

Análisis Funcional - Notas de clase

Pablo Miralles González

Nov 2021

Índice

1. Espacios de Hilbert.	2
2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.	3
2.1. Inversión de operadores. Espectro.	3
2.2. Adjunto de un operador en espacios de Hilbert.	4
2.3. Operadores compactos.	5
2.4. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.	8
2.5. Aplicaciones del teorema espectral.	10
2.5.1. Teoría espectral para operadores integrales.	10
Referencias	12

1. Espacios de Hilbert.

2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.

2.1. Inversión de operadores. Espectro.

Definición 2.1. *Un operador es una aplicación lineal y continua.*

Teorema 2.2 (Von-Neumann). *Sea X un espacio de Banach, $K \in \mathcal{L}(K)$ invertible y $L := K - A$. Si $\|A\| < \|K^{-1}\|^{-1}$ entonces L es invertible.*

Demostración. Estudio primero el caso en el que $K = Id$, se trata de ver que $Id - B$ con $\|B\| < 1$ es invertible. Defino $S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, refiriéndose el exponente a la composición. $\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n$ convergente, así que la serie converge y $S \in \mathcal{L}(X)$, que es de Banach por serlo X .

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$.

- $B \circ S = B \circ \sum_{n=0}^{\infty} B^n \underbrace{=}_{\circ \text{ continua}} \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B) \circ S = Id.$
- Análogamente $S \circ (Id - B) = Id.$

En el caso general, $K - A = K \circ (Id - K^{-1} \circ A)$, $\|K^{-1} \circ A\| \leq \|K^{-1}\| \|A\| < 1$ por hipótesis, así que aplicando el primer caso $Id - K^{-1} \circ A$ es invertible. Como K es invertible y la composición de invertibles es invertible ya lo tenemos. \square

Observación 2.3. $(K - A)^{-1} = (K \circ (Id - K^{-1} \circ A))^{-1} = (Id - K^{-1} \circ A)^{-1} \circ K^{-1} = (\sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n) \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n K^{-1}.$

Definición 2.4. *Sea $M : X \rightarrow X$ un operador, se definen:*

- $\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M) \text{ es invertible}\}.$
- $\sigma(M) = \mathbb{C} \setminus \rho(M)$ es el espectro del operador.

Teorema 2.5. *Dado M un operador:*

1. $\rho(M)$ es abierto.
2. $\phi : \rho(M) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, dada por $\phi(\lambda) = (\lambda Id - M)^{-1}$ es analítica.

Demostración. 1. $\lambda \in \rho(M) \implies K = \lambda Id - M$ es invertible. Para $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \|K^{-1}\|^{-1}$, $(\lambda - h)Id - M = K - hId$, con $\|hId\| = |h| \|Id\| = |h| < \|K^{-1}\|^{-1}$, así que es invertible y $\lambda - h \in \rho(M)$.

2. Se tiene además por (2.3) lo siguiente:

$$\phi(\lambda-h) = ((\lambda-h)Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda Id - M)^{-1} \cdot h)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda Id - M)^{-1})^{n+1} h^n,$$

luego es analítica.

□

Teorema 2.6 (Gelfand). $\forall M \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(M)$ es un compacto no vacío.

Demostración. $\rho(M)$ abierto implica $\sigma(M)$ cerrado, veamos que es acotado. Si $|\xi| > \|M\|$, veamos que $\xi \notin \sigma(M)$, bastando aplicar (2.2) para $K = \xi Id, A = M$.

Además, aplicando (2.3):

$$\phi(\xi) = (\xi Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \cdot \xi^{-(n+1)}.$$

Si fuese vacío $\sigma(M)$, entonces ϕ sería entera, tendría dominio \mathbb{C} . Se tiene también

$$\|\phi(\xi)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n |\xi|^{-(n+1)} = \frac{1}{|\xi| - \|M\|} \rightarrow 0$$

cuando $|\xi| \rightarrow \infty$. Por el teorema de Liouville ϕ es constante, pero $\phi'(\xi) = -(\xi Id - M)^{-2} \neq 0$, contradicción. □

Proposición 2.7. Si M es un subespacio cerrado de H , $\langle P_M x, y \rangle = \langle x, P_M y \rangle$ para cada $x, y \in H$.

Demostración. Ejercicio. □

2.2. Adjunto de un operador en espacios de Hilbert.

Observación 2.8. Dado un operador $T : H \rightarrow H$ y fijado $y \in H$,

$$\begin{aligned} \phi_y : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \phi_y(x) = \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

es una forma lineal y continua, luego por el teorema de Riesz $\phi_y(x) = \langle x, w \rangle$ para cierto $w \in H$. Esto permite definir otro operador, que cumple $T^*y = w$.

