

# Análisis Funcional - Notas de clase

Pablo Miralles González

Nov 2021

## Índice

<b>1. Espacios de Hilbert.</b>	<b>2</b>
1.1. Dual de un espacio de Hilbert: teorema de Riesz-Fréchet. . . . .	2
1.2. Problemas variacionales cuadráticos. . . . .	2
1.3. Operadores diferenciales y soluciones débiles. . . . .	3
1.4. El método de Galerkin. . . . .	3
<b>2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.</b>	<b>5</b>
2.1. Inversión de operadores. Espectro. . . . .	5
2.2. Adjunto de un operador en espacios de Hilbert. . . . .	6
2.3. Operadores compactos. . . . .	7
2.4. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos. . . . .	11
<b>Referencias</b>	<b>15</b>

# 1. Espacios de Hilbert.

## 1.1. Dual de un espacio de Hilbert: teorema de Riesz-Fréchet.

**Teorema 1.1** (F. Riesz - M. Fréchet). Sea un espacio de Hilbert  $H$  y una forma lineal  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La forma lineal  $f$  es continua.
2. Existe un único  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$  para cada  $x \in H$ , siendo además  $\|f\| = \|y\|$ .

**Definición 1.2.** Sea  $X$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Se dice que  $B$  es bilineal si fijados  $x, y$  respectivamente,  $B(\cdot, y), B(x, \cdot)$  son lineales.
2. Se dice que  $B$  es sesquilineal si  $B(\cdot, y)$  es lineal y  $B(x, \cdot)$  es lineal conjugada, esto es,  $B(x, ay) = \bar{a}B(x, y)$ .
3. Se dice que  $B$  es simétrica si  $B(x, y) = B(y, x) \forall x, y \in H$ .
4. Se dice que  $B$  es positiva si  $B(x, x) \geq 0$  para cada  $x \in X$ .

Si  $X$  es normado:

1. Se dice que  $B$  es acotada si  $\exists M > 0$  tal que  $|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$  para cada  $x, y \in X$ .
2. Se dice que  $B$  es fuertemente positiva si  $\exists c > 0$  tal que  $B(x, x) \geq c\|x\|^2$  para cada  $x \in X$ .

**Teorema 1.3** (Lax-Milgram). Sea  $H$  espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{K}$  y  $B$  una forma sesquilineal en  $H$  acotada y fuertemente positiva. Entonces existe un isomorfismo de espacios de Hilbert  $T : H \rightarrow H$ , unívocamente determinado, tal que

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle,$$

para cada  $x, y \in H$ .

## 1.2. Problemas variacionales cuadráticos.

**Teorema 1.4** (Teorema principal de los problemas variacionales cuadráticos). Sea  $H$  espacio de Hilbert real y  $B$  una forma bilineal simétrica, acotada y fuertemente positiva definida en  $H$ . Sea  $b$  una forma lineal continua en  $H$  y sea  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$F(x) := \frac{1}{2}B(x, x) - b(x).$$

Entonces:

1. Es condición necesaria y suficiente para que  $F$  alcance su mínimo en  $w \in H$  que se verifique

$$B(w, y) = b(y)$$

para cada  $y \in H$ .

2. La función real  $F(x)$  alcanza un mínimo absoluto en  $H$ , que además es único.

### 1.3. Operadores diferenciales y soluciones débiles.

**Definición 1.5.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto, se define

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ de clase } C^\infty, \text{ sop}(g) = \overline{\{x : g(x) \neq 0\}} \text{ compacto} \right\}.$$

**Definición 1.6.** Dado el operador diferencial lineal  $L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$ , con los  $a_\alpha \in \mathbb{K}$ , se define el operador adjunto como  $L^* := \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \overline{a_\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$ .

**Lema 1.7** (Regularización).  $\mathcal{D}(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$  para el producto escalar estándar.

