Análisis Funcional - Notas de clase

Pablo Miralles González

Nov 2021

Índice

1. Espacios de Hilbert.

2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.

2.1. Inversión de operadores. Espectro.

Definición 2.1. *Un operador es una aplicación lineal y continua.*

Teorema 2.2 (Von-Neumann)**.** *Sea X un espacio de Banach, $K \in \mathcal{L}(K)$ invertible y $L := K - A$. Si $\|A\| < \|K^{-1}\|^{-1}$ entonces L es invertible.*

Demostración. Estudio primero el caso en el que $K = Id$, se trata de ver que $Id - B$ con $\|B\| < 1$ es invertible. Defino $S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, refiriéndose el exponente a la composición. $\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n$ convergente, así que la serie converge y $S \in \mathcal{L}(X)$, que es de Banach por serlo X.

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$.

- $B \circ S = B \circ \sum_{n=0}^{\infty} B^n \underbrace{=}_{\circ \text{ continua}} = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B) \circ S = Id.$
- Análogamente $S \circ (Id - B) = Id$.

En el caso general, $K - A = K \circ (Id - K^{-1} \circ A)$, $\|K^{-1} \circ A\| \leqslant \|K^{-1}\|\|A\| < 1$ por hipótesis, así que aplicando el primer caso $Id - K^{-1}A$ es invertible. Como K es invertible y la composición de invertibles es invertible ya lo tenemos. □

Observación 2.3. $(K-A)^{-1} = (K \circ (Id - K^{-1}A))^{-1} = (Id - K^{-1} \circ A)^{-1} \circ K^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n\right) \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n K^{-1}$.

Definición 2.4. *Sea $M : X \to X$ un operador, se definen:*

- $\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M)$ *es invertible*$\}$.
- $\sigma(M) = \mathbb{C} \backslash \rho(M)$ *es el espectro del operador.*

Teorema 2.5. *Dado M un operador:*

1. *$\rho(M)$ es abierto.*
2. *$\phi : \rho(M) \to \mathcal{L}(X)$, dada por $\phi(\lambda) = (\lambda Id - M)^{-1}$ es analítica.*

Demostración.

1. $\lambda \in \rho(M) \implies K = \lambda Id - M$ es invertible. Para $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \|K^{-1}\|^{-1}$, $(\lambda - h)Id - M = K - hId$, con $\|hId\| = |h|\|Id\| = |h| < \|k^{-1}\|^{-1}$, así que es invertible y $\lambda - h \in \rho(M)$.
2. Se tiene además por (2.3) lo siguiente:

$$\phi(\lambda-h) = ((\lambda-h)Id-M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}((\lambda Id-M)^{-1}\cdot h)^n(\lambda Id-M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}((\lambda Id-M)^{-1})^{n-1}h^n,$$

luego es analítica.

□

Teorema 2.6 (Gelfand). *$\forall M \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(M)$ es un compacto no vacío.*

Demostración. $\rho(M)$ abierto implica $\sigma(M)$ cerrado, veamos que es acotado. Si $|\xi| > \|M\|$, veamos que $\xi \notin \sigma(M)$, bastando aplicar (2.2) para $K = \xi Id, A = M$.

Además, aplicando (2.3):

$$\phi(\xi) = (\xi Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \cdot \xi^{-(n+1)}.$$

Si fuese vacío $\sigma(M)$, entonces ϕ sería entera, tendría dominio $\mathbb{C}$. Se tiene también

$$\|\phi(\xi)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n |\xi|^{-(n+1)} = \frac{1}{|\xi| - \|M\|} \to 0$$

cuando $|\xi| \to \infty$. Por el teorema de Liouville ϕ es constante, pero $\phi'(\xi) = -(\xi Id - M)^{-2} \neq 0$, contradicción. □

Proposición 2.7. *Si M es un subespacio cerrado de H, $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$ para cada $x, y \in H$.*

Demostración. Ejercicio. □

2.2. Adjunto de un operador en espacios de Hilbert.

Observación 2.8. *Dado un operador $T : H \to H$ y fijado $y \in H$,*

$$\begin{aligned} \phi_y : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \phi_y(x) = \langle Tx, y\rangle \end{aligned}$$

es una forma lineal y continua, luego por el teorema de Riesz $\phi_y(x) = \langle x, w\rangle$ para cierto $w \in H$. Esto permite definir otro operador, que cumple $T^*y = w$.

