Análisis Funcional - Notas de clase

Pablo Miralles González

Nov 2021

Índice

1. Espacios de Hilbert.

2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.

Definición 2.1. *Un operador es una aplicación lineal y continua.*

Teorema 2.2 (Von-Neumann)**.** *Sea X un espacio de Banach, $K \in \mathcal{L}(K)$ invertible y $L := K - A$. Si $\|A\| < \|K^{-1}\|^{-1}$ entonces L es invertible.*

Demostración. Estudio primero el caso en el que $K = Id$, se trata de ver que $Id - B$ con $\|B\| < 1$ es invertible. Defino $S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, refiriéndose el exponente a la composición. $\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n$ convergente, así que la serie converge y $S \in \mathcal{L}(X)$, que es de Banach por serlo X.

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$.

- $B \circ S = B \circ \sum_{n=0}^{\infty} B^n \underbrace{=}_{\circ \text{ continua}} = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B) \circ S = Id.$
- Análogamente $S \circ (Id - B) = Id$.

En el caso general, $K - A = K \circ (Id - K^{-1} \circ A)$, $\|K^{-1} \circ A\| \leqslant \|K^{-1}\|\|A\| < 1$ por hipótesis, así que aplicando el primer caso $Id - K^{-1}A$ es invertible. Como K es invertible y la composición de invertibles es invertible ya lo tenemos. □

Observación 2.3. $(K-A)^{-1} = (K \circ (Id - K^{-1}A))^{-1} = (Id - K^{-1} \circ A)^{-1} \circ K^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n\right) \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n K^{-1}$.

Definición 2.4. *Sea $M : X \to X$ un operador, se definen:*

- $\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M)$ *es invertible*$\}$.
- $\sigma(M) = \mathbb{C} \backslash \rho(M)$ *es el espectro del operador.*

Teorema 2.5. *Dado M un operador:*

1. *$\rho(M)$ es abierto.*
2. *$\phi : \rho(M) \to \mathcal{L}(X)$, dada por $\phi(\lambda) = (\lambda Id - M)^{-1}$ es analítica.*

Demostración.
1. $\lambda \in \rho(M) \implies K = \lambda Id - M$ es invertible. Para $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \|K^{-1}\|^{-1}$, $(\lambda - h)Id - M = K - hId$, con $\|hId\| = |h|\|Id\| = |h| < \|k^{-1}\|^{-1}$, así que es invertible y $\lambda - h \in \rho(M)$.
2. Se tiene además por (2.3) lo siguiente:

$$\phi(\lambda - h) = ((\lambda - h)Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda Id - M)^{-1} \cdot h)^n (\lambda Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda Id - M)^{-1})^{n-1} h^n,$$

luego es analítica.

□

Teorema 2.6 (Gelfand)**.** *$\forall M \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(M)$ es un compacto no vacío.*

Demostración. □

Proposición 2.7. *Si M es un subespacio cerrado de H, $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$ para cada $x, y \in H$.*

Demostración. Ejercicio. □

Observación 2.8. *Dado un operador $T : H \to H$ y fijado $y \in H$,*

$$\begin{aligned} \phi_y : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \phi_y(x) = \langle Tx, y\rangle \end{aligned}$$

es una forma lineal y continua, luego por el teorema de Riesz $\phi_y(x) = \langle x, w\rangle$ para cierto $w \in H$. Esto permite definir otro operador, que cumple $T^*y = w$.

Definición 2.9. *El operador T^* se denomina adjunto de T, y viene dado por la ecuación $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ $\forall x, y \in H$.*

2.1. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

Proposición 2.10. *Si $T = T^*$ y $Tv = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. $\lambda\langle v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$. Como $v \neq 0$ se da $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Proposición 2.11. *Si T es compacto, $\forall \lambda \neq 0$ se tiene que $Ker(T - \lambda Id)$ es de dimensión finita.*

Demostración. Si no es de dimensión finita, podemos tomar $(\phi_n)_n$ ortonormal e infinita en $Ker(T - \lambda Id)$ (espacio cerrado en un Hilbert, pues es preimagen de un $\{0\}$ por una función continua).

