Análisis Funcional - Notas de clase

Pablo Miralles González

12 de enero de 2022

Índice

1. Espacios de Hilbert.

1.1. Dual de un espacio de Hilbert: teorema de Riesz-Fréchet.

Teorema 1.1 (F. Riesz - M. Fréchet). *Sea un espacio de Hilbert H y una forma lineal $f : H \to \mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La forma lineal f es continua.*
2. *Existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$ para cada $x \in H$, siendo además $\|f\| = \|y\|$.*

Definición 1.2. *Sea X espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $B : X \times X \to \mathbb{K}$.*

1. *Se dice que B es bilineal si fijados x, y respectivamente, $B(\cdot, y), B(x, \cdot)$ son lineales.*
2. *Se dice que B es sesquilineal si $B(\cdot, y)$ es lineal y $B(x, \cdot)$ es lineal conjugada, esto es, $B(x, ay) = \overline{a}B(x, y)$.*
3. *Se dice que B es simétrica si $B(x, y) = B(y, x)$ $\forall x, y \in H$.*
4. *Se dice que B es positiva si $B(x, x) \geqslant 0$ para cada $x \in X$.*

Si X es normado:

1. *Se dice que B es acotada si $\exists M > 0$ tal que $|B(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\|$ para cada $x, y \in X$.*
2. *Se dice que B es fuertemente positiva si $\exists c > 0$ tal que $B(x, x) \geqslant c\|x\|^2$ para cada $x \in X$.*

Teorema 1.3 (Lax-Milgram). *Sea H espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y B una forma sesquilineal en H acotada y fuertemente positiva. Entonces existe un isomorfismo de espacios de Hilbert $T : H \to H$, unívocamente determinado, tal que*

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle,$$

para cada $x, y \in H$.

1.2. Problemas variacionales cuadráticos.

Teorema 1.4 (Teorema principal de los problemas variacionales cuadráticos). *Sea H espacio de Hilbert real y B una forma bilineal simétrica, acotada y fuertemente positiva definida en H. Sea b una forma lineal continua en H y sea $F : H \to \mathbb{R}$ definida mediante*

$$F(x) := \frac{1}{2}B(x, x) - b(x).$$

Entonces:

1. *Es condición necesaria y suficiente para que F alcance su mínimo en $w \in H$ que se verifique*

$$B(w, y) = b(y)$$

para cada $y \in H$.

2. *La función real $F(x)$ alcanza un mínimo absoluto en H, que además es único.*

1.3. Operadores diferenciales y soluciones débiles.

Definición 1.5. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, se define*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} : g \text{ de clase } C^{\infty}, sop(g) = \overline{\{x : g(x) \neq 0\}} \text{ compacto} \right\}.$$

Definición 1.6. *Dado el operador diferencial lineal $L = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$, con los $a_\alpha \in \mathbb{K}$, se define el operador adjunto como $L^* := \sum_{|\alpha| \leqslant n} (-1)^{|\alpha|} \overline{a_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$.*

Lema 1.7 (Regularización)**.** *$\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ para el producto escalar estándar.*

Teorema 1.8 (Gauss)**.** *Dado $h \in C^(\overline{\Omega})$, si $\partial\Omega$ es suficientemente buena entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial\Omega} h \cdot n_j d\theta.$$

Proposición 1.9. $\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L^* \psi \rangle \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Demostración. Lo vemos para $L = \frac{\partial}{\partial x_j}$, bastando aplicar (1.8) a $h = \phi \cdot \psi$, observando que por tener estas soporte compacto valen 0 en la frontera, y que aunque la frontera de Ω no sea suficientemente buena, como el soporte es compacto siempre podemos tomar un abierto entre el soporte y Ω con frontera suficientemente buena.

Por inducción se generaliza a derivadas parciales de cualquier orden, y por las propiedades del producto escalar al caso general. □

Corolario 1.10. *$\forall f \in L^2(\Omega)$, si u es suficientemente regular y verifica que $Lu = f$, entonces $\langle f, \phi \rangle = \langle u, L^* \phi \rangle \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Definición 1.11. *Si $u \in L^2(\Omega)$ verifica $\langle f, \phi \rangle = \langle u, L^* \phi \rangle$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces decimos que es solución débil de la ecuación $Lv = f$.*

1.4. El método de Galerkin.

Teorema 1.12. *Sea $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ una sucesión de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H con unión densa. Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineal, simétrica, continua y fuertemente positiva y sea $b : H \to \mathbb{R}$ una forma lineal y continua. Consideramos el problema de minimización del funcional*

$$J(x) := \frac{1}{2} a(x, x) - b(x)$$

sobre el subespacio M_n, y sea $u_n \in M_n$ su solución, esto es,

$$a(x, u_n) = b(x)$$

para todo $x \in M_n$. Entonces la sución $(u_n)_n$ converge hacia la solución u del problema de minimización de J en todo H.

Demostración. (p.81, [1]). □

2. Teoría espectral de operadores compactos autoadjuntos.

2.1. Inversión de operadores. Espectro.

Definición 2.1. *Un operador es una aplicación lineal y continua.*

Teorema 2.2 (Von-Neumann)**.** *Sea X un espacio de Banach, $K \in \mathcal{L}(K)$ invertible y $L := K - A$. Si $\|A\| < \|K^{-1}\|^{-1}$ entonces L es invertible.*

Demostración. Estudio primero el caso en el que $K = Id$, se trata de ver que $Id - B$ con $\|B\| < 1$ es invertible. Defino $S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, refiriéndose el exponente a la composición. $\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n$ convergente, así que la serie converge y $S \in \mathcal{L}(X)$, que es de Banach por serlo X.