Definición 2.9. *El operador T^* se denomina adjunto de T, y viene dado por la ecuación $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ $\forall x, y \in H$.*

Definición 2.10. *Si $T = T^*$, se dice que T es autoadjunto.*

Observación 2.11. $\sup\{|\langle Tf, g\rangle| : \|f\|, \|g\| \leqslant 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf, g\rangle| : \|g\| \leqslant 1\} : \|f\| \leqslant 1\} = \sup\{\|Tf\| : \|f\| \leqslant 1\} = \|T\|$.

Observación 2.12. *Como* $|\langle Tf, g\rangle| = |\langle f, T^*g\rangle| = |\langle T^*g, f\rangle|$*, en vista de la observación anterior* $\|T\| = \|T^*\|$.

Proposición 2.13. *Si* $T = T^*$*, entonces* $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| \leqslant 1\}$.

Demostración. Llamo $M = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| \leqslant 1\}$, es obvio que $M \leqslant \|T\|$ por (2.11). Veamos la desigualdad contraria.

$$\begin{gathered}
\langle T(f+g), f+g\rangle - \langle T(f-g), f-g\rangle = \\
\langle Tf, f\rangle + \langle Tf, g\rangle + \langle Tg, f\rangle + \langle Tg, g\rangle - \langle Tf, f\rangle + \langle Tf, g\rangle + \langle Tg, f\rangle - \langle Tg, g\rangle = \\
2 \cdot \langle Tf, g\rangle + 2 \cdot \langle Tg, f\rangle = 2 \cdot \langle Tf, g\rangle + 2 \cdot \langle g, T^*f\rangle = 2 \cdot \langle Tf, g\rangle + 2 \cdot \langle g, Tf\rangle = \\
4 \cdot Re(\langle Tf, g\rangle),
\end{gathered}$$

en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se tiene $\langle Tf, g\rangle = \frac{1}{4}\langle T(f+g), f+g\rangle - \langle T(f-g), f-g\rangle$, de donde:

$$\begin{aligned}
|\langle Tf, g\rangle| &\leqslant \frac{1}{4}\left[|\langle T(f+g), f+g\rangle| + |\langle T(f-g), f-g\rangle|\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left|\left\langle T(\frac{f+g}{\|f+g\|}), \frac{f+g}{\|f+g\|}\right\rangle\right| \|f+g\|^2 + \left|\left\langle T(\frac{f-g}{\|f-g\|}), \frac{f-g}{\|f-g\|}\right\rangle \|f-g\|^2\right|\right] \\
&\leqslant \frac{M}{4}\left[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right] \\
&= \frac{M}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right],
\end{aligned}$$

siendo la última igualdad por la ley del paralelogramo. Si f, g tienen norma no superior a 1 llegamos a $|\langle Tf, g\rangle| \leqslant M$, y al tomando supremos en f, g se tiene $\|T\| \leqslant M$ por (2.11).

$\square$

2.3. Operadores compactos.

Definición 2.14. *Dado* X *espacio topológico,* $Y \subset X$ *es relativamente compacto si su clausura es compacta.*

Definición 2.15. *Un operador es compacto si la imagen de la bola unidad es relativamente compacta.*

Observación 2.16. *En espacios métricos, y en concreto en espacios normados, la compacidad relativa equivale a que cualquier sucesión contenga una subsucesión convergente (en el espacio* X*, no en* Y*).*

Lema 2.17. *Si $K : H \to H$ es un operador de rango finito en H Hilbert, entonces su adjunto es de rango finito (p. 162, [1]).*

Demostración. Si el rango de K es $span\{v_1, \ldots, v_n\}$, con los v_i ortonormales, y P_i es la proyección de H en $span\{v_i\}$, entonces $P_i \circ K$ son formas lineales continuas, $\exists! u_i$ tal que $P_i \circ Kx = \langle x, u_i \rangle$ para cada $x \in H$. Se tiene entonces:

