

## Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2024

### Práctica 2

Eliminación Gaussiana y Factorización

Normas y número de condición



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

*Nota: Cuando se habla de “la” descomposición LU de una matriz, se está haciendo referencia a la que surge de aplicar la eliminación gaussiana. Caso contrario, nos referiremos a “una” descomposición LU.*

1. Triangular la matriz de Hilbert de orden 4. Usando operaciones con fracciones en forma exacta en (a) y usando aritmética de punto decimal flotante con tres dígitos con redondeo en (b):

$$(a) H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}, (b) H = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,500 & 0,333 & 0,250 \\ 0,500 & 0,333 & 0,250 & 0,200 \\ 0,333 & 0,250 & 0,200 & 0,167 \\ 0,250 & 0,200 & 0,167 & 0,143 \end{pmatrix}$$

Analizar por qué se obtienen diferentes resultados.

2. Resolver por eliminación Gaussiana sin intercambio de filas o columnas el sistema lineal  $Ax = b$  donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Dar la factorización LU de A y calcular  $\det(A)$ .

3. Calcular la factorización LU y resolver usando aritmética de punto decimal flotante de tres dígitos con redondeo:

$$\begin{pmatrix} 0,003 & 0,217 \\ 0,277 & 0,138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,437 \\ 0,553 \end{pmatrix}$$

4. Calcular la inversa  $A^{-1}$  de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  de las siguientes maneras:

- a) Resolviendo el sistema matricial  $AX = I$  por pivoteo parcial.
- b) Calculando la factorización LU de A, calculando las inversas de L y U, y aplicando la identidad  $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ .
- c) Calculando la factorización LU de A y resolviendo los sistemas  $Ax_i = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , con  $n = 3$ .

5. Sean  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que una factorización LU de  $A_h$  es  $L_h U$  para  $h = 1, \dots, k$ , donde  $L_h$  tiene unos en la diagonal y U es la misma para toda  $A_h$ . Sea  $A = \sum_{h=1}^k A_h$ . Probar:

- a) A tiene factorización LU, L con unos en la diagonal.

- b) Para  $1 \leq j < i \leq n$ , el multiplicador  $M_{ij}$  de la triangulación gaussiana de  $A$  es el promedio de los multiplicadores de la posición  $(i, j)$  en las triangulaciones de las  $A_h$ . Es decir,  $M_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{h=1}^k M_{ij}^h$ , con  $M_{ij}^h$  el multiplicador de la posición  $(i, j)$  en la triangulación de  $A_h$ .
6. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $A^{(k)}$  la matriz que se obtiene a partir de  $A$  por el método de eliminación Gaussiana cuando las primeras  $k$  columnas ya han sido trianguladas.
- Hallar la matriz  $M_k$  de tal forma que  $M_k A^{(k-1)} = A^{(k)}$ .
  - Probar que  $A$  es no singular si y sólo si  $A^{(k)}$  es no singular.
  - Si  $A$  es simétrica, demostrar que la submatriz de  $A^{(k)}$  que aún no ha sido triangulada sigue siendo simétrica (es decir, que  $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ , para  $k < i, j \leq n$ ).
7. Probar que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tiene todas sus (sub)matrices principales no singulares (es decir, toda submatriz que consiste de las primeras  $i$  filas y columnas de  $A$ ), entonces  $A$  tiene factorización  $LU$  sin pivoteo. Además esa factorización es única.
8. Supongamos que una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tiene una factorización  $A = LU$  y que  $L$  y  $U$  son conocidas. Describir un algoritmo que calcule el elemento  $(i, j)$  de  $A^{-1}$  en aproximadamente  $(n-j)^2 + (n-i)^2$  flops (operaciones de punto flotante).
- Sugerencia: si  $a_{ij} = \text{fila}_i(L) \cdot \text{col}_j(U)$ , deducir cómo obtener  $(A^{-1})_{ij}$  en función de una fila o columna en particular de  $L^{-1}$  y  $U^{-1}$ , y determinar qué es lo mínimo que se necesita calcular de  $L^{-1}$  y  $U^{-1}$ .*
9. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible tal que  $A = TS$  donde  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es triangular inferior y  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es triangular superior. Probar:
- $T$  y  $S$  son inversibles, usando propiedades de determinantes.
  - $A$  tiene factorización  $LU$  (con unos en la diagonal de  $L$ ).
  - La matriz  $\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$  tiene factorización  $LU$  (con unos en la diagonal de  $L$ ), para cualquier  $b, c \in \mathbb{R}^n$  y  $d \in \mathbb{R}$ . Hallarla explícitamente en función de  $T, S, b, c$  y  $d$ .
10. Con las mismas notaciones que en el ejercicio 6, sea  $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$  y sea  $a_k := \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$ ; es decir,  $a_k$  es el elemento máximo en módulo de la matriz que se obtiene luego de que las primeras  $k$  columnas han sido trianguladas. Si se aplica el método de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial**, probar que:
- $a_k \leq 2^k a_0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  para  $A$  arbitraria.
  - $a_k \leq (k+1)a_0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  para matrices de Hessenberg<sup>1</sup>.
  - $a = \max_{1 \leq k \leq n-1} a_k \leq 2a_0$  para matrices tridiagonales.