Veamos que $S = (Id - B)^{-1}$.

- $B \circ S = B \circ \sum_{n=0}^{\infty} B^n \underbrace{=}_{\circ \text{ continua}} = \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = S - Id \implies (Id - B) \circ S = Id.$
- Análogamente $S \circ (Id - B) = Id$.

En el caso general, $K - A = K \circ (Id - K^{-1} \circ A)$, $\|K^{-1} \circ A\| \leqslant \|K^{-1}\|\|A\| < 1$ por hipótesis, así que aplicando el primer caso $Id - K^{-1}A$ es invertible. Como K es invertible y la composición de invertibles es invertible ya lo tenemos. □

Observación 2.3. $(K - A)^{-1} = (K \circ (Id - K^{-1}A))^{-1} = (Id - K^{-1} \circ A)^{-1} \circ K^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n\right) \circ K^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (K^{-1} \circ A)^n K^{-1}$.

Definición 2.4. *Sea $M : X \to X$ un operador, se definen:*

- $\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - M)$ *es invertible*$\}$.
- $\sigma(M) = \mathbb{C} \backslash \rho(M)$ *es el espectro del operador.*

Teorema 2.5. *Dado M un operador:*

1. $\rho(M)$ *es abierto.*
2. $\phi : \rho(M) \to \mathcal{L}(X)$*, dada por* $\phi(\lambda) = (\lambda Id - M)^{-1}$ *es analítica.*

Demostración.

1. $\lambda \in \rho(M) \implies K = \lambda Id - M$ es invertible. Para $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \|K^{-1}\|^{-1}$, $(\lambda - h)Id - M = K - hId$, con $\|hId\| = |h|\|Id\| = |h| < \|k^{-1}\|^{-1}$, así que es invertible y $\lambda - h \in \rho(M)$.
2. Se tiene además por (2.3) lo siguiente:

$$\phi(\lambda-h) = ((\lambda-h)Id-M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}((\lambda Id-M)^{-1}\cdot h)^n(\lambda Id-M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}((\lambda Id-M)^{-1})^{n-1}h^n,$$

luego es analítica.

□

Teorema 2.6 (Gelfand)**.** *$\forall M \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(M)$ es un compacto no vacío.*

Demostración. $\rho(M)$ abierto implica $\sigma(M)$ cerrado, veamos que es acotado. Si $|\xi| > \|M\|$, veamos que $\xi \notin \sigma(M)$, bastando aplicar (2.2) para $K = \xi Id, A = M$.

Además, aplicando (2.3):

$$\phi(\xi) = (\xi Id - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n \cdot \xi^{-(n+1)}.$$

Si fuese vacío $\sigma(M)$, entonces ϕ sería entera, tendría dominio $\mathbb{C}$. Se tiene también

$$\|\phi(\xi)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|M\|^n |\xi|^{-(n+1)} = \frac{1}{|\xi| - \|M\|} \to 0$$

cuando $|\xi| \to \infty$. Por el teorema de Liouville ϕ es constante, pero $\phi'(\xi) = -(\xi Id - M)^{-2} \neq 0$, contradicción. □

Proposición 2.7. *Si M es un subespacio cerrado de H, $\langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$ para cada $x, y \in H$.*

Demostración. Ejercicio. □

2.2. Adjunto de un operador en espacios de Hilbert.

Observación 2.8. *Dado un operador $T : H \to H$ y fijado $y \in H$,*

$$\begin{aligned} \phi_y : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \phi_y(x) = \langle Tx, y\rangle \end{aligned}$$

es una forma lineal y continua, luego por el teorema de Riesz $\phi_y(x) = \langle x, w\rangle$ para cierto $w \in H$. Esto permite definir otro operador, que cumple $T^*y = w$.

Definición 2.9. *El operador T^* se denomina adjunto de T, y viene dado por la ecuación $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ $\forall x, y \in H$.*

Definición 2.10. *Si $T = T^*$, se dice que T es autoadjunto.*

Observación 2.11. $\sup\{|\langle Tf,g\rangle| : \|f\|,\|g\| \leqslant 1\} = \sup\{\sup\{|\langle Tf,g\rangle| : \|g\| \leqslant 1\} : \|f\| \leqslant 1\} = \sup\{\|Tf\| : \|f\| \leqslant 1\} = \|T\|$.

Observación 2.12. *Como* $|\langle Tf,g\rangle| = |\langle f,T^*g\rangle| = |\langle T^*g,f\rangle|$, *en vista de la observación anterior* $\|T\| = \|T^*\|$.

Proposición 2.13. *Si* $T = T^*$, *entonces* $\|T\| = \sup\{|\langle Tf,f\rangle| : \|f\| \leqslant 1\}$.

