Métodos Numéricos
1er Cuatrimestre 2024
Práctica 6
Descomposición en Valores Singulares

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares (SVD), con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, siendo $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\}$ y $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$. Llamamos a σ_i el i-ésimo valor singular. Sean $v_1, \ldots, v_n$ las columnas de V y $u_1, \ldots, u_m$ las columnas de U. Demostrar:
   a) $v_1, \ldots, v_n$ son autovectores de A^tA.
   b) $u_1, \ldots, u_m$ son autovectores de AA^t.
   c) $\lambda_i = \sigma_i^2$ son los autovalores de A^tA asociados al autovector v_i.

2. Hallar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Llamamos $d = \det(A)^2$ y $f = \|A\|_F^2$, siendo $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ la norma Frobenius de la matriz A. Demostrar que los valores singulares de A son de la forma:

$$\sqrt{\frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4d}}{2}}$$

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A.
   a) Expresar en función de U, Σ y V a las siguientes matrices:
      i) A^tA
      ii) AA^t
      iii) $(A^tA)^{-1}A^t$ (asumiendo A con columnas linealmente independientes)
   b) Hallar una descomposición SVD de las siguientes matrices ($\mathbb{0}_n$ es la matriz de ceros de $n \times n$):
      i) A^t
      ii) A^{-1} (suponiendo $m = n$ y A inversible)
      iii) $\begin{pmatrix} A \\ \mathbb{0}_n \end{pmatrix}$
      iv) $\begin{pmatrix} A & \mathbb{0}_m \end{pmatrix}$
   c) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, expresar los valores singulares de $(A^tA + \alpha I)^{-1}A^t$ en función de los de A y α.

5. Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:
   a) todos los valores singulares de A son iguales si y solo si A es múltiplo de una matriz ortogonal.
   b) A y B tienen los mismos valores singulares si y solo si existen P, Q ortogonales tal que $A = PBQ$.

c) si $AA^t = BB^t$ entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $AQ = B$.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$, donde I_n es la matriz indentidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de A.

7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

8. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene columnas ortogonales $w_1, w_2, \dots, w_n$ donde $\|w_i\|_2 = \alpha_i > 0$. Calcular A^tA y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R. la matriz

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Probar que σ es valor singular de A si y sólo si $\begin{pmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^t \end{pmatrix}$ es singular.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango 1. Llamamos rango de A a la dimensión del espacio generado por la imagen $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Sea u un vector unitario en $Im(A)$.

   a) Demostrar que todas las columnas de A son múltiplos de u.
   b) Mostrar que A se puede escribir de la forma $A = \sigma uv^t$, con $v \in \mathbb{R}^n$ unitario y $\sigma > 0$.
   c) Mostrar que existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ cuya primer columna es u y una matriz ortogonal $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cuya primer columna es v. ¿Cómo podría construir dichas matrices?
   d) Deducir que toda matriz A de rango 1 tiene descomposición SVD. ¿Quién es Σ?

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r y sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A, con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal. Llamamos $v_1, \dots, v_n$ a las columnas de V y $u_1, \dots, u_m$ a las columnas de U. Probar que:

   a) $Nu(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n\rangle$
   b) $Im(A) = \langle u_1, \dots, u_r\rangle$

   (*Sugerencia*: en cada caso, considerar sólamente una inclusión y luego evaluar dimensiones, recordando que $dim(\mathbb{R}^n) = dim(Nu(A)) + dim(Im(A))$.)

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD. Demostrar:

   a) $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ se maximiza para $x = v_1$, con v_1 la primer columna de V.
   b) $\|A\|_2 = \sigma_1$. Deducir que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$[‡‡].
   c) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$.
   d) Si $m = n$ y A es inversible, entonces $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$.
   e) $\max_i |a_{ii}| \leqslant \sigma_1$.

14. Sea $z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, y sea la matriz $B = \begin{pmatrix} A \\ z^t \end{pmatrix}$. Llamamos $\sigma_1(C)$ al primer valor singular de cualquier matriz C. Demostrar: $\sigma_1(A) \leqslant \sigma_1(B) \leqslant \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2}$.

[‡‡]Dada una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define el *radio espectral* de B como $\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\}$.

Resolver en computadora

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Si $A = U\Sigma V^t$ es su descomposición en valores singulares con U y V ortogonales, Σ diagonal con elementos en la diagonal en orden decreciente, u_i las columnas de U, v_i las columnas de V y σ_i los valores singulares, verificar que:

- $\|Av_1\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
- Si $rg(A) = r$, entonces $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^t$

Funciones útiles

Tanto Matlab[1] como Numpy[2] proveen funciones para calcular la descomposición SVD de una matriz.

En Matlab:

```
A = [8 2; 2 4; 5 3]
[U,S,V] = svd(A)
.
```

En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A = matrix([[8,2],[2,4],[5,3]], float)
U, s, V = svd(A)
```

En los dos casos, un segundo parámetro permite generar la descomposición en su forma ‘corta’.

Referencias

[1] J. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997.

[2] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations.* Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.

[3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

[1] `http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/svd.html`
[2] `http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.svd.html`