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle v_i$$

para cada $x \in H$. Pero entonces para $x, y \in H$ arbitrarios:

$$\langle x, K^* y \rangle = \langle Kx, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle,$$

y $K^* y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle u_i$ para cada $y \in H$, tiene rango finito. □

Teorema 2.18. *Sea H Hilbert separable, $T : H \to H$ lineal y continua, entonces:*

1. *$S : H \to H$ compacto implica que $S \circ T, T \circ S$ compactos.*
2. *$T_n : H \to H, n = 1, 2, \ldots$ compactos y $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ implica T compacto.*
3. *T compacto implica que $\exists T_n : H \to H$ operadores de rango finito con $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.*
4. *T compacto si y solo si T^* compacto.*

Demostración.

1. Sea $(x_k)_k \subset B_H$, $(Sx_k)_k$ tiene una subsucesión convergente $Sx_{k_i} \to y$, por continuidad $TSx_{k_i} \to Ty$. Considero ahora $(Tx_k)_k$, como T operador $\|T\| < \infty$, $\left(\frac{Tx_k}{\|T\|}\right)_k \subset B_H$, luego $\left(\frac{STx_k}{\|T\|}\right)_k$ tiene una subsucesión convergente $\frac{STx_{k_i}}{\|T\|} \to y$, con lo que $STx_{k_i} \to \|T\| y$.

2. Sea $(f_k^0)_k \subset B_H$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como T_n compacto, $\exists (f_k^n)_k$ subsucesión de $(f_k^{n-1})_k$ tal que $(T_n f_k^n)_k$ es convergente. Considero ahora $(Tf_k^k)_k$, veamos que es de Cauchy (y por lo tanto convergente en H completo).

$$\begin{aligned} \|Tf_k^k - Tf_l^l\| &\leqslant \|Tf_k^k - T_m f_k^k\| + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| + \|T_m f_l^l - Tf_l^l\| \\ &\leqslant \|T - T_m\| (\|f_k^k\| + \|f_l^l\|) + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \\ &\leqslant \|T - T_m\| \cdot 2 + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \end{aligned}$$

.

   Dado $\varepsilon > 0$, tomo m_0 tal que $\|T - T_{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{4}$, y como para $k \geqslant m_0$ $(f_k^k)_k$ es subsucesión de $(f_k^{m_0})_k$, cuya imagen por T_{m_0} converge, puedo tomar l, k suficientemente grandes para que $\|T_{m_0} f_k^k - T_{m_0} f_l^l\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Tomo $\{e_k\}_1^\infty$ base hilbertiana. Para $H_n := span\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $P_n := P_{H_n}$, $P_n + Q_n = Id$, $P_n \circ T$ tiene rango en H_n finito-dimensional. Basta ver que $\|T - P_n \circ T\| = \|Q_n \circ T\| \to 0$.

   $\|Q_n T\| = \sup\{\|Q_n T f\| : \|f\| \leqslant 1\} = \sup\{\|Q_n g\| : g \in T(B_H)\}$. Pero $T(B_H)$ es relativamente compacto, y $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, $\|Q_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que por el teorema de Ascoli la convergencia puntual y la uniforme son equivalente. Basta ver entonces que $\|Q_n g\| \to 0$ para cada $g \in T(B_H)$.

   $$\|Q_n g\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i\rangle|^2 \to 0,$$

   pues la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, e_i\rangle|^2 = \|g\|$ converge.

4. Para la necesidad basta aplicar (2.17) y el apartado (2), junto con que $(T_n - T)^* = T_n^* - T^*$. La suficiencia se sigue de que $T = T^{**}$.

$\square$

Observación 2.19. *Si $T : H \to H$ es un operador de rango finito, entonces es compacto, pues la imagen está contenida en una bola de un espacio de dimensión finita, que es compacta,*

Proposición 2.20. *Sea H Hilbert separable, $\{e_k\}_1^\infty$ base ortonormal, $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$ acotada. Defino $Te_k := \lambda_k e_k$, luego en general $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k$. Entonces:*

1. $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\}$.
2. $T^* e_k = \overline{\lambda_k} e_k$.
3. $T = T^* \iff (\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}$.
4. *T es un proyector si y solo si $(\lambda_k)_k \subset \{0, 1\}$.*
5. *T es compacto si y solo si $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

Demostración.