Demostración. Llamo $M = \sup\{|\langle Tf,f\rangle| : \|f\| \leqslant 1\}$, es obvio que $M \leqslant \|T\|$ por (2.11). Veamos la desigualdad contraria.

$$\begin{gathered}\langle T(f+g),f+g\rangle - \langle T(f-g),f-g\rangle = \\ \langle Tf,f\rangle + \langle Tf,g\rangle + \langle Tg,f\rangle + \langle Tg,g\rangle - \langle Tf,f\rangle + \langle Tf,g\rangle + \langle Tg,f\rangle - \langle Tg,g\rangle = \\ 2\cdot\langle Tf,g\rangle + 2\cdot\langle Tg,f\rangle = 2\cdot\langle Tf,g\rangle + 2\cdot\langle g,T^*f\rangle = 2\cdot\langle Tf,g\rangle + 2\cdot\langle g,Tf\rangle = \\ 4\cdot Re(\langle Tf,g\rangle),\end{gathered}$$

en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se tiene $\langle Tf,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(f+g),f+g\rangle - \langle T(f-g),f-g\rangle\right)$, de donde:

$$\begin{aligned}|\langle Tf,g\rangle| &\leqslant \frac{1}{4}\left[|\langle T(f+g),f+g\rangle| + |\langle T(f-g),f-g\rangle|\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\left|\left\langle T\left(\frac{f+g}{\|f+g\|}\right),\frac{f+g}{\|f+g\|}\right\rangle\right|\|f+g\|^2 + \left|\left\langle T\left(\frac{f-g}{\|f-g\|}\right),\frac{f-g}{\|f-g\|}\right\rangle\|f-g\|^2\right|\right] \\ &\leqslant \frac{M}{4}\left[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right] \\ &= \frac{M}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right],\end{aligned}$$

siendo la última igualdad por la ley del paralelogramo. Si f,g tienen norma no superior a 1 llegamos a $|\langle Tf,g\rangle| \leqslant M$, y tomando supremos en f,g se tiene $\|T\| \leqslant M$ por (2.11).

□

2.3. Operadores compactos.

Definición 2.14. *Dado X espacio topológico, $Y \subset X$ es relativamente compacto si su clausura es compacta.*

Definición 2.15. *Un operador es compacto si la imagen de la bola unidad es relativamente compacta.*

Observación 2.16. *En espacios métricos, y en concreto en espacios normados, la compacidad relativa equivale a que cualquier sucesión contenga una subsucesión convergente (en el espacio X, no en Y).*

Lema 2.17. *Si $K : H \to H$ es un operador de rango finito en H Hilbert, entonces su adjunto es de rango finito (p. 162, [1]).*

Demostración. Si el rango de K es $span\{v_1, \ldots, v_n\}$, con los v_i ortonormales, y P_i es la proyección de H en $span\{v_i\}$, entonces $P_i \circ K$ son formas lineales continuas, $\exists! u_i$ tal que $P_i \circ Kx = \langle x, u_i \rangle v_i$ para cada $x \in H$. Se tiene entonces:

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle v_i$$

para cada $x \in H$. Pero entonces para $x, y \in H$ arbitrarios:

$$\langle x, K^* y \rangle = \langle Kx, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle,$$

y $K^* y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle u_i$ para cada $y \in H$, tiene rango finito. □

Teorema 2.18. *Sea H Hilbert separable, $T : H \to H$ lineal y continua, entonces:*

1. *$S : H \to H$ compacto implica que $S \circ T, T \circ S$ compactos.*
2. *$T_n : H \to H, n = 1, 2, \ldots$ compactos y $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ implica T compacto.*
3. *T compacto implica que $\exists T_n : H \to H$ operadores de rango finito con $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.*
4. *T compacto si y solo si T^* compacto.*

Demostración.

1. Sea $(x_k)_k \subset B_H$, $(Sx_k)_k$ tiene una subsucesión convergente $Sx_{k_i} \to y$, por continuidad $TSx_{k_i} \to Ty$. Considero ahora $(Tx_k)_k$, como T operador $\|T\| < \infty$, $\left(\frac{Tx_k}{\|T\|}\right)_k \subset B_H$, luego $\left(\frac{STx_k}{\|T\|}\right)_k$ tiene una subsucesión convergente $\frac{STx_{k_i}}{\|T\|} \to y$, con lo que $STx_{k_i} \to \|T\| y$.

2. Sea $(f_k^0)_k \subset B_H$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como T_n compacto, $\exists (f_k^n)_k$ subsucesión de $(f_k^{n-1})_k$ tal que $(T_n f_k^n)_k$ es convergente. Considero ahora $(T f_k^k)_k$, veamos que es de Cauchy (y por lo tanto convergente en H completo).

$$\begin{aligned} \|Tf_k^k - Tf_l^l\| &\leqslant \|Tf_k^k - T_m f_k^k\| + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| + \|T_m f_l^l - T f_l^l\| \\ &\leqslant \|T - T_m\|(\|f_k^k\| + \|f_l^l\|) + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \\ &\leqslant \|T - T_m\| \cdot 2 + \|T_m f_k^k - T_m f_l^l\| \end{aligned}$$

.

