

**Métodos Numéricos**  
1er Cuatrimestre 2024  
**Práctica 1**  
Elementos de Álgebra Lineal



**DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

*Nota:  $\mathbb{R}^n$  está formado por vectores columna. Cuando se escriben por filas es por comodidad tipográfica.*

1. Dadas las matrices  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y los vectores columna  $x = (x_i)$ ,  $z = (z_i) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_i)$ ,  $w = (w_i) \in \mathbb{R}^m$  (donde la notación  $a_{ij}$  representa el elemento que está en la fila  $i$  y en la columna  $j$  de la matriz  $A$  y la notación  $x_i$  representa el elemento  $i$ -ésimo del vector  $x$ ), decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en este último caso justificar por qué lo son.

a)  $x^t A z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} z_j$

b)  $x z^t = \sum_{i=1}^n x_i z_i$

c)  $(ADw)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ij} d_{jk} w_k$

d)  $(B^t D^{-1} y)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m b_{ji} d_{jk}^{-1} y_k$  donde  $d_{jk}^{-1} = (D^{-1})_{jk}$

2. Sean las siguientes matrices de  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto  $C = AB$  en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque  $C_{ij}$  indicando sus dimensiones.

a)  $A_{11} = [a_{11}]$ ,  $A_{12} = [a_{12} \ a_{13}]$ ,  $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}]$ ,  $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$ ,  $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ ,  $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

b)  $A_{11} = [a_{11} \ a_{12}]$ ,  $A_{12} = [a_{13}]$ ,  $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}]$ ,  $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$ ,  $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ ,  $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

c)  $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ,  $A_{21} = [a_{31}]$ ,  $A_{22} = [a_{32} \ a_{33}]$

$B_{11} = [b_{11}]$ ,  $B_{12} = [b_{12} \ b_{13}]$ ,  $B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ ,  $B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

3. Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz con columnas  $a_1, \dots, a_n$ , y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz con filas  $b_1^t, \dots, b_n^t$ . Probar que:

- ✓ a) Si  $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx$ , entonces  $A = B$ .
- ✓ b)  $AB = \sum_{i=1}^n a_i b_i^t$ .
- ✓ ( 4. Exhibir  $n \in \mathbb{N}$  y  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para los cuales  $AB \neq BA$ . Idem para que  $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ , siendo  $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$  la *traza* de  $A$ .
- ✓ ( 5. Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  tales que  $AB = 0$  ¿Será cierto que  $A = 0$  o  $B = 0$ ?
- ✓ ( 6. Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no nula y  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tales que  $AB = AC$  ¿Será cierto que  $B = C$ ?
- ✓ ( 7. Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $A$  y  $B$  para que valga la igualdad  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ . Idem para que  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- ✓ ( 8. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $m \in \mathbb{N}$ , probar la igualdad  $(I - A)(I + A + \dots + A^m) = (I + A + \dots + A^m)(I - A) = I - A^{m+1}$
- ✓ ( 9. Determinar si los siguientes conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  son linealmente independientes. Cuando no lo sean, escribir uno de sus elementos como combinación lineal del resto.
- ✓ a)  $C = \{(1, 2, 1, 0), (2, 1, 3, 0), (3, 2, 4, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
- ✓ b)  $C = \{(3, 3, 3), (2, 1, 0), (7, 5, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- ✓ ( 10. Hallar dos bases distintas de los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^n$ . Extender las bases propuestas a bases de  $\mathbb{R}^n$ .
- ✓ a)  $S = \langle (1, 2, 0), (1, 3, 6), (1, 7, 30) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
- ✓ b)  $S = \langle (1, 2), (4, 8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$
- ? ✓ ( 11. Demostrar:
- ✓ a) Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . El conjunto  $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $m \leq n$ , es linealmente independiente si y solo si el conjunto  $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m\}$  es linealmente independiente.
- ? b) Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . El conjunto  $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $m \leq n$ , es linealmente independiente si y solo si el conjunto  $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_m\}$  es linealmente independiente.
- ? Relacionar estas dos propiedades con el método clásico de triangulación de matrices (Eliminación Gaussiana).
- ✓ ( 12. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Demostrar que  $T(x) = Ax$  es una transformación lineal.
- ✓ ( 13. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  y sea  $T(x) = Ax$ . Sean  $x = (-1, -1)$  e  $y = (2, 1)$  dos puntos del plano. ¿Cuál es la imagen del segmento que tiene por extremo a dichos puntos? Justificar.
- ✓ ( 14. Demostrar el punto anterior considerando  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $x$  e  $y$  dos puntos cualquiera de  $\mathbb{R}^n$ .
- ✓ ( 15. Hallar la transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  asociada a la siguiente matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- ✓ ( 16. Hallar la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  asociada a la siguiente transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_3, 3x_2)$$

