DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Interpolación - Error - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de interpolación usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19). En este documento deducimos la expresión del error del polinomio interpolante.

Sean $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a,b]$ y pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a,b]$ para $i = 0,\dots,n$. Sabemos que existe un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0,\dots,n$.
Dado $\bar{x} \in [a,b]$, $\bar{x} \neq x_i$ para todo $i = 0,\dots,n$ estamos interesados en saber que error cometemos si aproximamos el valor de $f(\bar{x})$ por $P(\bar{x})$. En la próxima propiedad daremos respuesta a esto.

Proposición: Sea $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a,b]$ para $i = 0,\dots,n$. Consideremos $P(x)$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ y $\bar{x} \in [a,b]$. Existe $\xi(\bar{x})$ tal que

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \frac{f^{n+1}(\xi(\bar{x}))}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\dots(\bar{x}-x_n)$$

Demostración:

- Caso a: $\bar{x} = x_k$ para algún $k \in \{0,\dots,n\}$.
  Sabemos que $P(x_k) = f(x_k)$ porque $P(x)$ es el polinomio interpolante en los puntos x_i para $i = 0,\dots,n$. Por otro lado $(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_n)$ se anula. Entonces $\xi(\bar{x})$ puede elegirse en forma arbitraria y la identidad es verdadera.

- Caso b: $\bar{x} \neq x_k$ para todo $k \in \{0,\dots,n\}$.
  Definimos una función $g(t) = f(t) - P(t) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(\bar{x}-x_i)}$ para $t \in [a,b]$.

  Veamos que propiedades podemos deducir que cumple la función $g(t)$. Sabemos que:

  1. $f(t) \in C^{n+1}[a,b]$ por hipótesis.
  2. $P(t) \in C^{n+1}[a,b]$ porque es un polinomio.
  3. $\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(\bar{x}-x_i)} \in C^{n+1}[a,b]$ porque es un polinomio.

entonces podemos concluir que $g(t) \in C^{n+1}[a,b]$.

¿Qué más podemos deducir? Evaluemos a $g(t)$ en los puntos de interpolación:

$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big) \prod\limits_{i=0}^{n} \frac{(x_k - x_i)}{(\bar{x} - x_i)}$

La última productoria se anula ya que $k \in \{0, \ldots, n\}$. Además $f(x_k) = P(x_k)$. Por lo tanto

$$g(x_k) = 0 \text{ para todo } k \in \{0, \ldots, n\}$$

Ahora evaluemos a $g(t)$ en $\bar{x}$:

$g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P(\bar{x}) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big) \prod\limits_{i=0}^{n} \frac{(\bar{x} - x_i)}{(\bar{x} - x_i)}$.

La última productoria vale 1, entonces $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P(\bar{x}) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)$, lo que implica que $g(\bar{x}) = 0$.

Resumiendo lo que sabemos de $g(t)$ es que:

- $g(t) \in C^{n+1}[a,b]$
- $g(t)$ se anula en $x_0, \ldots, x_n$ y $\bar{x}$.

Recordamos un resultado clásico del análisis (teorema de Rolle) que nos dice que si tenemos una función h continua en $[c,d]$ y diferenciable en (c,d) tal que $h(c) = h(d)$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que $h'(\xi) = 0$.
La función $g(t)$ tiene al menos $n+2$ puntos donde se anula. Si ordenamos $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$ de menor a mayor, podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $g(t)$ en cada intervalo definido por dos puntos sucesivos (la función $g(t)$ coincide en valor en los extremos de cada intervalo ya que vale cero en ambos puntos). Entonces, podemos afirmar que $g'(t)$ se anula en al menos un punto en cada intervalo. Por lo tanto podemos afirmar que $g'(t)$ se anula en al menos $n+1$ puntos.

Si este mismo razonamiento lo aplicamos ahora a la función $g'(t)$ en los intervalos definidos por los $n+1$ puntos donde se anula , llegaremos a la conclusión que $g''(t)$ se anula en al menos n puntos.

Repitiendo el proceso, llegaremos a que $g^{n+1}(t)$ se anula en al menos 1 punto. Este punto depende de los valores $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$. Llamemos $\xi(\bar{x})$ a dicho punto.