   Dado $\varepsilon > 0$, tomo m_0 tal que $\|T - T_{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{4}$, y como para $k \geqslant m_0$ $(f_k^k)_k$ es subsucesión de $(f_k^{m_0})_k$, cuya imagen por T_{m_0} converge, puedo tomar l, k suficientemente grandes para que $\|T_{m_0} f_k^k - T_{m_0} f_l^l\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Tomo $\{e_k\}_1^\infty$ base hilbertiana. Para $H_n := span\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $P_n := P_{H_n}$, $P_n + Q_n = Id$, $P_n \circ T$ tiene rango en H_n finito-dimensional. Basta ver que $\|T - P_n \circ T\| = \|Q_n \circ T\| \to 0$.

   $\|Q_n T\| = \sup\{\|Q_n T f\| : \|f\| \leqslant 1\} = \sup\{\|Q_n g\| : g \in T(B_H)\}$. Pero $T(B_H)$ es relativamente compacto, y $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua, $\|Q_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que por el teorema de Ascoli la convergencia puntual y la uniforme son equivalente. Basta ver entonces que $\|Q_n g\| \to 0$ para cada $g \in T(B_H)$.

$$\|Q_n g\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 \to 0,$$

   pues la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 = \|g\|$ converge.

4. Para la necesidad basta aplicar (2.17) y el apartado (2), junto con que $(T_n - T)^* = T_n^* - T^*$. La suficiencia se sigue de que $T = T^{**}$.

$\square$

Observación 2.19. *Si $T : H \to H$ es un operador de rango finito, entonces es compacto, pues la imagen está contenida en una bola de un espacio de dimensión finita, que es compacta,*

Proposición 2.20. *Sea H Hilbert separable, $\{e_k\}_1^\infty$ base ortonormal, $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{C}$ acotada. Defino $Te_k := \lambda_k e_k$, luego en general $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$. Entonces:*

1. $\|T\| = \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\}$.
2. $T^* e_k = \overline{\lambda_k} e_k$.
3. $T = T^* \iff (\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}$.
4. *T es un proyector si y solo si $(\lambda_k)_k \subset \{0, 1\}$.*
5. *T es compacto si y solo si $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

Demostración.

1. Para $\|x\| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_k| |\langle x, e_k \rangle| \|e_k\| \\
&\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle| \\
&= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\} \|x\| \\
&= \sup\{|\lambda_k| : k = 1, 2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

2. $\langle T^* e_k, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^* e_k \rangle} = \overline{\langle T e_i, e_k \rangle} = \overline{\langle \lambda_i e_i, e_k \rangle} = \overline{\lambda_i} \delta_{i,k}$.

3. Evidente por el apartado anterior.

4. Si la definición de proyector es que $\exists M \subset H$ subespacio cerrado tal que $T = P_M$ es evidente.

5. Comienzo por la necesidad. Si $\lim_{k\to\infty} \lambda_k \neq 0$, puedo tomar una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geqslant \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$. Si $i \neq j$, $\|Te_{j_i} - Te_{k_j}\| = \sqrt{|\lambda_{k_i}|^2 + |\lambda_{k_j}|^2} \geqslant \varepsilon$, luego no puede tener ninguna subsucesión de Cauchy ni convergente.

   Para la suficiencia, por el apartado (2) de (2.18) y que los operadores de rango finito son compactos, basta ver que $\|P_nT - T\| = \|Q_nT\|$, donde $H_n := span\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $P_n := P_{H_n}$, $P_n + Q_n = Id$. Para $x \in H$ con $\|x\| \leqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
\|Q_nTx\|^2 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_k||\langle x, e_k\rangle| \\
&\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle| \\
&\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k > n\}\|x\| \\
&\leqslant \sup\{|\lambda_k| : k > n\} \to 0,
\end{aligned}
$$

   cuando $n \to \infty$, uniformemente en B_H.

$\square$

Ejemplo 2.21. $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua,*

$$
\begin{aligned}
K : L^1[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\
f &\longmapsto K(f)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt,
\end{aligned}
$$

es compacto (p.178, [1]).

Ejemplo 2.22. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *suficientemente regular,* $\forall f \in L^2(\Omega)$ *existe un único* $u \in H = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ *con* $\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv + \int_\Omega \sum u_j v_j$.

$$
\begin{aligned}
S : L^2(\Omega) &\longrightarrow H \hookrightarrow L^2(\Omega) \\
f &\longmapsto u
\end{aligned}
$$

es compacto por el teorema de Rellich (2.23).

Teorema 2.23 (Rellich)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto con frontera suficientemente regular, y* $\mathcal{F} \subset L^2(\Omega)$ *tal que para cierto* $K > 0$, $\forall g \in L^2(\Omega)$*:*

1. $g_j = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ $\forall j = 1, \ldots, n$.

2. $\|g\|_{L^2}, \|g_j\|_{L^2} \leqslant K$ $\forall j = 1, \ldots, n$.

Entonces $\mathcal{F}$ *es relativamente compacto en* $L^2(\Omega)$.

Demostración. Tarea. $\square$

2.4. Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

Proposición 2.24. *Si $T = T^*$ y $Tv = \lambda v$ con $v \neq 0$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. $\lambda\langle v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle = \langle v, T^*v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$. Como $v \neq 0$ se da $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Proposición 2.25. *Si T es compacto, $\forall\lambda \neq 0$ se tiene que $Ker(T - \lambda Id)$ es de dimensión finita.*

Demostración. Si no es de dimensión finita, podemos tomar $(\phi_n)_n$ ortonormal e infinita en $Ker(T - \lambda Id)$ (espacio cerrado en un Hilbert, pues es preimagen de un $\{0\}$ por una función continua).