**Teorema 1.8** (Gauss). Dado  $h \in C(\overline{\Omega})$ , si  $\partial\Omega$  es suficientemente buena entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial\Omega} h \cdot n_j d\theta.$$

**Proposición 1.9.**  $\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^*\psi \rangle \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

*Demostración.* Lo vemos para  $L = \frac{\partial}{\partial x_j}$ , bastando aplicar (1.8) a  $h = \phi \cdot \psi$ , observando que por tener estas soporte compacto valen 0 en la frontera, y que aunque la frontera de  $\Omega$  no sea suficientemente buena, como el soporte es compacto siempre podemos tomar un abierto entre el soporte y  $\Omega$  con frontera suficientemente buena.

Por inducción se generaliza a derivadas parciales de cualquier orden, y por las propiedades del producto escalar al caso general.  $\square$

**Corolario 1.10.**  $\forall f \in L^2(\Omega)$ , si  $u$  es suficientemente regular y verifica que  $Lu = f$ , entonces  $\langle f, \phi \rangle = \langle u, L^*\phi \rangle \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definición 1.11.** Si  $u \in L^2(\Omega)$  verifica  $\langle f, \phi \rangle = \langle u, L^*\phi \rangle$  para cada  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , entonces decimos que es solución débil de la ecuación  $Lv = f$ .

### 1.4. El método de Galerkin.

**Teorema 1.12.** Sea  $M_1 \subset M_2 \subset \dots$  una sucesión de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert  $H$  con unión densa. Sea  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal, simétrica, continua y fuertemente positiva y sea  $b : H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal y continua. Consideramos el problema de minimización del funcional

$$J(x) := \frac{1}{2}a(x, x) - b(x)$$

sobre el subespacio  $M_n$ , y sea  $u_n \in M_n$  su solución, esto es,

$$a(x, u_n) = b(x)$$

para todo  $x \in M_n$ . Entonces la sucesión  $(u_n)_n$  converge hacia la solución  $u$  del problema de minimización de  $J$  en todo  $H$ .

*Demostración.* (p.81, [1]).

□

## 2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.

### 2.1. Inversión de operadores. Espectro.

**Definición 2.1.** *Un operador es una aplicación lineal y continua.*

**Teorema 2.2** (Von-Neumann). *Sea  $X$  un espacio de Banach,  $K \in \mathcal{L}(K)$  invertible y  $L := K - A$ . Si  $\|A\| < \|K^{-1}\|^{-1}$  entonces  $L$  es invertible.*

*Demostración.* Estudio primero el caso en el que  $K = Id$ , se trata de ver que  $Id - B$  con  $\|B\| < 1$  es invertible. Defino  $S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$ , refiriéndose el exponente a la composición.  $\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n$  convergente, así que la serie converge y  $S \in \mathcal{L}(X)$ , que es de Banach por serlo  $X$ .

Veamos que  $S = (Id - B)^{-1}$ .

- $B \circ S = B \circ \sum_{n=0}^{\infty} B^n \underbrace{=}_{\circ \text{ continua}} \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B) \circ S = Id.$
- Análogamente  $S \circ (Id - B) = Id.$

En el caso general,  $K - A = K \circ (Id - K^{-1} \circ A)$ ,  $\|K^{-1} \circ A\| \leq \|K^{-1}\| \|A\| < 1$  por hipótesis, así que aplicando el primer caso  $Id - K^{-1} \circ A$  es invertible. Como  $K$  es invertible y la composición de invertibles es invertible ya lo tenemos.  $\square$

**Observación 2.3.**  $(K - A)^{-1} = (K \circ (Id - K^{-1} \circ A))^{-1} = (Id - K^{-1} \circ A)^{-1} \circ K^{-1} = (\sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n) \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n K^{-1}.$

**Definición 2.4.** *Sea  $M : X \rightarrow X$  un operador, se definen:*

- $\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \text{ es invertible}\}.$
- $\sigma(M) = \mathbb{C} \setminus \rho(M)$  es el espectro del operador.

**Teorema 2.5.** *Dado  $M$  un operador:*

1.  $\rho(M)$  es abierto.
2.  $\phi : \rho(M) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ , dada por  $\phi(\lambda) = (\lambda Id - M)^{-1}$  es analítica.

