

Análisis numérico

Novena Edición

Richard L. Burden
J. Douglas Faires

Análisis numérico

NOVENA EDICIÓN

Richard L. Burden

Youngstown State University

J. Douglas Faires

Youngstown State University

Traducción:

Patricia Solorio Gómez

Revisión técnica:

Dr. Ernesto Filio López

Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Instituto Politécnico Nacional



Análisis numérico, Novena edición

Richard L. Burden / J. Douglas Faires

Director de producto y desarrollo**Latinoamérica:**

Daniel Oti Yvonne

Director editorial y de producción**Latinoamérica:**

Raúl D. Zendejas Espejel

Editor:

Sergio R. Cervantes González

Coordinadora de producción editorial:

Abril Vega Orozco

Editor de producción:

Timoteo Elíosa García

Coordinador de manufactura:

Rafael Pérez González

Diseño de portada:

Ediciones OVA

Imagen de portada:

Dreamstime

Composición tipográfica:

Ediciones OVA

© D.R. 2011 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,
una Compañía de Cengage Learning, Inc.

Corporativo Santa Fe

Av. Santa Fe núm. 505, piso 12

Col. Cruz Manca, Santa Fe

C.P. 05349, México, D.F.

Cengage Learning™ es una marca registrada
usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de
este trabajo amparado por la Ley Federal del
Derecho de Autor, podrá ser reproducida,
transmitida, almacenada o utilizada en
cualquier forma o por cualquier medio, ya sea
gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo,
pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado,
reproducción, escaneo, digitalización,
grabación en audio, distribución en Internet,
distribución en redes de información o
almacenamiento y recopilación en sistemas
de información a excepción de lo permitido
en el Capítulo III, Artículo 27, de la Ley Federal
del Derecho de Autor, sin el consentimiento
por escrito de la Editorial.

Traducido del libro:

Numerical Analysis, 9th ed.

Richard L. Burden / J. Douglas Faires

Publicado en inglés por

Brooks/Cole, Cengage Learning, © 2011

ISBN-13: 978-0-538-73351-9

ISBN-10: 0-538-73351-9

Datos para catalogación bibliográfica:

Burden, Richard L. / J. Douglas Faires

Análisis numérico, Novena Edición

ISBN: 978-607-481-663-1

Visite nuestro sitio en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

Contenido

Prefacio ix

1 Preliminares matemáticos y análisis de error 1

- 1.1 Repaso de cálculo 2
- 1.2 Errores de redondeo y aritmética de una computadora 17
- 1.3 Algoritmos y convergencia 32
- 1.4 Software numérico 41

2 Soluciones de ecuaciones de una variable 47

- 2.1 El método de bisección 48
- 2.2 Iteración de punto fijo 56
- 2.3 El método de Newton y sus extensiones 67
- 2.4 Análisis de error para los métodos iterativos 79
- 2.5 Convergencia acelerada 86
- 2.6 Ceros de polinomios y el método de Müller 91
- 2.7 Estudio de métodos y software 102

3 Interpolación y aproximación polinomial 105

- 3.1 Interpolación y polinomio de Lagrange 106
- 3.2 Aproximación de datos y método de Neville 117
- 3.3 Diferencias divididas 124
- 3.4 Interpolación de Hermite 136
- 3.5 Interpolación de splines cúbicos 144
- 3.6 Curvas paramétricas 164
- 3.7 Reseña de métodos y de software 171

4 Derivación e integración numéricas 173

- 4.1 Derivación numérica 174
- 4.2 Extrapolación de Richardson 185
- 4.3 Elementos de integración numérica 193

4.4	Integración numérica compuesta	203
4.5	Integración de Romberg	213
4.6	Métodos adaptativos de cuadratura	220
4.7	Cuadratura gaussiana	228
4.8	Integrales múltiples	235
4.9	Integrales impropias	250
4.10	Reseña de métodos y software	256

5 Problemas con valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias 259

5.1	Teoría elemental de los problemas con valores iniciales	260
5.2	Método de Euler	266
5.3	Métodos de Taylor de orden superior	276
5.4	Métodos de Runge-Kutta	282
5.5	Control del error y el método de Runge-Kutta-Fehlberg	293
5.6	Métodos multipasos	302
5.7	Métodos multipasos con tamaño de paso variable	315
5.8	Métodos de extrapolación	321
5.9	Ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones diferenciales	328
5.10	Estabilidad	339
5.11	Ecuaciones diferenciales rígidas	348
5.12	Reseña de métodos y software	355

6 Métodos directos para resolver sistemas lineales 357

6.1	Sistemas de ecuaciones lineales	358
6.2	Estrategias de pivoteo	372
6.3	Álgebra lineal e inversión de matrices	381
6.4	Determinante de una matriz	396
6.5	Factorización de matrices	400
6.6	Tipos especiales de matrices	411
6.7	Reseña de métodos y software	428

7 Métodos iterativos en álgebra matricial 431

7.1	Normas de vectores y matrices	432
7.2	Eigenvectores y eigenvalores	443
7.3	Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel	450
7.4	Métodos de relajación para resolver sistemas lineales	462
7.5	Cotas de error y refinamiento iterativo	469
7.6	El método del gradiente conjugado	479
7.7	Reseña de métodos y software	495

8 Teoría de la aproximación 497

- 8.1 Aproximación discreta por mínimos cuadrados 498
- 8.2 Polinomios ortogonales y aproximación por mínimos cuadrados 510
- 8.3 Polinomios de Chebyshev y economización de series de potencias 518
- 8.4 Aproximación de funciones racionales 528
- 8.5 Aproximación polinomial trigonométrica 538
- 8.6 Transformadas rápidas de Fourier 547
- 8.7 Reseña de métodos y software 558

9 Aproximación de eigenvalores 561

- 9.1 Álgebra lineal y eigenvalores 562
- 9.2 Matrices ortogonales y transformaciones de semejanza 570
- 9.3 Método de la potencia 576
- 9.4 Método de Householder 593
- 9.5 Algoritmo QR 601
- 9.6 Descomposición en valor singular 614
- 9.7 Reseña de métodos y software 626

10 Soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones no lineales 629

- 10.1 Puntos fijos para funciones de varias variables 630
- 10.2 Método de Newton 638
- 10.3 Métodos cuasi-Newton 647
- 10.4 Métodos de descenso rápido 654
- 10.5 Métodos de homotopía y de continuación 660
- 10.6 Reseña de métodos y software 668

11 Problemas con valor en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias 671

- 11.1 El método del disparo lineal 672
- 11.2 Método del disparo para problemas no lineales 678
- 11.3 Métodos de diferencias finitas para problemas lineales 684
- 11.4 Métodos de diferencias finitas para problemas no lineales 691
- 11.5 El método de Rayleigh-Ritz 696
- 11.6 Reseña de métodos y software 711

12 Soluciones numéricas para ecuaciones diferenciales parciales 713

- 12.1 Ecuaciones diferenciales parciales elípticas 716
- 12.2 Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas 725
- 12.3 Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas 739
- 12.4 Una introducción al método de elemento finito 746
- 12.5 Reseña de métodos y software 760

Bibliografía 763

Respuestas a los ejercicios seleccionados 773

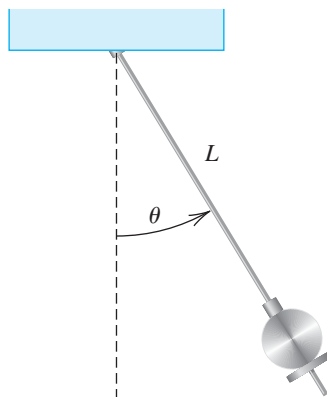
Índice 863

Problemas con valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias

Introducción

El movimiento de un péndulo puede describirse bajo ciertas suposiciones simplificadoras, por medio de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$



donde L es la longitud del péndulo $g \approx 32.17$ pies/s² es la constante gravitacional de la Tierra y θ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical. Si además especificamos la posición del péndulo al momento de iniciar el movimiento, $\theta(t_0) = \theta_0$ y su velocidad en ese momento $\theta'(t_0) = \theta'_0$, tendremos lo que se conoce con el nombre de *problema con valores iniciales*.

Con el fin de simplificar este problema a uno lineal con valores iniciales, para valores pequeños de θ , podemos emplear la aproximación $\theta \approx \sin \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta'_0.$$

con el fin de resolver este problema por medio de un método estándar de ecuaciones diferenciales. Para valores mayores de θ no es razonable suponer que $\theta = \sin \theta$, así que deben utilizarse métodos de aproximación. En el ejercicio 8 de la sección 5.9 se incluye un problema de este tipo.

En cualquier libro sobre ecuaciones diferenciales encontrará explicaciones amplias acerca de varios métodos para obtener explícitamente soluciones a problemas con valores iniciales de primer orden. Pero, en la práctica, pocos de los problemas que se presentan en el estudio de los fenómenos físicos pueden resolverse con exactitud.

En la primera parte del capítulo estudiaremos cómo aproximar la solución $y(t)$ a un problema de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \text{para } a \leq t \leq b,$$

sujeto a la condición inicial $y(a) = \alpha$. Más adelante en el capítulo trataremos de la extensión de estos métodos a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

para $a \leq t \leq b$, sujeto a las condiciones iniciales

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_n(a) = \alpha_n.$$

También examinaremos la relación que existe entre un sistema de este tipo y el problema general con valores iniciales de n -ésimo orden de la forma

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

para $a \leq t \leq b$, sujeto a los condiciones iniciales

$$y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = \alpha_n.$$

5.1 Teoría elemental de los problemas con valores iniciales

Las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas de ciencias e ingeniería que involucren el cambio de una variable respecto a otra. En la mayor parte de ellos hay que resolver un *problema con valores iniciales*, es decir, resolver una ecuación diferencial que satisface una condición inicial dada.

En situaciones comunes de la vida real, la ecuación diferencial que modela el problema resulta demasiado complicada para resolverla con exactitud, por lo que se recurre a dos procedimientos para aproximar la solución. El primero consiste en simplificar la ecuación diferencial de modo que podamos resolverla exactamente y utilizar después la solución de la ecuación simplificada para aproximar la solución de la ecuación original. El segundo, que examinaremos en este capítulo, se vale de métodos para aproximar la solución del problema original. Este procedimiento es el que se emplea por lo regular, pues los métodos de aproximación dan resultados más exactos y una información realista sobre el error.

Los métodos que veremos en este capítulo no producen una aproximación continua a la solución del problema con valores iniciales. Por el contrario, se obtienen las aproximaciones en algunos puntos específicos y, a menudo, igualmente espaciados. Si se requieren valores intermedios, se utiliza un método de interpolación que generalmente es de Hermite.

Antes de estudiar los métodos para aproximar los problemas con valores iniciales, necesitamos algunas definiciones y resultados de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 5.1 Se dice que una función $f(t, y)$ satisface una **condición de Lipschitz** para la variable y en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ con la propiedad de que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

siempre que (t, y_1) y (t, y_2) estén en D . La constante L se llama **constante de Lipschitz** para f . ■

Ejemplo 1 Demuestre que $f(t, y) = t|y|$ satisface la condición de Lipschitz en el intervalo $D = \{(t, y) \mid 1 \leq t \leq 2 \text{ y } -3 \leq y \leq 4\}$.