Como T es compacto, $(T\phi_n)_n$ debe tener una subsucesión convergente, pero como $T\phi_n = \lambda\phi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T\phi_{n_j} - T\phi_{n_k}\| = |\lambda|\|\phi_{n_j} - \phi_{n_k}\| = |\lambda|\sqrt{2}$, así que ninguna subsucesión es de Cauchy, y no pueden ser convergentes. □

Proposición 2.26. *Si T es un operador compacto y autoadjunto, entonces o bien $\|T\|$ o bien $-\|T\|$ es un valor propio.*

Demostración. Sabemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : \|f\| = 1\}$ por ser $T = T^*$. La idea es encontrar un máximo.

Tomo $(f_n)_n$ con $\|f_n\| = 1$ y $\langle Tf_n, f_n\rangle \to \lambda$ para $|\lambda| = \|T\|$. Como T es compacto, $(Tf_n)_n$ tiene una subsucesión $(Tf_{n_k})_k$ convergente en H, y llamo al límite $g \in H$.

Afirmo entonces que g es vector propio de T con valor propio λ, lo que terminaría la prueba.

$$0 \leqslant \|Tf_{n_k} - \lambda f_{n_k}\|^2 = \langle Tf_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle - 2\lambda\langle f_{n_k}, Tf_{n_k}\rangle + \lambda^2\langle f_{n_k}, f_{n_k}\rangle =$$

$$\|Tf_{n_k}\|^2 - 2\lambda\langle Tf_{n_k}, f_{n_k}\rangle + \lambda^2 \underbrace{\|f_{n_k}\|^2}_{1}.$$

Tomando límites, por la continuidad de la norma:

$$0 \leqslant \|g - \lambda \lim_{k\to\infty} f_{n_k}\|^2 \leqslant \|g\|^2 - 2\lambda \cdot \lambda + \lambda^2 = \|g\|^2 - \lambda^2 \leqslant 0.$$

Se tiene entonces que $g = \lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}$, y por lo tanto

$$Tg = T(\lim_{k\to\infty} \lambda f_{n_k}) = \lambda T(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}) = \lambda g,$$

quedando demostrada la afirmación.

□

Observación 2.27. *En l^2, el operador T que actua $(\psi_n)_n \to (0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$ no es invertible (no es sobreyectiva), esto es, $T - 0 \cdot Id$ no es invertible, y sin embargo 0 no es valor propio. Por eso el concepto de espectro es más general que el de valores propios, y por eso el teorema que dice que el espectro no es vacío no nos sirve para demostrar que existe un valor propio. En este contexto se introduce la siguiente notación.*

Definición 2.28. *Dado T operador, llamamos $\sigma_p(T)$ al conjunto de los valores propios de T.*

Teorema 2.29 (Hilbert-Schmidt)**.** *Sea H espacio de Hilbert separable, $T : H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base hilbertiana $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ de H con $Tv_k = \lambda_k v_k$ para $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ y $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

Demostración. Llamo $S = \overline{span}\{v : v \text{ es vector propio de } T\} \subset H$.

Afirmo que si $KerT = \{0\}$ entonces $S = H$. Para demostrarlo, supongamos lo contrario, esto es, $S \neq H = S \oplus S^{\perp}$. $T(S) \subset S$ claramente, así que si $g \in S^{\perp}$ entonces $\langle Tg, f\rangle = \langle g, Tf\rangle = 0$ $\forall f \in S$, y por lo tanto $Tg \in S^{\perp}$. Puedo entonces considerar el operador $T|_{S^{\perp}}$ tiene un vector propio $v \in S^{\perp}$ (2.26), que también lo será de T, contradicción[1].

Si además $Tv_k = \lambda_k$ para $k = 1, 2, \ldots$ para $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ base hilbertiana, veamos que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Si no fuese así, existiría una subsucesión $(\lambda_{k_i})_i$ con $|\lambda_{k_i}| \geqslant \varepsilon$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces:

$$\|\lambda_{k_i} v_{k_i} - \lambda_{k_j} v_{k_j}\| = \lambda_{k_i}^2 + \lambda_{k_j}^2 > 2 \cdot \varepsilon,$$

y la sucesión $(TV_k)_k$ no puede tener subsucesiones convergentes, que contradice que el operador sea compacto.

Falta ver el caso no inyectivo. Si $KerT \neq 0$, como $H = KerT \oplus (KerT)^{\perp}$ y $KerT$ es el espacio propio asociado al valor propio 0, aplicando el caso inyectivo a $T|_{(KerT)^{\perp}}$ ya lo tenemos, solo hay que ver que $Tg \in (KerT)^{\perp}$ para cada $g \in (KerT)^{\perp}$. Pero si $x \in KerT$, $\langle x, Tg\rangle = \langle Tx, g\rangle = \langle 0, g\rangle = 0$. ☐

Observación 2.30. *En ese caso $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, v_k\rangle v_k$ por ser el operador continuo.*

Observación 2.31. *$H = \oplus_{i=1}^{\infty} Ker(T - \lambda_i Id)$ con $\lambda_i \to 0$.*

Definición 2.32. *Un operador T es normal si $T^*T = TT^*$.*

El teorema es cierto también para operadores normales, no hace falta que sean autoadjuntos.