Volvamos ahora a la expresión de $g(t)$:

$$g(t) = f(t) - P(t) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big) \prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(\bar{x} - x_i)}$$

Desde aqui, derivando término a término, podemos obtener la expresión de la derivada de orden $n+1$:

$$g^{n+1}(t) = f^{n+1}(t) - P^{n+1}(t) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)\Big(\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(\bar{x} - x_i)}\Big)^{n+1}$$

Sabemos que $P(t)$ es un polinomio de grado $\leq n$, por lo tanto la deriva de orden $n+1$ es cero. Además $\prod\limits_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(\bar{x} - x_i)}$ es un polinomio de grado $n+1$, por lo tanto la deriva de orden $n+1$ es igual al coeficiente que acompaña a la potencia de orden $n+1$ (que vale $\prod\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{(\bar{x} - x_i)}$), multiplicada por $(n+1)!$

De estas observaciones, deducimos que:

$$g^{n+1}(t) = f^{n+1}(t) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)(n+1)!\Big(\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{(\bar{x} - x_i)}\Big)$$

Si ahora evaluamos la expresión anterior en $\xi(\bar{x})$, tendremos que

$$g^{n+1}(\xi(\bar{x})) = 0 = f^{n+1}(\xi(\bar{x})) - \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)(n+1)!(\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{(\bar{x} - x_i)})$$

$$f^{n+1}(\xi(\bar{x})) = \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)(n+1)!(\prod_{i=0}^{n} \frac{1}{(\bar{x} - x_i)})$$

$$\frac{f^{n+1}(\xi(\bar{x}))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (\bar{x} - x_i) = \big(f(\bar{x}) - P(\bar{x})\big)$$

$$P(\bar{x}) + \frac{f^{n+1}(\xi(\bar{x}))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (\bar{x} - x_i) = f(\bar{x})$$

$\blacksquare$

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Interpolación - Diferencias Divididas - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de interpolación usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19). En este documento deducimos la expresión del polinomio interpolante mediante el uso de diferencias divididas.

Sean $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ y pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$ para $i = 0, \ldots, n$.
Sabemos que existe un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, \ldots, n$.
La expresion para este (único!) polinomio es $P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{nk}(x)$ donde $L_{nk} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$.
En el caso que se agregara un punto más al conjunto de los puntos de interpolación, deberíamos rehacer la expresión de cada término. ¿Cómo podremos evitar este trabajo?
Definimos las Diferencias Divididas como

- Orden 0 : $f[x_i] = f(x_i)$
- Orden 1 : $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$
- Orden k : $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-xi}$

Veamos que el polinomio interpolante se puede expresar en función de estas diferencias

Proposición: *Dada $f(x)$ un función definida en $[a, b]$ y pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$ para $i = 0, \ldots, n$, el polinomio interpolante se puede expresar como*

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Demostración:
Haremos la demostración por inducción en n.

- Caso base: n=1 Los puntos de interpolación son x_0 y x_1 y el polinomio interpolante tiene grado ≤ 1. Por la expresión del polinomio en función de los L_{nk}, tenemos que

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Sumando y restando x_0 en el primer término

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x - x_0 + x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x_0 - x_1) + (x - x_0)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P(x) = f(x_0)\frac{(x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_0)\frac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Simplificando en el primer término y sacando factor común $(x - x_0)$ entre los dos últimos, obtenemos:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Usando las definiciones de las diferencias divididas obtenemos la expresión de $P(x)$ en función de ellas:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_1 - x_0)$$

- Paso inductivo

  Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolante en los puntos $x_0, \dots, x_n$, es decir $P_n(x_i) = f(x_i)$. Por hipótesis inductiva,

$$P_n(x) = f\left[x_0\right] + f\left[x_0, x_1\right](x - x_0) + f\left[x_0, x_1, x_2\right](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f\left[x_0, \dots, x_n\right](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

  Sea $Q_n(x)$ el polinomio interpolante en los puntos $x_1, \dots, x_{n+1}$, es decir $Q_n(x_i) = f(x_i)$. Por hipótesis inductiva,

$$Q_n(x) = f\left[x_1\right] + f\left[x_1, x_2\right](x - x_1) + f\left[x_1, x_2, x_3\right](x - x_1)(x - x_1) + \ldots + f\left[x_1, \dots, x_{n+1}\right](x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

  Sea $P_{n+1}(x)$ el polinomio interpolante en los puntos $x_0, \dots, x_{n+1}$. Queremos ver que

$$P_{n+1}(x) = f\left[x_0\right] + \ldots + f\left[x_0, \dots, x_n\right](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) + f\left[x_0, \dots, x_{n+1}\right](x - x_0)\ldots(x - x_n)$$

  Nos construimos el polinomio $P(x) = P_n(x) + a(x - x_0)\ldots(x - x_n)$. Veamos que propiedades tiene $P(x)$.