Solución. Para cada par de puntos (t, y_1) y (t, y_2) en D tenemos

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|.$$

Por tanto, f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y con 2 como la constante de Lipschitz. En este problema el valor más pequeño de la constante de Lipschitz que se puede obtener es $L = 2$; así que, por ejemplo,

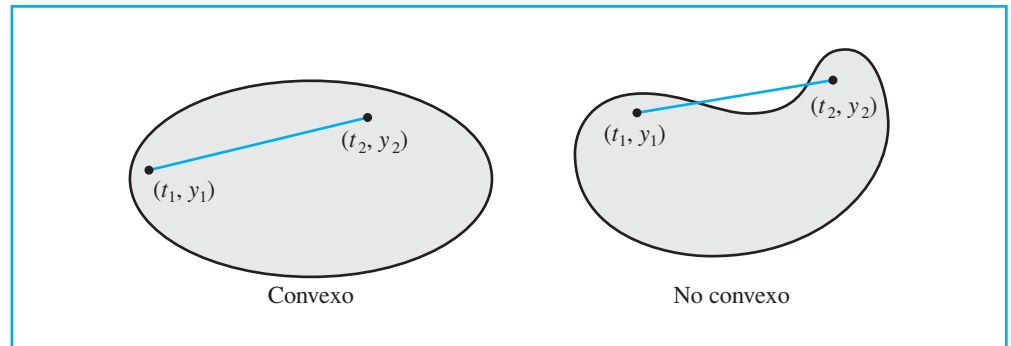
$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|.$$

Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es **convexo** siempre que (t_1, y_1) y (t_2, y_2) pertenecen a D , entonces $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ también pertenece a D para cada λ en $[0, 1]$. ■

Definición 5.2

En términos geométricos, la definición 5.2 establece que un conjunto es convexo a condición de que, siempre que dos puntos pertenezcan a él, el segmento de recta entero entre los puntos también pertenezca al conjunto (vea la figura. 5.1). Los conjuntos que consideraremos en este capítulo normalmente son de la forma $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ y } -\infty < y < \infty\}$ para algunas constantes a y b . Es fácil verificar (vea el ejercicio 7) que estos conjuntos son convexos.

Figura 5.1



Teorema 5.3 Supongamos que $f(t, y)$ está definida en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L, \quad \text{para todo } (t, y) \in D, \quad (5.1)$$

entonces f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y la constante de Lipschitz L . ■

En el ejercicio 6 se da la demostración del teorema 5.3; es similar a la demostración del resultado correspondiente para las funciones de una variable que explicamos en el ejercicio 27 de la sección 1.1.

Como veremos en el siguiente teorema, a menudo es muy importante determinar si la función que interviene en un problema con valores iniciales satisface la condición de Lipschitz

Rudolf Lipschitz (1832-1903) trabajó en muchas ramas de las matemáticas, como series de Fourier, ecuaciones diferenciales, mecánica analítica y teoría del potencial e incluso teoría de números. Es reconocido ampliamente por su generalización del trabajo de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Giuseppe Peano (1856-1932).

en su segunda variable y casi siempre es más fácil aplicar la condición (5.1) que la definición. No obstante, conviene aclarar que el teorema 5.3 sólo da condiciones suficientes para que una condición de Lipschitz sea válida. Por ejemplo, la función del ejemplo 1 satisface la condición de Lipschitz, pero la derivada parcial con respecto a y no existe cuando $y = 0$.

El siguiente teorema es una versión del teorema fundamental de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado. Aunque podemos demostrarlo reduciendo un poco la hipótesis, esta versión es suficiente para los fines de este capítulo. (La demostración del teorema, más o menos en esta forma, se da en [BiR], pp. 142-155.)

Teorema 5.4 Supongamos que $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ y } -\infty < y < \infty\}$ y que $f(t, y)$ es continua en D . Si f satisface una condición de Lipschitz en D para la variable y , entonces el problema con valores iniciales

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

tiene una única solución $y(t)$ para $a \leq t \leq b$. ■

Ejemplo 2 Utilice el teorema 5.4 para demostrar que existe una única solución para el problema con valores iniciales

$$y' = 1 + t \operatorname{sen}(ty), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.$$

Solución Si mantenemos constante a t y aplicamos el teorema del valor medio a la función

$$f(t, y) = 1 + t \operatorname{sen}(ty),$$

comprobaremos que, cuando $y_1 < y_2$, existe un número ξ en (y_1, y_2) con

$$\frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = t^2 \cos(\xi t).$$

Por tanto,

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1| |t^2 \cos(\xi t)| \leq 4|y_2 - y_1|,$$

y f satisface una condición de Lipschitz para la variable y con la constante de Lipschitz $L = 4$. Y como además $f(t, y)$ es continua cuando $0 \leq t \leq 2$ y $-\infty < y < \infty$, entonces el teorema 5.4 implica que este problema con valores iniciales tiene una única solución.

Si usted terminó un curso de ecuaciones diferenciales, posiblemente intentará encontrar la solución exacta a este problema. ■

Problemas bien planteados

Ahora que, en cierto modo, hemos contestado la pregunta de cuándo los problemas con valores iniciales tienen soluciones únicas, podemos abordar la segunda cuestión planteada de cuándo aproxima la solución de un problema con valores iniciales. Los problemas con valores iniciales que planteamos al observar los fenómenos físicos sólo suelen aproximar la situación general, por lo cual necesitamos saber si cambios pequeños en el enunciado del problema introducen cambios igualmente pequeños en la solución. Esto también es importante por la aparición del error de redondeo cuando se recurre a métodos numéricos. Es decir

- ¿Cómo determinar si un problema tiene la propiedad de que pequeños cambios o perturbaciones en su planteamiento ocasionen cambios igualmente pequeños en la solución?

Como de costumbre, primero necesitamos formular una definición operacional que exprese este concepto.

Definición 5.5. Se dice que el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (5.2)$$

es un **problema bien planteado** si:

- el problema tiene una única solución, $y(t)$
- existen constantes $\varepsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tales que para toda ε , con $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, siempre que $\delta(t)$ sea continua con $|\delta(t)| < \varepsilon$ para toda t en $[a, b]$ y cuando $|\delta_0| < \varepsilon$, el problema con valores iniciales

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0, \quad (5.3)$$

tiene una única solución $z(t)$ que satisface

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \quad \text{para toda } t \text{ en } [a, b].$$

Al problema especificado por la ecuación (5.3) se le llama **problema de perturbación** asociado al problema original (5.2) y supone la posibilidad de que haya un error en la formulación de la ecuación diferencial y también que la condición inicial contenga un error δ_0 .

Los métodos numéricos siempre se ocuparán de resolver un problema de perturbación, porque cualquier error de redondeo introducido en la representación altera el problema original. Y si este último no está bien planteado, existen pocas razones para suponer que la solución numérica de un problema de perturbación aproxime de manera precisa la solución del problema original.

En el teorema siguiente se especifican las condiciones que garantizan el buen planteamiento de un problema con valores iniciales. La demostración del teorema se incluye en [BiR], pp. 142-147.

Teorema 5.6 Suponga que $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ y } -\infty < y < \infty\}$. Si f es continua y satisface la condición de Lipschitz para la variable y en el conjunto D , entonces el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

está bien planteado.

Ejemplo 3 Demuestre que el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5. \quad (5.4)$$

está bien planteado en $D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 2 \text{ y } -\infty < y < \infty\}$.

Solución Dado que

$$\left| \frac{\partial (y - t^2 + 1)}{\partial y} \right| = |1| = 1,$$

el teorema 5.3 implica que $f(t, y) = y - t^2 + 1$ satisface una condición de Lipschitz para y en D con constante de Lipschitz $= 1$. Puesto que f es continua en D , el teorema 5.6 implica que el problema está bien planteado.

Como ilustración, considere la solución al problema de perturbación

$$\frac{dz}{dt} = z - t^2 + 1 + \delta, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad z(0) = 0.5 + \delta_0, \quad (5.5)$$

donde δ y δ_0 son constantes. Las soluciones de las ecuaciones (5.4) y (5.5) son

$$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t \quad \text{y} \quad z(t) = (t+1)^2 + (\delta + \delta_0 - 0.5)e^t - \delta,$$

respectivamente.

Suponga que ε es un número positivo. Si $|\delta| < \varepsilon$ y $|\delta_0| < \varepsilon$, entonces

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta + \delta_0)e^t - \delta| \leq |\delta + \delta_0|e^2 + |\delta| \leq (2e^2 + 1)\varepsilon,$$

para toda t . Así, el problema (5.4) está bien planteado, con $k(\varepsilon) = 2e^2 + 1$ para toda $\varepsilon > 0$. ■

Podemos usar Maple para resolver muchos problemas con valores iniciales. Consideraremos el problema

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5.$$

Maple reserva la letra D para representar derivación.

Para definir la ecuación diferencial y la condición inicial, introducimos

$$deq := D(y)(t) = y(t) - t^2 + 1; \text{ init} := y(0) = 0.5$$

Los nombres *deq* e *init* los elige el usuario. El comando para resolver el problema con valores iniciales es

$$deqsol := dsolve(\{deq, init\}, y(t))$$

la respuesta de Maple es

$$y(t) = 1 + t^2 + 2t - \frac{1}{2}e^t$$

Para usar la solución y obtener un valor específico como $y(1.5)$, introducimos

$$q := rhs(deqsol) : evalf(subs(t = 1.5, q))$$

con el resultado

$$4.009155465.$$

La función *rhs* (por *right hand side*, que significa lado derecho) sirve para asignar la solución del problema con valores iniciales a la función q , que después evaluamos en $t = 1.5$.

La función *dsolve* puede fallar si no se obtiene una solución explícita al problema con valores iniciales. Por ejemplo, para el problema con valores iniciales del ejemplo 2 el comando

$$deqsol2 := dsolve(\{D(y)(t) = 1 + t \cdot \sin(t \cdot y(t)), y(0) = 0\}, y(t))$$

no tiene éxito porque no es posible encontrar una solución explícita. En este caso hay que usar un método numérico.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.1

1. Use el teorema 5.4 para demostrar que los siguientes problemas con valores iniciales tienen una única solución y encuéntrala.

a. $y' = y \cos t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1.$

b. $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0.$

c. $y' = -\frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e.$

d. $y' = \frac{4t^3 y}{1 + t^4}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1.$

2. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas con valores iniciales tiene una única solución y encuéntrala. ¿Puede aplicarse el teorema 5.4 en cada caso?

- a. $y' = e^{t-y}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$.
 b. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$.
 c. $y' = -y + ty^{1/2}$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 2$.
 d. $y' = \frac{ty + y}{ty + t}$, $2 \leq t \leq 4$, $y(2) = 4$.

3. Para cada elección de $f(t, y)$ dada en los incisos (a)-(d):

- i. ¿Satisface f una condición de Lipschitz en $D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}$?
 ii. ¿Puede usarse el teorema 5.6 para demostrar que el problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

está bien planteado?