Definición 2.33. *Sea $T : H \to H$ operador, con H Hilbert, y sean $b \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Queremos encontrar $u \in H$ tal que $\lambda u - Tu = b$ (P). Llamamos problema homogéneo (P_h) al caso $b = 0$.*

Teorema 2.34 (Alternativa de Fredholm)**.** *Dado T operador compacto y autoadjunto en un espacio H de Hilbert separable, con una base ortonormal de vectores propios $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Te_n = \lambda_n e_n$,*

1. *Si $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$, el problema (P) tiene una única solución dada por:*

$$u = \lambda^{-1} \left(b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle b, e_n\rangle e_n \right).$$

[1] Creo que no se usa que sea inyectivo y que esto termina la prueba en el caso general.

2. *Si $\lambda \in \sigma_p(T)\backslash\{0\}$, entonces (P) tiene solución si y solo si $\langle b, v\rangle = 0$ $\forall v$ solución de (P_h). En ese caso, si $\lambda = \lambda_i$, entonces las soluciones vienen dadas por:*

$$u = z + \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1, n\neq i}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right),$$

para z solución de (P_h).

Demostración.

1. La base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple $\lim_n \lambda_n = 0$ (2.20). Supongamos que u es solución de (P), observamos que

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_n)\langle u, e_n\rangle &= \langle \lambda u, e_n\rangle - \langle u, \bar{\lambda}_n e_n\rangle \\ &= \langle \lambda u, e_n\rangle - \langle u, \lambda_n e_n\rangle \\ &= \langle \lambda Idu, e_n\rangle - \langle u, Te_n\rangle \\ &= \langle \lambda Idu, e_n\rangle - \langle Tu, e_n\rangle \\ &= \langle (\lambda Id - T)u, e_n\rangle \\ &= \langle b, e_n\rangle.\end{aligned}$$

   Como $\lambda \neq \lambda_n$ $\forall n \in N$:

$$u = \lambda^{-1}(b + Tu) = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle u, e_n\rangle e_n\right) = \lambda^{-1}\left(b + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right).$$

   Considero $\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}$, y estudiemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2|\langle b, e_n\rangle|^2$. Como los $\lambda_n \to 0 \neq \lambda$, $|\alpha_n| < C \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la serie queda acotada por $C^2\|b\|^2$ y converge, y dicho $u \in H$ existe. Además, por continuidad de T:

$$\begin{aligned}Tu = \lambda^{-1}\left(Tb + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\lambda_n\langle b, e_n\rangle e_n\right) &= \lambda^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle b, e_n\rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\lambda_n\langle b, e_n\rangle e_n\right) \\ = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-1}\lambda_n(1 + \alpha_n)\langle b, e_n\rangle e_n\right) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-1}\lambda_n\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right) \\ = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\langle b, e_n\rangle e_n\right).\end{aligned}$$

   Es obvio entonces que u cumple la ecuación.

2. Para la necesidad, sean u, v soluciones de (P),(P_h) respectivamente. Como $\lambda \in \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, $(\lambda Id - T)$ es autoadjunto, y por lo tanto:

$$\langle b, v\rangle = \langle \lambda u - Tu, v\rangle = \langle (\lambda Id - T)\,u, v\rangle = \langle u, (\lambda Id - T)\,v\rangle = 0.$$

Para la suficiencia, es evidente que si a una solución le sumas otra de la homogénea sigue siendo solución, así que bastará ver que la expresión con $z = 0$ es solución. El argumento de convergencia y la comprobación de la igualdad se hacen exactamente igual que en el caso anterior, salvo por el siguiente detalle. e_i es solución de la homogénea, así que al calcular Tb, el coeficiente i-ésimo $\langle Tb, e_i\rangle = \langle b, Te_i\rangle = \lambda_i \langle b, e_i\rangle = 0$ no aparece.

□

Corolario 2.35. *Fijado $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, si (P) tiene a lo más una solución $\forall b \in H$, entonces se verifica que el operador lineal y continuo $(\lambda Id - T)^{-1} : H \to H$ queda bien definido. Además, la ecuación (P) tiene como solución $u = (\lambda Id - T)^{-1}b$.*

3. Los principios fundamentales del Análisis Funcional: aplicaciones.

3.1. Teorema de Hahn-Banach.

Definición 3.1. *Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial con una topología en la que el producto por escalares y la suma de vectores son aplicaciones continuas.*

Ejemplo 3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto,* $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ *son las funciones* C^∞ *con soporte compacto. Fijado un compacto* $K \subset \Omega$*, se puede fijar la topología de la convergencia uniforme sobre* K *sobre el espacio* $\mathcal{D}_K(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *de las funciones con soporte contenido en* K*.*

Cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ *se puede poner como unión numerable de compactos crecientes, de forma que* $\mathcal{D}(\Omega) = \cup \mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$*. Cada* $\mathcal{D}_{K_n}$ *es un espacio de Banach con la topología anterior, y se puede construir en* $\mathcal{D}(\Omega)$ *la topología límite inductivo, que es la más fina tal que las inclusiones de los* $\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$ *son continuas. Este espacio es localmente convexo, y además se puede definir un dual* $\mathcal{D}(\Omega)^*$*.*