  Claramente $P(x)$ es un polinomio de grado $\leq n + 1$ y además es fácil ver que $P(x_i) = P_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \dots, n$.

  Por otro lado, eligiendo convenientemente a podemos conseguir que $P(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$. ¿Cómo hacemos esto? Si queremos que $P(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$, entonces debe cumplirse que $P_n(x_{n+1}) + a(x_{n+1} - x_0)\ldots(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1})$. Basta tomar $a = \frac{f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)\ldots(x_{n+1} - x_n)}$ que siempre está definido.

  En conclusión, $P(x)$ es un polinomio de grado $\leq n+1$ que interpola en los puntos $x_0, \dots, x_n, x_{n+1}$. Como ya sabemos que el polinomio interpolante en un conjunto de puntos es único, entonces $P(x) = P_{n+1}(x)$.

  Si demostramos que $a = f[x_0, \dots, x_{n+1}]$ entonces tendremos la propiedad requerida.

  Consideremos un nuevo polinonio $Q(x) = Q_n(x) + \frac{(x - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)}(Q_n(x) - P_n(x))$. Por la expresión de $Q(x)$ deducimos que es un polinomio de grado $\leq n + 1$

  Vamos a evaluar a $Q(x)$ en los puntos x_i para todo $i = 0, \dots, n + 1$.

$$Q(x_i) = Q_n(x_i) + \frac{(x_i - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)}(Q_n(x_i) - P_n(x_i))$$

Si $i = 1, \ldots, n$, sabemos que x_i es un punto de interpolación tanto para $Q_n(x)$ como para $P_n(x)$. Entonces $Q_n(x_i) - P_n(x_i) = 0$, de donde se deduce que $Q(x_i) = Q_n(x_i) = f(x_i)$.

Si evaluamos en $x_i = x_{n+1}$, el segundo término se anula y resulta que $Q(x_{n+1}) = Q_n(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$ ya que x_{n+1} es un punto de interpolación para $Q_n(x)$.

Finalmente, si evaluamos en x_0, $Q(x_0) = Q_n(x_0) + \frac{(x_0 - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)}(Q_n(x_0) - P_n(x_0)) = Q_n(x_0) - (Q_n(x_0) - P_n(x_0)) = P_n(x_0)$. Como x_0 es punto de interpolación para $P_n(x)$, sabemos que $P_n(x_0) = f(x_0)$ por lo tanto resulta $Q(x_0) = f(x_0)$

En resumen: $Q(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, \ldots, n+1$. Pero entonces $Q(x) = P_{n+1}(x)$ ya que sabemos que el polinomio interpolante es único.

Si dos polinomios son iguales, entonces los coeficientes que acompañan a cada potencia deben coincidir. Recordemos la expresion de $P_{n+1}(x)$ y $Q(x)$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + a(x - x_0)\ldots(x - x_n)$$
$$Q(x) = Q_n(x) + \frac{(x - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)}(Q_n(x) - P_n(x))$$

El coeficiente que acompaña a la potencia $n+1$ de $P_{n+1}(x)$ es a que es el que queremos demostrar que vale $f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$.

El coeficiente que acompaña a la potencia $n+1$ de $Q(x)$ es el coeficiente de la potencia n de $Q_n(x)$, menos el coeficiente de la potencia n de $P_n(x)$, dividido por $(x_{n+1} - x_0)$.

El coeficiente de la potencia n de $Q_n(x)$, por hipótesis inductiva es $f[x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

El coeficiente de la potencia n de $P_n(x)$, por hipótesis inductiva es $f[x_0, \ldots, x_n]$.

Entonces $a = \frac{f[x_1,\ldots,x_{n+1}] - f[x_0,\ldots,x_n]}{(x_{n+1} - x_0)}$ que es la definición de $f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$.

$\blacksquare$

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Interpolación - Proceso recursivo (Neville) - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de interpolación usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19). En este documento deducimos la expresión del polinomio interpolante mediante el uso de la recursión e Neville.

