Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2024

Práctica 2

Eliminación Gaussiana y Factorización

Normas y número de condición

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Nota: Cuando se habla de "la" descomposición LU de una matriz, se está haciendo referencia a la que surge de aplicar la eliminación gaussiana. Caso contrario, nos referiremos a "una" descomposición LU.

1. Triangular la matriz de Hilbert de orden 4. Usando operaciones con fracciones en forma exacta en (a) y usando aritmética de punto decimal flotante con tres dígitos con redondeo en (b):

$$\text{(a) } H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}, \text{ (b) } H = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,500 & 0,333 & 0,250 \\ 0,500 & 0,333 & 0,250 & 0,200 \\ 0,333 & 0,250 & 0,200 & 0,167 \\ 0,250 & 0,200 & 0,167 & 0,143 \end{pmatrix}$$

Analizar por qué se obtienen diferentes resultados.

2. Resolver por eliminación Gaussiana sin intercambio de filas o columnas el sistema lineal $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Dar la factorización LU de A y calcular $det(A)$.

3. Calcular la factorización LU y resolver usando aritmética de punto decimal flotante de tres dígitos con redondeo:

$$\begin{pmatrix} 0,003 & 0,217 \\ 0,277 & 0,138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,437 \\ 0,553 \end{pmatrix}$$

4. Calcular la inversa A^{-1} de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de las siguientes maneras:

   a) Resolviendo el sistema matricial $AX = I$ por pivoteo parcial.

   b) Calculando la factorización LU de A, calculando las inversas de L y U, y aplicando la identidad $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

   c) Calculando la factorización LU de A y resolviendo los sistemas $Ax_i = e_i$, $i = 1, \dots, n$, con $n = 3$.

5. Sean $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que una factorización LU de A_h es L_hU para $h = 1, \dots, k$, donde L_h tiene unos en la diagonal y U es la misma para toda A_h. Sea $A = \sum_{h=1}^{k} A_h$. Probar:

   a) A tiene factorización LU, L con unos en la diagonal.

b) Para $1 \leqslant j < i \leqslant n$, el multiplicador M_{ij} de la triangulación gaussiana de A es el promedio de los multiplicadores de la posición (i, j) en las triangulaciones de las A_h. Es decir, $M_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k} M_{ij}^{h}$, con M_{ij}^{h} el multiplicador de la posición (i, j) en la triangulación de A_h.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene a partir de A por el método de eliminación Gaussiana cuando las primeras k columnas ya han sido trianguladas.

   a) Hallar la matriz M_k de tal forma que $M_k\, A^{(k-1)} = A^{(k)}$.

   b) Probar que A es no singular si y sólo si $A^{(k)}$ es no singular.

   c) Si A es simétrica, demostrar que la submatriz de $A^{(k)}$ que aún no ha sido triangulada sigue siendo simétrica (es decir, que $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$, para $k < i, j \leqslant n$).

7. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene todas sus (sub)matrices principales no singulares (es decir, toda submatriz que consiste de las primeras i filas y columnas de A), entonces A tiene factorización LU sin pivoteo. Además esa factorización es única.

8. Supongamos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene una factorización $A = LU$ y que L y U son conocidas. Describir un algoritmo que calcule el elemento (i, j) de A^{-1} en aproximadamente $(n-j)^2 + (n-i)^2$ flops (operaciones de punto flotante).

   Sugerencia: si $a_{ij} = fila_i(L) \cdot col_j(U)$, *deducir cómo obtener* $(A^{-1})_{ij}$ *en función de una fila o columna en particular de* L^{-1} *y* U^{-1}, *y determinar qué es lo mínimo que se necesita calcular de* L^{-1} *y* U^{-1}.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $A = TS$ donde $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior y $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior. Probar:

   a) T y S son inversibles, usando propiedades de determinantes.

   b) A tiene factorización LU (con unos en la diagonal de L).

   c) La matriz $\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de L), para cualquier $b, c \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de T, S, b, c y d.

10. Con las mismas notaciones que en el ejercicio 6, sea $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ y sea $a_k := \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}^{(k)}|$; es decir, a_k es el elemento máximo en módulo de la matriz que se obtiene luego de que la primeras k columnas han sido trianguladas. Si se aplica el método de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial**, probar que:

    a) $a_k \leqslant 2^k a_0,\ k = 1, \ldots, n-1$ para A arbitraria.

    b) $a_k \leqslant (k+1)a_0,\ k = 1, \ldots, n-1$ para matrices de Hessenberg [1].

    c) $a = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} a_k \leqslant 2a_0$ para matrices tridiagonales.

    Analizar e interpretar los tres resultados.

    Sugerencia: aplicar inducción en k, y suponer que al comienzo de cada paso ya se ha realizado el intercambio de filas correspondientes al pivoteo parcial.