Definición 2.9. El operador T^* se denomina adjunto de T , y viene dado por la ecuación $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \forall x, y \in H$.

Definición 2.10. Si $T = T^*$, se dice que T es autoadjunto.

Observación 2.11. $\sup\{|\langle Tf, g \rangle| : \|f\|, \|g\| \leq 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf, g \rangle| : \|g\| \leq 1\} : \|f\| \leq 1\} = \sup\{\|Tf\| : \|f\| \leq 1\} = \|T\|.$

Observación 2.12. Como $|\langle Tf, g \rangle| = |\langle f, T^*g \rangle| = |\langle T^*g, f \rangle|$, en vista de la observación anterior $\|T\| = \|T^*\|.$

Proposición 2.13. Si $T = T^*$, entonces $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}.$

Demostración. Llamo $M = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$, es obvio que $M \leq \|T\|$ por (2.11). Veamos la desigualdad contraria.

$$\begin{aligned} & \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle = \\ & \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle + \langle Tg, g \rangle - \langle Tf, f \rangle + \langle Tf, g \rangle + \langle Tg, f \rangle - \langle Tg, g \rangle = \\ & 2 \cdot \langle Tf, g \rangle + 2 \cdot \langle Tg, f \rangle = 2 \cdot \langle Tf, g \rangle + 2 \cdot \langle g, T^*f \rangle = 2 \cdot \langle Tf, g \rangle + 2 \cdot \langle g, Tf \rangle = \\ & 4 \cdot \operatorname{Re}(\langle Tf, g \rangle), \end{aligned}$$

en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se tiene $\langle Tf, g \rangle = \frac{1}{4} \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle$, de donde:

$$\begin{aligned} |\langle Tf, g \rangle| & \leq \frac{1}{4} [|\langle T(f+g), f+g \rangle| + |\langle T(f-g), f-g \rangle|] \\ & = \frac{1}{4} \left[\left| \left\langle T\left(\frac{f+g}{\|f+g\|}\right), \frac{f+g}{\|f+g\|} \right\rangle \right| \|f+g\|^2 + \left| \left\langle T\left(\frac{f-g}{\|f-g\|}\right), \frac{f-g}{\|f-g\|} \right\rangle \right| \|f-g\|^2 \right] \\ & \leq \frac{M}{4} [\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2] \\ & = \frac{M}{2} [\|f\|^2 + \|g\|^2], \end{aligned}$$

siendo la última igualdad por la ley del paralelogramo. Si f, g tienen norma no superior a 1 llegamos a $|\langle Tf, g \rangle| \leq M$, y al tomando supremos en f, g se tiene $\|T\| \leq M$ por (2.11).

□

2.3. Operadores compactos.

Definición 2.14. Un operador es compacto si la imagen de la bola unidad es relativamente compacta.

Observación 2.15. En espacios métricos, y en concreto en espacios normados, la compacidad relativa equivale a que cualquier sucesión contenga una subsucesión convergente.

Lema 2.16. Si $K : H \rightarrow H$ es un operador de rango finito en H Hilbert, entonces su adjunto es de rango finito (p. 162, [1]).

Demostración. Si el rango de K es $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, con los v_i ortonormales, y P_i es la proyección de H en $\text{span}\{v_i\}$, entonces $P_i \circ K$ son formas lineales continuas, $\exists! u_i$ tal que $P_i \circ Kx = \langle x, u_i \rangle v_i$ para cada $x \in H$. Se tiene entonces:

$$Kx = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle v_i$$

para cada $x \in H$. Pero entonces para $x, y \in H$ arbitrarios:

$$\langle x, K^*y \rangle = \langle Kx, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle,$$

y $K^*y = \sum_{i=1}^n \langle y, v_i \rangle u_i$ para cada $y \in H$, tiene rango finito. \square

Teorema 2.17. Sea H Hilbert separable, $T : H \rightarrow H$ lineal y continua, entonces:

1. $S : H \rightarrow H$ compacto implica que $S \circ T, T \circ S$ compactos.
2. $T_n : H \rightarrow H, n = 1, 2, \dots$ compactos y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ implica T compacto.
3. T compacto implica que $\exists T_n : H \rightarrow H$ operadores de rango finito con $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$.
4. T compacto si y solo si T^* compacto.

