

Métodos Numéricos 2024

Sistemas de ecuaciones lineales Eliminación Gaussiana



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Sistemas de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin \text{Im}(A)$, el sistema no tiene solución.

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin \text{Im}(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in \text{Im}(A)$, puede existir única solución o infinitas.
¿De qué depende?

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin \text{Im}(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in \text{Im}(A)$, puede existir única solución o infinitas.
¿De qué depende?

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, $B \in R^{n \times n}$, $d \in R^n$

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin \text{Im}(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in \text{Im}(A)$, puede existir única solución o infinitas.
¿De qué depende?

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, $B \in R^{n \times n}$, $d \in R^n$

Los sistemas $Ax = b$ y $Bx = d$ son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

$D \in R^{n \times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

$D \in R^{n \times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

- Si $d_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_i = b_i / d_{ii} \text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

$\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales.

$D \in R^{n \times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

- Si $d_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_i = b_i / d_{ii} \text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

$\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales.

- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n / u_{nn} \quad (1c)$$

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n / u_{nn} \quad (1c)$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n) / u_{n-1n-1} \quad (1c + 1p + 1r)$$

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n / u_{nn} \quad (1c)$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n) / u_{n-1n-1} \quad (1c + 1p + 1r)$$

$$\vdots$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j) / u_{ii} \quad (1c + (n-i)p + (n-i)r)$$

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n / u_{nn} \quad (1c)$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n) / u_{n-1n-1} \quad (1c + 1p + 1r)$$

$$\vdots$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j) / u_{ii} \quad (1c + (n-i)p + (n-i)r)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n u_{1j}x_j) / u_{11} \quad (1c + (n-1)p + (n-1)r)$$

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, existe solución y es única.

$$x_n = b_n / u_{nn} \quad (1c)$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n) / u_{n-1n-1} \quad (1c + 1p + 1r)$$

$$\vdots$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j) / u_{ii} \quad (1c + (n-i)p + (n-i)r)$$

$$\vdots$$

$$x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n u_{1j}x_j) / u_{11} \quad (1c + (n-1)p + (n-1)r)$$

Backward substitution, $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales.

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

$L \in R^{n \times n}$ matriz triangular inferior, $b \in R^n$

- Solución similar al caso de triangular superior, comenzando desde x_1 hasta x_n . Forward substitution.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$$A \in R^{n \times n}, b \in R^n$$

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$$A \in R^{n \times n}, b \in R^n$$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$$A \in R^{n \times n}, b \in R^n$$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.
- ¿Como hacerlo? Sumar/restar ecuaciones, multiplicar ecuaciones por un escalar, permutar ecuaciones.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$$A \in R^{n \times n}, b \in R^n$$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.
- ¿Como hacerlo? Sumar/restar ecuaciones, multiplicar ecuaciones por un escalar, permutar ecuaciones.

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array}$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array} \right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2 \end{array}}$$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow F_4 - (-1)F_3$$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{F_4 - (-1)F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right]$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$$x_4 = 16$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$$x_4 = 16$$

$$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$$x_4 = 16$$

$$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$$

$$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$$x_4 = 16$$

$$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$$

$$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$$

$$x_1 = (13 - x_2 + x_3 - 3x_4)/2 = 1$$

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$$x_4 = 16$$

$$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$$

$$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$$

$$x_1 = (13 - x_2 + x_3 - 3x_4)/2 = 1$$

$$\text{Solución } (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -30, 7, 16)$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: primer paso

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & b_n^0 \end{array} \right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: primer paso

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & b_n^0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} F_2 - (a_{21}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_i - (a_{i1}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_n - (a_{n1}^0/a_{11}^0)F_1 \end{array}$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: primer paso

