Métodos Iterativos

Clase 07 - 24/05/2023

Forma Directa

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Directa

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Directa

- Reescribo mis datos para tener cuentas "menos costosas" y **obtener un resultado**.
- Uso descomposiciones LU, QR, $U\Sigma V^t$, BDB^{-1}.

Forma Directa

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Directa

- Reescribo mis datos para tener cuentas "menos costosas" y **obtener un resultado**.
- Uso descomposiciones LU, QR, $U\Sigma V^t$, BDB^{-1}.
- Cuanto más propiedades sé de A, más opciones tengo para saber "elegir mejor":

Forma Directa

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Directa

- Reescribo mis datos para tener cuentas "menos costosas" y **obtener un resultado**.
- Uso descomposiciones LU, QR, $U\Sigma V^t$, BDB^{-1}.
- Cuanto más propiedades sé de A, más opciones tengo para saber "elegir mejor":
  - Si A simétrica definida positiva, LU se refina a LL^t.
  - Cuanto más cerca esté $Cond(A)$ de 1, menor es el error relativo que se comete.

Forma Directa

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Directa

- Reescribo mis datos para tener cuentas "menos costosas" y **obtener un resultado**.
- Uso descomposiciones LU, QR, $U\Sigma V^t$, BDB^{-1}.
- Cuanto más propiedades sé de A, más opciones tengo para saber "elegir mejor":
  - Si A simétrica definida positiva, LU se refina a LL^t.
  - Cuanto más cerca esté $Cond(A)$ de 1, menor es el error relativo que se comete.
- Se puede estimar el error según la descomposición elegida, pero no hay segundas oportunidades.

Forma Iterada

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Iterada

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Iterada

- Reescribo los datos para tener cuentas "menos costosas" para obtener **aproximaciones que puedo volver a usar para acercarme cada vez más al resultado que busco** (si se dan las condiciones).
- Uso descomposiciones de Jacobi (J) y Gauss-Seidel (GS), entre otras.

Forma Iterada

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Iterada

- Reescribo los datos para tener cuentas “menos costosas” para obtener **aproximaciones que puedo volver a usar para acercarme cada vez más al resultado que busco** (si se dan las condiciones).
- Uso descomposiciones de Jacobi (J) y Gauss-Seidel (GS), entre otras.
- Estructura general: $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Forma Iterada

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Iterada

- Reescribo los datos para tener cuentas "menos costosas" para obtener **aproximaciones que puedo volver a usar para acercarme cada vez más al resultado que busco** (si se dan las condiciones).
- Uso descomposiciones de Jacobi (J) y Gauss-Seidel (GS), entre otras.
- Estructura general: $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.
- Cuanto más propiedades sé de A o de R, más opciones tengo para saber "elegir mejor":
  - Si A simétrica definida positiva, GS converge.
  - Si $R^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$ se llega a la solución exacta.

Forma Iterada

Problema

Resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Forma Iterada

- Reescribo los datos para tener cuentas "menos costosas" para obtener **aproximaciones que puedo volver a usar para acercarme cada vez más al resultado que busco** (si se dan las condiciones).
- Uso descomposiciones de Jacobi (J) y Gauss-Seidel (GS), entre otras.
- Estructura general: $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.
- Cuanto más propiedades sé de A o de R, más opciones tengo para saber "elegir mejor":
  - Si A simétrica definida positiva, GS converge.
  - Si $R^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$ se llega a la solución exacta.
- Se puede estimar el error según la cantidad de pasos.

Esquema de Iteración

Escribimos a A como sumas/restas de triangulares L y U y una diagonal D:

$$A = D - L - U$$

Esquema de Iteración

Escribimos a A como sumas/restas de triangulares L y U y una diagonal D:

$$A = D - L - U$$

Método de Jacobi: $R_j = D^{-1}(L+U)$ y $c = D^{-1}b$.

$$\begin{aligned}
(D-L-U)x &= b \\
Dx &= b + (L+U)x \\
x &= D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x \\
x^{(k+1)} &= D^{-1}b + D^{-1}(L+U)x^{(k)}
\end{aligned}$$

Esquema de Iteración

Escribimos a A como sumas/restas de triangulares L y U y una diagonal D:

$$A = D - L - U$$

Método de Jacobi: $R_j = D^{-1}(L+U)$ y $c = D^{-1}b$.

$$\begin{aligned}
(D-L-U)x &= b \\
Dx &= b + (L+U)x \\
x &= D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x \\
x^{(k+1)} &= D^{-1}b + D^{-1}(L+U)x^{(k)}
\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel: $R_{GS} = (D-L)^{-1}U$ y $c = (D-L)^{-1}b$.

$$\begin{aligned}
(D-L-U)x &= b \\
(D-L)x &= b + Ux \\
x &= (D-L)^{-1}b + (D-L)^{-1}Ux \\
x^{(k+1)} &= (D-L)^{-1}b + (D-L)^{-1}Ux^{(k)}
\end{aligned}$$

Esquema de Iteración

Escribimos a A como sumas/restas de triangulares L y U y una diagonal D:

$$A = D - L - U$$

Método de Jacobi: $R_j = D^{-1}(L+U)$ y $c = D^{-1}b$.