Demostración.

1. Sea $(x_k)_k \subset B_H$, $(Sx_k)_k$ tiene una subsucesión convergente $Sx_{k_i} \rightarrow y$, por continuidad $TSx_{k_i} \rightarrow Ty$. Considero ahora $(Tx_k)_k$, como T operador $\|T\| < \infty$, $\left(\frac{Tx_k}{\|T\|}\right)_k \subset B_H$, luego $\left(\frac{STx_k}{\|T\|}\right)_k$ tiene una subsucesión convergente $\frac{STx_{k_i}}{\|T\|} \rightarrow y$, con lo que $STx_{k_i} \rightarrow \|T\|y$.
2. Sea $(f_k^0)_k \subset B_H$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como T_n compacto, $\exists (f_k^n)_k$ subsucesión de $(f_k^{n-1})_k$ tal que $(T_n f_k^n)_k$ es convergente. Considero ahora $(T f_k^k)_k$, veamos que es de Cauchy (y por lo tanto convergente en H completo).

$$\begin{aligned} \|T f_k^k - T f_l^l\| &\leq \|T f_k^k - T_m f_k^k\| + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| + \|T_m f_l^l - T f_l^l\| \\ &\leq \|T - T_m\|(\|f_k^k\| + \|f_l^l\|) + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \\ &\leq \|T - T_m\| \cdot 2 + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomo m_0 tal que $\|T - T_{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{4}$, y como para $k \geq m_0$ $(f_k^k)_k$ es subsucesión de $(f_k^{m_0})_k$, cuya imagen por T_{m_0} converge, puedo tomar l, k suficientemente grandes para que $\|T_{m_0} f_k^k - T_{m_0} f_l^l\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Tomo $\{e_k\}_1^\infty$ base hilbertiana. Para $H_n := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $P_n := P_{H_n}$, $P_n + Q_n = Id$, $P_n \circ T$ tiene rango en H_n finito-dimensional. Basta ver que $\|T - P_n \circ T\| = \|Q_n \circ T\| \rightarrow 0$.

$\|Q_n T\| = \sup\{\|Q_n T f\| : \|f\| \leq 1\} = \sup\{\|Q_n g\| : g \in T(B_H)\}$. Pero $T(B_H)$ es relativamente compacto, y $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua, $\|Q_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que por el teorema de Ascoli la convergencia puntual y la uniforme son equivalente. Basta ver entonces que $\|Q_n g\| \rightarrow 0$ para cada $g \in T(B_H)$.

$$\|Q_n g\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 \rightarrow 0,$$

pues la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 = \|g\|^2$ converge.

4. Para la necesidad basta aplicar (2.16) y el apartado (2), junto con que $(T_n - T)^* = T_n^* - T^*$. La suficiencia se sigue de que $T = T^{**}$.

□

Proposición 2.18. Sea H Hilbert separable, $\{e_k\}_1^\infty$ base ortonormal, $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$ acotada. Defino $Te_k := \lambda_k e_k$, luego en general $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$. Entonces:

1. $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}$.
2. $T^* e_k = \overline{\lambda_k} e_k$.
3. $T = T^* \iff (\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}$.
4. T es un proyector si y solo si $(\lambda_k)_k \subset \{0, 1\}$.
5. T es compacto si y solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.

Demostración.

1. Para $\|x\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k| |\langle x, e_k \rangle| \|e_k\| \\ &\leq \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle| \\ &= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\} \|x\| \\ &= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

2. $\langle T^* e_k, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^* e_k \rangle} = \overline{\langle Te_i, e_k \rangle} = \overline{\langle \lambda_i e_i, e_k \rangle} = \overline{\lambda_i} \delta_{i,k}$.

3. Evidente por el apartado anterior.

4. Si la definición de proyector es que $\exists M \subset H$ subespacio cerrado tal que $T = P_M$ es evidente.

5. Comienzo por la necesidad. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \neq 0$, puedo tomar una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geq \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$. Si $i \neq j$, $\|Te_{j_i} - Te_{k_j}\| = \lambda_{k_i} + \lambda_{k_j} = 2\varepsilon$, luego no puede tener ninguna subsucesión de Cauchy ni convergente.

La suficiencia queda por demostrar.

□

Ejemplo 2.19. $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

$$K : L^1[a, b] \longrightarrow C[a, b]$$

$$f \longmapsto K(f)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt,$$

es compacto (p.178, [1]).