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & | & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & | & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & | & b_n^0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} F_2 - (a_{21}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_i - (a_{i1}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_n - (a_{n1}^0/a_{11}^0)F_1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 & | & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & | & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{in}^1 & | & b_i^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 & | & b_n^1 \end{bmatrix}$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: paso i-esimo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & b_1^{i-1} \\ \color{red}{0} & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & b_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & b_i^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & b_n^{i-1} \end{array} \right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: paso i-esimo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & b_1^{i-1} \\ \color{red}{0} & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & b_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & b_i^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & b_n^{i-1} \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} F_{i+1} - (a_{i+1i}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \\ \vdots \\ F_n - (a_{ni}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \end{array}$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: paso i-esimo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & b_1^{i-1} \\ 0 & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & b_2^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & b_i^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & b_n^{i-1} \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} F_{i+1} - (a_{i+1i}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \\ \vdots \\ F_n - (a_{ni}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1i}^i & a_{1i+1}^i & \cdots & a_{1n}^i & b_1^i \\ 0 & a_{22}^i & \cdots & a_{2i}^i & a_{2i+1}^i & \cdots & a_{2n}^i & b_2^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^i & a_{ii+1}^i & \cdots & a_{in}^i & b_i^i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1i+1}^i & \cdots & a_{i+1n}^i & b_{i+1}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni+1}^i & \cdots & a_{nn}^i & b_n^i \end{array} \right]$$

El algoritmo: último paso

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{n-1} & a_{12}^{n-1} & \dots & a_{1i}^{n-1} & \dots & a_{1n}^{n-1} & b_1^{n-1} \\ 0 & a_{22}^{n-1} & \dots & a_{2i}^{n-1} & \dots & a_{2n}^{n-1} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii}^{n-1} & \dots & a_{in}^{n-1} & b_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{array} \right]$$

Esquema básico

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$$

Para $k = i$ a $n + 1$

$$a_{jk}^i = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$$

Fin

Fin

Fin

Método de Eliminación Gaussiana

Esquema básico

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$$

Para $k = i$ a $n + 1$

$$a_{jk}^i = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$$

Fin

Fin

Fin

Condición necesaria: $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ para todo $i = 1, n - 1$

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?

Método de Eliminación Gaussiana

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?

Si en el paso i -ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?

Si en el paso i -ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji}^{i-1} = 0$ para todo $j = i + 1$ a n . En este caso, la columna i -ésima desde la posición $i + 1$ a la n ya tiene los coeficientes nulos, por lo cual puede procederse al próximo paso del algoritmo.

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?

Si en el paso i -ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji}^{i-1} = 0$ para todo $j = i + 1$ a n . En este caso, la columna i -ésima desde la posición $i + 1$ a la n ya tiene los coeficientes nulos, por lo cual puede procederse al próximo paso del algoritmo.
- existe $a_{j'i}^{i-1} \neq 0$ para algún $j' \geq i + 1$. En este caso, basta permutar la fila i con la j' y continuar con el algoritmo.

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1} \quad (1c)$$

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1} \quad (1c)$$

Para $k = i$ a $n + 1$

$$a_{jk}^i = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1} \quad (1p + 1r)$$

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1} \quad (1c)$$

Para $k = i$ a $n + 1$

$$a_{jk}^i = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1} \quad (1p + 1r)$$

Fin

Fin

Fin

Método de Eliminación Gaussiana

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n - 1$

Para $j = i + 1$ a n

$$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1} \quad (1c)$$

Para $k = i$ a $n + 1$

$$a_{jk}^i = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1} \quad (1p + 1r)$$

Fin

Fin

Fin

Total

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)c + (n-i)(n-i+2)p + (n-i)(n-i+2)r \longrightarrow \mathcal{O}(n^3)$$

Estrategias de pivoteo

Evitar errores por trabajar con aritmética finita

Estrategias de pivoteo

Evitar errores por trabajar con aritmética finita

- Pivoteo parcial: entre las filas i a n , utilizar como fila *pivote* aquella con mayor $|a_{ji}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.

Estrategias de pivoteo

Evitar errores por trabajar con aritmética finita

- Pivoteo parcial: entre las filas i a n , utilizar como fila *pivote* aquella con mayor $|a_{ji}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.
- Pivoteo completo: entre las filas i a n y las columnas i a n , calcular el mayor $|a_{kl}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas y columnas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Computations, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, JHU Press, 2013.
- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.