*Demostración.* 1.  $\lambda \in \rho(M) \implies K = \lambda Id - M$  es invertible. Para  $h \in \mathbb{C}$  con  $|h| < \|K^{-1}\|^{-1}$ ,  $(\lambda - h)Id - M = K - hId$ , con  $\|hId\| = |h| \|Id\| = |h| < \|K^{-1}\|^{-1}$ , así que es invertible y  $\lambda - h \in \rho(M)$ .

2. Se tiene además por (2.3) lo siguiente:

$$\phi(\lambda-h) = ((\lambda-h)Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda Id - M)^{-1} \cdot h)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda Id - M)^{-1})^{n+1} h^n,$$

luego es analítica.

□

**Teorema 2.6** (Gelfand).  $\forall M \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\sigma(M)$  es un compacto no vacío.

*Demostración.*  $\rho(M)$  abierto implica  $\sigma(M)$  cerrado, veamos que es acotado. Si  $|\xi| > \|M\|$ , veamos que  $\xi \notin \sigma(M)$ , bastando aplicar (2.2) para  $K = \xi Id, A = M$ .

Además, aplicando (2.3):

$$\phi(\xi) = (\xi Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \cdot \xi^{-(n+1)}.$$

Si fuese vacío  $\sigma(M)$ , entonces  $\phi$  sería entera, tendría dominio  $\mathbb{C}$ . Se tiene también

$$\|\phi(\xi)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n |\xi|^{-(n+1)} = \frac{1}{|\xi| - \|M\|} \rightarrow 0$$

cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Por el teorema de Liouville  $\phi$  es constante, pero  $\phi'(\xi) = -(\xi Id - M)^{-2} \neq 0$ , contradicción. □

**Proposición 2.7.** Si  $M$  es un subespacio cerrado de  $H$ ,  $\langle P_M x, y \rangle = \langle x, P_M y \rangle$  para cada  $x, y \in H$ .

*Demostración.* Ejercicio. □

## 2.2. Adjunto de un operador en espacios de Hilbert.

**Observación 2.8.** Dado un operador  $T : H \rightarrow H$  y fijado  $y \in H$ ,

$$\begin{aligned} \phi_y : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \phi_y(x) = \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

es una forma lineal y continua, luego por el teorema de Riesz  $\phi_y(x) = \langle x, w \rangle$  para cierto  $w \in H$ . Esto permite definir otro operador, que cumple  $T^*y = w$ .

**Definición 2.9.** El operador  $T^*$  se denomina adjunto de  $T$ , y viene dado por la ecuación  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \forall x, y \in H$ .

**Definición 2.10.** Si  $T = T^*$ , se dice que  $T$  es autoadjunto.

**Observación 2.11.**  $\sup\{|\langle Tf, g \rangle| : \|f\|, \|g\| \leq 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf, g \rangle| : \|g\| \leq 1\} : \|f\| \leq 1\} = \sup\{\|Tf\| : \|f\| \leq 1\} = \|T\|.$

**Observación 2.12.** Como  $|\langle Tf, g \rangle| = |\langle f, T^*g \rangle| = |\langle T^*g, f \rangle|$ , en vista de la observación anterior  $\|T\| = \|T^*\|.$

**Proposición 2.13.** Si  $T = T^*$ , entonces  $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}.$

*Demostración.* Llamo  $M = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$ , es obvio que  $M \leq \|T\|$  por (2.11). Veamos la desigualdad contraria.

$$\begin{aligned} & \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle = \\ & \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle + \langle Tg, g \rangle - \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle - \langle Tg, g \rangle = \\ & 2 \cdot \langle Tf, g \rangle + 2 \cdot \langle Tg, f \rangle = 2 \cdot \langle Tf, g \rangle + 2 \cdot \langle g, T^*f \rangle = 2 \cdot \langle Tf, g \rangle + 2 \cdot \langle g, Tf \rangle = \\ & 4 \cdot \operatorname{Re}(\langle Tf, g \rangle), \end{aligned}$$

en el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  se tiene  $\langle Tf, g \rangle = \frac{1}{4} (\langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle)$ , de donde:

