Métodos Numéricos-2024

Descomposición en valores singulares

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Descomposición en valores singulares

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $r = rg(A)$ Existen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices ortogonales, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$A = U\Sigma V^t$$

y $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ con

$\sigma^1 \geq \sigma^2 \geq, \dots, \geq \sigma^r > 0$

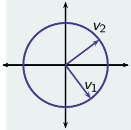
Descomposición en valores singulares

$$A = U\Sigma V^t$$

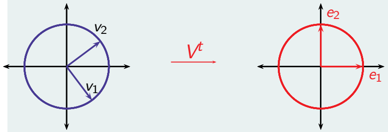
- $v^1, v^2, \ldots, v^n$ autovectores de A^tA, columnas de la matriz V
- $u^1, u^2, \ldots, u^m$ autovectores de AA^t, columnas de la matriz U
- $\sigma^i = \sqrt{\lambda^i}$ con λ^i i-ésimo autovalor de A^tA $(\lambda^1 \geq \lambda^1 \ldots \geq \lambda^r)$

Descomposición en valores singulares

Interpretación geométrica

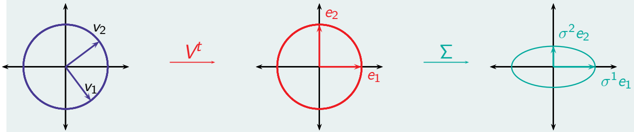


Interpretación geométrica



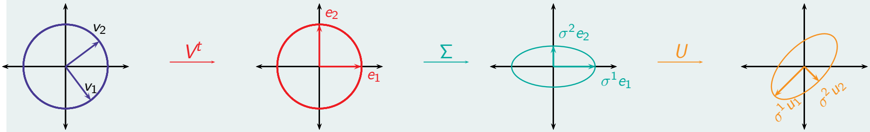
Descomposición en valores singulares

Interpretación geométrica



Descomposición en valores singulares

Interpretación geométrica



Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $A^t A$ $\qquad P(\lambda) = (5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4$

Descomposición en valores singulares

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $A^t A$ $\qquad P(\lambda) = (5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4$

$$\lambda^1 = 9 \quad \lambda^2 = 4$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Autovalores de A^tA $\qquad P(\lambda) = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4$

$$\lambda^1 = 9 \quad \lambda^2 = 4$$

Valores singulares: $\sigma^1 = 3 \quad \sigma^2 = 2$

Ejemplo: construyendo V

Buscamos autovectores v^1 y v^2

Ejemplo: construyendo V

Buscamos autovectores v^1 y v^2

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 \\ 9x_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: construyendo V

Buscamos autovectores v^1 y v^2

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 \\ 9x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v^1 = (\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}})$$

Ejemplo: construyendo V

Buscamos autovectores v^1 y v^2

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 \\ 9x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v^1 = (\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: construyendo V

Buscamos autovectores v^1 y v^2

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 \\ 9x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v^1 = (\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v^2 = (\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{-1}{\sqrt{5}})$$

Ejemplo: construyendo U

$Av^1 = \sigma^1 u^1$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$Av^2 = \sigma^2 u^2$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$Av^2 = \sigma^2 u^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 2u^2$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$Av^2 = \sigma^2 u^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 2u^2 \Rightarrow u^2 = \left(0, \frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2}{2\sqrt{5}}\right)$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$Av^2 = \sigma^2 u^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 2u^2 \Rightarrow u^2 = \left(0, \frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$A^t u^3 = 0$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$Av^2 = \sigma^2 u^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 2u^2 \Rightarrow u^2 = \left(0, \frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$A^t u^3 = 0 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ejemplo: construyendo U

$$Av^1 = \sigma^1 u^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 3u^1 \Rightarrow u^1 = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$Av^2 = \sigma^2 u^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 2u^2 \Rightarrow u^2 = \left(0, \frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$A^t u^3 = 0 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u^3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Descomposición en valores singulares

Ejemplo

$$A = U\Sigma V^t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Descomposición en valores singulares

Algunas propiedades

- $||A||_2 = \sigma^1$

Descomposición en valores singulares

Algunas propiedades

- $||A||_2 = \sigma^1$
- $\kappa_2(A) = \frac{\sigma^1}{\sigma^n}$

Descomposición en valores singulares

Algunas propiedades

- $||A||_2 = \sigma^1$
- $\kappa_2(A) = \frac{\sigma^1}{\sigma^n}$
- $||A||_F = \sqrt{(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + \ldots + (\sigma^r)^2}$

Descomposición en valores singulares: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Pearson, 2017.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.