- a. $f(t, y) = t^2y + 1$ b. $f(t, y) = ty$ c. $f(t, y) = 1 - y$ d. $f(t, y) = -ty + \frac{4t}{y}$

4. Para cada elección de $f(t, y)$ dada en los incisos (a)-(d):

- i. ¿Satisface f una condición de Lipschitz en $D = \{(t, y) \mid 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}$?
 ii. ¿Puede usarse el teorema 5.6 para demostrar que el problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

está bien planteado?

- a. $f(t, y) = e^{t-y}$ b. $f(t, y) = \frac{1+y}{1+t}$ c. $f(t, y) = \cos(yt)$ d. $f(t, y) = \frac{y^2}{1+t}$

5. En los siguientes problemas con valores iniciales, demuestre que la ecuación dada define implícitamente una solución. Aproxime $y(2)$ con el método de Newton.

- a. $y' = -\frac{y^3 + y}{(3y^2 + 1)t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$; $y^3t + yt = 2$
 b. $y' = -\frac{y \cos t + 2te^y}{\sin t + t^2e^y + 2}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$; $y \sin t + t^2e^y + 2y = 1$

6. Mediante la aplicación del teorema del valor medio 1.8 a $f(t, y)$, demuestre el teorema 5.3 conservando fijo a t .
 7. Demuestre que para cualesquiera constantes a y b , el conjunto $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ es convexo.
 8. Suponga que la perturbación $\delta(t)$ es proporcional a t , es decir, que $\delta(t) = \delta t$ para alguna constante δ . Demuestre directamente que los problemas con valores iniciales siguientes están bien planteados.

- a. $y' = 1 - y$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0$
 b. $y' = t + y$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -1$
 c. $y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$
 d. $y' = -\frac{2}{t}y + t^2e^t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = \sqrt{2}e$

9. El método de Picard para resolver el problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

se describe así: sea $y_0(t) = \alpha$ para cada t en $[a, b]$. Defina una sucesión $\{y_k(t)\}$ de las funciones por medio de

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau)) \, d\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

- a. Integre $y' = f(t, y(t))$ y use la condición inicial para deducir el método de Picard.
 b. Genere $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $y_3(t)$ para el problema con valores iniciales

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

- c. Compare el resultado del inciso (b) con la serie de Maclaurin de la solución real $y(t) = t + e^{-t}$.

5.2 Método de Euler

El método de Euler es la técnica de aproximación más sencilla para resolver problemas con valores iniciales. Aunque rara vez se emplea en la práctica, la simplicidad de su deducción sirve para ejemplificar las técnicas con que se desarrollan algunos de los métodos más avanzados, sin el álgebra tan engorrosa que acompaña a tales desarrollos.

Este método tiene por objetivo obtener una aproximación de un problema bien planteado con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha. \quad (5.6)$$

Puede ser que no se obtenga una aproximación continua a la solución $y(t)$; por el contrario, se generarán aproximaciones a y en varios valores, llamados **puntos de red**, en el intervalo $[a, b]$. Una vez obtenida la solución aproximada en los puntos, podemos obtener por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo.

En primer lugar estipulamos que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo $[a, b]$. Garantizamos esta condición al seleccionar un entero positivo N y los puntos de red

$$t_i = a + ih, \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

La distancia común entre los puntos $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$ recibe el nombre de **tamaño de paso**.

Utilizaremos el teorema de Taylor para deducir el método de Euler. Supongamos que $y(t)$, la única solución de la ecuación (5.6), tiene dos derivadas continuas en $[a, b]$, de modo que para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i),$$

para algún número ξ_i en (t_i, t_{i+1}) . Como $h = t_{i+1} - t_i$, se tiene

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i),$$

y como $y(t)$ satisface la ecuación diferencial (5.6),

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i). \quad (5.7)$$

El método de Euler construye $w_i \approx y(t_i)$ para cada $i = 1, 2, \dots, N$, al eliminar el término restante. Por tanto,

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ilustración En el ejemplo 1 utilizamos un algoritmo para el método de Euler para aproximar la solución de

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

en $t = 2$. Aquí simplemente ilustraremos los pasos en la técnica cuando $h = 0.5$.

El uso de métodos de diferencias elementales para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales fue uno de los primeros y numerosos temas matemáticos presentados a la comunidad matemática por el más prolífico de los matemáticos, Leonhard Euler (1707-1783).

Para este problema $f(t, y) = y - t^2 + 1$, así

$$w_0 = y(0) = 0.5;$$

$$w_1 = w_0 + 0.5 (w_0 - (0.0)^2 + 1) = 0.5 + 0.5(1.5) = 1.25;$$

$$w_2 = w_1 + 0.5 (w_1 - (0.5)^2 + 1) = 1.25 + 0.5(2.0) = 2.25;$$

$$w_3 = w_2 + 0.5 (w_2 - (1.0)^2 + 1) = 2.25 + 0.5(2.25) = 3.375;$$

y

$$y(2) \approx w_4 = w_3 + 0.5 (w_3 - (1.5)^2 + 1) = 3.375 + 0.5(2.125) = 4.4375. \quad \square$$

A la ecuación (5.8) se le llama **ecuación en diferencias** asociada al método de Euler. Como veremos luego en este capítulo, la teoría y la solución de este tipo de ecuaciones nos recuerdan en muchos aspectos a la teoría y la solución de las ecuaciones diferenciales. En el algoritmo 5.1 se pone en ejecución el método de Euler.

ALGORITMO

5.1

Método de Euler

Aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

en $(N + 1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a, b]$:

ENTRADA extremos a, b ; entero N ; condición inicial α .

SALIDA aproximación w a y en los $(N + 1)$ valores de t .

Paso 1 Tome $h = (b - a)/N$;

$$t = a;$$

$$w = \alpha;$$

SALIDA (t, w) .

Paso 2 Para $i = 1, 2, \dots, N$ haga los pasos 3, 4.

Paso 3 Haga $w = w + hf(t, w)$; (Calcule w_i .)

$$t = a + ih. \quad (\text{Calcule } t_i.)$$

Paso 4 **SALIDA** (t, w) .

Paso 5 **PARAR**. ■

Para interpretar geométricamente el método de Euler, observe que cuando w_i es una aproximación cercana a $y(t_i)$, la suposición de que el problema está bien planteado implica que

$$f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)).$$

En la figura 5.2 aparece la gráfica de la función, donde se resalta $y(t_i)$. En la figura 5.3 se muestra un paso del método de Euler y en la figura 5.4 se ve una serie de pasos.

Figura 5.2

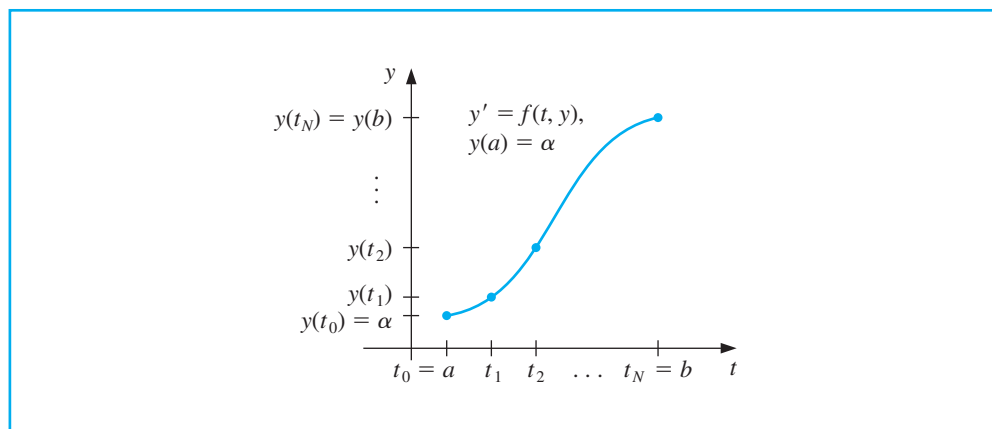


Figura 5.3

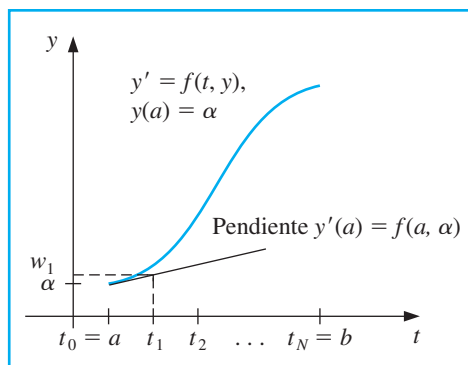
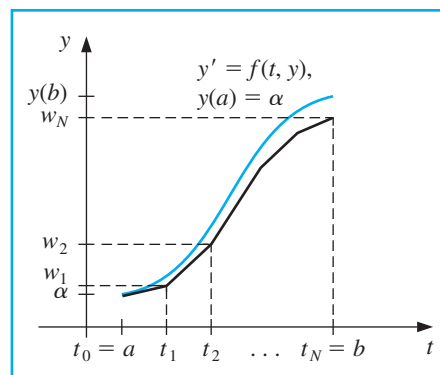


Figura 5.4



Ejemplo 1 Empleamos el método de Euler en la primera ilustración con $h = 0.5$ para aproximar la solución al problema con valores iniciales

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5.$$

Utilice el algoritmo 5.1 con $N = 10$ para determinar las aproximaciones y compárelas con los valores exactos dados por $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$.

Solución Con $N = 10$, tenemos $h = 0.2$, $t_i = 0.2i$, $w_0 = 0.5$ y

$$w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = w_i + 0.2[w_i - 0.04i^2 + 1] = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2,$$

para $i = 0, 1, \dots, 9$. Por tanto

$$w_1 = 1.2(0.5) - 0.008(0)^2 + 0.2 = 0.8; \quad w_2 = 1.2(0.8) - 0.008(1)^2 + 0.2 = 1.152;$$

y así sucesivamente. En la tabla 5.1 se muestra la comparación entre los valores aproximados en t_i y los valores reales. ■

Tabla 5.1

t_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	$ y_i - w_i $
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Observe que el error crece un poco a medida que el valor de t aumenta. Este crecimiento controlado del error es consecuencia de la estabilidad del método de Euler, el cual implica que, en el peor de los casos, el error esperado aumente en forma lineal.

Maple tiene implementado el método de Euler como una opción con el comando *InitialValueProblem* dentro del subpaquete *NumericalAnalysis* del paquete *Student*. Para aplicarlo al problema en el ejemplo 1 primero cargamos el paquete y la ecuación diferencial.

```
with(Student[NumericalAnalysis]): deq := diff(y(t), t) = y(t) - t^2 + 1
```

Luego, emita el comando

```
C := InitialValueProblem(deq, y(0) = 0.5, t = 2, method = euler, numsteps = 10,
output = information, digits = 8)
```

Maple produce

```
[ 1..12 x 1..4 Array
  Data Type: anything
  Storage: rectangular
  Order: Fortran_order ]
```

Haciendo doble clic en la salida trae una tabla que nos muestra los valores de t_i , los valores reales de la solución $y(t_i)$, las aproximaciones w_i de Euler y los errores absolutos $|y(t_i) - w_i|$. Esto concuerda con los valores dados en la tabla 5.1.