$$\begin{aligned} |\langle Tf, g \rangle| & \leq \frac{1}{4} [|\langle T(f+g), f+g \rangle| + |\langle T(f-g), f-g \rangle|] \\ & = \frac{1}{4} \left[ \left| \left\langle T\left(\frac{f+g}{\|f+g\|}\right), \frac{f+g}{\|f+g\|} \right\rangle \right| \|f+g\|^2 + \left| \left\langle T\left(\frac{f-g}{\|f-g\|}\right), \frac{f-g}{\|f-g\|} \right\rangle \right| \|f-g\|^2 \right] \\ & \leq \frac{M}{4} [\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2] \\ & = \frac{M}{2} [\|f\|^2 + \|g\|^2], \end{aligned}$$

siendo la última igualdad por la ley del paralelogramo. Si  $f, g$  tienen norma no superior a 1 llegamos a  $|\langle Tf, g \rangle| \leq M$ , y tomando supremos en  $f, g$  se tiene  $\|T\| \leq M$  por (2.11).

□

### 2.3. Operadores compactos.

**Definición 2.14.** Dado  $X$  espacio topológico,  $Y \subset X$  es relativamente compacto si su clausura es compacta.

**Definición 2.15.** Un operador es compacto si la imagen de la bola unidad es relativamente compacta.

**Observación 2.16.** En espacios métricos, y en concreto en espacios normados, la compacidad relativa equivale a que cualquier sucesión contenga una subsucesión convergente (en el espacio  $X$ , no en  $Y$ ).

**Lema 2.17.** Si  $K : H \rightarrow H$  es un operador de rango finito en  $H$  Hilbert, entonces su adjunto es de rango finito (p. 162, [1]).

*Demostración.* Si el rango de  $K$  es  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ , con los  $v_i$  ortonormales, y  $P_i$  es la proyección de  $H$  en  $\text{span}\{v_i\}$ , entonces  $P_i \circ K$  son formas lineales continuas,  $\exists! u_i$  tal que  $P_i \circ Kx = \langle x, u_i \rangle v_i$  para cada  $x \in H$ . Se tiene entonces:

$$Kx = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle v_i$$

para cada  $x \in H$ . Pero entonces para  $x, y \in H$  arbitrarios:

$$\langle x, K^*y \rangle = \langle Kx, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle,$$

y  $K^*y = \sum_{i=1}^n \langle y, v_i \rangle u_i$  para cada  $y \in H$ , tiene rango finito.  $\square$

**Teorema 2.18.** Sea  $H$  Hilbert separable,  $T : H \rightarrow H$  lineal y continua, entonces:

1.  $S : H \rightarrow H$  compacto implica que  $S \circ T, T \circ S$  compactos.
2.  $T_n : H \rightarrow H, n = 1, 2, \dots$  compactos y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$  implica  $T$  compacto.
3.  $T$  compacto implica que  $\exists T_n : H \rightarrow H$  operadores de rango finito con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ .
4.  $T$  compacto si y solo si  $T^*$  compacto.

*Demostración.*

1. Sea  $(x_k)_k \subset B_H$ ,  $(Sx_k)_k$  tiene una subsucesión convergente  $Sx_{k_i} \rightarrow y$ , por continuidad  $TSx_{k_i} \rightarrow Ty$ . Considero ahora  $(Tx_k)_k$ , como  $T$  operador  $\|T\| < \infty$ ,  $\left(\frac{Tx_k}{\|T\|}\right)_k \subset B_H$ , luego  $\left(\frac{STx_k}{\|T\|}\right)_k$  tiene una subsucesión convergente  $\frac{STx_{k_i}}{\|T\|} \rightarrow y$ , con lo que  $STx_{k_i} \rightarrow \|T\|y$ .
2. Sea  $(f_k^0)_k \subset B_H$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $T_n$  compacto,  $\exists (f_k^n)_k$  subsucesión de  $(f_k^{n-1})_k$  tal que  $(T_n f_k^n)_k$  es convergente. Considero ahora  $(T f_k^k)_k$ , veamos que es de Cauchy (y por lo tanto convergente en  $H$  completo).