1. Para $\|x\| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k| |\langle x, e_k\rangle| \|e_k\| \\
&\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle| \\
&= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\} \|x\| \\
&= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

2. $\langle T^* e_k, e_i\rangle = \overline{\langle e_i, T^* e_k\rangle} = \overline{\langle T e_i, e_k\rangle} = \overline{\langle \lambda_i e_i, e_k\rangle} = \overline{\lambda_i} \delta_{i,k}$.
3. Evidente por el apartado anterior.

4. Si la definición de proyector es que $\exists M \subset H$ subespacio cerrado tal que $T = P_M$ es evidente.
5. Comienzo por la necesidad. Si $\lim_{k\to\infty} \lambda_k \neq 0$, puedo tomar una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geqslant \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$. Si $i \neq j$, $\|Te_{j_i} - Te_{k_j}\| = \lambda_{k_i} + \lambda_{k_j} = 2\varepsilon$, luego no puede tener ninguna subsucesión de Cauchy ni convergente.

   Para la suficiencia, por el apartado (2) de (2.18) y que los operadores de rango finito son compactos, basta ver que $\|P_nT - T\| = \|Q_nT\|$, donde $H_n := span\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $P_n := P_{H_n}$, $P_n + Q_n = Id$. Para $x \in H$ con $\|x\| \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}\|Q_nTx\|^2 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_k||\langle x, e_k\rangle| \\ &\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle| \\ &\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k > n\}\|x\| \\ &= \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \to 0,\end{aligned}$$

   cuando $n \to \infty$, uniformemente en B_H.

□

Ejemplo 2.21. $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua,*

$$\begin{aligned} K : L^1[a, b] &\longrightarrow C[a, b] \\ f &\longmapsto K(f)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \end{aligned}$$

es compacto (p.178, [1]).

Ejemplo 2.22. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *suficientemente regular,* $\forall f \in L^2(\Omega)$ *existe un único* $u \in H = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ *con* $\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv + \int_\Omega \sum u_j v_j$.

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega) &\longrightarrow H \hookrightarrow L^2(\Omega) \\ f &\longmapsto u \end{aligned}$$

es compacto por el teorema de Rellich (2.23).

Teorema 2.23 (Rellich)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto con frontera suficientemente regular, y* $\mathcal{F} \subset L^2(\Omega)$ *tal que para cierto* $K > 0$, $\forall g \in L^2(\Omega)$*:*

1. $g_j = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ $\forall j = 1, \dots, n$.
2. $\|g\|_{L^2}, \|g_j\|_{L^2} \leqslant K$ $\forall j = 1, \dots, n$.

Entonces $\mathcal{F}$ *es relativamente compacto en* $L^2(\Omega)$.

Demostración. Tarea. □

2.4. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

Proposición 2.24. *Si $T = T^*$ y $Tv = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. $\lambda \langle v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$. Como $v \neq 0$ se da $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Proposición 2.25. *Si T es compacto, $\forall \lambda \neq 0$ se tiene que $Ker(T - \lambda Id)$ es de dimensión finita.*

Demostración. Si no es de dimensión finita, podemos tomar $(\phi_n)_n$ ortonormal e infinita en $Ker(T - \lambda Id)$ (espacio cerrado en un Hilbert, pues es preimagen de un $\{0\}$ por una función continua).

Como T es compacto, $(T\phi_n)_n$ debe tener una subsucesión convergente, pero como $T\phi_n = \lambda\phi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T\phi_{n_j} - T\phi_{n_k}\| = |\lambda|\|\phi_{n_j} - \phi_{n_k}\| = \lambda\sqrt{2}$, así que ninguna subsucesión es de Cauchy, y no pueden ser convergentes. □

Proposición 2.26. *Si T es un operador compacto y autoadjunto, entonces o bien $\|T\|$ o bien $-\|T\|$ es un valor propio.*

Demostración. Sabemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| \leqslant 1\}$ por ser $T = T^*$. La idea es encontrar un máximo.