Para imprimir la tabla de Maple, podemos emitir los comandos

```
for k from 1 to 12 do
print(C[k, 1], C[k, 2], C[k, 3], C[k, 4])
end do
```

Las opciones dentro del comando *InitialValueProblem* son la especificación de la ecuación diferencial de primer orden que debe resolverse, la condición inicial, el valor final de la variable independiente, la selección del método, el número de pasos usados para determinar $h = (2 - 0)/(numsteps)$, la especificación de la forma del resultado y el número de dígitos de redondeo que se utilizarán en los cálculos. Otras opciones de resultados pueden especificar un valor particular de t o una gráfica de la solución.

Cotas de error del método de Euler

Aunque el método de Euler no es lo suficientemente exacto para justificar su uso en la práctica, resulta lo bastante elemental para analizar el error producido en su aplicación. El análisis del

error con los métodos más precisos que veremos en secciones posteriores sigue el mismo patrón, sólo que es más complicado.

Si queremos obtener una cota de error en el método de Euler, primero consideraremos dos lemas de cálculo.

Lema 5.7 Para toda $x \geq -1$ y para cualquier m positiva, tenemos $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$. ■

Demostración Al aplicar el teorema de Taylor con $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ y $n = 1$ obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^\xi,$$

donde ξ se encuentra entre x y cero. Por tanto,

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^\xi = e^x,$$

y como $1 + x \geq 0$, tenemos

$$0 \leq (1+x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}. \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare$$

Lema 5.8 Si s y t son números reales positivos, $\{a_i\}_{i=0}^k$ es una sucesión que satisface $a_0 \geq -t/s$ y

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t, \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad (5.9)$$

entonces

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s}. \quad \blacksquare$$

Demostración Para un entero fijo i , la desigualdad (5.9) implica que

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)a_i + t \\ &\leq (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t = (1+s)^2 a_{i-1} + [1 + (1+s)]t \\ &\leq (1+s)^3 a_{i-2} + [1 + (1+s) + (1+s)^2]t \\ &\vdots \\ &\leq (1+s)^{i+1} a_0 + [1 + (1+s) + (1+s)^2 + \dots + (1+s)^i]t. \end{aligned}$$

Pero

$$1 + (1+s) + (1+s)^2 + \dots + (1+s)^i = \sum_{j=0}^i (1+s)^j$$

es una serie geométrica con razón $(1+s)$ y, por tanto, su suma es

$$\frac{1 - (1+s)^{i+1}}{1 - (1+s)} = \frac{1}{s} [(1+s)^{i+1} - 1].$$

Por tanto,

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1} a_0 + \frac{(1+s)^{i+1} - 1}{s} t = (1+s)^{i+1} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s},$$

y, de acuerdo con el lema 5.7 con $x = 1+s$ da

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s}. \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare$$

Teorema 5.9 Supongamos que f es continua y que satisface la condición de Lipschitz con constante L en

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b \text{ y } -\infty < y < \infty\}$$

y que existe una constante M con

$$|y''(t)| \leq M, \quad \text{para toda } t \in [a, b],$$

donde $y(t)$ denota la única solución del problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

Sean w_0, w_1, \dots, w_N las aproximaciones generadas con el método de Euler para algún entero positivo N . Entonces para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N$,

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L} [e^{L(t_i-a)} - 1]. \quad (5.10)$$

■

Demostración Cuando $i = 0$, el resultado es verdadero porque $y(t_0) = w_0 = \alpha$. Conforme a la ecuación (5.7), tenemos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i),$$

para $i = 0, 1, \dots, N-1$, y conforme a las ecuaciones en (5.8),

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i).$$

Utilizando la notación $y_i = y(t_i)$ y $y_{i+1} = y(t_{i+1})$, restamos estas dos ecuaciones para obtener

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h[f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

Por tanto

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i| + h|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_i)|.$$

Puesto que f satisface una condición de Lipschitz en la segunda variable con constante L y como $|y''(t)| \leq M$, tenemos

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq (1 + hL)|y_i - w_i| + \frac{h^2M}{2}.$$

Con referencia al lema 5.8 y suponiendo que $s = hL$, $t = h^2M/2$ y $a_j = |y_j - w_j|$ para cada $j = 0, 1, \dots, N$ tenemos

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq e^{(i+1)hL} \left(|y_0 - w_0| + \frac{h^2M}{2hL} \right) - \frac{h^2M}{2hL}.$$

Puesto que $|y_0 - w_0| = 0$ y $(i+1)h = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - a$, esto implica que

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_{i+1}-a)L} - 1),$$

para cada $i = 0, 1, \dots, N-1$.

■ ■ ■

El punto débil del teorema 5.9 consiste en el requisito de conocer una cota para la segunda derivada de la solución. Aunque con frecuencia esta condición con frecuencia impide obtener una cota de error realista, conviene señalar que, si existen $\partial f/\partial t$ y $\partial f/\partial y$, la regla de la cadena para la derivación parcial implica que

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t)).$$

Así pues, a veces es posible obtener una cota de error para $y''(t)$ sin que se conozca explícitamente $y(t)$.

Ejemplo 2 La solución al problema con valores iniciales

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

fue aproximada en el ejemplo 1 utilizando el método de Euler con $h = 0.2$. Aplique la desigualdad del teorema 5.9 para hallar las cotas para los errores de aproximación y compárelos con los errores reales.

Solución Como $f(t, y) = y - t^2 + 1$, tenemos $\partial f(t, y)/\partial y = 1$, para toda y , entonces $L = 1$. En este problema, la solución exacta es $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$, así $y''(t) = 2 - 0.5e^t$ y

$$|y''(t)| \leq 0.5e^2 - 2, \quad \text{para toda } t \in [0, 2].$$

Utilizando la desigualdad en la cota de error en el método de Euler con $h = 0.2$ y $L = 1$ y $M = 0.5e^2 - 2$ obtenemos

$$|y_i - w_i| \leq 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1).$$

Por tanto

$$|y(0.2) - w_1| \leq 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{0.2} - 1) = 0.03752;$$

$$|y(0.4) - w_2| \leq 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{0.4} - 1) = 0.08334;$$

y así sucesivamente. La tabla 5.2 contiene el error real encontrado en el ejemplo 1, junto con la cota de error. Observe que aunque utilizamos la cota verdadera en la segunda derivada de la solución, la cota de error es mucho mayor que el error real, especialmente para valores crecientes de t . ■

Tabla 5.2

t_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
Error real	0.02930	0.06209	0.09854	0.13875	0.18268	0.23013	0.28063	0.33336	0.38702	0.43969
Cota de error	0.03752	0.08334	0.13931	0.20767	0.29117	0.39315	0.51771	0.66985	0.85568	1.08264

La importancia principal de la fórmula de la cota de error que se da en el teorema 5.9, radica en que la cota depende linealmente del tamaño de paso h . En consecuencia, cuando el tamaño disminuye, deberá haber mayor exactitud en las aproximaciones.

En el resultado del teorema 5.9 no se tiene en cuenta el efecto que el error de redondeo ejerce sobre la elección del tamaño de paso. Conforme h decrece, se requieren más cálculos y se puede predecir un mayor error de redondeo. Así pues, en la práctica, la forma de la ecuación de diferencias

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, N-1,$$

no se utiliza para calcular la aproximación a la solución y_i en un punto de red t_i . En cambio, usamos una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha + \delta_0, \\ u_{i+1} &= u_i + hf(t_i, u_i) + \delta_{i+1}, \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde δ_i denota el error de redondeo asociado a u_i . Al usar métodos semejantes a los usados en la demostración del teorema 5.9, podemos producir una cota de error para las aproximaciones de dígitos finitos a y_i obtenidas con el método Euler.

Teorema 5.10 Sea $y(t)$ la única solución al problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (5.12)$$

y sean u_0, u_1, \dots, u_N las aproximaciones obtenidas mediante (5.11). Si $|\delta_i| < \delta$ para cada $i = 0, 1, \dots, N$ y las hipótesis del teorema 5.9 son aplicables a (5.12), entonces

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) [e^{L(t_i-a)} - 1] + |\delta_0| e^{L(t_i-a)}, \quad (5.13)$$

para cada $i = 0, 1, \dots, N$. ■

La cota de error (5.13) ya no es lineal en h . De hecho, dado que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) = \infty,$$

se puede esperar que el error se vuelva grande con valores de h suficientemente pequeños. Podemos utilizar el cálculo para determinar una cota más baja para el tamaño de paso h . Tomar $E(h) = (hM/2) + (\delta/h)$ implica que $E'(h) = (M/2) - (\delta/h^2)$.

Si $h < \sqrt{2\delta/M}$, entonces $E'(h) < 0$ y $E(h)$ es decreciente.

Si $h > \sqrt{2\delta/M}$, entonces $E'(h) > 0$ y $E(h)$ es creciente.

El valor mínimo de $E(h)$ ocurre cuando

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}. \quad (5.14)$$

Cuando reducimos h más allá de este valor, el error de la aproximación tiende a incrementarse. No obstante, normalmente el valor de δ es lo bastante pequeño para que esta cota más baja para h no influya en la operación del método de Euler.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.2

1. Aplique el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas con valores iniciales.
 - a. $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$, con $h = 0.5$
 - b. $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, con $h = 0.5$
 - c. $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, con $h = 0.25$
 - d. $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.25$

2. Aplique el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas con valores iniciales.
- $y' = e^{t-y}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.5$
 - $y' = \frac{1+t}{1+y}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, con $h = 0.5$
 - $y' = -y + ty^{1/2}$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 2$, con $h = 0.25$
 - $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, con $h = 0.25$
3. A continuación se dan las soluciones reales de los problemas con valores iniciales del ejercicio 1. En cada paso, compare el error real con la cota de error.
- $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$
 - $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$
 - $y(t) = t \ln t + 2t$
 - $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$
4. A continuación se dan las soluciones reales de los problemas con valores iniciales del ejercicio 2. Calcule el error real y compárelo con la cota de error si se aplica el teorema 5.9.
- $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$
 - $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$
 - $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2}\right)^2$
 - $y(t) = \frac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$
5. Aplique el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas con valores iniciales.
- $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$, con $h = 0.1$
 - $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$, con $h = 0.2$
 - $y' = -(y+1)(y+3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$, con $h = 0.2$
 - $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$, con $h = 0.1$
6. Aplique el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas con valores iniciales.
- $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.1$
 - $y' = \frac{y^2}{1+t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$, con $h = 0.1$
 - $y' = (y^2 + y)/t$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$, con $h = 0.2$
 - $y' = -ty + 4ty^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.1$
7. A continuación se dan las soluciones reales a los problemas con valores iniciales del ejercicio 5. Calcule el error en las aproximaciones del ejercicio 5.
- $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$
 - $y(t) = t \tan(\ln t)$
 - $y(t) = -3 + \frac{2}{1 + e^{-2t}}$
 - $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$
8. A continuación se dan las soluciones reales a los problemas con valores iniciales del ejercicio 6. Calcule el error en las aproximaciones del ejercicio 6.
- $y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$
 - $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$
 - $y(t) = \frac{2t}{1-2t}$
 - $y(t) = \sqrt{4-3e^{-t^2}}$
9. Dado el problema con valores iniciales

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con las soluciones exactas $y(t) = t^2(e^t - e)$:

- Use el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y .