[1] Una matriz A es de Hessenberg si todos sus coeficientes debajo de la primer subdiagonal son nulos, es decir, si $a_{ij} = 0$ para todo (i, j) tal que $i \geqslant j + 2$.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de la forma $A = I + uu^t$, con $u \in \mathbb{R}^n$. Luego de realizar el primer paso de la factorización LU (eliminando la primera columna) se obtiene

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

con $A_{22}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Demostrar:

a) $A_{22}^{(1)} = I_{n-1} + \tilde{u}\tilde{u}^t$, donde $\tilde{u}^t = (u_2, \dots, u_n)/(\sqrt{1+u_1^2})$, siendo I_{n-1} la matriz identidad de la misma dimensión que $A_{22}^{(1)}$.

b) A tiene factorización LU sin pivoteo, para cualquier $u \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia: inducción en la dimensión de la matriz.

12. Una matriz A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *estrictamente diagonal dominante por columnas* si $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ para $j = 1, \dots, n$. Demostrar que la matriz A tiene descomposición LU sin pivoteo.

13. Sea A una matriz no singular de $\mathbb{R}^{n\times n}$ escrita en forma de bloques de la siguiente manera, donde A_{11} es una matriz de tamaño $m \times m$ y A_{22} es de tamaño $(n-m)\times(n-m)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

a) Verificar la siguiente fórmula para la eliminación del bloque A_{21}:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

La matriz $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ es conocida como *complemento de Schur* de A_{11} en A.

b) Hallar la matriz que realiza un primer paso de triangulación de tal forma que elimine la primera fila de A_{21}. *Sugerencia: considerar una combinación lineal apropiada de las filas de A_{11}.*

c) Considerar los $n-m$ pasos de triangulación (eliminando una fila de A_{21} en cada paso), y mostrar que el bloque $(2,2)$ de la matriz resultante de aplicar el proceso de eliminación Gaussiana es igual a $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

14. Sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las normas vectoriales 1, 2 e infinito respectivamente, y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar:

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

b) $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

15. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Graficar los siguientes conjuntos de puntos:

a) $A_1 = \left\{ Ax \ / x \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \|x\|_1 = 1 \right\}$

b) $A_2 = \left\{ Ax \,/ x \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \|x\|_\infty = 1 \right\}$

c) $A_3 = \left\{ Ax \,/ x \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \|x\|_2 = 1 \right\}$

d) Interpretar geométricamente $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$

16. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una norma matricial inducida, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar:

    a) $\|\cdot\|$ es una norma.

    b) $\|I\| = 1$.

    c) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

    d) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

17. Probar:

    a) $\|A\|_1 = \text{máx}_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$. (Probar "$\leqslant$" acotando $\|Ax\|_1$ con $\text{máx}_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ para todo $x : \|x\|_1 = 1$. Probar "$\geqslant$" utilizando los vectores canónicos.)

    b) $\|A\|_\infty = \text{máx}_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. (Hallar un x^* de norma ∞ igual a 1 tal que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|Ax^*\|_\infty = \text{máx}_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ para todo $x : \|x\|_\infty = 1$)

18. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y definimos $\|A\|_M = \underset{1\leq i,j\leq n}{\text{máx}} |a_{ij}|$. Probar:

    a) $\|\cdot\|_M$ es una norma.

    b) $\|A\|_M \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_M$.

19. Sea $\kappa(A)$ el número de condición de una matriz, calculado a partir de una norma matricial submultiplicativa.

    a) Probar que si $\|I\| \geqslant 1$ entonces $\kappa(A) \geqslant 1$.

    b) Probar que para una norma dada, $\kappa(AB) \leqslant \kappa(A)\kappa(B)$ y $\kappa(\alpha A) = \kappa(A) : \forall \alpha \neq 0$.

20. Sea x la solución del sistema $Ax = b$. En muchos casos se desea conocer distintos comportamientos del sistema lineal al variar levemente el valor de la matriz A o del vector de solución b. Se denomina matriz de perturbación o vector de pertubación (según corresponda) a δA y δb.

    a) Sea $x + \delta x$ la solución del sistema $Ax = b + \delta b$. Acotar la norma de δx.

    b) Idem si $x + \delta x$ es la solución de $(A + \delta A)x = b$.

