Métodos Numéricos
1er Cuatrimestre 2024
Práctica 7
Métodos Iterativos

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. En los siguientes casos, calcular las primeras dos iteraciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel correspondientes al sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, comenzando con $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,375 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Se define el *radio espectral* $\rho(A)$ de A por $\rho(A) := \max\{|\lambda|; \lambda \text{ es autovalor de } A\}$. Demostrar que $\rho(A) \leqslant \|A\|$ para cualquier norma consistente.

3. Analizar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

donde $|\rho| < 1$, comenzando con $x^{(0)} \neq (0, 0)^t$.

4. Probar que el método de Jacobi converge para sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 cuya matriz es simétrica definida positiva.

5. Sea A una matriz de $n \times n$ tal que A se expresa en la forma $A := M - N$, donde M, N son matrices de $n \times n$ y M es no singular. Sea $R := M^{-1}N$. A fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, dado un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario consideramos la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geqslant 0} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x^{(k+1)} := Rx^{(k)} + c$, donde $c = M^{-1}b$.

   a) Demostrar que si $\|R\| < 1$ para alguna norma subordinada, entonces $x^{(k)}$ converge a una solución del sistema $Ax = b$.

   b) Demostrar que si A es singular entonces $\rho(R) \geqslant 1$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Escribimos $A = D - L - U$, donde $D, L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, D es diagonal, L es triangular inferior con ceros en la diagonal y U es triangular superior con ceros en la diagonal. Demostrar que si A es estrictamente diagonal dominante por filas, entonces $\|D^{-1}(L + U)\|_\infty < 1$.

7. Se desea usar el método iterativo de Jacobi para la siguiente matriz compuesta, donde I y S son matrices de $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} I & S \\ S^t & I \end{pmatrix},$$

a) Plantear la iteración de Jacobi, tomando el vector $x^{(i)}$ en bloques $x_1^{(i)}$ y $x_2^{(i)}$ de n coordenadas cada bloque:

$$x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

? b) Calcular la expresión del error $e^{(i)} = x^{(i)} - x^*$, donde x^* es la solución buscada, expresada en bloques como en el item anterior.

c) Demostrar que la iteración de Jacobi converge si $\rho(SS^t) < 1$ (*Sugerencia*: Expresar $e^{(i)}$ en función de $e^{(i-2)}$).

8. Sean las matrices abajo indicadas A_1 y A_2, y sean J_1 y J_2 las matrices de iteración del método de Jacobi asociadas a A_1 y A_2 respectivamente.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ -9/10 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Probar que $\rho(J_1) > \rho(J_2)$

b) Ejecutar el método de Jacobi para resolver el sistema $A_1 x = b$ y $A_2 x = b$ (para algún b) y comparar la cantidad de iteraciones realizadas.

c) Concluir que que una mayor dominancia diagonal[1] no necesariamente implica una convergencia más rápida del método de Jacobi.

9. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} x = b$ donde $a \in \mathbb{R}$, puede resolverse bajo ciertas condiciones mediante el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix} x^{(k)} + \omega b \qquad \text{para } k = 0, \dots$$

a) ¿Para qué valores de a converge el método cuando $\omega = 1$?

b) Para $a = 0,5$, encontrar el valor de $\omega \in \{0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3\}$ que minimiza el radio espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}.$$

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, con λ_i autovalores de A tal que $1 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ y sea ω una constante positiva. Se define el siguiente algoritmo iterativo, para $i = 1, \ldots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1 - \omega a_{ii}) x_i^{(k)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega\, a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

a) Hallar el esquema de iteración de forma matricial y verificar que si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema $Ax = b$.

[1] Definimos *dominancia diagonal por filas* de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como $dd_f(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{|a_{ii}|}{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$. De manera similar se define la dominancia diagonal por columnas.

b) Demostrar que el esquema iterativo planteado converge para cualquier $x^{(0)}$ inicial si y solo si $\omega < 2/\lambda_n$.
(*Sugerencia*: usar que si λ es autovalor de A y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces los autovalores de $\alpha I + \beta A$ son $\alpha + \beta\lambda$).

11. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con columnas linealmente independientes, $b \in \mathbb{R}^m$ y $\omega \in \mathbb{R}$ una constante no nula. Se desea resolver el sistema $A^tAx = A^tb$ mediante un esquema iterativo. Dado un $x^{(0)}$ inicial, se propone el siguiente algoritmo:

$x := x^{(0)}$
$r := b - Ax^{(0)}$
while x *no converja a la solución* **do**
  $d := \omega A^t r$
  $x := x + d$
  $r := r - Ad$
end

a) Probar que si el esquema iterativo converge, lo hace a una solución del sistema planteado. ¿Cuál es la matriz que gobierna la iteración del esquema? (*Sugerencia*: Probar que en cada iteración $r = b - Ax$).

b) Demostrar que el esquema converge si y sólo si $0 < \omega < 2/\lambda_{max}$ con λ_{max} el mayor autovalor de la matriz A^tA.

12. Sea $A = QR$ la factorización QR de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $1 < r_{11} \leqslant r_{22} \leqslant \ldots \leqslant r_{nn}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea hallar la solución del sistema

$$(I - Q^tA)x = b \tag{1}$$

a) Para resolver el sistema (1), se propone el siguiente sistema iterativo, con ω una constante no nula:

$$x^{(k+1)} = (\,(1-\omega)I + \omega R\,)\,x^{(k)} + \omega b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

i) Demostrar que, si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución de (1).

ii) Hallar los valores de ω para los cuales se puede asegurar la convergencia del método.

b) Demostrar que Jacobi y Gauss-Seidel convergen en a lo sumo n pasos a la solución del sistema (1).

13. Se desea resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha I & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

donde A y C son matrices cuadradas y triangulares superiores. Se propone el siguiente algoritmo iterativo dado un $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^t$ inicial:

- Paso 1: Realizar una iteración de Jacobi para mejorar el valor de x_1 para el sistema $Ax_1 = b_1 - Bx_2$
- Paso 2: Realizar una iteración de Gauss-Seidel para mejorar el valor de x_2 para el sistema $Cx_2 = b_2 - \alpha x_1$, utilizando el valor de x_1 obtenido en el Paso 1.

- Volver al Paso 1 utilizando el x_2 hallado en el Paso 2.

a) Escribir, para cada Paso por separado, la iteración matricial que actualiza x_1 en el Paso 1 y x_2 en el Paso 2.

b) Escribir la iteración en forma matricial para obtener $\mathbf{x}^{(k)}$ en función de $\mathbf{x}^{(k-1)}$, siendo $\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)^t$, y mostrar cuál es la matriz que gobierna la iteración.

Resolver en computadora

i) Resolver usando Jacobi y Gauss–Seidel, y comparar los resultados obtenidos (comenzando con $x^{(0)} = (0,0,0)^t$)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Funciones útiles

- En Matlab no existen funciones predefinidas para Jacobi ni Gauss–Seidel, pero las siguientes funciones son útiles para construirlos:

```
d = diag(A); %retorna la diagonal de la matriz A en un vector d
B = diag(d); %retorna la matriz B conteniendo en su diagonal el vector d
B = tril(A); %parte triangular inferior de la matriz A
B = triu(A); %parte triangular superior de la matriz A
```

  En ambos casos, **tril** y **triu** permiten un segundo parámero para incluir más (o menos) diagonales además de la principal, dependiendo si este parámero es positivo (o negativo). Usando estas funciones, se pueden generar las matrices D, L y U de la separación $A = D - L - U$ con las siguientes sentencias:

```
D = diag(diag(A));
L = tril(-A,-1);
U = triu(-A,1);
```

- En Python, existen rutinas similares de indexación con Numpy[2].

Referencias

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis.* Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.

[2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing.* Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.

[3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

[2] http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.indexing.html