Analizar e interpretar los tres resultados.

*Sugerencia: aplicar inducción en  $k$ , y suponer que al comienzo de cada paso ya se ha realizado el intercambio de filas correspondientes al pivoteo parcial.*

---

<sup>1</sup>Una matriz  $A$  es de Hessenberg si todos sus coeficientes debajo de la primer subdiagonal son nulos, es decir, si  $a_{ij} = 0$  para todo  $(i, j)$  tal que  $i \geq j + 2$ .

11. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz de la forma  $A = I + uu^t$ , con  $u \in \mathbb{R}^n$ . Luego de realizar el primer paso de la factorización  $LU$  (eliminando la primera columna) se obtiene

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

con  $A_{22}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ . Demostrar:

- a)  $A_{22}^{(1)} = I_{n-1} + \tilde{u}\tilde{u}^t$ , donde  $\tilde{u}^t = (u_2, \dots, u_n)/(\sqrt{1+u_1^2})$ , siendo  $I_{n-1}$  la matriz identidad de la misma dimensión que  $A_{22}^{(1)}$ .
- b)  $A$  tiene factorización  $LU$  sin pivoteo, para cualquier  $u \in \mathbb{R}^n$ .  
*Sugerencia: inducción en la dimensión de la matriz.*

12. Una matriz  $A$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  se dice *estrictamente diagonal dominante por columnas* si  $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$  para  $j = 1, \dots, n$ . Demostrar que la matriz  $A$  tiene descomposición  $LU$  sin pivoteo.

13. Sea  $A$  una matriz no singular de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  escrita en forma de bloques de la siguiente manera, donde  $A_{11}$  es una matriz de tamaño  $m \times m$  y  $A_{22}$  es de tamaño  $(n-m) \times (n-m)$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- a) Verificar la siguiente fórmula para la eliminación del bloque  $A_{21}$ :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

La matriz  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  es conocida como *complemento de Schur* de  $A_{11}$  en  $A$ .

- b) Hallar la matriz que realiza un primer paso de triangulación de tal forma que elimine la primera fila de  $A_{21}$ . *Sugerencia: considerar una combinación lineal apropiada de las filas de  $A_{11}$ .*
- c) Considerar los  $n-m$  pasos de triangulación (eliminando una fila de  $A_{21}$  en cada paso), y mostrar que el bloque  $(2, 2)$  de la matriz resultante de aplicar el proceso de eliminación Gaussiana es igual a  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ .
14. Sean  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  las normas vectoriales 1, 2 e infinito respectivamente, y sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar:

- a)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ .
- b)  $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ .
- c)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ .

15. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Graficar los siguientes conjuntos de puntos:

- a)  $A_1 = \{Ax / x \in \mathbb{R}^2 \wedge \|x\|_1 = 1\}$

- b)  $A_2 = \{Ax / x \in \mathbb{R}^2 \wedge \|x\|_\infty = 1\}$
- c)  $A_3 = \{Ax / x \in \mathbb{R}^2 \wedge \|x\|_2 = 1\}$
- d) Interpretar geométricamente  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_\infty$ ,  $\|A\|_2$

16. Sea  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  una norma matricial inducida,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar:

- a)  $\|\cdot\|$  es una norma.
- b)  $\|I\| = 1$ .
- c)  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ .
- d)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

17. Probar:

- a)  $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ . (Probar “ $\leq$ ” acotando  $\|Ax\|_1$  con  $\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  para todo  $x : \|x\|_1 = 1$ . Probar “ $\geq$ ” utilizando los vectores canónicos.)
- b)  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ . (Hallar un  $x^*$  de norma  $\infty$  igual a 1 tal que  $\|Ax\|_\infty \leq \|Ax^*\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  para todo  $x : \|x\|_\infty = 1$ .)

18. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y definimos  $\|A\|_M = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ . Probar:

- a)  $\|\cdot\|_M$  es una norma.
- b)  $\|A\|_M \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_M$ .

19. Sea  $\kappa(A)$  el número de condición de una matriz, calculado a partir de una norma matricial submultiplicativa.

- a) Probar que si  $\|I\| \geq 1$  entonces  $\kappa(A) \geq 1$ .
- b) Probar que para una norma dada,  $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$  y  $\kappa(\alpha A) = \kappa(A) : \forall \alpha \neq 0$ .

20. Sea  $x$  la solución del sistema  $Ax = b$ . En muchos casos se desea conocer distintos comportamientos del sistema lineal al variar levemente el valor de la matriz  $A$  o del vector de solución  $b$ . Se denomina matriz de perturbación o vector de perturbación (según corresponda) a  $\delta A$  y  $\delta b$ .

- a) Sea  $x + \delta x$  la solución del sistema  $Ax = b + \delta b$ . Acotar la norma de  $\delta x$ .
- b) Idem si  $x + \delta x$  es la solución de  $(A + \delta A)x = b$ .

21. Sea  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\|R\| < 1$  e  $I$  la matriz identidad en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , siendo  $\|\cdot\|$  inducida por una norma vectorial.

- a) Probar que  $I + R$  es inversible. (Ver que suponiendo  $(I + R)x = 0$  para algún  $x \neq 0$  se llega a  $\|Rx\|/\|x\| = 1$ )
- b) Probar que  $\|(I + R)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|R\|}$ . (Usar la igualdad  $(I + R)^{-1} = I - R(I + R)^{-1}$ )
- c) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz inversible y  $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ . Probar que  $A + \delta A$  es inversible y vale

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|}$$

22. Supongamos que  $x = A^{-1}b$ .

- a) Con  $\|\cdot\|$  se designa una norma vectorial y la norma matricial inducida, según corresponda. Probar que si  $e = x - \hat{x}$  (el error) y  $r = b - A\hat{x}$  (el residuo,  $\hat{x}$  es el valor calculado), entonces

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|e\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|.$$

- b) Analizar el caso  $\|\cdot\|_\infty$  con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Resolver en computadora