Sean $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a,b]$ y pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a,b]$ para $i = 0,\ldots,n$. Sabemos que existe un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0,\ldots,n$.
La expresion para este (único!) polinomio es $P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{nk}(x)$ donde $L_{nk} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$.
Vamos a mostrar otra manera de expresar a este polinomio. La idea es ver si podemos expresar a un polinomio en función de otros dos polinomios que interpolan en un punto menos y como usar esto en un proceso recursivo.

Definición:
Notamos $P_{m_1,m_2,\ldots m_k}(x)$ al polinomio interpolante en los puntos $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k} \in [a,b]$.

Proposición: *Sean $x_0,\ldots,x_k \in [a,b]$, $i,j \in \{0,\ldots,k\}$. El polinomio interpolante $P_{0,\ldots,k}(x)$ puede expresarse como:*

$$P_{0,\ldots,k}(x) = \frac{(x-x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x-x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

Demostración:
Observar que $P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x)$ interpola en los mismo puntos que $P_{0,\ldots,k}(x)$ salvo x_j y $P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)$ interpola en los mismo puntos que $P_{0,\ldots,k}(x)$ salvo x_i.
Debemos ver $P(x) = \frac{(x-x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x-x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i-x_j)}$, polinomio de grado $\leq k$, interpola en los puntos $x_0,\ldots,x_k$ y dado que el polinomio interpolante es único, esto asegura la validez de la expresión.
Sea x_r con $r \in \{1,\ldots,k\}$, $r \neq i,j$. Por lo tanto x_r es un punto interpolante tanto para $P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x)$ como para $P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)$.

$$P(x_r) = \frac{(x_r-x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_r) - (x_r-x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x_r)}{(x_i - x_j)}$$

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)f(x_r) - (x_r - x_i)f(x_r)}{(x_i - x_j)} = f(x_r)$$

Consideremos ahora x_i. Sabemos que x_i es punto interpolante para $P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x)$. Entonces:

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_i) - (x_i - x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x_i)}{(x_i - x_j)}$$

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_i)}{(x_i - x_j)} = f(x_i)$$

Por último, consideremos x_j. Sabemos x_j es punto interpolante para $P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)$. Entonces:

$$P(x_j) = \frac{(x_j - x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x_j) - (x_j - x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P(x_j) = -\frac{(x_j - x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x_j)}{(x_i - x_j)} = f(x_i)$$

Entonces $P(x) = P_{0,\ldots,k}(x)$

$\blacksquare$

Esto nos permite un proceso recursivo. Definimos $Q_{ij}(x) = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i}(x)$ para $i \geq j$. Tenemos que

$$P_{0,\ldots,n}(x) = Q_{nn}(x) = \frac{(x - x_0)Q_{nn-1}(x) - (x - x_n)Q_{n-1n-1}(x)}{(x_n - x_0)}.$$

Por la relación establecida, tenemos que:

$$Q_{ij} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{ij-1}(x) - (x - x_i)Q_{i-1j-1}(x)}{(x_i - x_{i-j})}$$

lo que nos permite una recursión

Por ejemplo:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) = Q_{00}(x) & & & & \\
 & & Q_{11}(x) & & & \\
x_1 & f(x_1) = Q_{10}(x) & & Q_{22}(x) & & \\
 & & Q_{21}(x) & & Q_{33}(x) & \\
x_2 & f(x_2) = Q_{20}(x) & & Q_{32}(x) & & Q_{44}(x) \\
 & & Q_{31}(x) & & Q_{43}(x) & \\
x_3 & f(x_3) = Q_{30}(x) & & Q_{42}(x) & & \\
 & & Q_{41}(x) & & & \\
x_4 & f(x_4) = Q_{40}(x) & & & &
\end{array}$$

Métodos Numéricos modo virtual
(pandemia COVID-19)
Material Complementario

Interpolación segmentaria usando trazadores cúbicos - versión 1.0

Este es material complementario de las diapos de la clase de interpolación usadas durante el dictado virtual (pandemia COVID-19). En este documento deducimos la existencia y unicidad de un trazador cúbico.