Ejemplo 2.20. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ suficientemente regular, $\forall f \in L^2(\Omega)$ existe un único $u \in H = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ con $\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + \int_\Omega \sum u_j v_j$.

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow H \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

$$f \longmapsto u$$

es compacto por el teorema de Rellich (2.21).

Teorema 2.21 (Rellich). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto con frontera suficientemente regular, y $\mathcal{F} \subset L^2(\Omega)$ tal que para cierto $K > 0$, $\forall g \in L^2(\Omega)$:

1. $g_j = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall j = 1, \dots, n$.
2. $\|g\|_{L^2}, \|g_j\|_{L^2} \leq K \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Entonces \mathcal{F} es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Tarea.

□

2.4. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

Proposición 2.22. Si $T = T^*$ y $Tv = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$. Como $v \neq 0$ se da $\lambda = \bar{\lambda}$.

□

Proposición 2.23. Si T es compacto, $\forall \lambda \neq 0$ se tiene que $\text{Ker}(T - \lambda Id)$ es de dimensión finita.

Demostración. Si no es de dimensión finita, podemos tomar $(\phi_n)_n$ ortonormal e infinita en $\text{Ker}(T - \lambda Id)$ (espacio cerrado en un Hilbert, pues es preimagen de un $\{0\}$ por una función continua).

Como T es compacto, $(T\phi_n)_n$ debe tener una subsucesión convergente, pero como $T\phi_n = \lambda\phi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T\phi_{n_j} - T\phi_{n_k}\| = |\lambda|\|\phi_{n_j} - \phi_{n_k}\| = \lambda\sqrt{2}$, así que ninguna subsucesión es de Cauchy, y no pueden ser convergentes. \square

Proposición 2.24. *Si T es un operador compacto y autoadjunto, entonces o bien $\|T\|$ o bien $-\|T\|$ es un valor propio.*

Demostración. Sabemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}$ por ser $T = T^*$. La idea es encontrar un máximo.

Tomo $(f_n)_n$ con $\|f_n\| \leq 1$ y $\langle Tf_n, f_n \rangle \rightarrow \lambda$ para $|\lambda| = \|T\|$. Como T es compacto, $(Tf_n)_n$ tiene una subsucesión $(Tf_{n_k})_k$ convergente en H , y llamo al límite $g \in H$.

Afirmo entonces que g es vector propio de T con valor propio λ , lo que terminaría la prueba.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 &= \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle - 2\lambda \langle f_{n_k}, Tf_{n_k} \rangle + \lambda^2 \langle f_{n_k}, f_{n_k} \rangle = \\ &= \|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda \langle Tf_{n_k}, f_{n_k} \rangle + \lambda^2 \underbrace{\|f_{n_k}\|^2}_1. \end{aligned}$$

Tomando límites, por la continuidad de la norma:

$$0 \leq \|g - \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}\|^2 \leq \|g\|^2 - 2\lambda \cdot \lambda + \lambda^2 = 0.$$

Se tiene entonces que $g = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda f_{n_k}$, y por lo tanto

$$Tg = T(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda f_{n_k}) = \lambda T(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}) = \lambda g,$$

quedan demostrada la afirmación. \square

Observación 2.25. *En l^2 , el operador T que actúa $(\psi_n)_n \rightarrow (0, \psi_1, \psi_2, \dots)$ no es invertible (no es sobreyectiva), esto es, $T - 0 \cdot Id$ no es invertible, y sin embargo 0 no es valor propio. Por eso el concepto de espectro es más general que el de valores propios, y por eso el teorema que dice que el espectro no es vacío no nos sirve para demostrar que existe un valor propio.*

Teorema 2.26 (Hilbert-Schmidt). *Sea H espacio de Hilbert separable, $T : H \rightarrow H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ de H con $Tv_k = \lambda_k v_k$ para $\lambda_k \in \mathbb{R} \forall k = 1, 2, \dots$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.*

Demostración. Llamo $S = \overline{\text{span}}\{v : v \text{ es vector propio de } T\} \subset H$.

Afirmo que si $\text{Ker}T = \{0\}$ entonces $S = H$. Para demostrarlo, supongamos lo contrario, esto es, $S \neq H = S \oplus S^\perp$. $T(S) \subset S$ claramente, así que si $g \in S^\perp$ entonces $\langle Tg, f \rangle = \langle g, Tf \rangle = 0 \ \forall f \in S$, y por lo tanto $Tg \in S^\perp$. Puedo entonces considerar el operador $T|_{S^\perp}$ tiene un vector propio $v \in S^\perp$ (2.24), que también lo será de T , contradicción¹.