$$\begin{aligned} \|T f_k^k - T f_l^l\| &\leq \|T f_k^k - T_m f_k^k\| + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| + \|T_m f_l^l - T f_l^l\| \\ &\leq \|T - T_m\|(\|f_k^k\| + \|f_l^l\|) + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \\ &\leq \|T - T_m\| \cdot 2 + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , tomo  $m_0$  tal que  $\|T - T_{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{4}$ , y como para  $k \geq m_0$   $(f_k^k)_k$  es subsucesión de  $(f_k^{m_0})_k$ , cuya imagen por  $T_{m_0}$  converge, puedo tomar  $l, k$  suficientemente grandes para que  $\|T_{m_0} f_k^k - T_{m_0} f_l^l\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .



3. Tomo  $\{e_k\}_1^\infty$  base hilbertiana. Para  $H_n := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $P_n := P_{H_n}$ ,  $P_n + Q_n = Id$ ,  $P_n \circ T$  tiene rango en  $H_n$  finito-dimensional. Basta ver que  $\|T - P_n \circ T\| = \|Q_n \circ T\| \rightarrow 0$ .

$\|Q_n T\| = \sup\{\|Q_n T f\| : \|f\| \leq 1\} = \sup\{\|Q_n g\| : g \in T(B_H)\}$ . Pero  $T(B_H)$  es relativamente compacto, y  $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es equicontinua,  $\|Q_n\| = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , así que por el teorema de Ascoli la convergencia puntual y la uniforme son equivalente. Basta ver entonces que  $\|Q_n g\| \rightarrow 0$  para cada  $g \in T(B_H)$ .

$$\|Q_n g\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 \rightarrow 0,$$

pues la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 = \|g\|^2$  converge.

4. Para la necesidad basta aplicar (2.17) y el apartado (2), junto con que  $(T_n - T)^* = T_n^* - T^*$ . La suficiencia se sigue de que  $T = T^{**}$ .

□

**Observación 2.19.** Si  $T : H \rightarrow H$  es un operador de rango finito, entonces es compacto, pues la imagen está contenida en una bola de un espacio de dimensión finita, que es compacta,

**Proposición 2.20.** Sea  $H$  Hilbert separable,  $\{e_k\}_1^\infty$  base ortonormal,  $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$  acotada. Defino  $T e_k := \lambda_k e_k$ , luego en general  $T x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$ . Entonces:

1.  $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}$ .
2.  $T^* e_k = \overline{\lambda_k} e_k$ .
3.  $T = T^* \iff (\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}$ .
4.  $T$  es un proyector si y solo si  $(\lambda_k)_k \subset \{0, 1\}$ .
5.  $T$  es compacto si y solo si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ .

*Demostración.*

1. Para  $\|x\| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| |\langle x, e_k \rangle| \|e_k\| \\ &\leq \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle| \\ &= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\} \|x\| \\ &= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

2.  $\langle T^* e_k, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^* e_k \rangle} = \overline{\langle T e_i, e_k \rangle} = \overline{\langle \lambda_i e_i, e_k \rangle} = \overline{\lambda_i} \delta_{i,k}.$

3. Evidente por el apartado anterior.

4. Si la definición de proyector es que  $\exists M \subset H$  subespacio cerrado tal que  $T = P_M$  es evidente.
5. Comienzo por la necesidad. Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \neq 0$ , puedo tomar una subsucesión  $(\lambda_{k_i})_i$  con  $|\lambda_{k_i}| \geq \varepsilon$  para cierto  $\varepsilon > 0$ . Si  $i \neq j$ ,  $\|Te_{j_i} - Te_{k_j}\| = \sqrt{|\lambda_{k_i}|^2 + |\lambda_{k_j}|^2} \geq \varepsilon$ , luego no puede tener ninguna subsucesión de Cauchy ni convergente.