Sean $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ y pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$ para $i = 0, \ldots, n$. Una trazador cúbico es un función $S(x)$ tal que verifica la siguientes propiedades:

1. $S(x) = S_i(x)$ para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ con $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ para $i = 0, \ldots, n-1$
2. $S(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$
3. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$
4. $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$
5. $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$
6. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ ó $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$

El objetivo del desarrollo que haremos a continuación es mostrar porque podemos asegurar que existe una función que cumple con todas estas condiciones.
Notemos en primer lugar que tenemos 4 coeficientes a determinar para cada $S_i(x)$, lo que nos da un total de $4n$ coeficientes. La segunda propiedad nos impone $n + 1$ condiciones. La tercera, cuarta y quinta propiedad imponen $n - 1$ condiciones cada una. Tenemos entonces un total de $n + 1 + n - 1 + n - 1 + n - 1 = 4n - 2$ condiciones. La última propiedad aporta 2 condiciones. Por lo tanto, tenemos tantas condiciones como coeficientes a determinar. Debemos ver que existen coeficientes que satisfacen todas estas condiciones.
Analicemos cada una de estas condiciones. Comenzamos con $S(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Como $S(x) = S_i(x)$ para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces tendremos que:

$$S(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3 = f(x_i) \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$$

$$S(x_n) = a_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 = f(x_n)$$

De aqui derivamos que

$$\boldsymbol{a_i = f(x_i) \quad \forall i = 0, \ldots, n-1}$$

$$a_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 = f(x_n)$$

$$\boldsymbol{b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 = f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

La próxima condición es $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$. Considerando la expresión de cada $S_i(x)$, tenemos la siguiente relación:

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^3$$

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = a_{i+1} \text{ para } i = 0, \ldots, n-2$$

$$\boldsymbol{f(x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f(x_{i+1})} \text{ para } \boldsymbol{i = 0, \ldots, n-2}$$

La cuarta condición es $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + 3d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$$

$$\boldsymbol{b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1}}$$

La quinta condición es $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$

$$2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})$$

$$\boldsymbol{2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1}}$$

Finalmente, analicemos una de las dos últimas alternativas: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (la otra alternativa es similar)

$$\boldsymbol{S''(x_0) = S''_0(x_0) = 2c_0 = 0}$$

$$\boldsymbol{S''(x_n) = S''_{n-1}(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0}$$

Veamos entonces todas las condiciones que nos quedaron:

1. $a_i = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n-1$
2. $b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 = f(x_n) - f(x_{n-1})$
3. $f(x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f(x_{i+1})$ para $i = 0, \ldots, n-2$
4. $b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n-2$
5. $2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n-2$
6. $c_0 = 0$
7. $2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0$

La idea de lo que vamos a hacer a continuación es tratar de poner a todas las variables en función de los coeficientes a_i que ya tenemos determinados y de los c_i. Notamos $h_i = (x_i - x_{i-1})$ para $i = 1, \ldots, n$.

De (7) podemos despejar $d_{n-1} \to \boldsymbol{d_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{3h_n}}$.

De (2) podemos despejar $b_{n-1} \to b_{n-1} = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}) - c_{n-1}h_n^2 - d_{n-1}h_n^3)}{h_n}$. Reemplazando la expresión que ya tenemos de d_{n-1}, obtenemos $b_{n-1} = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}) - c_{n-1}h_n^2 + \frac{c_{n-1}}{3h_n}h_n^3)}{h_n}$, $\boldsymbol{b_{n-1} = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_n} - \frac{2}{3}c_{n-1}h_n}$

De (5) podemos despejar $d_i \to \boldsymbol{d_i = \frac{(2c_{i+1} - 2c_i)}{6h_{i+1}}}$ para $i = 0, \ldots, n-2$

De (3) podemos despejar $b_i \rightarrow b_i = \frac{(f(x_{i+1})-f(x_i)-c_ih_{i+1}^2-d_ih_{i+1}^3)}{h_{i+1}}$ para $i = 0, \ldots, n-2$. Reemplazando la expresión de d_i, obtenemos

$$b_i = \frac{(f(x_{i+1}) - f(x_i) - c_ih_{i+1}^2 - \frac{(2c_{i+1}-2c_i)}{6h_{i+1}}h_{i+1}^3)}{h_{i+1}}$$

$$b_i = \frac{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}{h_{i+1}} - c_ih_{i+1} - \frac{(2c_{i+1} - 2c_i)}{6}h_{i+1}$$

$$\boldsymbol{b_i = \frac{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}{h_{i+1}} - \frac{2}{3}c_ih_{i+1} - \frac{c_{i+1}}{3}h_{i+1}}$$