- b. Use las respuestas obtenidas en el inciso (a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de y , y compárelos con los valores reales.
- i. $y(1.04)$ ii. $y(1.55)$ iii. $y(1.97)$
- c. Por medio de la ecuación (5.10), calcule el valor de h necesario para que $|y(t_i) - w_i| \leq 0.1$.
10. Dado el problema con valores iniciales

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -1,$$

con la solución exacta $y(t) = -1/t$:

- a. Use el método de Euler con $h = 0.05$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y .
- b. Use las respuestas obtenidas en el inciso (a) e interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de y compárelos con los valores reales.
- i. $y(1.052)$ ii. $y(1.555)$ iii. $y(1.978)$
- c. Calcule los valores de h necesarios para $|y(t_i) - w_i| \leq 0.05$ con la ecuación (5.10).
11. Dado el problema con valores iniciales

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad y(0) = 1,$$

con la solución exacta $y(t) = e^{-t} + t$:

- a. Aproxime $y(5)$ aplicando el método de Euler con $h = 0.2$, $h = 0.1$, y $h = 0.05$
- b. Determine el valor óptimo de h que debe usarse al calcular $y(5)$, suponiendo que $\delta = 10^{-6}$ y que la ecuación (5.14) es válida.
12. Considere el problema con valores iniciales

$$y' = -10y, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

el cual tiene la solución $y(t) = e^{-10t}$. ¿Qué sucede cuando se aplica el método de Euler a este problema con $h = 0.1$? ¿Este comportamiento viola el teorema 5.9?

13. Use los resultados del ejercicio 5 e interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de $y(t)$. Compare las aproximaciones obtenidas con los valores reales obtenidos por medio de las funciones del ejercicio 7.
- a. $y(1.25)$ y $y(1.93)$ b. $y(2.1)$ y $y(2.75)$
- c. $y(1.3)$ y $y(1.93)$ d. $y(0.54)$ y $y(0.94)$
14. Use los resultados del ejercicio 6 e interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de $y(t)$. Compare las aproximaciones obtenidas con los valores reales obtenidos por medio de las funciones del ejercicio 8.
- a. $y(0.25)$ y $y(0.93)$ b. $y(1.25)$ y $y(1.93)$
- c. $y(2.10)$ y $y(2.75)$ d. $y(0.54)$ y $y(0.94)$
15. Sea $E(h) = \frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}$.

- a. Para el problema con valores iniciales

$$y' = -y + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$$

calcule el valor de h con el que $E(h)$ se reduce al mínimo. Suponga que $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$ si está empleando la aritmética de n -dígitos en el inciso (c).

- b. Para el h óptimo calculado en el inciso (a) determine, con la ecuación (5.13), el error mínimo obtenible.
- c. Compare el error real obtenido al utilizar $h = 0.1$ y $h = 0.01$ con el error mínimo del inciso (b). ¿Puede explicar los resultados?
16. En un circuito de voltaje impreso \mathcal{E} que tiene resistencia R , inductancia L y capacitancia C en paralelo, la corriente i satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{1}{L} \mathcal{E}.$$

cito del trapecio a los métodos implícitos tipo Adams de orden variable y de tamaño de paso variable.

La biblioteca IMSL incluye dos subrutinas para aproximar las soluciones de problemas con valores iniciales. Cada método resuelve un sistema de m ecuaciones de primer orden con m variables. Las ecuaciones tiene la forma

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

donde $u_i(t_0)$ está dado para cada i . Una subrutina de tamaño de paso variable se basa en los métodos de Runge-Kutta-Verner de quinto y sexto orden que se describen en el ejercicio 4 de la sección 5.5. Una subrutina de tipo Adams disponible para emplearse con las ecuaciones rígidas está basada en un método C. William Gear. Esta subrutina utiliza los métodos multipasos implícitos hasta de orden 12 y las fórmulas de derivación regresiva hasta de orden 5.

Los procedimientos de tipo Runge-Kutta contenidos en la biblioteca NAG se basan en la versión Merson del método de Runge-Kutta. En la librería también está contenido un método de orden variable y de tamaño de paso variable de Adams, así como también un método de orden variable y de diferencia regresiva de tamaño de paso variable para sistemas rígidos. Otras rutinas incorporan los mismos métodos, pero los iteran hasta que una componente de la solución alcance determinado valor o hasta que la función de la solución sea cero.

Las biblioteca netlib incluye varias subrutinas para aproximar las soluciones de problemas con valores iniciales en el paquete ODE. Una subrutina se basa en los métodos de quinto y sexto orden de Runge-Kutta-Verner, otra subrutina se basa en los métodos de cuarto y quinto orden de Runge-Kutta-Fehlberg descritos en la página 297 en la sección 5.5. Para los problemas de valores iniciales con ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas, hay una subrutina basada en la fórmula de derivación regresiva con coeficientes variables.

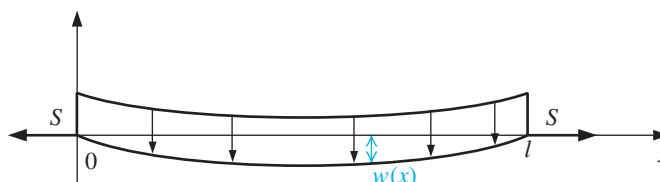
Hay muchos libros que se especializan en la resolución numérica de problemas con valores iniciales. Dos obras clásicas son la de Henrici [He1] y la de Gear [Ge1]. Otros libros que ofrecen un panorama de este campo de estudio son los de Botha y Pinder [BP], Ortega y Poole [OP], Golub y Ortega [GO], Shampine [Sh] y Dormand [Do].

Dos libros de Hairer, Nørsett y Warner ofrecen explicaciones exhaustivas sobre los problemas no rígidos [HNW1] y rígidos [HNW2]. En el libro de Burrage [Bur] se describen los métodos paralelos y secuenciales para resolver sistemas de problemas con valores iniciales.

Problemas con valor en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias

Introducción

Un problema común en ingeniería civil es el que se relaciona con la deflexión de una viga de sección transversal rectangular sujeta a una carga uniforme, mientras sus extremos están soportados de modo que no experimentan deflexión alguna.



Suponga que l , q , E , S e I representan, respectivamente, la longitud de la viga, la intensidad de la carga uniforme, el módulo de elasticidad, el esfuerzo en los extremos y el momento central de inercia. La ecuación diferencial que aproxima la situación física es de la forma

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI} (x - l),$$

donde $w(x)$ es la deflexión a una distancia x desde el extremo izquierdo de la viga. Dado que no ocurre deflexión alguna en los extremos de la viga, existen dos condiciones de frontera

$$w(0) = 0 \quad \text{y} \quad w(l) = 0.$$

Cuando la viga tiene un espesor uniforme, el producto EI es constante y la solución exacta se obtiene fácilmente. Cuando el espesor no es uniforme, el momento de inercia I es una función de x y se requieren métodos de aproximación. Este tipo de problemas se consideran en el ejercicio 7 de la sección 11.3 y el 6 de la sección 11.4.

Las ecuaciones diferenciales del capítulo 5 eran de primer orden y debían satisfacer una condición inicial. Más adelante en dicho capítulo vimos que las técnicas podían extenderse a sistemas de ecuaciones y luego a ecuaciones de orden superior, pero todas las condiciones fueron dadas en el mismo punto extremo. Éstos son problemas con valor inicial. En este capítulo mostraremos cómo aproximar la solución de problemas con **valores en la frontera**, ecuaciones diferenciales con condiciones impuestas en distintos puntos. Para las ecuaciones diferenciales de primer orden sólo se especifica una condición, así que no hay distinción entre los problemas con valor inicial y con valor en la frontera. Aquí analizaremos ecuaciones de segundo orden con dos valores en la frontera.

Los problemas físicos que dependen más de la posición que del tiempo a menudo se describen en función de ecuaciones diferenciales, con condiciones impuestas en más de un punto.

En este capítulo, los problemas con valor en la frontera de dos puntos incluyen una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \quad (11.1)$$

junto con las condiciones de frontera

$$y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y(b) = \beta. \quad (11.2)$$

11.1 El método del disparo lineal

El siguiente teorema establece las condiciones generales que garantizan que exista la solución para un problema con valores en la frontera de segundo orden y que dicha solución sea única. La demostración del teorema se encuentra en [Keller, H].

Teorema 11.1 Supongamos que la función f en el problema con valores en la frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta,$$

es continua en el conjunto

$$D = \{(x, y, y') \mid \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } -\infty < y < \infty \text{ y } -\infty < y' < \infty\},$$

y que las derivadas parciales f_y y $f_{y'}$ también son continuas en D . Si

(i) $f_y(x, y, y') > 0$, para toda $(x, y, y') \in D$ y

(ii) existe una constante M , con

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M, \quad \text{para toda } (x, y, y') \in D,$$

entonces el problema con valores en la frontera tiene una solución única. ■

Ejemplo 1 Utilice el teorema 11.1 para demostrar que el problema con valores en la frontera

$$y'' + e^{-xy} + \sen y' = 0, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2, \text{ con } y(1) = y(2) = 0,$$

tiene una solución única.

Solución Se tiene

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sen y',$$

y para toda x en $[1, 2]$,

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \quad \text{y} \quad |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \leq 1.$$

Así que el problema tiene una solución única. ■

Problemas lineales con valores en la Frontera

La ecuación diferencial

$$y'' = f(x, y, y')$$

es lineal cuando las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ existen con

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x).$$

Este tipo de problemas ocurren frecuentemente y en este caso el teorema 11.1 puede simplificarse.

Corolario 11.2 Suponga que el problema lineal con valor en la frontera

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta,$$

satisface

- (i) $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a, b]$,
- (ii) $q(x) > 0$ en $[a, b]$.

Entonces el problema tiene una solución única. ■

Para aproximar la solución única de este sistema lineal, primero consideraremos los problemas con valor inicial

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \text{ con } a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = 0, \quad (11.3)$$

y

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \text{ con } a \leq x \leq b, \quad y(a) = 0 \text{ y } y'(a) = 1. \quad (11.4)$$

El teorema 5.17 de la sección 5.9 (vea la página 329) garantiza que, según las hipótesis del corolario 11.2, ambos problemas tienen una solución única.

Sea $y_1(x)$ la solución de (11.3) y sea $y_2(x)$ la solución de (11.4). Suponga que $y_2(b) \neq 0$. (En el ejercicio 8 se considera que $y_2(b) = 0$ está en conflicto con la hipótesis del corolario 11.2). Defina

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x). \quad (11.5)$$

Entonces $y(x)$ es la solución al problema lineal con valor en la frontera (11.3). Para ver esto, primero advierta que

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x)$$

y

$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x).$$

Sustituyendo $y_1''(x)$ y $y_2''(x)$ en esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} (p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= p(x) \left(y_1' + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2' \right) + q(x) \left(y_1 + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2 \right) + r(x) \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \end{aligned}$$

Una ecuación lineal involucra sólo potencias lineales de y y sus derivadas.

