

Formalismos e ideas matemáticas para Métodos Numéricos

Clase 1.5 - 28/08/2023

Métodos Numéricos - 2do Cuatrimestre 2023

Idea Motivadora: La correspondencia de Curry-Howard

La correspondencia de Curry-Howard es la observación de que hay una “biyección” entre “*demostraciones*” y “*algoritmos*”, y que, por lo tanto, ambos formalismos pueden considerarse “**idénticos**”.

Idea Motivadora: La correspondencia de Curry-Howard

La correspondencia de Curry-Howard es la observación de que hay una “biyección” entre “*demostraciones*” y “*algoritmos*”, y que, por lo tanto, ambos formalismos pueden considerarse “**idénticos**”.

Por ejemplo (a grandes rasgos), al momento de hacer un ejercicio:

- ¿Están separando en casos? Eso es un **condicional**.
- ¿Están haciendo inducción? Eso es una **recursión**.
- ¿Tienen hipótesis? Esas son las **variables**.
- ¿Tienen una conclusion? Esa es la **salida**.

¿Demasiada matemática para una materia de computación?

Entonces, ¿por qué no usar *la manera en que tienen de presentar y trabajar un programa* para resolver un ejercicio de matemática?

¿Demasiada matemática para una materia de computación?

Entonces, ¿por qué no usar *la manera en que tienen de presentar y trabajar un programa* para resolver un ejercicio de matemática?

- ¿Están escribiendo el código? Eso es la **demostración formal**.
- ¿El código es declarativo y bien comentado? Eso es **explicar la demostración en lenguaje natural**.
- ¿En el código declaran la salida? Eso es **remarcar cuál es la solución**.

¿Demasiada matemática para una materia de computación?

Entonces, ¿por qué no usar *la manera en que tienen de presentar y trabajar un programa* para resolver un ejercicio de matemática?

- ¿Están escribiendo el código? Eso es la **demostración formal**.
- ¿El código es declarativo y bien comentado? Eso es **explicar la demostración en lenguaje natural**.
- ¿En el código declaran la salida? Eso es **remarcar cuál es la solución**.
- ¿Tienen código auxiliar? Eso es hacer **una demostración aparte** que luego usarán para resolver el ejercicio.
- ¿Quieren reutilizar código ya conocido? **Cítenlo apropiadamente**.
- ¿El código está bien presentado, el nombre del archivo es correcto, está bien ordenado e identificado? Eso es hacer una **buena presentación**: letra legible, hoja bien troquelada, con su nombre y enumerada.

¿Demasiada matemática para una materia de computación?

Entonces, ¿por qué no usar *la manera en que tienen de presentar y trabajar un programa* para resolver un ejercicio de matemática?

- ¿Están escribiendo el código? Eso es la **demostración formal**.
- ¿El código es declarativo y bien comentado? Eso es **explicar la demostración en lenguaje natural**.
- ¿En el código declaran la salida? Eso es **remarcar cuál es la solución**.
- ¿Tienen código auxiliar? Eso es hacer **una demostración aparte** que luego usarán para resolver el ejercicio.
- ¿Quieren reutilizar código ya conocido? **Cítenlo apropiadamente**.
- ¿El código está bien presentado, el nombre del archivo es correcto, está bien ordenado e identificado? Eso es hacer una **buena presentación**: letra legible, hoja bien troquelada, con su nombre y enumerada.
- ¿Qué preguntas se hacen antes de ponerse a escribir un código? ¿Y durante? ¿Y después? **Probablemente todo eso les sirva también**.