Finalmente, vamos a usar (4). Por un lado lo hacemos para $i = 0, \ldots, n-3$

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1}$$

Reemplazamos la expresión que tenemos de b_i, b_{i+1} y d_i

$$\frac{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}{h_{i+1}} - \frac{2}{3}c_ih_{i+1} - \frac{c_{i+1}}{3}h_{i+1} + 2c_ih_{i+1} + 3h_{i+1}^2\frac{(2c_{i+1} - 2c_i)}{6h_{i+1}} = \frac{(f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}))}{h_{i+2}} - \frac{2}{3}c_{i+1}h_{i+2} - \frac{c_{i+2}}{3}h_{i+2}$$

$$c_i(-\frac{2}{3}h_{i+1} + 2h_{i+1} - h_{i+1}) + c_{i+1}(-\frac{1}{3}h_{i+1} + h_{i+1} + \frac{2}{3}h_{i+2}) + c_{i+2}(\frac{1}{3}h_{i+2}) = \frac{(f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}))}{h_{i+2}} - \frac{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}{h_{i+1}}$$

$$c_i(\frac{1}{3}h_{i+1}) + c_{i+1}(\frac{2}{3}(h_{i+1} + h_{i+2})) + c_{i+2}(\frac{1}{3}h_{i+2}) = \frac{(f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}))}{h_{i+2}} - \frac{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}{h_{i+1}}$$

Nos queda el caso $i = n-2$:

$$b_{n-2} + 2c_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + 3d_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2})^2 = b_{n-1}$$

Reemplazamos la expresión que tenemos de b_{n-2},b_{n-1} y d_{n-2}

$$\frac{(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))}{h_{n-1}} - \frac{2}{3}c_{n-2}h_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{3}h_{n-1} + 2c_{n-2}h_{n-1} + 3\frac{(2c_{n-1} - 2c_{n-2})}{6h_{n-1}}h_{n-1}^2 = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_n} - \frac{2}{3}c_{n-1}h_n$$

$$c_{n-2}(-\frac{2}{3}h_{n-1} + 2h_{n-1} - h_{n-1}) + c_{n-1}(-\frac{1}{3}h_{n-1} + h_{n-1} + \frac{2}{3}h_n) = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_n} - \frac{(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))}{h_{n-1}}$$

$$c_{n-2}(\frac{1}{3}h_{n-1}) + c_{n-1}\frac{2}{3}(h_n + h_{n-1}) = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_n} - \frac{(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))}{h_{n-1}}$$

En definitiva tenemos las siguientes n ecuaciones que involucran a los n coeficientes $c_0, \ldots, c_{n-1}$

$\boldsymbol{c_0 = 0}$

$\boldsymbol{c_i(\frac{1}{3}h_{i+1}) + c_{i+1}\frac{2}{3}(h_{i+1} + h_{i+2}) + c_{i+2}(\frac{1}{3}h_{i+2}) = \frac{(f(x_{i+2})-f(x_{i+1}))}{h_{i+2}} - \frac{(f(x_{i+1})-f(x_i))}{h_{i+1}}}$ para i=0,...,n-3

$\boldsymbol{c_{n-2}(\frac{1}{3}h_{n-1}) + c_{n-1}\frac{2}{3}(h_n + h_{n-1}) = \frac{(f(x_n)-f(x_{n-1}))}{h_n} - \frac{(f(x_{n-1})-f(x_{n-2}))}{h_{n-1}}}$

La matriz asociada al sistema es

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_i & c_{i+1} & c_{i+2} & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}h_1 & \frac{2}{3}(h_1+h_2) & \frac{1}{3}h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}h_2 & \frac{2}{3}(h_2+h_3) & \frac{1}{3}h_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3}h_{i+1} & \frac{2}{3}(h_{i+1}+h_{i+2}) & \frac{1}{3}h_{i+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3}h_{n-1} & \frac{2}{3}(h_n+h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

que resulta ser estrictamente diagonal dominante, por lo cual existe solución del sistema y la solución es única. De esta manera obtenemos en forma única los coeficientes $c_0, \dots, c_{n-1}$. Dado que el resto de los coeficientes se encuentran expresados en función de $c_0, \dots, c_{n-1}$, podemos afirmar que el trazador cúbico existe y es único.