Más aún

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha$$

y

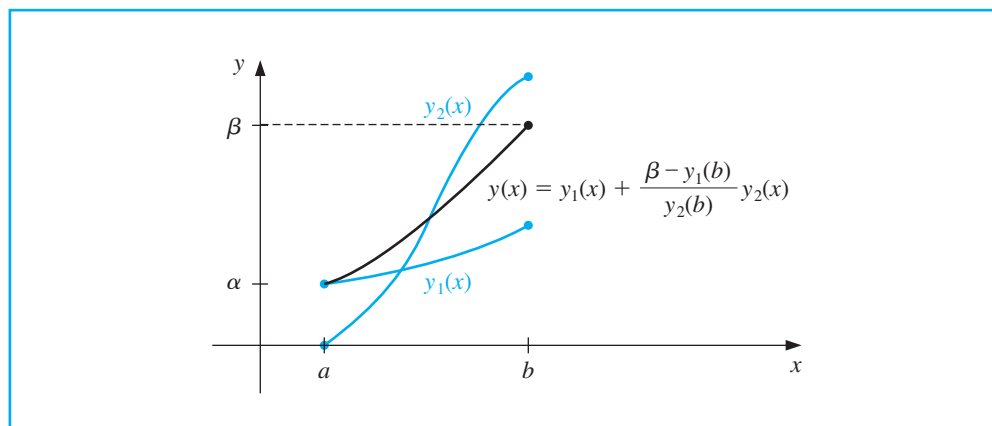
$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta.$$

Método del disparo

Estos “disparos” dan en el objetivo luego de un tiro de prueba. En la siguiente sección veremos que los problemas no lineales requieren de múltiples disparos.

El método del disparo para las ecuaciones lineales se basa en la sustitución del problema lineal con valor en la frontera por dos problemas con valor inicial (11.3) y (11.4). En el capítulo 5 se describen muchos métodos con los cuales podemos aproximar las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$, y una vez que contamos con estas aproximaciones, la solución del problema con valor en la frontera se aproxima por medio de la ecuación (11.5). Desde el punto de vista gráfico, el método tiene el aspecto que se observa en la figura 11.1.

Figura 11.1



En el algoritmo 11.1 se usa el método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener las aproximaciones a $y_1(x)$ y a $y_2(x)$, pero en el paso 4 puede sustituirse con cualquier otra técnica que aproxime las soluciones a los problemas con valor inicial.

El algoritmo tiene la característica adicional de obtener aproximaciones para la derivada de la solución del problema con valor en la frontera y también la solución del problema en sí mismo. El uso del algoritmo no se limita a los problemas en que se puede verificar el corolario 11.2; también da resultados satisfactorios en muchos problemas que no satisfacen esas hipótesis.

ALGORITMO 11.1

Método del disparo

Para aproximar la solución del problema con valor en la frontera

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta,$$

(Nota: las ecuaciones 11.3 y 11.4 se escriben y se resuelven como sistemas de primer orden.)

ENTRADA extremos a, b ; condiciones de frontera α, β ; número de subintervalos N .

SALIDA aproximaciones $w_{1,i}$ a $y(x_i)$; $w_{2,i}$ a $y'(x_i)$ para cada $i = 0, 1, \dots, N$.

Paso 1 Haga $h = (b - a)/N$;

$$u_{1,0} = \alpha;$$

$$u_{2,0} = 0;$$

$$v_{1,0} = 0;$$

$$v_{2,0} = 1.$$

Paso 2 Para $i = 0, \dots, N - 1$ haga los pasos 3 y 4.

(El método de Runge-Kutta para sistemas se utiliza en los pasos 3 y 4.)

Paso 3 Haga $x = a + ih$.

Paso 4 Haga $k_{1,1} = hu_{2,i}$;

$$k_{1,2} = h [p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)];$$

$$k_{2,1} = h [u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}];$$

$$k_{2,2} = h [p(x + h/2) (u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}) + q(x + h/2) (u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}) + r(x + h/2)];$$

$$k_{3,1} = h [u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}];$$

$$k_{3,2} = h [p(x + h/2) (u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}) + q(x + h/2) (u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}) + r(x + h/2)];$$

$$k_{4,1} = h [u_{2,i} + k_{3,2}];$$

$$k_{4,2} = h [p(x + h) (u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x + h) (u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x + h)];$$

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6} [k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}];$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6} [k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}];$$

$$k'_{1,1} = hv_{2,i};$$

$$k'_{1,2} = h [p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}];$$

$$k'_{2,1} = h [v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}];$$

$$k'_{2,2} = h [p(x + h/2) (v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}) + q(x + h/2) (v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1})];$$

$$k'_{3,1} = h [v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}];$$

$$k'_{3,2} = h [p(x + h/2) (v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}) + q(x + h/2) (v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1})];$$

$$k'_{4,1} = h [v_{2,i} + k'_{3,2}];$$

$$k'_{4,2} = h [p(x + h) (v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x + h) (v_{1,i} + k'_{3,1})];$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6} [k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}];$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6} [k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}].$$

Paso 5 Haga $w_{1,0} = \alpha$;

$$w_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$$

SALIDA $(a, w_{1,0}, w_{2,0})$.

Paso 6 Para $i = 1, \dots, N$

$$\text{haga } W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i};$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i};$$

$$x = a + ih;$$

SALIDA $(x, W1, W2)$. (La salida es $x_i, w_{1,i}, w_{2,i}$.)

Paso 7 PARAR. (Procedimiento terminado.)

Ejemplo 2 Aplique el método del disparo lineal con $N = 10$ al problema con valor en la frontera

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2, \text{ con } y(1) = 1 \text{ y } y(2) = 2,$$

y compare los resultados con los de la solución exacta

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10} \sin(\ln x) - \frac{1}{10} \cos(\ln x),$$

donde

$$c_2 = \frac{1}{70}[8 - 12 \sin(\ln 2) - 4 \cos(\ln 2)] \approx -0.03920701320$$

y

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132.$$

Solución Si queremos aplicar el algoritmo 11.1 a este problema, es necesario aproximar las soluciones de los problemas con valor inicial

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2, \text{ con } y_1(1) = 1 \text{ y } y_1'(1) = 0,$$

y

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2, \text{ con } y_2(1) = 0 \text{ y } y_2'(1) = 1.$$

En la tabla 11.1 se incluyen los resultados de los cálculos cuando se emplea el algoritmo 11.1 con $N = 10$ y $h = 0.1$. El valor marcado como $u_{1,i}$ aproxima $y_1(x_i)$, $v_{1,i}$ aproxima $y_2(x_i)$ y w_i aproxima

$$y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{2 - y_1(2)}{y_2(2)}y_2(x_i).$$

Tabla 11.1

x_i	$u_{1,i} \approx y_1(x_i)$	$v_{1,i} \approx y_2(x_i)$	$w_i \approx y(x_i)$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - w_i $
1.0	1.00000000	0.00000000	1.00000000	1.00000000	
1.1	1.00896058	0.09117986	1.09262917	1.09262930	1.43×10^{-7}
1.2	1.03245472	0.16851175	1.18708471	1.18708484	1.34×10^{-7}
1.3	1.06674375	0.23608704	1.28338227	1.28338236	9.78×10^{-8}
1.4	1.10928795	0.29659067	1.38144589	1.38144595	6.02×10^{-8}
1.5	1.15830000	0.35184379	1.48115939	1.48115942	3.06×10^{-8}
1.6	1.21248372	0.40311695	1.58239245	1.58239246	1.08×10^{-8}
1.7	1.27087454	0.45131840	1.68501396	1.68501396	5.43×10^{-10}
1.8	1.33273851	0.49711137	1.78889854	1.78889853	5.05×10^{-9}
1.9	1.39750618	0.54098928	1.89392951	1.89392951	4.41×10^{-9}
2.0	1.46472815	0.58332538	2.00000000	2.00000000	

La exactitud que muestra la tabla 11.1 se debe a que el método de Runge-Kutta de cuarto orden ofrece $O(h^4)$ aproximaciones a las soluciones de los problemas con valor inicial. Desafortunadamente, por errores de redondeo, esta técnica puede contener problemas ocultos.

Reducción del error por redondeo

Los problemas por errores de redondeo pueden ocurrir si $y_1(x)$ aumenta rápidamente a medida que x pasa de a a b . En este caso $u_{1,N} \approx y_1(b)$ será grande y si β tiene una magnitud pequeña en comparación con $u_{1,N}$ el término $w_{2,0} = (\beta - u_{1,N})/v_{1,N}$ será aproximadamente $-u_{1,N}/v_{1,N}$. Entonces los cálculos del paso 6 se convierten en

$$W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i} \approx u_{1,i} - \left(\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}\right)v_{1,i},$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i} \approx u_{2,i} - \left(\frac{u_{1,N}}{v_{1,N}}\right)v_{2,i},$$

lo cual permite una posible pérdida de dígitos significativos debido a la cancelación. Sin embargo, como $u_{1,i}$ es una aproximación a $y_1(x_i)$, podemos vigilar fácilmente el comportamiento de y_1 y si $u_{1,i}$ aumenta rápidamente de a a b , podemos aplicar hacia atrás el método del disparo, esto es, de $x_0 = b$ a $x_N = a$. Esto cambia los problemas con valores iniciales que es necesario resolver a

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(b) = \alpha \text{ y } y'(b) = 0,$$

y

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(b) = 0 \text{ y } y'(b) = 1.$$

Si este método del disparo inverso todavía genera eliminación de dígitos significativos y si el aumento de precisión no produce mayor exactitud, será necesario utilizar otras técnicas como las que explicaremos más adelante en este capítulo. No obstante, en general si $u_{1,i}$ y $v_{1,i}$ son $O(h^n)$ aproximaciones a $y_1(x_i)$ y $y_2(x_i)$, respectivamente, con $i = 0, 1, \dots, N$, entonces $w_{1,i}$ será una aproximación $O(h^n)$ a $y(x_i)$. En particular,

$$|w_{1,i} - y(x_i)| \leq Kh^n \left| 1 + \frac{v_{1,i}}{v_{1,N}} \right|,$$

para alguna constante K (vea [IK], p. 426).

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.1

1. El problema con valor en la frontera

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

tiene la solución $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. Aplique el método del disparo lineal para aproximar la solución y después compare los resultados con la solución real.

- a. Con $h = \frac{1}{2}$;
- b. Con $h = \frac{1}{4}$.

2. El problema con valor en la frontera

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

tiene la solución $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$. Aplique el método del disparo lineal para aproximar la solución y después compare los resultados con la solución real.

- a. Con $h = \frac{\pi}{4}$;
- b. Con $h = \frac{\pi}{8}$.

3. Aplique el método del disparo lineal para aproximar la solución a los siguientes problemas con valores en la frontera.

- a. $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1$; use $h = 0.1$.

- b. $y'' = -4x^{-1}y' - 2x^{-2}y + 2x^{-2} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y(2) = \ln 2$; use $h = 0.05$.

- $$y'' = 100y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}.$$

6. Escriba como sistemas de primer orden los problemas con valor inicial de segundo orden (11.3) y (11.4), y deduzca las ecuaciones necesarias para resolver los sistemas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas.
7. Representamos con u el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). El potencial de la esfera interior se mantiene constante en V_1 volts y el potencial de la esfera exterior es 0 volts. El potencial de la región situada entre ambas esferas está regido por la ecuación de Laplace, que en esta aplicación particular se reduce a

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0.$$

- Aproxime $u(3)$ por medio del algoritmo del disparo lineal.
- Compare los resultados del inciso (a) con el potencial real $u(3)$, donde

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right).$$

8. Demuestre que de acuerdo con las hipótesis del corolario 11.2, si y_2 es la solución de $y'' = p(x)y' + q(x)y$ y $y_2(a) = y_2(b) = 0$, entonces $y_2 \equiv 0$.
9. Considere el problema con valores en la frontera

$$y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B.$$

a. No tenga solución; **b.** Tenga exactamente una solución;
c. Tenga una infinidad de soluciones.