Demostraciones directas y reutilizando resultados

Ejercicio de Parcial del 2do cuatrimestre de 2022

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $AB = I$. Sean b_1, \dots, b_n las columnas de B . Probar que:

- (a) $\{Ab_1, \dots, Ab_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. (5 puntos)
- (b) $\{b_1, \dots, b_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. (5 puntos)
- (c) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de \mathbb{R}^n y $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cumple $Cv_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, entonces $C = 0$.
(Sugerencia: Probar que $Ce_i = 0$ siendo e_i el i -ésimo vector de la base canónica). (10 puntos)
- (d) $(BA - I)B = 0$. Deducir que $BA = I$. (5 puntos)

1. Resolver (a) de forma directa ($p \rightarrow q$).
2. Resolver (b) por absurdo ($p \wedge q \rightarrow \neg q$).
3. Resolver (c) por contrarrecíproco ($\neg q \rightarrow \neg p$).
4. Resolver (d) de forma directa, pero reutilizando algún resultado anterior.

Demostraciones por inducción

Situación general: Demostrar que $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$. Variantes:

- Puede ser **a partir** de algún valor $k \in \mathbb{N}$ determinado.
- Puede ser **hasta** algún valor $m \in \mathbb{N}$ determinado.

Demostraciones por inducción

Situación general: Demostrar que $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$. Variantes:

- Puede ser **a partir** de algún valor $k \in \mathbb{N}$ determinado.
- Puede ser **hasta** algún valor $m \in \mathbb{N}$ determinado.

Esquema general:

Caso base: Probar que $P(k)$ es cierto.

Paso Inductivo: Probar que si $P(j)$ es cierto para $k \leq j \leq n$, entonces $P(n+1)$ es cierto.

Demostraciones por inducción

Situación general: Demostrar que $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$. Variantes:

- Puede ser **a partir** de algún valor $k \in \mathbb{N}$ determinado.
- Puede ser **hasta** algún valor $m \in \mathbb{N}$ determinado.

Esquema general:

Caso base: Probar que $P(k)$ es cierto.

Paso Inductivo: Probar que si $P(j)$ es cierto para $k \leq j \leq n$, entonces $P(n+1)$ es cierto.

Observación:

Puede pasar que la propiedad P sea una implicación, es decir, $P(j) : p(j) \rightarrow q(j)$. Por lo que probar el paso inductivo se trata de:

1. suponer que valen todas las instancias de $p(j) \rightarrow q(j)$ para $k \leq j \leq n$;
2. suponer que vale $p(n+1)$;
3. probar que vale $q(n+1)$.

Demostraciones por inducción: Ejercicios

4 preguntas para plantear una inducción:

1. ¿Qué variable tiene el rol de n ? (evita confundirse con k ó m)
2. ¿Cuál es el caso por el cuál se empieza?
3. ¿Qué necesito para demostrar $P(n + 1)$?
4. ¿Cuál es el enunciado formal preciso de la hipótesis inductiva?

Demostraciones por inducción: Ejercicios

4 preguntas para plantear una inducción:

1. ¿Qué variable tiene el rol de n ? (evita confundirse con k ó m)
2. ¿Cuál es el caso por el cuál se empieza?
3. ¿Qué necesito para demostrar $P(n+1)$?
4. ¿Cuál es el enunciado formal preciso de la hipótesis inductiva?

Ejercicios: Probar que las siguientes afirmaciones valen para todo n a partir de cierto valor $k \in \mathbb{N}$:

1. $(a^n - b^n) = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$
2. $n^2 < 2^n.$
3. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior, entonces AB es triangular superior (ejercicio 25 de la guía 1).

Interpretaciones de una matriz

Mirada algebraica:

- Sist. de ecuaciones lineales
- Sist. de inecuaciones lineales
- Filas/columnas de vectores
- Problemas de Optimización

Mirada analítica:

- Derivadas
- Diagramas de flujo
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Interpretaciones de una matriz

Mirada algebraica:

- Sist. de ecuaciones lineales
- Sist. de inecuaciones lineales
- Filas/columnas de vectores
- Problemas de Optimización

Mirada algebraica abstracta:

- Elementos con operaciones asociadas a la estructura de filas y columnas capaces de extender a los reales (\mathbb{R})
- Identificación de invariantes
- Representaciones

Mirada analítica:

- Derivadas
- Diagramas de flujo
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Mirada geométrica:

- Rotaciones, Simetrías y Proyecciones
- Cambios de coordenadas (bases) y Reescalamiento
- Cuádricas
- Grafos

Interpretaciones de una matriz

Mirada algebraica:

- Sist. de ecuaciones lineales
- Sist. de inecuaciones lineales
- Filas/columnas de vectores
- Problemas de Optimización

Mirada algebraica abstracta:

- Elementos con operaciones asociadas a la estructura de filas y columnas capaces de extender a los reales (\mathbb{R})
- Identificación de invariantes
- Representaciones

Mirada analítica:

- Derivadas
- Diagramas de flujo
- Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Mirada geométrica:

- Rotaciones, Simetrías y Proyecciones
- Cambios de coordenadas (bases) y Reescalamiento
- Cuádricas
- Grafos

Sist. de ecuaciones lineales y operaciones entre filas

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como una matriz:

Sist. de ecuaciones lineales y operaciones entre filas

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como una matriz:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 5 & 1 & 0 & 2 & = & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & = & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & = & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & = & -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

Sist. de ecuaciones lineales y operaciones entre filas

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como una matriz:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 5 & 1 & 0 & 2 & = & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & = & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & = & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & = & -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

Operaciones entre filas:

- Permutación de filas (cambio f_i por f_j)
- Multiplicar por un número real k **no nulo** (cambio f_i por $k \cdot f_i$).
- Sumarle un múltiplo de una fila a otra (cambio f_i por $f_i + k \cdot f_j$).

Sist. de ecuaciones lineales y operaciones entre filas

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como una matriz:

$$\left\{ \begin{array}{rrcrcl} 5 & 1 & 0 & 2 & = & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & = & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & = & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & = & -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|l} 5 & 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

Operaciones entre filas:

- Permutación de filas (cambio f_i por f_j)
- Multiplicar por un número real k **no nulo** (cambio f_i por $k \cdot f_i$).
- Sumarle un múltiplo de una fila a otra (cambio f_i por $f_i + k \cdot f_j$).

El sistema resultante de aplicar estas operaciones es *equivalente* al original, estas operaciones no cambian la solución del sistema.

Sist. de ecuaciones lineales y operaciones entre filas

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como una matriz:

$$\left\{ \begin{array}{rrcrcl} 5 & 1 & 0 & 2 & = & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & = & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & = & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & = & -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|l} 5 & 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

Operaciones entre filas:

- Permutación de filas (cambio f_i por f_j)
- Multiplicar por un número real k **no nulo** (cambio f_i por $k \cdot f_i$).
- Sumarle un múltiplo de una fila a otra (cambio f_i por $f_i + k \cdot f_j$).

El sistema resultante de aplicar estas operaciones es *equivalente* al original, **estas operaciones no cambian la solución del sistema.**

Pregunta: ¿Se pueden hacer estas operaciones pero con columnas?

Filas y Columnas de Vectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces podemos entenderla como:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & \dots & w_{n-1} & w_n \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Filas y Columnas de Vectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces podemos entenderla como:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ w_1 & w_2 & \dots & w_{n-1} & w_n \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Notamos como $(A)_{ij}$ ó a_{ij} :

- a la j -ésima coordenada de v_i
- a la i -ésima coordenada de w_j .

Filas y Columnas de Vectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces podemos entenderla como:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ w_1 & w_2 & \dots & w_{n-1} & w_n \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}$$

Notamos como $(A)_{ij}$ ó a_{ij} :

- a la j -ésima coordenada de v_i
- a la i -ésima coordenada de w_j .

En el juego de filas y columnas, aparece la operación traspuesta (t):

$$A^t = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}$$

\mathbb{R} —Espacio Vectorial con producto interno

Un “ \mathbb{R} —e.v. finito” es equivalente a pensar \mathbb{R}^n para un n entero positivo. Sus elementos se llaman *vectores* y se los piensa como en **columnas**¹.


