

Métodos Numéricos

1er Cuatrimestre 2024

Práctica 4

Matrices ortogonales

Factorización QR



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- a) ¿Qué quiere decir que x sea ortogonal a y ?
- b) Probar que $x \perp y$ (x, y no nulos) $\Rightarrow \{x, y\}$ es l.i.
- c) Dar un ejemplo de 2 vectores en \mathbb{R}^3 que sean ortogonales, y 2 que no lo sean.
- d) ¿Es cierto que \perp define una relación transitiva en \mathbb{R}^n ?

2. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

- a) $Q^{-1} = Q^t$
- b) Las columnas de Q forman un conjunto ortonormal¹.
- c) Las filas de Q forman un conjunto ortonormal¹.
- d) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

Interpretar (d) geométicamente.

Sugerencia: para demostrar la implicación ($d \Rightarrow b$) usar que $x^t y = \frac{1}{4}(\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$.

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonales. Probar que $A \cdot B$ es ortogonal.

4. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal. Probar que:

- a) $\det(Q) = 1$ ó -1
- b) $\kappa_2(Q) = 1$

5. Sea u_1, \dots, u_n una base ortonormal de vectores de \mathbb{R}^n . Demostrar que para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$, la coordenada de x respecto de u_k es igual a $u_k^t x$, para cualquier $k = 1, \dots, n$.

6. ¿Cuáles de las siguientes matrices es necesariamente ortogonal?

- a) Permutación
- b) Simétrica definida positiva
- c) No singular
- d) Diagonal

7. Hallar la descomposición QR de la matriz A según los métodos de Givens y Householder, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$$

¹ $\{v_1, \dots, v_n\}$ con $v_i \in \mathbb{R}^n$ se dice ortonormal si $v_i^t v_j = 0$ ($\forall i \neq j$) y $v_i^t v_i = 1$ ($\forall i : 1 \leq i \leq n$).

8. Verificar que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es no singular y tiene descomposición QR , entonces R es no singular.
9. a) Sea $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz ortogonal y triangular superior. Demostrar que $\forall j = 1, \dots, n$, $\text{col}_j(C) = \pm e_j$, donde e_j es el j -ésimo canónico de \mathbb{R}^n .
- b) Demostrar que si A es no singular, entonces la factorización $A = QR$ es única si los elementos de la diagonal de R son positivos.
10. Sea $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una matriz ortogonal tal que:

$$Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿cuál debería ser el valor de α ?

11. Sea $b \neq 0$ y la matriz A definida de la siguiente manera. Mostrar que si A es ortogonal, entonces sus elementos se pueden tomar como senos y cosenos de un ángulo θ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

12. Dadas dos matrices de Givens de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, G_1 y G_2 , con ángulos θ y ω respectivamente, calcular e interpretar geoméricamente G_1^2 , $G_1 G_2$ y $G_1^t G_1$. Pista: recordar las relaciones trigonométricas:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

Para G_1 , determinar el ángulo θ tal que

$$G_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

13. Sea $G \in \mathbb{R}^n$ una matriz de rotación de Givens con un ángulo asociado $\theta \in [-\pi, \pi)$. Demostrar que G es definida positiva si y sólo si $|\theta| < \pi/2$.
14. Considerar la transformación de Householder $P := I - 2uu^t$ con $u = e_i$. Calcular explícitamente P e interpretar geoméricamente Px con $x \in \mathbb{R}^n$.
15. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\|_2 = 1$. Demostrar que la matriz $Q := I - 2uu^t$ es ortogonal y simétrica.
16. Sean x, y dos vectores de \mathbb{R}^n tales que $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Demostrar que la elección $v := x - y$ conduce a una transformación de Householder $H := I - \frac{2vv^t}{\|v\|^2}$ tal que $Hx = y$ y $Hy = x$.
17. Sea $U = I - 2uu^t$ un reflector ortogonal. Sea x tal que $x = v + w$ con v múltiplo de u y w ortogonal a u . Mostrar que $Ux = -v + w$. Interpretar geoméricamente en \mathbb{R}^n .
18. Sea $H_v = I - 2(vv^t)/(v^t v)$ la transformación de Householder asociada al vector $v \in \mathbb{R}^n$.
- a) Sean dos matrices $V, W \in \mathbb{R}^{n \times k}$, y sea $G = I + VW^t$. Mostrar que $H_v G = I + VW^t + vw^t$, con $w = \frac{-2(v + WV^t v)}{v^t v}$.

b) Demostrar que el producto de k reflectores de Householder puede escribirse como $I + VW^t$, con $V, W \in \mathbb{R}^{n \times k}$.

19. Demostrar que cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ puede factorizarse como $A = QL$, con Q ortogonal y L triangular inferior.

Sugerencia: considerar la factorización QR de la matriz A con las columnas de A en orden inverso, es decir, de AP , con P una matriz de permutación conveniente.

20. Se desea hallar la factorización $A = RQ$ de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con R triangular superior y Q ortogonal. Sea $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz ortogonal y $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz triangular superior tal que $R = P\tilde{R}^tP$ y $Q = P\tilde{Q}^t$, donde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de permutación definida como:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que R es triangular superior y Q es ortogonal.

b) Probar que $A = RQ$ si y sólo si $(PA)^t = \tilde{Q}\tilde{R}$ es la factorización QR de $(PA)^t$.

c) Describir un algoritmo para realizar la factorización RQ asumiendo disponible una función que calcula la factorización QR.

Resolver en computadora

i Sea el sistema lineal $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Usando los métodos de Householder y Givens, se pide:

a) Resolver el sistema

b) Calcular explícitamente la factorización QR de A

c) Calcular la cantidad de operaciones realizadas

ii Para cada una de las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{6 \times 4}$, calcular el rango de cada matriz y su factorización QR . Observar la forma de la matriz R para cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Funciones útiles

Tanto Matlab¹ como Numpy² proveen funciones para calcular la descomposición QR de una matriz.

- En Matlab:

$$[Q,R] = \mathbf{qr}(A)$$

- En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *  
from numpy.linalg import *
```

```
A = matrix ([[8,2],[2,4],[5,3]], float)  
Q, R = qr(A)
```

Notar que si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ no es cuadrada, como en el ejemplo, la matriz R retornada es de $k \times n$ donde $k = \min(m, n)$.

Referencias

- [1] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [2] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

¹<http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/qr.html>

²<http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.qr.html>