21. Sea $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|R\| < 1$ e I la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n\times n}$, siendo $\|\cdot\|$ inducida por una norma vectorial.

    a) Probar que $I + R$ es inversible. (Ver que suponiendo $(I + R)x = 0$ para algún $x \neq 0$ se llega a $\|Rx\|/\|x\| = 1$)

    b) Probar que $\|(I + R)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|R\|}$. (Usar la igualdad $(I + R)^{-1} = I - R(I + R)^{-1}$)

    c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.
    Probar que $A + \delta A$ es inversible y vale

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|\delta A\|}$$

22. Supongamos que $x = A^{-1}b$.

a) Con $\|\cdot\|$ se designa una norma vectorial y la norma matricial inducida, según corresponda. Probar que si $e = x - \hat{x}$ (el error) y $r = b - A\hat{x}$ (el residuo, $\hat{x}$ es el valor calculado), entonces

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \leqslant \|e\| \leqslant \|A^{-1}\|\|r\|.$$

b) Analizar el caso $\|\cdot\|_\infty$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \; \hat{x} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolver en computadora

i Describir e implementar un algoritmo que calcule un vector no nulo $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $Uz = 0$, donde $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior con $u_{n,n} = 0$ y $u_{1,1} \dots u_{n-1,n-1} \neq 0$.

ii Consideramos una familia de matrices $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ con una estructura particular que depende de n. Para el caso $n = 5$, la matriz en cuestión es la siguiente:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Analizar qué sucede al aplicar el método de eliminación gaussiana con pivoteo parcial a A_6. Generalizar el resultado para n genérico.

b) Implementar un algoritmo que resuelva el sistema de ecuaciones $A_n x = b$.

c) Variando el n, considerar vectores $b \in \mathbb{R}^n$ para los cuales la solución al sistema $A_n x = b$, sea conocida. Llamemos x^* a la solución exacta del sistema y $\bar{x}$ a la solución obtenida por el algoritmo del punto anterior. ¿Es $\bar{x}$ una buena aproximación?

d) Graficar como evoluciona el $\|x^* - \bar{x}\|_2$ en función del tamaño de la matriz.

iii Sea x la solución del sistema $Ax = b$. En el contexto del ejercicio 20, resolver si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,0001 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3,1 \\ 5,9 \end{bmatrix}, \; \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 \end{bmatrix}, \; \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

iv Considere el sistema lineal $Ax = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

La solución exacta es $x = (1, -1)$. Consideremos también los vectores $x_1 = (0.998, -1.002)$ y $x_2 = (-666, 834)$.

a) Calcular los residuos $r(x_1), r(x_2)$. El vector x_1, ¿tiene residuo menor?

b) Modificar el término independiente por $b = (0.168, 0.067 - \varepsilon)$, con $\varepsilon = 0.001, 0.002$, y resolver nuevamente el sistema en cada caso. ¿Qué sucede con las distintas soluciones?

c) Calcular el número de condición $\kappa(A)$.

d) Interpretar gráficamente los resultados de los items a) y b).

Funciones útiles

- Operaciones en Matlab/Octave:

```
% Distintas partes de una matriz
f = A(1,:)        % primer fila de A
c = A(:,1)        % primer columna de A
M = A(1:k,1:k)    % k-esima submatriz principal de A
B = triu(A)       % parte triangular superior de la matriz A
B = tril(A)       % parte triangular inferior de la matriz A
% (Nota: se puede agregar un 2do parametro k para incluir mas o menos
% diagonales en las funciones triu y tril)

% Normas vectoriales
norm(x,p)         % norma p del vector x
norm(x,'inf')     % norma infinito del vector x, equivalente a max(abs(x))

% Resolucion de sistemas y determinantes
A\b      % solucion del sistema Ax = b, con A matriz y b vector
A\B      % matriz solucion del sistema AX = B, con A y B matrices.
[L,U,P] = lu(A) % factorizacion PA = LU
det(A)   % determinante de la matriz A

% Numero de Condicion segun norma p
c = cond(X,p)
```

- Operaciones en Python con Numpy:

```
# Imports
from numpy import *
from numpy.linalg import *

# Inicializaciones
A = matrix([[1,2],[3,4]], float) # matriz 2x2
B = matrix([[5,6],[7,8]], float) # matriz 2x2
b = matrix([[1],[2]], float) # vector columna en R2
```

```
# Distintas partes de una matriz
A[0,:]        # primer fila de A, notar que indexa desde cero
A[:,0]        # primer columna de A
A[0:k,0:k]    # k-esima submatriz principal de A
triu(A)       # parte triangular superior de la matriz A
tril(A)       # parte triangular inferior de la matriz A

# Resolucion de sistemas y determinantes
solve(A,b)       # solucion del sistema Ax = b, con A matriz y b vector
solve(A,B)       # matriz solucion del sistema AX = B, con A y B matrices
det(A)   # determinante de la matriz A

# Normas vectoriales
c = array([1,2,3,4], float) # para normas vectoriales usamos array
norm(c,2)     # norma 2
norm(c,p)     # norma p, con p entero
norm(c,inf)   # norma infinito

# Numero de condicion para diferentes normas matriciales
cond(A,2)
cond(A,inf)
cond(A,'fro')
```

Referencias

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.

[2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.

[3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.