¹Cuando se escriben por filas es por comodidad tipográfica

\mathbb{R} —Espacio Vectorial con producto interno

Un “ \mathbb{R} —e.v. finito” es equivalente a pensar \mathbb{R}^n para un n entero positivo. Sus elementos se llaman *vectores* y se los piensa como en **columnas**¹. Se los puede sumar y multiplicar por un número real (coord a coord). Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, el producto interno (p.i.) es:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i v_i \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo: Si $u = (1, 2, -2)$ y $v = (3, 0, 1)$, entonces $u \cdot v = 1$.

¹Cuando se escriben por filas es por comodidad tipográfica 

Suma y multiplicación de matrices

Extendemos las operaciones de vectores a matrices $\mathbb{R}^{n \times m}$, donde los vectores se entienden como matrices $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

- Sumar y multiplicar por un número real (coord a coord).
- Producto entre matrices: dados $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$, entonces $AB \in \mathbb{R}^{n \times m}$. La condición para una buena definición del producto es que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.
 - Si $n = m = 1$ es el p.i. entre vectores: $u \cdot v = u^t v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$
 - En general:

$$A = \begin{pmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \dots \\ v_{n-1}^t \\ v_n^t \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_{n-1} & w_n \end{pmatrix}$$

Entonces: $(AB)_{ij} = v_i^t w_j$

Estructuras interesantes y otras operaciones

- Producto de matrices cuadradas ($\mathbb{R}^{n \times n}$):
 - Permite concatenar productos: A^p
 - Hay noción de elemento neutro (Id_n) y de inversa A^{-1} .
 - Como raíces de “polinomios”: $A^p - Id_n = 0$.

Estructuras interesantes y otras operaciones

- Producto de matrices cuadradas ($\mathbb{R}^{n \times n}$):
 - Permite concatenar productos: A^p
 - Hay noción de elemento neutro (Id_n) y de inversa A^{-1} .
 - Como raíces de “polinomios”: $A^p - Id_n = 0$.
- Caracterización de matrices según sus valores o estructura:
 - Diagonales (D) y Tridiagonales
 - Triangular Superior (U) y Triangular Inferior (L)
 - Simétricas

Estructuras interesantes y otras operaciones

- Producto de matrices cuadradas ($\mathbb{R}^{n \times n}$):
 - Permite concatenar productos: A^p
 - Hay noción de elemento neutro (Id_n) y de inversa A^{-1} .
 - Como raíces de “polinomios”: $A^p - Id_n = 0$.
- Caracterización de matrices según sus valores o estructura:
 - Diagonales (D) y Tridiagonales
 - Triangular Superior (U) y Triangular Inferior (L)
 - Simétricas
- Determinante de una matriz cuadrada: $\det(A) \in \mathbb{R}$.
 - Se “lleva bien” con el producto: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
 - Como consecuencia, vale que $\det(AB) = \det(BA)$.

Estructuras interesantes y otras operaciones

- Producto de matrices cuadradas ($\mathbb{R}^{n \times n}$):
 - Permite concatenar productos: A^p
 - Hay noción de elemento neutro (Id_n) y de inversa A^{-1} .
 - Como raíces de “polinomios”: $A^p - Id_n = 0$.
- Caracterización de matrices según sus valores o estructura:
 - Diagonales (D) y Tridiagonales
 - Triangular Superior (U) y Triangular Inferior (L)
 - Simétricas
- Determinante de una matriz cuadrada: $\det(A) \in \mathbb{R}$.
 - Se “lleva bien” con el producto: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
 - Como consecuencia, vale que $\det(AB) = \det(BA)$.
- Traza de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $Tr(A) = \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} (A)_{ii} \in \mathbb{R}$.
 - Se “lleva bien” con la suma: $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.
 - Si AB y BA son posibles, $Tr(AB) = Tr(BA)$ (¿por inducción?).