- 10.** Intente aplicar el ejercicio 9 al problema de valores en la frontera

$$y'' - y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B.$$

¿Qué sucede? ¿De qué manera ambos problemas se relacionan con el corolario 11.2?

11.2

El método del disparo para el problema no lineal con valores en la frontera de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta \quad (11.6)$$

se parece al caso lineal, excepto que la solución del problema no lineal no puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones a dos problemas con valores iniciales. Necesitamos, en cambio, utilizar las soluciones de una *sucesión* de problemas con valor inicial que involucren un parámetro t . Estos problemas tienen la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = t. \quad (11.7)$$

Esto lo hacemos escogiendo los parámetros $t = t_k$ para asegurar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta,$$

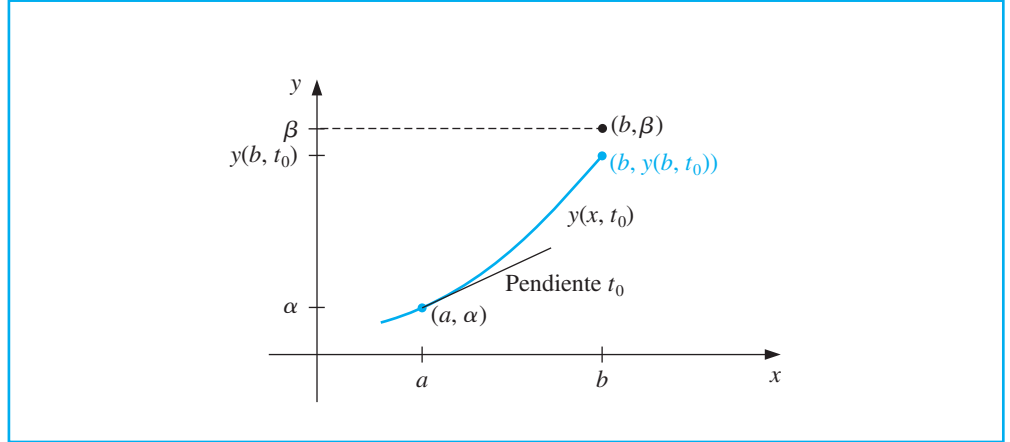
donde $y(x, t_k)$ denota la solución al problema con valores iniciales (11.7) con $t = t_k$ y $y(x)$ denota la solución al problema con valor en la frontera (11.6).

Esta técnica se conoce con el nombre de método “del disparo”, por la analogía con el procedimiento de dispararle a objetos situados en un blanco fijo. (Vea la figura 11.2.) Comenzamos con un parámetro t_0 que determina la elevación inicial a la cual se le dispara al objetivo desde el punto (a, α) y a lo largo de la curva descrita por la solución al problema con valor inicial:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = t_0.$$

Los métodos de disparo para problemas no lineales requieren de iteraciones para aproximar el “objetivo”.

Figura 11.2



Si $y(b, t_0)$ no está suficientemente cerca de β , corregimos la aproximación seleccionando las elevaciones t_1, t_2 y así sucesivamente, hasta que $y(b, t_k)$ esté bastante cerca de “acertar en el blanco” β . (Vea la figura 11.3)

Para determinar los parámetros t_k , supongamos que un problema con valor en la frontera de la forma (11.6) satisface las hipótesis del teorema 11.1. Si $y(x, t)$ denota la solución del problema con valor inicial (11.7), a continuación determinamos t con

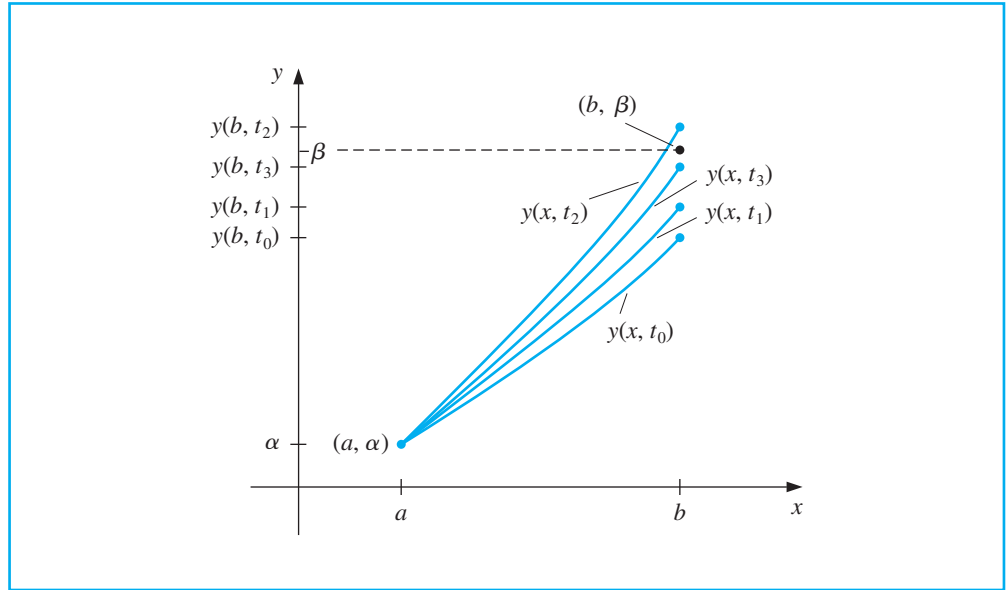
$$y(b, t) - \beta = 0. \quad (11.8)$$

Ésta es una ecuación no lineal en la variable t . Problemas de este tipo fueron los que vimos en el capítulo 2 y, por lo mismo, disponemos de varios métodos.

Si queremos emplear el método de la secante para resolver el problema, necesitamos elegir las aproximaciones iniciales t_0 y t_1 y luego generar los términos restantes de la sucesión mediante

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b, t_{k-1}) - \beta)(t_{k-1} - t_{k-2})}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Figura 11.3



Iteración de Newton

Para generar la sucesión $\{t_k\}$ con el método de Newton, que es más poderoso, sólo necesitamos una aproximación inicial t_0 . Sin embargo, la iteración tiene la forma

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})}, \quad (11.9)$$

y requiere conocer $(dy/dt)(b, t_{k-1})$. Esto presenta un problema porque no se conoce una representación explícita de $y(b, t)$; conocemos sólo los valores $y(b, t_0), y(b, t_1), \dots, y(b, t_{k-1})$.

Suponga que reescribimos el problema con valor inicial (11.7), haciendo énfasis en que la solución se basa tanto en x como en el parámetro t :

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a, t) = \alpha \text{ y } y(a, t) = t. \quad (11.10)$$

Hemos conservado la notación prima para indicar la derivada respecto a x . Puesto que necesitamos determinar $(dy/dt)(b, t)$ cuando $t = t_{k-1}$, primero evaluamos la derivada parcial de (11.10) respecto a t . Esto significa que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x, t), y'(x, t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t). \end{aligned}$$

Dado que x y t son independientes, tenemos $\partial x / \partial t = 0$ y la ecuación se simplifica a

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t), \quad (11.11)$$

para $a \leq x \leq b$. Las condiciones iniciales dan

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1.$$

Si simplificamos la notación usando $z(x, t)$ para denotar $(\partial y / \partial t)(x, t)$ y si suponemos que el orden de derivación de x y t puede invertirse, con las condiciones iniciales (11.11) se convierte en el problema con valor inicial

$$z''(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')z(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')z'(x, t), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \quad (11.12)$$

con $z(a, t) = 0$ y $z(a, t) = 1$.

Así pues, el método de Newton requiere que dos problemas con valor inicial, (11.10) y (11.12), sean resueltos en cada iteración. Entonces, conforme a la ecuación (11.9), tenemos

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}. \quad (11.13)$$

Desde luego, ninguno de estos problemas con valor inicial se resuelve exactamente; las soluciones se aproximan con uno de los métodos expuestos en el capítulo 5. El algoritmo 11.2 emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar las dos soluciones que requiere el método de Newton. En el ejercicio 5 se considera un procedimiento semejante con el método de la secante.

ALGORITMO

11.2

Disparo no lineal con el método de Newton

Para aproximar la solución del problema no lineal con valor en la frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta :$$

(Nota: las ecuaciones (11.10) y (11.12) se escriben y se resuelven como sistemas de primer orden.)

ENTRADA extremos a, b ; condiciones de frontera α, β ; número de subintervalos $N \geq 2$; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones M .

SALIDA aproximaciones $w_{1,i}$ a $y(x_i)$; $w_{2,i}$ a $y'(x_i)$ para cada $i = 0, 1, \dots, N$ o bien un mensaje de que se excedió el número máximo de iteraciones.

Paso 1 Haga $h = (b - a)/N$;

$$k = 1;$$

$$TK = (\beta - \alpha)/(b - a). \quad (\text{Nota: } TK \text{ también puede ser entrada.})$$

Paso 2 Mientras $(k \leq M)$ haga los pasos 3–10.

Paso 3 Tome $w_{1,0} = \alpha$;

$$w_{2,0} = TK;$$

$$u_1 = 0;$$

$$u_2 = 1.$$

Paso 4 Para $i = 1, \dots, N$ haga los pasos 5 y 6.

(El método de Runge-Kutta para sistemas se utiliza en los pasos 5 y 6.)

Paso 5 Haga $x = a + (i - 1)h$.

Paso 6 Haga $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$;

$$k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1});$$

$$k_{2,1} = h(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2});$$

$$k_{2,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2});$$

$$k_{3,1} = h(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2});$$

$$\begin{aligned}
k_{3,2} &= hf(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}); \\
k_{4,1} &= h(w_{2,i-1} + k_{3,2}); \\
k_{4,2} &= hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2}); \\
w_{1,i} &= w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6; \\
w_{2,i} &= w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6; \\
k'_{1,1} &= hu_2; \\
k'_{1,2} &= h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1 \\
&\quad + f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2]; \\
k'_{2,1} &= h[u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2}]; \\
k'_{2,2} &= h[f_y(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{1,1}) \\
&\quad + f_{y'}(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2})]; \\
k'_{3,1} &= h(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2}); \\
k'_{3,2} &= h[f_y(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{2,1}) \\
&\quad + f_{y'}(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2})]; \\
k'_{4,1} &= h(u_2 + k'_{3,2}); \\
k'_{4,2} &= h[f_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + k'_{3,1}) \\
&\quad + f_{y'}(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + k'_{3,2})]; \\
u_1 &= u_1 + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]; \\
u_2 &= u_2 + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}].
\end{aligned}$$

Paso 7 Si $|w_{1,N} - \beta| \leq TOL$ entonces haga los pasos 8 y 9.

Paso 8 Para $i = 0, 1, \dots, N$
tome $x = a + ih$;
SALIDA $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$.

Paso 9 (Procedimiento terminado.)
PARAR.