Teorema 3.3 (Hahn-Banach, versión geométrica)**.** *Dado* X *espacio de Banach,* $A \subset X$ *convexo y cerrado,* $x_0 \notin A$*, entonces existe* $f \in X^*$ *y* $H = \{x \in E : f(x) = \lambda\}$ *separa* A *de* x_0*.*

Corolario 3.4. *Todo conjunto cerrado y convexo en un espacio de Banach es intersección de semiplanos.*

Teorema 3.5 (Hahn-Banach, versión analítica en un espacio de Hilbert)**.** *Sea* H *espacio de Hilbert, y* $F \subset H$ *subespacio cerrado. Sea* $f : F \to \mathbb{K}$ *lineal y continua, entonces existe una única* $\tilde{f} : H \to \mathbb{K}$ *una aplicación lineal y continua extensión de* f*.*

Demostración. F cerrado en Hilbert implica Hilbert, por el teorema de Riesz $\exists v_f \in F$ tal que $f(x) = \langle x, v_f \rangle \ \forall x \in F$, y $\|v_f\| = \|f\|$. Definiendo $\tilde{f}(x) = \langle x, v_f \rangle \ \forall x \in H$ es fácil comprobar la veracidad de las afirmaciones. $\square$

Teorema 3.6 (Hahn-Banach, versión geométrica en un espacio de Hilbert real)**.** *Sea* H *espacio de Hilbert real, y* $C \subset H$ *convexo cerrado y* $x_0 \notin C$*. Entonces* $\exists f : H \to \mathbb{R}$ *lineal y continua tal que* $f(x_0) > \alpha > f(c) \ \forall c \in C$*.*

Demostración. El problema 1.52 dice que $y \in C$ cumple que $\|x_0 - y\| = dist(x_0, C)$ si y solo si $Re\left(\langle x_0 - y, w - y \rangle\right) \leqslant 0$ para cada $w \in C$. En el caso real no hace falta usar la parte real. Llamo y_0 al vector que cumple eso, y defino $f : H \to \mathbb{R}$ dada por $\langle \cdot, x_0 - y_0 \rangle$, se deja como ejercicio comprobar las afirmaciones. $\square$

Lema 3.7. *Sea* X *espacio vectorial real y* $p : X \to \mathbb{R}$ *un funcional subaditivo y positivamente homogeneo* ($p(\lambda x) = \lambda p(x); \forall \lambda > 0, x \in X$)*. Sea* Y *subespacio de* X *de codimensión 1, y sea* $f : Y \to \mathbb{R}$ *lineal tal que* $f(x) \leqslant p(x) \ \forall x \in Y$*. Entonces podemos extender* f *a* $\tilde{f}(x) : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \ \forall x \in X$*.*

Demostración. $X = Y \oplus span\{x_0\}$. Solo hace falta definir $f(x_0)$ de forma que se mantenga la acotación. Cualquier extensión será de la forma

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0),$$

y debe cumplirse:

$$\sup_{w \in Y}\{f(w) - p(w - x_0)\} \leqslant \tilde{f}(x_0) \leqslant \inf_{z \in Y}\{-f(z) + p(z + x_0)\}. \tag{1}$$

Hace falta comprobar que ese intervalo no es vacío. Observamos que

$$f(z) + f(w) = f(z + w) \leqslant p(z + w) = p(z + x_0 + w - x_0) \leqslant p(z + x_0) + p(w - x_0), \forall z, w \in Y,$$

de donde $f(w) - p(w - x_0) \leqslant -f(z) + (p(z + x_0)\ \forall w, z \in Y$, de donde el intervalo de los posibles valores $\tilde{f}(x_0)$ es no vacío. Definimos entonces $\tilde{f}(x_0)$ en ese intervalo. queda solo ver que $\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leqslant p(y + \alpha x_0)\ \forall y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}$. Basta trabajar por casos en el signo de α: por ejemplo, si $\alpha \geqslant 0$:

$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \leqslant f(y) + \alpha \left(-f\left(\frac{y}{\alpha}\right) + p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right)\right) = \alpha p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right) = p(y + \alpha x_0).$$

□

Observación 3.8. *Si p es una seminorma (subaditiva y $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$) y $|f(x)| \leqslant p(x)\ \forall x \in Y$, entonces $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)\ \forall x \in X$.*

Observación 3.9. *Si p es una norma, esa condición se traduce en la acotación, y por lo tanto en la continuidad de la aplicación.*

Teorema 3.10 (Hahn-Banach versión analítica)**.** *Sea X un espacio de Banach, Y subespacio cerrado de X, y $X = \overline{span}\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Considero $f : Y \to \mathbb{R}$ lineal y continua, entonces $|f(y)| \leqslant \|f\|\|y\|$ y se puede construir una extensión con $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|x\|\|f\|$*

Demostración. Si $Y_0 := Y, f_0 = f$, defino $Y_n := Y_{n-1} \oplus span\{x_n\}$ (si $x_n \in Y_{n-1}$ no hace falta extender, se tiene todo trivialmente), entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede extender f_{n-1} a $f_n : Y_n \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leqslant \|f_{n-1}\|\|x\| = \ldots = \|f\|\|x\|$.