Transformaciones Lineales

Una transformación lineal es una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

1. “no cambia el producto escalar”: $f(kv) = kf(v)$.
2. “separa la suma vectorial”: $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

Veamos algunos casos:

- Si $n = m = 1$, sería una lineal sin ordenada al origen: $f(x) = ax$.
- Si $m = 1$, entonces $f(x) = (a_1x, \dots, a_nx) = (a_1, \dots, a_n)x$.

Transformaciones Lineales

Una transformación lineal es una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

1. “no cambia el producto escalar”: $f(kv) = kf(v)$.
2. “separa la suma vectorial”: $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

Veamos algunos casos:

- Si $n = m = 1$, sería una lineal sin ordenada al origen: $f(x) = ax$.
- Si $m = 1$, entonces $f(x) = (a_1x, \dots, a_nx) = (a_1, \dots, a_n)x$.
- Si $n = 1$, entonces $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{1 \leq i \leq m} a_i x_i = (a_1, \dots, a_m)^t x$.

Transformaciones Lineales

Una transformación lineal es una función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

1. “no cambia el producto escalar”: $f(kv) = kf(v)$.
2. “separa la suma vectorial”: $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

Veamos algunos casos:

- Si $n = m = 1$, sería una lineal sin ordenada al origen: $f(x) = ax$.
- Si $m = 1$, entonces $f(x) = (a_1x, \dots, a_nx) = (a_1, \dots, a_n)x$.
- Si $n = 1$, entonces $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{1 \leq i \leq m} a_i x_i = (a_1, \dots, a_m)^t x$.
- En general, $f(x) = Ax$.

La t.l. asociada a una matriz A la solemos notar como f_A . Con esto en mente, ahora **toda matriz puede interpretarse como una transformación lineal**.

Transformaciones Lineales típicas ($n = m$)

- *Nilpotentes*: Que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k es la transformación trivial (manda todo al 0), o bien $A^k = 0$.
- *Idempotentes*: $f^2 = f$ o que cumple que $A^2 = A$. Se las llaman Proyecciones, porque proyectan el dominio en la imagen.
- *Isometrías*: preservan la longitud de los vectores ($\|f(v)\| = \|v\|$). Sus matrices asociadas Q no sólo son inversibles sino que además $Q^t = Q^{-1}$, y se las llama *ortogonales*.
- *Permutaciones* de la base canónica: Son isometrías donde $P_{ij}(e_i) = e_j$, $P_{ij}(e_j) = e_i$ y $P_{ij}(e_k) = e_k$ si $k \neq i, j$.
- *Estiramiento o escalado direccional*: dada una dirección (generalmente vectores canónicos) la reescala respecto a otra (o la misma) dirección.
- *Isomorfismos*: Son las t.l. biyectivas. Mandan la base canónica a otra base y sus matrices son inversibles.
- Asociadas a *matrices simétricas*: Esto significa que $A = A^t$. Reescalán en direcciones perpendiculares respecto a una cierta isometría.

¿Cómo usaremos estas diferentes representaciones?

- El objetivo principal es **resolver sistemas de ecuaciones lineales**.
- *Pero* cuentas “costosas” algorítmicamente (complejidad, arrastre de redondeo) requieren que escribamos “mejor” sus matrices asociadas.
- Conocer mejores representaciones de matrices proviene de conocer sus propiedades algebraicas abstractas.
- Las propiedades algebraicas abstractas se suelen entender mejor cuando tenemos referencias geométricas, generalmente en términos de transformaciones lineales.

Uno más de inducción...

Ejercicio de Parcial del 1er cuatrimestre de 2023

Ejercicio 2 (25 puntos). Considere una descomposición LU de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde L tiene unos en la diagonal, y sean $\{a_1^t, \dots, a_n^t\}$ las filas de A y $\{u_1^t, \dots, u_n^t\}$ las filas de U . Si $|l_{i,j}| \leq 1 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$:

- a) (10 puntos) Probar que $u_i^t = a_i^t - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^t \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
- b) (10 puntos) Probar por inducción que $\|u_i\|_1 \leq 2^{i-1} \|A\|_\infty \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
- c) (5 puntos) Probar que $\|U\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$.