Paso 10 Haga $TK = TK - \frac{w_{1,N} - \beta}{u_1}$;
(El método de Newton se utiliza para calcular TK.)
 $k = k + 1$.

Paso 11 **SALIDA** ('Número máximo de iteraciones excedido');
(Procedimiento terminado sin éxito.)
PARAR.

El valor $t_0 = TK$ escogido en el paso 1 es la pendiente de la recta que pasa por (a, α) y (b, β) . Si el problema satisface las hipótesis del teorema 11.1, cualquier elección de t_0 dará convergencia; pero una buena elección de t_0 mejorará la convergencia y el procedimiento funcionará en muchos problemas que no satisfacen estas hipótesis. Un ejemplo se muestra en el ejercicio 3(d).

Ejemplo 1 Aplique la técnica del disparo con el método de Newton al problema con valor en la frontera

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad \text{para } 1 \leq x \leq 3, \text{ con } y(1) = 17 \text{ y } y(3) = \frac{43}{3}.$$

Use $N = 20$; $M = 10$ y $TOL = 10^{-5}$ y compare los resultados con la solución exacta $y(x) = x^2 + 16/x$.

Solución Necesitamos aproximar las soluciones a los problemas con valores iniciales

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad \text{para } 1 \leq x \leq 3, \text{ con } y(1) = 17 \text{ y } y'(1) = t_k,$$

y

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}z + \frac{\partial f}{\partial y'}z' = -\frac{1}{8}(y'z + yz'), \quad \text{para } 1 \leq x \leq 3, \text{ con } z(1) = 0 \text{ y } z'(1) = 1,$$

en cada paso de la iteración. Si la técnica de detención o paro en el algoritmo 11.2 requiere

$$|w_{1,N}(t_k) - y(3)| \leq 10^{-5},$$

entonces necesitamos cuatro iteraciones y $t_4 = -14.000203$. Los resultados obtenidos con este valor de t se muestran en la tabla 11.2. ■

Tabla 11.2

x_i	$w_{1,i}$	$y(x_i)$	$ w_{1,i} - y(x_i) $
1.0	17.000000	17.000000	
1.1	15.755495	15.755455	4.06×10^{-5}
1.2	14.773389	14.773333	5.60×10^{-5}
1.3	13.997752	13.997692	5.94×10^{-5}
1.4	13.388629	13.388571	5.71×10^{-5}
1.5	12.916719	12.916667	5.23×10^{-5}
1.6	12.560046	12.560000	4.64×10^{-5}
1.7	12.301805	12.301765	4.02×10^{-5}
1.8	12.128923	12.128889	3.14×10^{-5}
1.9	12.031081	12.031053	2.84×10^{-5}
2.0	12.000023	12.000000	2.32×10^{-5}
2.1	12.029066	12.029048	1.84×10^{-5}
2.2	12.112741	12.112727	1.40×10^{-5}
2.3	12.246532	12.246522	1.01×10^{-5}
2.4	12.426673	12.426667	6.68×10^{-6}
2.5	12.650004	12.650000	3.61×10^{-6}
2.6	12.913847	12.913845	9.17×10^{-7}
2.7	13.215924	13.215926	1.43×10^{-6}
2.8	13.554282	13.554286	3.46×10^{-6}
2.9	13.927236	13.927241	5.21×10^{-6}
3.0	14.333327	14.333333	6.69×10^{-6}

Aunque el método de Newton que se usa con las técnicas de disparo requiere la resolución de un problema adicional con valor inicial, en la mayoría de los casos será más rápido que el método de la secante. Sin embargo, ambos métodos convergen sólo localmente, pues requieren buenas aproximaciones iniciales.

Al lector que desee una explicación general de la convergencia de los métodos de disparo con problemas no lineales le recomendamos el excelente libro de Keller [Keller, H]. En él se describen las condiciones de frontera más generales. También conviene señalar que el método de disparo para problemas no lineales es vulnerable a los errores de redondeo, especialmente si las soluciones $y(x)$ y $z(x, t)$ son funciones de x que crecen rápidamente en $[a, b]$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.2

1. Use el algoritmo de disparo no lineal con $h = 0.5$ para aproximar la solución al problema con valor en la frontera.

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

Compare sus resultados con la solución real $y = \ln x$.

2. Use el algoritmo de disparo no lineal con $h = 0.25$ para aproximar la solución al problema con valor en la frontera

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare los resultados con la solución real $y(x) = 1/(x + 3)$.

3. Aplique el método de disparo no lineal con $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución a los siguientes problemas con valor en la frontera. Se incluye la solución real para compararla con sus resultados.

a. $y'' = -e^{-2y}$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$; use $N = 10$; solución real $y(x) = \ln x$.

b. $y'' = y' \cos x - y \ln y$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$; use $N = 10$; solución real $y(x) = e^{\sin x}$.

c. $y'' = -(2(y')^3 + y^2 y') \sec x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, $y(\frac{\pi}{4}) = 2^{-1/4}$, $y(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$; use $N = 5$; solución real $y(x) = \sqrt{\sin x}$.

d. $y'' = \frac{1}{2}(1 - (y')^2 - y \sin x)$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 2$; use $N = 20$; solución real $y(x) = 2 + \sin x$.

4. Aplique el método de disparo no lineal con $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución a los siguientes problemas con valor en la frontera. Se incluye la solución real para compararla con sus resultados.

a. $y'' = y^3 - yy'$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(2) = \frac{1}{3}$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = (x + 1)^{-1}$.

b. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = \frac{5}{2}$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x + x^{-1}$.

c. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$, $2 \leq x \leq 3$, $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x^{-1} + \ln x$.

d. $y'' = 2(y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 256$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = x^3 \ln x$.

5. a. Cambie el algoritmo 11.2 para incorporar el método de la secante en vez del método de Newton. Utilice $t_0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$ y $t_1 = t_0 + (\beta - y(b, t_0))/(b - a)$.

- b. Repita el ejercicio 4(a) y 4(c) usando el algoritmo del método de la secante deducido en el inciso (a); después compare la cantidad de iteraciones que se requieren en ambos métodos.

6. La ecuación de Van der Pol,

$$y'' - \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu > 0,$$

rige el flujo de corriente en un tubo al vacío con tres elementos internos. Sea $\mu = \frac{1}{2}$, $y(0) = 0$, $y(2) = 1$. Aproxime la solución $y(t)$ para $t = 0.2i$, donde $1 \leq i \leq 9$.

11.3 Métodos de diferencias finitas para problemas lineales

Aunque los métodos de disparo lineales y no lineales pueden emplearse en los problemas con valores en la frontera, pueden presentar problemas de inestabilidad. Los métodos que exponemos en esta sección tienen mejores características de estabilidad, pero generalmente hay que trabajar más para obtener la exactitud especificada.

Los métodos que involucran diferencias finitas para la resolución de problemas con valores en la frontera reemplazan cada una de las derivadas en la ecuación diferencial con una aproximación de cociente de diferencias adecuada, del tipo que se consideró en la sección 4.1.

Se selecciona el cociente de diferencias y el tamaño de paso h para mantener un orden especificado del error de truncamiento. Sin embargo, por la inestabilidad de las aproximaciones a las derivadas, no podemos escoger h demasiado pequeño.

Aproximación discreta

El método de diferencias finitas para el problema con valor en la frontera lineal de segundo orden,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad \text{para } a \leq x \leq b, \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta, \quad (11.14)$$

requiere utilizar las aproximaciones del cociente de diferencias para aproximar tanto a y' como a y'' . Primero, seleccionamos un entero $N > 0$ y dividimos el intervalo $[a, b]$ en $(N + 1)$ subintervalos iguales cuyos extremos son los puntos de malla $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \dots, N + 1$, donde $h = (b - a)/(N + 1)$. Al escoger el tamaño de paso h de este modo, se facilita la aplicación de un algoritmo matricial explicado en el capítulo 6, con el cual se resuelve un sistema lineal que contiene una matriz de $N \times N$.

En los puntos de red interiores, x_i , para $i = 1, 2, \dots, N$, la ecuación diferencial por aproximar es

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i). \quad (11.15)$$

Al desarrollar y en un tercer polinomio de Taylor alrededor de x_i evaluada en x_{i+1} y x_{i-1} , tenemos, suponiendo que $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+),$$

para alguna ξ_i^+ en (x_i, x_{i+1}) y

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-),$$

para alguna ξ_i^- en (x_{i-1}, x_i) . Si se suman estas ecuaciones, tenemos

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)],$$

y al despejar $y''(x_i)$ se obtiene

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)].$$

Podemos aplicar el teorema del valor intermedio 1.11 para simplificar el término de error para tener

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \quad (11.16)$$

para alguna ξ_i en (x_{i-1}, x_{i+1}) . A esto se le llama **fórmula de diferencias centradas** para $y''(x_i)$.

De manera semejante se obtiene una fórmula de este tipo para $y'(x_i)$ (los detalles se dan en la sección 4.1), lo cual da por resultado

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i), \quad (11.17)$$

para alguna η_i en (x_{i-1}, x_{i+1}) .

Richard L. Burden • J. Douglas Faires

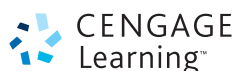
Análisis numérico

Novena Edición

Este muy respetado texto proporciona una introducción a la teoría y la aplicación de técnicas modernas de aproximación numérica para estudiantes que toman un curso de uno o dos semestres en análisis numérico. Con un tratamiento accesible que sólo requiere un requisito de cálculo, *Análisis numérico* de Burden y Faires explica cómo, por qué y cuándo puede esperarse que las técnicas de aproximación funcionen y la causa de que, en algunas situaciones, fallen. Una gran cantidad de ejemplos y ejercicios desarrollan la intuición de los estudiantes y demuestran las aplicaciones prácticas del tema a importantes problemas cotidianos en las disciplinas de matemáticas, informática, ingeniería y ciencias físicas. El primer libro de su tipo construido desde abajo hacia arriba para servir a una audiencia diversa de estudiantes, tres décadas más tarde *Análisis numérico* de Burden y Faires sigue siendo la introducción definitiva a un tema vital y práctico.

Características

- Virtualmente cada concepto en el texto es ilustrado por ejemplos y reforzado por más de 2500 ejercicios probados en la clase, que van desde aplicaciones elementales de métodos y algoritmos a generalizaciones y extensiones de la teoría.
- Los conjuntos de ejercicios incluyen muchos problemas aplicados a diversas áreas de la ingeniería, así como de la física, computación, biológicas y ciencias sociales.
- Los algoritmos en el texto están diseñados para trabajar con una amplia variedad de paquetes de software y lenguajes de programación, lo que permite obtener la máxima flexibilidad para que los usuarios aprovechen la potencia de cálculo para realizar aproximaciones. El sitio web de acompañamiento del libro ofrece hojas de cálculo de Maple, Mathematica y MATLAB, así como programas en C, FORTRAN, Java y Pascal.
- El diseño del texto da a los instructores la flexibilidad en la elección de temas que se desean cubrir, seleccionar el nivel de rigor teórico deseado y decidir cuáles son las aplicaciones más interesantes o apropiadas para sus clases.



<http://latinoamerica.cengage.com>

ISBN 13: 978-607-481-663-1
ISBN 10: 607-481-663-8