- ✓ ( 17. Hallar la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  asociada a la siguiente transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, 2x_3, 3x_2)$$

¿Cómo esta transformación lineal mueve los ejes de coordenadas?

- ✓ ( 18. Para las siguientes matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  hallar  $Nu(A)$ ,  $Im(A)$ , su rango fila, su rango columna y comprobar que  $n = \dim(Nu(A)) + \dim(Im(A))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- ✓ ( 19. Para cualquier  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , sea  $A = uv^t$ .

- ✓ a) Hallar  $Im(A)$  y  $\dim(Nu(A))$ .
- ✓ b) Probar que  $A^2 = tr(A) \cdot A$ .

- ✓ ( 20. Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar:

- ✓ a)  $Nu(B) \subseteq Nu(AB)$ .
- ✓ b)  $Im(AB) \subseteq Im(A)$ .
- ✓ c) Si  $AB = 0$  entonces  $Im(B) \subseteq Nu(A)$ .

- ✓ ? ( 21. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Supongamos que  $\dim(Nu(A)) = k$  y sea  $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  una base del subespacio  $Nu(A)$ . Además sea  $B_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  una base tal que  $B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $\mathbb{R}^n$ .

- ✓ a) Probar que cualquier vector  $y \in Im(A)$  se puede escribir como una combinación lineal de  $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ .
- ✓ b) Probar que los vectores del conjunto  $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$  son linealmente independientes.
- ✓ c) Deducir el Teorema de la dimensión:  $\dim(Nu(A)) + \dim(Im(A)) = n$ .

- ✓ ( 22. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes (es decir, si una de ellas vale, todas valen).

- ✓ a)  $A$  es inversible.
- ✓ b) No existe  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ , tal que  $Ax = 0$ .
- ✓ c) Las columnas de  $A$  son linealmente independientes.
- ✓ d) Las filas de  $A$  son linealmente independientes.

- ( 23. Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible y  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Probar:

- ✓ ( a)  $AB = AC$  entonces  $B = C$ .  
 ✓ b)  $AB = 0$  entonces  $B = 0$ .  
 ? c) Si  $m = n$  y si  $\forall D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ :  $\text{tr}(BD) = \text{tr}(CD)$ , entonces  $B = C$ .  
 ✓ d) Si  $m = n$  entonces  $\text{tr}(B) = \text{tr}(ABA^{-1})$   
 (Sug.: demostrar primero que  $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$ ).

( 24. Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  probar:

- a) Si  $A$  es inversible entonces  $A^{-1}$  es inversible y  $(A^{-1})^{-1} = A$ .  
 b) Si  $A, B$  son inversibles entonces  $AB$  es inversible y  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .  
 c) Si  $A$  es inversible entonces  $A^t$  es inversible y  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

✓ ( 25. Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar mediante inducción en la dimensión de la matriz:

- ✓ a) Si  $A$  y  $B$  son triangulares inferiores (superiores) entonces el producto  $AB$  es triangular inferior (superior).  
 ✓ b) Si  $A$  es inversible y triangular inferior (superior) entonces  $A^{-1}$  es triangular inferior (superior).

26. Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice nilpotente si  $A^k = 0$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $A$  es nilpotente entonces:

- a)  $A$  no es inversible.  
 b)  $I - A$  es inversible.

✓ ( 27. Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar que  $\|x\|_2$ ,  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_\infty$  son normas vectoriales.

✓ ( 28. Graficar los siguientes conjuntos de puntos:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 = 1\}$   
 b)  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_1 = 1\}$   
 c)  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_\infty = 1\}$

✓ ( 29. ✓ a) Probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski  $|x^t y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ .

✓ b) Probar que si  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes, entonces vale la igualdad.

✓ ( 30. Mostrar con un contraejemplo que la desigualdad de C-S-B no se cumple para la norma infinito.

✓ ¿Se cumple la desigualdad para la norma uno? Justificar la respuesta.

( 31. Probar que si  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ .

## Resolver en computadora

i Dados  $x_1, \dots, x_n$  una muestra de una variable aleatoria, implementar rutinas que calculen la media y la varianza utilizando operaciones vectoriales.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

ii Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

- Demstrar que  $A^t A$  y  $AA^t$  son simétricas.
- Implementar una rutina que dada una matriz cuadrada verifique si la misma es simétrica.
- Analizar la función implementada en el item anterior con la matriz  $B$  generada de la siguiente forma:

```
from numpy.random import rand
>> A = rand(4,4);
>> B = A.T@A*0.1/0.1;
```

Analizar el resultado, revisar la implementación y (eventualmente) reimplementar la función.

iii Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $n$  par y  $B$  triangular inferior.

- Realizar la multiplicación  $AB$  por bloques, partiendo ambas matrices en bloques de tamaño  $n/2$ .
- Implementar una rutina que realice la multiplicación por bloques, evitando cuentas innecesarias.

## Funciones útiles

A continuación incluimos ejemplos para crear y operar con matrices y vectores usando Python+Numpy y Matlab/Octave.

- Inicializar matrices y vectores usando distintas sintaxis en Numpy. Tener en cuenta que Numpy maneja como tipos de datos básicos tanto **array** multidimensional como **matrix**; para operaciones de álgebra lineal se recomienda usar esta última.

```
from numpy import *
```

```
from numpy.linalg import *
```

```
# Distintas maneras de inicializar una matriz
```

```
A = matrix([[1,2],[3,4]])
```

```
B = matrix('1_2;_3_4')
```

```
C = matrix('1_2;_3_4', float)
```

```
# Para los vectores usamos matrices columna
```

```
v = matrix([[4],[5]])
```

```
w = matrix('4;_5')
```

```
# Crear matrices especiales
```

```
I = asmatrix(eye(3)) # Identidad de 3x3
```

```
D = asmatrix(diag([1,2])) # Matriz diagonal
```

```
N = asmatrix(zeros((3,3))) # Matriz nula de 3x3
```

```
# Construir una matriz de 4x4 usando las matrices A,B,C,D como bloques
```

```
E = bmat([[A,B],[C,D]])
```

- Operaciones básicas entre las matrices y vectores definidos anteriormente en Numpy

```

A + B      # Suma
A - B      # Resta
A * B      # Producto de matrices
A * v      # Producto de matriz por vector
3.2 * A    # Producto por escalar
A ** 2     # Potencia
A.T        # Traspuesta
inv(A)     # Inversa

```

- Inicializar matrices y vectores en Matlab/Octave, por defecto se inicializan con tipo de dato `double`.

```
% Distintas maneras de inicializar una matriz
```

```
A = [ 1,2 ; 3,4 ]
```

```
A = [ 1 2 ; 3 4 ]
```

```
C = [[1 2];[3,4]]
```

```
% Para los vectores usamos matrices columna
```

```
v = [4 ; 5]
```

```
% Crear matrices especiales
```

```
I = eye(3)           % Identidad de 3x3
```

```
D = diag([1,2])      % Matriz diagonal
```

```
N = zeros(3,3)       % Matriz nula de 3x3
```

```
% Construir una matriz de 4x4 usando las matrices A,B,C,D como bloques
```

```
E = [A,B;C,D]
```

```
E = [[A,B];[C,D]]
```

```
E = [[A B];[C D]]
```

- Operaciones básicas entre las matrices y vectores definidos anteriormente en Matlab/Octave

```

A + B      % Suma
A - B      % Resta
A * B      % Producto de matrices
A * v      % Producto de matriz por vector
3.2 * A    % Producto por escalar
A^2        % Potencia
A'         % Traspuesta
inv(A)     % Inversa

```

## Referencias

- [1] Serge Lang. *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

- [2] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [3] G. Strang. *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Ed. Paraninfo, 2007.