Tomo $(f_n)_n$ con $\|f_n\| \leqslant 1$ y $\langle Tf_n, f_n\rangle \to \lambda$ para $|\lambda| = \|T\|$. Como T es compacto, $(Tf_n)_n$ tiene una subsucesión $(Tf_{n_k})_k$ convergente en H, y llamo al límite $g \in H$.

Afirmo entonces que g es vector propio de T con valor propio λ, lo que terminaría la prueba.

$$0 \leqslant \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 = \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle - 2\lambda\langle f_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle + \lambda^2\langle f_{n_k}, f_{n_k}\rangle =$$

$$\|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda\langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda^2 \underbrace{\|f_{n_k}\|^2}_{1}.$$

Tomando límites, por la continuidad de la norma:

$$0 \leqslant \|g - \lambda \lim_{k\to\infty} f_{n_k}\|^2 \leqslant \|g\|^2 - 2\lambda \cdot \lambda + \lambda^2 = 0.$$

Se tiene entonces que $g = \lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}$, y por lo tanto

$$Tg = T(\lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}) = \lambda T(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}) = \lambda g,$$

quedan demostrada la afirmación.

□

Observación 2.27. *En l^2, el operador T que actua $(\psi_n)_n \to (0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$ no es invertible (no es sobreyectiva), esto es, $T - 0 \cdot Id$ no es invertible, y sin embargo 0 no es valor propio. Por eso el concepto de espectro es más general que el de valores propios, y por eso el teorema que dice que el espectro no es vacío no nos sirve para demostrar que existe un valor propio. En este contexto se introduce la siguiente notación.*

Definición 2.28. *Dado T operador, llamamos $\sigma_p(T)$ al conjunto de los valores propios de T.*

Teorema 2.29 (Hilbert-Schmidt)**.** *Sea H espacio de Hilbert separable, $T : H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ de H con $Tv_k = \lambda_k v_k$ para $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

Demostración. Llamo $S = \overline{span}\{v : v \text{ es vector propio de } T\} \subset H$.

Afirmo que si $KerT = \{0\}$ entonces $S = H$. Para demostrarlo, supongamos lo contrario, esto es, $S \neq H = S \oplus S^{\perp}$. $T(S) \subset S$ claramente, así que si $g \in S^{\perp}$ entonces $\langle Tg, f\rangle = \langle g, Tf\rangle = 0$ $\forall f \in S$, y por lo tanto $Tg \in S^{\perp}$. Puedo entonces considerar el operador $T|_{S^{\perp}}$ tiene un vector propio $v \in S^{\perp}$ (2.26), que también lo será de T, contradicción[1].

Si además $Tv_k = \lambda_k$ para $k = 1, 2, \ldots$ para $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ base hilbertiana, veamos que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Si no fuese así, existiría una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geqslant \varepsilon$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces:

$$\|\lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\| = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2 \cdot \varepsilon,$$

y la sucesión $(TV_k)_k$ no puede tener subsucesiones convergentes, que contradice que el operador sea compacto.

Falta ver el caso no inyectivo. Si $KerT \neq 0$, como $H = KerT \oplus (KerT)^{\perp}$ y $KerT$ es el espacio propio asociado al valor propio 0, aplicando el caso inyectivo a $T|_{(KerT)^{\perp}}$ ya lo tenemos, solo hay que ver que $Tg \in (KerT)^{\perp}$ para cada $g \in (KerT)^{\perp}$. Pero si $x \in KerT$, $\langle x, Tg\rangle = \langle Tx, g\rangle = \langle 0, g\rangle = 0$. $\square$

Observación 2.30. *En ese caso $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, v_k\rangle v_k$ por ser el operador continuo.*

Observación 2.31. $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Ker(T - \lambda_i Id)$ *con* $\lambda_i \to 0$.

Definición 2.32. *Un operador T es normal si $T^*T = TT^*$.*

El teorema es cierto también para operadores normales, no hace falta que sean autoadjuntos.