Para la suficiencia, por el apartado (2) de (2.18) y que los operadores de rango finito son compactos, basta ver que  $\|P_n T - T\| = \|Q_n T\|$ , donde  $H_n := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $P_n := P_{H_n}$ ,  $P_n + Q_n = Id$ . Para  $x \in H$  con  $\|x\| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \|Q_n T x\|^2 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_{k_i}| |\langle x, e_{k_i} \rangle|^2 \\ &\leq \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_{k_i} \rangle|^2 \\ &\leq \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \|x\|^2 \\ &\leq \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $B_H$ .

□

**Ejemplo 2.21.**  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,

$$K : L^1[a, b] \longrightarrow C[a, b]$$

$$f \longmapsto K(f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt,$$

es compacto (p.178, [1]).

**Ejemplo 2.22.** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  suficientemente regular,  $\forall f \in L^2(\Omega)$  existe un único  $u \in H = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$  con  $\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + \int_\Omega \sum u_j v_j$ .

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega) &\longrightarrow H \hookrightarrow L^2(\Omega) \\ f &\longmapsto u \end{aligned}$$

es compacto por el teorema de Rellich (2.23).

**Teorema 2.23** (Rellich). Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto con frontera suficientemente regular, y  $\mathcal{F} \subset L^2(\Omega)$  tal que para cierto  $K > 0$ ,  $\forall g \in \mathcal{F}$ :

1.  $g_j = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall j = 1, \dots, n$ .
2.  $\|g\|_{L^2}, \|g_j\|_{L^2} \leq K \quad \forall j = 1, \dots, n$ .

Entonces  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto en  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Tarea.

□

## 2.4. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

**Proposición 2.24.** Si  $T = T^*$  y  $Tv = \lambda v$  con  $v \neq 0$ , entonces  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.*  $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$ . Como  $v \neq 0$  se da  $\lambda = \bar{\lambda}$ .  $\square$

**Proposición 2.25.** Si  $T$  es compacto,  $\forall \lambda \neq 0$  se tiene que  $\text{Ker}(T - \lambda Id)$  es de dimensión finita.

*Demostración.* Si no es de dimensión finita, podemos tomar  $(\phi_n)_n$  ortonormal e infinita en  $\text{Ker}(T - \lambda Id)$  (espacio cerrado en un Hilbert, pues es preimagen de un  $\{0\}$  por una función continua).

Como  $T$  es compacto,  $(T\phi_n)_n$  debe tener una subsucesión convergente, pero como  $T\phi_n = \lambda\phi_n$   $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T\phi_{n_j} - T\phi_{n_k}\| = |\lambda| \|\phi_{n_j} - \phi_{n_k}\| = |\lambda| \sqrt{2}$ , así que ninguna subsucesión es de Cauchy, y no pueden ser convergentes.  $\square$

**Proposición 2.26.** Si  $T$  es un operador compacto y autoadjunto, entonces o bien  $\|T\|$  o bien  $-\|T\|$  es un valor propio.

*Demostración.* Sabemos que  $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| = 1\}$  por ser  $T = T^*$ . La idea es encontrar un máximo.

Tomo  $(f_n)_n$  con  $\|f_n\| = 1$  y  $\langle Tf_n, f_n \rangle \rightarrow \lambda$  para  $|\lambda| = \|T\|$ . Como  $T$  es compacto,  $(Tf_n)_n$  tiene una subsucesión  $(Tf_{n_k})_k$  convergente en  $H$ , y llamo al límite  $g \in H$ .

Afirmo entonces que  $g$  es vector propio de  $T$  con valor propio  $\lambda$ , lo que terminaría la prueba.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 &= \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle - 2\lambda \langle f_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle + \lambda^2 \langle f_{n_k}, f_{n_k} \rangle = \\ &= \|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle + \lambda^2 \underbrace{\|f_{n_k}\|^2}_1. \end{aligned}$$

Tomando límites, por la continuidad de la norma:

$$0 \leq \|g - \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}\|^2 \leq \|g\|^2 - 2\lambda \cdot \lambda + \lambda^2 = \|g\|^2 - \lambda^2 \leq 0.$$