Como T es compacto, $(T\phi_n)_n$ debe tener una subsucesión convergente, pero como $T\phi_n = \lambda\phi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T\phi_{n_j} - T\phi_{n_k}\| = |\lambda|\|\phi_{n_j} - \phi_{n_k}\| = \lambda\sqrt{2}$, así que ninguna subsucesión es de Cauchy, y no pueden ser convergentes. □

Proposición 2.12. *Si T es un operador compacto y autoadjunto, entonces o bien $\|T\|$ o bien $-\|T\|$ es un valor propio.*

Demostración. Sabemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| \leqslant 1\}$ por ser $T = T^*$. La idea es encontrar un máximo.

Tomo $(f_n)_n$ con $\|f_n\| \leqslant 1$ y $\langle Tf_n, f_n\rangle \to \lambda$ para $|\lambda| = \|T\|$. Como T es compacto, $(Tf_n)_n$ tiene una subsucesión $(Tf_{n_k})_k$ convergente en H, y llamo al límite $g \in H$.

Afirmo entonces que g es vector propio de T con valor propio λ, lo que terminaría la prueba.

$$0 \leqslant \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 = \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle - 2\lambda\langle f_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle + \lambda^2\langle f_{n_k}, f_{n_k}\rangle =$$

$$\|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda\langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda^2 \underbrace{\|f_{n_k}\|^2}_{1}.$$

Tomando límites, por la continuidad de la norma:

$$0 \leqslant \|g - \lambda \lim_{k\to\infty} f_{n_k}\|^2 \leqslant \|g\|^2 - 2\lambda\cdot\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Se tiene entonces que $g = \lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}$, y por lo tanto

$$Tg = T(\lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}) = \lambda T(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}) = \lambda g,$$

quedan demostrada la afirmación.

□

Observación 2.13. *En l^2, el operador T que actua $(\psi_n)_n \to (0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$ no es invertible (no es sobreyectiva), esto es, $T - 0\cdot Id$ no es invertible, y sin embargo 0 no es valor propio. Por eso el concepto de espectro es más general que el de valores propios, y por eso el teorema que dice que el espectro no es vacío no nos sirve para demostrar que existe un valor propio.*

Teorema 2.14 (Hilbert-Schmidt)**.** *Sea H espacio de Hilbert separable, $T : H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ de H con $Tv_k = \lambda_k v_k$ para $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

Demostración. Llamo $S = \overline{span}\{v : v \text{ es vector propio de } T\} \subset H$.

Afirmo que si $KerT = \{0\}$ entonces $S = H$. Para demostrarlo, supongamos lo contrario, esto es, $S \neq H = S \oplus S^{\perp}$. $T(S) \subset S$ claramente, así que si $g \in S^{\perp}$ entonces $\langle Tg, f\rangle = \langle g, Tf\rangle = 0$ $\forall f \in S$, y por lo tanto $Tg \in S^{\perp}$. Puedo entonces considerar el operador $T|_{S^{\perp}}$ tiene un vector propio $v \in S^{\perp}$ (2.12), que también lo será de T, contradicción[1].

Si además $Tv_k = \lambda_k$ para $k = 1, 2, \ldots$ para $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ base hilbertiana, veamos que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Si no fuese así, existiría una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geqslant \varepsilon$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces:

$$\|\lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\| = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2\cdot\varepsilon,$$

y la sucesión $(TV_k)_k$ no puede tener subsucesiones convergentes, que contradice que el operador sea compacto.

Falta ver el caso no inyectivo. Si $KerT \neq 0$, como $H = KerT \oplus (KerT)^{\perp}$ y $KerT$ es el espacio propio asociado al valor propio 0, aplicando el caso inyectivo a $T|_{(KerT)^{\perp}}$ ya lo tenemos, solo hay que ver que $Tg \in (KerT)^{\perp}$ para cada $g \in (KerT)^{\perp}$. Pero si $x \in KerT$, $\langle x, Tg\rangle = \langle Tx, g\rangle = \langle 0, g\rangle = 0$. □

[1] Creo que no se usa que sea inyectivo y que esto termina la prueba en el caso general.

Observación 2.15. *En ese caso* $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, v_k \rangle v_k$ *por ser el operador continuo.*

Observación 2.16. $H = \oplus_{i=1}^{\infty} Ker(T - \lambda_i Id)$ *con* $\lambda_i \to 0$.

Definición 2.17. *Un operador* T *es normal si* $T^*T = TT^*$.

El teorema es cierto también para operadores normales, no hace falta que sean autoadjuntos.