Definición 2.33. *Sea $T : H \to H$ operador, con H Hilbert, y sean $b \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Queremos encontrar $u \in H$ tal que $\lambda u - Tu = b$ (P). Llamamos problema homogéneo (P_h) al caso $b = 0$.*

Teorema 2.34 (Alternativa de Fredholm)**.** *Dado T operador compacto y autoadjunto en un espacio H de Hilbert separable, con base ortonormal $\{e_k\}_1^{\infty}$, entonces:*

1. *Si $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$, el problema (P) tiene una única solución dada por:*

$$u = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n\rangle e_n\right).$$

[1] Creo que no se usa que sea inyectivo y que esto termina la prueba en el caso general.

2. *Si $\lambda \in \sigma_p(T)\backslash\{0\}$, entonces (P) tiene solución si y solo si $\langle b, v\rangle = 0$ $\forall v$ solución de (P_h). En ese caso, si $\lambda = \lambda_i$, entonces las soluciones vienen dadas por:*

$$u = z + \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1, n\neq i}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right),$$

para z solución de (P_h).

Demostración.

1. Por Hilbert-Schmidt (2.29), existe una base $\{e_n\}_1^\infty$ base hilbertiana con $Te_n = \lambda_n e_n$ tal que $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \to 0$.

   Supongamos que u es solución de (P), observamos que

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_n)\langle u, e_n\rangle &= \langle \lambda u, e_n\rangle - \langle u, \bar{\lambda}_n e_n\rangle \\ &= \langle \lambda u, e_n\rangle - \langle u, \lambda_n e_n\rangle \\ &= \langle \lambda Id u, e_n\rangle - \langle u, Te_n\rangle \\ &= \langle \lambda Id u, e_n\rangle - \langle Tu, e_n\rangle \\ &= \langle (\lambda Id - T)u, e_n\rangle \\ &= \langle b, e_n\rangle .\end{aligned}$$

   Como $\lambda \neq \lambda_n$ $\forall n \in N$:

$$u = \lambda^{-1}(b + Tu) = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n\rangle e_n\right) = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right).$$

   Considero $\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$, y estudiemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\langle b, e_n\rangle|^2$. Como los $\lambda_n \to 0 \neq \lambda$, $|\alpha_n| < C \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la serie queda acotada por $C^2\|b\|^2$ y converge, y dicho $u \in H$ existe. Además, por continuidad de T:

$$\begin{aligned}Tu &= \lambda^{-1}\left(Tb + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \langle b, e_n\rangle e_n\right) = \lambda^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle b, e_n\rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\lambda_n \langle b, e_n\rangle e_n\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1}\lambda_n(1 + \alpha_n)\langle b, e_n\rangle e_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-1}\lambda_n \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right).\end{aligned}$$

   Es obvio entonces que u cumple la ecuación.

2. Para la necesidad, sean u, v soluciones de (P),(P$_h$) respectivamente. Como $\lambda \in \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, $(\lambda Id - T)$ es autoadjunto, y por lo tanto:

$$\langle b, v\rangle = \langle \lambda u - Tu, v\rangle = \langle (\lambda Id - T)\, u, v\rangle = \langle u, (\lambda Id - T)\, v\rangle = 0.$$

Para la suficiencia, es evidente que si a una solución le sumas otra de la homogénea sigue siendo solución, así que bastará ver que la expresión con $z = 0$ es solución. El argumento de convergencia y la comprobación de la igualdad se hacen exactamente igual que en el caso anterior, salvo por el siguiente detalle. e_i es solución de la homogénea, así que al calcular Tb, el coeficiente i-ésimo $\langle Tb, e_i \rangle = \langle b, Te_i \rangle = \lambda_i \langle b, e_i \rangle = 0$ no aparece.

$\square$

Corolario 2.35. *Fijado $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, si (P) tiene a lo más una solución $\forall b \in H$, entonces se verifica que el operador lineal y continuo $(\lambda Id - T)^{-1} : H \to H$ queda bien definido. Además, la ecuación (P) tiene como solución $u = (\lambda Id - T)^{-1} b$.*

Referencias

[1] J. Orihuela, B. Cascales, M. Raja y J. M. Mira, *Análisis funcional.* Murcia: Electolibris, 2012, OCLC: 864356789, ISBN: 978-84-940688-2-9.