- i Describir e implementar un algoritmo que calcule un vector no nulo  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Uz = 0$ , donde  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular superior con  $u_{n,n} = 0$  y  $u_{1,1} \dots u_{n-1,n-1} \neq 0$ .
- ii Consideramos una familia de matrices  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \geq 2$  con una estructura particular que depende de  $n$ . Para el caso  $n = 5$ , la matriz en cuestión es la siguiente:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) Analizar qué sucede al aplicar el método de eliminación gaussiana con pivoteo parcial a  $A_6$ . Generalizar el resultado para  $n$  genérico.
- b) Implementar un algoritmo que resuelva el sistema de ecuaciones  $A_n x = b$ .
- c) Variando el  $n$ , considerar vectores  $b \in \mathbb{R}^n$  para los cuales la solución al sistema  $A_n x = b$ , sea conocida. Llamemos  $x^*$  a la solución exacta del sistema y  $\bar{x}$  a la solución obtenida por el algoritmo del punto anterior. ¿Es  $\bar{x}$  una buena aproximación?
- d) Graficar como evoluciona el  $\|x^* - \bar{x}\|_2$  en función del tamaño de la matriz.
- iii Sea  $x$  la solución del sistema  $Ax = b$ . En el contexto del ejercicio 20, resolver si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,0001 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3,1 \\ 5,9 \end{bmatrix}, \quad \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 \end{bmatrix}, \quad \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

- iv Considere el sistema lineal  $Ax = b$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

La solución exacta es  $x = (1, -1)$ . Consideremos también los vectores  $x_1 = (0.998, -1.002)$  y  $x_2 = (-666, 834)$ .

- Calcular los residuos  $r(x_1), r(x_2)$ . El vector  $x_1$ , ¿tiene residuo menor?
- Modificar el término independiente por  $b = (0.168, 0.067 - \varepsilon)$ , con  $\varepsilon = 0.001, 0.002$ , y resolver nuevamente el sistema en cada caso. ¿Qué sucede con las distintas soluciones?
- Calcular el número de condición  $\kappa(A)$ .
- Interpretar gráficamente los resultados de los items a) y b).

## Funciones útiles

- Operaciones en Matlab/Octave:

```
% Distintas partes de una matriz
f = A(1,:)      % primer fila de A
c = A(:,1)      % primer columna de A
M = A(1:k,1:k)  % k-esima submatriz principal de A
B = triu(A)     % parte triangular superior de la matriz A
B = tril(A)     % parte triangular inferior de la matriz A
% (Nota: se puede agregar un 2do parametro k para incluir mas o menos
% diagonales en las funciones triu y tril)

% Normas vectoriales
norm(x,p)       % norma p del vector x
norm(x,'inf')   % norma infinito del vector x, equivalente a max(abs(x))

% Resolucion de sistemas y determinantes
A\b            % solucion del sistema Ax = b, con A matriz y b vector
A\B            % matriz solucion del sistema AX = B, con A y B matrices.
[L,U,P] = lu(A) % factorizacion PA = LU
det(A)         % determinante de la matriz A

% Numero de Condicion segun norma p
c = cond(X,p)
```

- Operaciones en Python con Numpy:

```
# Imports
from numpy import *
from numpy.linalg import *

# Inicializaciones
A = matrix([[1,2],[3,4]], float) # matriz 2x2
B = matrix([[5,6],[7,8]], float) # matriz 2x2
b = matrix([[1],[2]], float) # vector columna en R2
```

```

# Distintas partes de una matriz
A[0,:]      # primer fila de A, notar que indexa desde cero
A[:,0]      # primer columna de A
A[0:k,0:k]  # k-esima submatriz principal de A
triu(A)     # parte triangular superior de la matriz A
tril(A)     # parte triangular inferior de la matriz A

# Resolucion de sistemas y determinantes
solve(A,b)   # solucion del sistema  $Ax = b$ , con A matriz y b vector
solve(A,B)   # matriz solucion del sistema  $AX = B$ , con A y B matrices
det(A)       # determinante de la matriz A

# Normas vectoriales
c = array([1,2,3,4], float) # para normas vectoriales usamos array
norm(c,2)    # norma 2
norm(c,p)    # norma p, con p entero
norm(c,inf)  # norma infinito

# Numero de condicion para diferentes normas matriciales
cond(A,2)
cond(A,inf)
cond(A,'fro')

```

## Referencias

- [1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.
- [2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.
- [3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.