad de la matriz.
- $A = Q\binom{R}{0} = Q\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\binom{\Sigma}{0} V^t$ es la descomposición SVD que buscábamos.

Ejercicio

9) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con A = Q $\binom{R}{0}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

- $A = Q\binom{R}{0} = Q\binom{U\Sigma V^t}{0}$
- Podemos reescribir esto convenientemente como una multiplicación de matrices?
- $\binom{U\Sigma V^t}{0} = \binom{U\Sigma}{0} V^t$
- $\binom{U\Sigma}{0} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \binom{\Sigma}{0}$ metemos la I para asegurarnos la ortogonalidad de la matriz.
- $A = Q\binom{R}{0} = Q\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\binom{\Sigma}{0} V^t$ es la descomposición SVD que buscábamos.
- $U' = Q\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, producto de ortogonales es ortogonal.

Ejercicio de parcial

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que rg(A) = r > 1 y $A = U\Sigma V^t$ su descomposición SVD. Sean además $u_1, ..., u_n$ las columnas de U, $v1, ..., v_n$ las columnas de V, y $\sigma_1, ..., \sigma_r$ sus valores singulares no nulos. Siendo B = A - $\sigma_1 u_1 v_1^t$, probar:

1. $v_1 \in Nu(B)$
2. $Bw = Aw$ para todo vector w ortogonal a v_1.
3. $\sigma_2, ..., \sigma_r$ son valores singulares de B.
4. Los vectores $v_2, ..., v_r$ se encuentran en el espacio fila de B.