Si además $Tv_k = \lambda_k$ para $k = 1, 2, \dots$ para $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ base hilbertiana, veamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$. Si no fuese así, existiría una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geq \varepsilon \ \forall i \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces:

$$\|\lambda_{k_i}v_{k_i} - \lambda_{k_j}v_{k_j}\| = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2 \cdot \varepsilon,$$

y la sucesión $(Tv_k)_k$ no puede tener subsucesiones convergentes, que contradice que el operador sea compacto.

Falta ver el caso no inyectivo. Si $\text{Ker}T \neq 0$, como $H = \text{Ker}T \oplus (\text{Ker}T)^\perp$ y $\text{Ker}T$ es el espacio propio asociado al valor propio 0, aplicando el caso inyectivo a $T|_{(\text{Ker}T)^\perp}$ ya lo tenemos, solo hay que ver que $Tg \in (\text{Ker}T)^\perp$ para cada $g \in (\text{Ker}T)^\perp$. Pero si $x \in \text{Ker}T$, $\langle x, Tg \rangle = \langle Tx, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0$. \square

Observación 2.27. En ese caso $Tx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$ por ser el operador continuo.

Observación 2.28. $H = \bigoplus_{i=1}^\infty \text{Ker}(T - \lambda_i Id)$ con $\lambda_i \rightarrow 0$.

Definición 2.29. Un operador T es normal si $T^*T = TT^*$.

El teorema es cierto también para operadores normales, no hace falta que sean autoadjuntos.

2.5. Aplicaciones del teorema espectral.

2.5.1. Teoría espectral para operadores integrales.

Definición 2.30. Sea $T : H \rightarrow H$ operador, con H Hilbert, y sean $b \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Queremos encontrar $u \in H$ tal que $\lambda u - Tu = b$ (P). Llamamos problema homogéneo (P_h) al caso $b = 0$.

Teorema 2.31 (Alternativa de Fredholm). Dado T operador compacto y autoadjunto, el problema (P) tiene solución si y solo si $\langle b, v \rangle = 0 \ \forall v$ solución de (P_h).

Demostración. Por Hilbert-Schmidt (2.26), existe una base $\{u_n\}_1^\infty$ base hilbertiana con $Tu_n = \lambda_n u_n$ tal que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \rightarrow 0$.

Supongamos que u es solución de (P), observamos que

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_n) \langle u, u_n \rangle &= \langle \lambda u, u_n \rangle - \langle u, \bar{\lambda}_n u_n \rangle = \langle \lambda u, u_n \rangle - \langle u, \lambda_n u_n \rangle = \langle \lambda Id u, u_n \rangle - \langle u, Tu_n \rangle = \\ &= \langle \lambda Id u, u_n \rangle - \langle Tu, u_n \rangle = \langle (\lambda Id - T)u, u_n \rangle = \langle b, u_n \rangle. \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq \lambda_n \ \forall n \in \mathbb{N}$:

¹Creo que no se usa que sea inyectivo y que esto termina la prueba en el caso general.

$$u = \lambda^{-1}(b + Tu) = \lambda^{-1} \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, u_n \rangle u_n \right) = \lambda^{-1} \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\langle b, u_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} u_n \right).$$

Considero $\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$, y estudiemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\langle b, u_n \rangle|^2$. Como los $\lambda_n \rightarrow 0 \neq \lambda$, $|\alpha_n| < C \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la serie queda acotada por $C^2 \|b\|^2$ y converge, y dicho $u \in H$ existe. Además:

$$\begin{aligned} Tu &= \lambda^{-1} \left(Tb + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n \right) = \lambda^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, u_n \rangle u_n \right) = \\ &\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1} \lambda_n (1 + \alpha_n) \langle b, u_n \rangle u_n \right). \end{aligned}$$

Queda comprobar que se cumple la ecuación.

□

Corolario 2.32. *Fijado $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, si (P) tiene a lo más una solución $\forall b \in H$, entonces se verifica que el operador lineal y continuo $(\lambda Id - T)^{-1} : H \rightarrow H$ queda bien definido. Además, la ecuación (P) tiene como solución $u = (\lambda Id - T)^{-1} b$.*

Referencias

- [1] J. Orihuela, B. Cascales, M. Raja y J. M. Mira, *Análisis funcional*. Murcia: Electolibris, 2012, OCLC: 864356789, ISBN: 978-84-940688-2-9.