Se tiene entonces que  $g = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda f_{n_k}$ , y por lo tanto

$$Tg = T(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda f_{n_k}) = \lambda T(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}) = \lambda g,$$

quedando demostrada la afirmación.  $\square$

**Observación 2.27.** En  $l^2$ , el operador  $T$  que actúa  $(\psi_n)_n \rightarrow (0, \psi_1, \psi_2, \dots)$  no es invertible (no es sobreyectiva), esto es,  $T - 0 \cdot Id$  no es invertible, y sin embargo 0 no es valor propio. Por eso el concepto de espectro es más general que el de valores propios, y por eso el teorema que dice que el espectro no es vacío no nos sirve para demostrar que existe un valor propio. En este contexto se introduce la siguiente notación.

**Definición 2.28.** Dado  $T$  operador, llamamos  $\sigma_p(T)$  al conjunto de los valores propios de  $T$ .

**Teorema 2.29** (Hilbert-Schmidt). Sea  $H$  espacio de Hilbert separable,  $T : H \rightarrow H$  un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  de  $H$  con  $Tv_k = \lambda_k v_k$  para  $\lambda_k \in \mathbb{R} \ \forall k = 1, 2, \dots$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ .

*Demostración.* Llamo  $S = \overline{\text{span}}\{v : v \text{ es vector propio de } T\} \subset H$ .

Afirmo que si  $\text{Ker}T = \{0\}$  entonces  $S = H$ . Para demostrarlo, supongamos lo contrario, esto es,  $S \neq H = S \oplus S^\perp$ .  $T(S) \subset S$  claramente, así que si  $g \in S^\perp$  entonces  $\langle Tg, f \rangle = \langle g, Tf \rangle = 0 \ \forall f \in S$ , y por lo tanto  $Tg \in S^\perp$ . Puedo entonces considerar el operador  $T|_{S^\perp}$  tiene un vector propio  $v \in S^\perp$  (2.26), que también lo será de  $T$ , contradicción<sup>1</sup>.

Si además  $Tv_k = \lambda_k$  para  $k = 1, 2, \dots$  para  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  base hilbertiana, veamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ . Si no fuese así, existiría una subsucesión  $(\lambda_{k_i})_i$  con  $|\lambda_{k_i}| \geq \varepsilon \ \forall i \in \mathbb{N}$ . Se tiene entonces:

$$\|\lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\| = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2 \cdot \varepsilon,$$

y la sucesión  $(Tv_k)_k$  no puede tener subsucesiones convergentes, que contradice que el operador sea compacto.

Falta ver el caso no inyectivo. Si  $\text{Ker}T \neq 0$ , como  $H = \text{Ker}T \oplus (\text{Ker}T)^\perp$  y  $\text{Ker}T$  es el espacio propio asociado al valor propio 0, aplicando el caso inyectivo a  $T|_{(\text{Ker}T)^\perp}$  ya lo tenemos, solo hay que ver que  $Tg \in (\text{Ker}T)^\perp$  para cada  $g \in (\text{Ker}T)^\perp$ . Pero si  $x \in \text{Ker}T$ ,  $\langle x, Tg \rangle = \langle Tx, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0$ .  $\square$

**Observación 2.30.** En ese caso  $Tx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$  por ser el operador continuo.

**Observación 2.31.**  $H = \bigoplus_{i=1}^\infty \text{Ker}(T - \lambda_i Id)$  con  $\lambda_i \rightarrow 0$ .

**Definición 2.32.** Un operador  $T$  es normal si  $T^*T = TT^*$ .

El teorema es cierto también para operadores normales, no hace falta que sean autoadjuntos.

**Definición 2.33.** Sea  $T : H \rightarrow H$  operador, con  $H$  Hilbert, y sean  $b \in H$  y  $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ . Queremos encontrar  $u \in H$  tal que  $\lambda u - Tu = b$  (P). Llamamos problema homogéneo ( $P_h$ ) al caso  $b = 0$ .