$$\begin{aligned}
(D - L - U)x &= b \\
Dx &= b + (L+U)x \\
x &= D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x \\
x^{(k+1)} &= D^{-1}b + D^{-1}(L+U)x^{(k)}
\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel: $R_{GS} = (D-L)^{-1}U$ y $c = (D-L)^{-1}b$.

$$\begin{aligned}
(D - L - U)x &= b \\
(D - L)x &= b + Ux \\
x &= (D-L)^{-1}b + (D-L)^{-1}Ux \\
x^{(k+1)} &= (D-L)^{-1}b + (D-L)^{-1}Ux^{(k)}
\end{aligned}$$

Idea: Escribir a A como suma de matrices "lindas": ralas, diagonales, triangulares, etc.

¿Qué es lo importante en la convergencia?

Tenemos dos estructuras:

- $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
- $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

¿Qué es lo importante en la convergencia?

Tenemos dos estructuras:

- $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
- $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Podemos pedir condiciones sobre A ó R o sobre $x^{(0)}$, b ó c. Pero:

¿Qué es lo importante en la convergencia?

Tenemos dos estructuras:

- $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
- $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Podemos pedir condiciones sobre A ó R o sobre $x^{(0)}$, b ó c. Pero:

- R depende de A y de la descomposición elegida y c depende de b y de la descomposición elegida.

¿Qué es lo importante en la convergencia?

Tenemos dos estructuras:

- $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
- $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Podemos pedir condiciones sobre A ó R o sobre $x^{(0)}$, b ó c. Pero:

- R depende de A y de la descomposición elegida y c depende de b y de la descomposición elegida.
- Esta bueno que "no importe" el valor inicial ni el valor de b.

¿Qué es lo importante en la convergencia?

Tenemos dos estructuras:

- $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
- $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Podemos pedir condiciones sobre A ó R o sobre $x^{(0)}$, b ó c. Pero:

- R depende de A y de la descomposición elegida y c depende de b y de la descomposición elegida.
- Esta bueno que "no importe" el valor inicial ni el valor de b.
- No sé si notaron que $x^{(k+1)} = R^k x^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} R^i c$. Si R fuera un número, converge si $|R| < 1$.

¿Qué es lo importante en la convergencia?

Tenemos dos estructuras:

- $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
- $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

Podemos pedir condiciones sobre A ó R o sobre $x^{(0)}$, b ó c. Pero:

- R depende de A y de la descomposición elegida y c depende de b y de la descomposición elegida.
- Esta bueno que "no importe" el valor inicial ni el valor de b.
- No sé si notaron que $x^{(k+1)} = R^k x^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1} R^i c$. Si R fuera un número, converge si $|R| < 1$.

Ganó la R en importancia, y en segunda lugar A junto con la descomposición elegida.

Radio Espectral

La generalización del módulo para matrices son las normas:

Radio Espectral

La generalización del módulo para matrices son las normas:

Proposición

Si $\|R\| < 1$ para alguna norma, el sistema iterado converge.

Radio Espectral

La generalización del módulo para matrices son las normas:

Proposición

Si $\|R\| < 1$ para alguna norma, el sistema iterado converge.

¿Y si tomamos el mínimo valor posible y ya?

Radio Espectral

La generalización del módulo para matrices son las normas:

Proposición

Si $\|R\| < 1$ para alguna norma, el sistema iterado converge.

¿Y si tomamos el mínimo valor posible y ya?

Teorema

$$\operatorname{ínf}_{\|\,\|} \|R\| = \rho(R)$$

donde $\rho(R)$ es el radio espectral:

$$\rho(R) = \text{máx}\{|\lambda| \,/\, \lambda \text{ autovalor de } R\}$$

Situación estándar

Situación general de un ejercicio típico:

1. Pasar del sistema clásico al iterativo dada una descomposición:

$$Ax = b \quad \rightsquigarrow \quad x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$$

2. Analizar la convergencia recordando lo visto en la teórica:

Teorema de Convergencia

El sistema iterativo converge para cualquier $x^{(0)}$ inicial $\Leftrightarrow \rho(R) < 1$.

No necesariamente hay que demostrar que $\rho(R) < 1$, también sirve $\|R\|_1$, $\|R\|_2$ ó $\|R\|_\infty$ pues ínf $\|R\| = \rho(R)$.

3. En el caso de convergencia anterior, sabemos que hay un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = Rx + c$ y $\|R\| < 1$ para alguna norma.
   - Cálculo "directo" (vía ejercicio 21 de la guía 2): $x = (I - R)^{-1}c$
   - Cota para el error $e_k = x - x^k$ en el $k-$ésimo paso (en teórica):

$$\begin{aligned} \|x - x^{(k)}\| &\leqslant \|R\|\|x - x^{(k-1)}\| \leqslant \ldots \leqslant \|R\|^k\|x - x^{(0)}\| \\ \|x - x^{(k)}\| &\leqslant \|R\|^k/(1 - \|R\|) \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{aligned}$$