**Teorema 2.34** (Alternativa de Fredholm). Dado  $T$  operador compacto y autoadjunto en un espacio  $H$  de Hilbert separable, con una base ortonormal de vectores propios  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $Te_n = \lambda_n e_n$ ,

1. Si  $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$ , el problema (P) tiene una única solución dada por:

$$u = \lambda^{-1} \left( b + \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n \rangle e_n \right).$$

---

<sup>1</sup>Creo que no se usa que sea inyectivo y que esto termina la prueba en el caso general.

2. Si  $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ , entonces  $(P)$  tiene solución si y solo si  $\langle b, v \rangle = 0 \ \forall v$  solución de  $(P_h)$ . En ese caso, si  $\lambda = \lambda_i$ , entonces las soluciones vienen dadas por:

$$u = z + \lambda^{-1} \left( b + \sum_{n=1, n \neq i}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n \rangle e_n \right),$$

para  $z$  solución de  $(P_h)$ .

*Demostración.*

1. La base  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  cumple  $\lim_n \lambda_n = 0$  (2.20). Supongamos que  $u$  es solución de  $(P)$ , observamos que

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_n) \langle u, e_n \rangle &= \langle \lambda u, e_n \rangle - \langle u, \bar{\lambda}_n e_n \rangle \\ &= \langle \lambda u, e_n \rangle - \langle u, \lambda_n e_n \rangle \\ &= \langle \lambda Id u, e_n \rangle - \langle u, T e_n \rangle \\ &= \langle \lambda Id u, e_n \rangle - \langle T u, e_n \rangle \\ &= \langle (\lambda Id - T) u, e_n \rangle \\ &= \langle b, e_n \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\lambda \neq \lambda_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ :

$$u = \lambda^{-1} (b + T u) = \lambda^{-1} \left( b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle e_n \right) = \lambda^{-1} \left( b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n \rangle e_n \right).$$

Considero  $\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$ , y estudiemos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\langle b, e_n \rangle|^2$ . Como los  $\lambda_n \rightarrow 0 \neq \lambda$ ,  $|\alpha_n| < C \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$ , y por lo tanto la serie queda acotada por  $C^2 \|b\|^2$  y converge, y dicho  $u \in H$  existe. Además, por continuidad de  $T$ :

$$\begin{aligned} T u &= \lambda^{-1} \left( T b + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, e_n \rangle e_n \right) = \lambda^{-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle b, e_n \rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, e_n \rangle e_n \right) \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda_n (1 + \alpha_n) \langle b, e_n \rangle e_n \right) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda_n \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n \rangle e_n \right) \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n \rangle e_n \right). \end{aligned}$$

Es obvio entonces que  $u$  cumple la ecuación.

2. Para la necesidad, sean  $u, v$  soluciones de  $(P), (P_h)$  respectivamente. Como  $\lambda \in \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ ,  $(\lambda Id - T)$  es autoadjunto, y por lo tanto:

$$\langle b, v \rangle = \langle \lambda u - T u, v \rangle = \langle (\lambda Id - T) u, v \rangle = \langle u, (\lambda Id - T) v \rangle = 0.$$

Para la suficiencia, es evidente que si a una solución le sumas otra de la homogénea sigue siendo solución, así que bastará ver que la expresión con  $z = 0$  es solución. El argumento de convergencia y la comprobación de la igualdad se hacen exactamente igual que en el caso anterior, salvo por el siguiente detalle.  $e_i$  es solución de la homogénea, así que al calcular  $Tb$ , el coeficiente  $i$ -ésimo  $\langle Tb, e_i \rangle = \langle b, Te_i \rangle = \lambda_i \langle b, e_i \rangle = 0$  no aparece.

□

**Corolario 2.35.** *Fijado  $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ , si  $(P)$  tiene a lo más una solución  $\forall b \in H$ , entonces se verifica que el operador lineal y continuo  $(\lambda Id - T)^{-1} : H \rightarrow H$  queda bien definido. Además, la ecuación  $(P)$  tiene como solución  $u = (\lambda Id - T)^{-1}b$ .*

## Referencias

- [1] J. Orihuela, B. Cascales, M. Raja y J. M. Mira, *Análisis funcional*. Murcia: Electolibris, 2012, OCLC: 864356789, ISBN: 978-84-940688-2-9.