Defino entonces

$$\begin{aligned} \tilde{f} : Z := \cup_{n=1}^{\infty} Y_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \tilde{f}(z) = f_n(z) \text{ si } z \in Y_n, \end{aligned}$$

está bien definida porque los Y_n son crecientes, y al extender no modificamos el valor en los Y_n anteriores. Se tiene además que $|\tilde{f}(z)| \leqslant \|f\|\|x\|\ \forall z \in Z$. Pero además es lineal, así que es uniformemente continua y se puede extender a la clausura de Z que es X. □

Trabajamos ahora en un espacio vectorial E general.

Definición 3.11. *Cuando $\forall x$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$ si $\lambda > \lambda_0$, se dice que A es absorbente.*

Definición 3.12. *Dado A absorbente con 0 en el interior de A, defino $P_A(x) := \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$. A esta aplicación se le llama el funcional de Minkowski.*

Proposición 3.13. *Las siguientes propiedades son ciertas:*

1. *$P_A \geqslant 0$ y positivamente homogéneo.*
2. *Si A convexo, P_A es subaditiva.*
3. *$\{x : P_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x : P_A(x) \leqslant 1\}$.*

Demostración. (Proposición 3.5.9., [1]). □

Teorema 3.14 (Mazur)**.** *Sea $E[\tau]$ un espacio vectorial topológico, $M \subset E$ una variedad afín y $A \subset E$ no vacío, abierto y convexo. Si $A \cap M = \varnothing$, entonces existe un hiperplano afín cerrado H en $E[\tau]$ tal que $A \cap H = \varnothing$ y $M \subset H$.*

Demostración. (Proposición 3.7.5., [1]).

$M = x_0 + F$ con $F \subset E$ subespacio vectorial. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in A$, pues se puede trasladar el problema. Como A es abierto, A es absorbente, y se comprueba además que $A = \{x \in E : P_A(x) < 1\}$, y aplicando que $A \cap M = \varnothing$ $P_A(x_0 + y) \geqslant 1, \forall y \in F$. Defino

$$\begin{aligned} u : F \oplus span\{x_0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, \lambda x_0) &\longmapsto u((y, \lambda x_0)) = \lambda. \end{aligned}$$

u es lineal, y $u(y + \lambda x_0) \leqslant P_A(y + \lambda x_0)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in F$, pues:

- si $\lambda < 0$, $u(y + \lambda x_0) = \lambda \leqslant 0 \leqslant P_A(x_0 + y)$;
- si $\lambda > 0$, $u(y + \lambda x_0) = \lambda \cdot 1 \leqslant \lambda P_A(\frac{1}{\lambda} y + x_0) = P_A(y + \lambda x_0)$.

Aplicando a u la forma analítica de Hahn-Banach, u se extiende a $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u}(x) \leqslant P_A(x)$ para cada $x \in E$. Al ser A un abierto, esa última desigualdad implica que $\tilde{u}$ es continua[2], en el caso de un Banach es sencillo: $\exists r > 0$ con $B = B(0, r) \subset A$, $P_A(x) \leqslant P_B(x) = \|x\|/r)$. Definiendo

$$H = \{x \in E : \tilde{u}(x) = 1\},$$

se tiene $M \subset H$ y $A \cap H = \varnothing$ $(x \in H \implies P_A(x) \geqslant \tilde{u}(x) = 1 \implies x \notin A)$. □

[2]En clase el profesor dijo: “comprobar el límite en 0”, pero en el caso general se ve no trivialmente en el libro.

Corolario 3.15 (1er Teorema de Separación)**.** *Sea $E[\tau]$ espacio vectorial topológico, A y B subconjuntos convexos no vacíos y abiertos, con $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano H real cerrado que separa estrictamente A y B, esto es, existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, $H = \{x \in E : f(x) = \xi\}$ y $A \subset \{x \in E : f(x) < \xi\}, B \subset \{x \in E : f(x) > \xi\}$.*

Demostración. $A - B$ (diferencia algebraica, no de conjuntos) es convexo, abierto, no vacío y $0 \notin A - B$, por Mazur $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua con $0 \in H = \{x \in E : f(x) = 0\}$ y $H \cap (A - B) = \emptyset$, de donde $f(A - B)$ será conexo en $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo, con $0 \notin f(A - B)$, luego f separa estrictamente A y B. □

Definición 3.16. *Se dice que un espacio vectorial topológico es localmente convexo si el origen tiene una base de entornos convexos.*

Observación 3.17. *Los espacios normados son localmente conexos.*

Lema 3.18. *Sea $E[\tau]$ e.v.t., $K \subset E$ compacto y $F \subset E$ cerrado, entonces existe un entorno abierto del origen W tal que $(K + W) \cap (F + W) = \emptyset$.*

Demostración. En el caso de un espacio normado es sencillo, pues $d(K, F) = \varepsilon > 0$, de lo contrario (como K es también cerrado) tendrían un punto de acumulación en común, que estaría en ambos conjuntos y no serían disjuntos. Basta tomar $W = B(0, \frac{\varepsilon}{2})$. □

Corolario 3.19 (2o Teorema de Separación)**.** *Sea $E[\tau]$ e.v.t. localmente convexo, K, F subconjuntos convexos disjuntos de E, con K compacto y F cerrado. Entonces existe un hiperplano real cerrado que separa estrictamente K y F.*

Demostración. Si K es compacto, $\exists W$ entorno del origen tal que $(K + W) \cap (F + W) = \emptyset$, y lo puedo suponer convexo por ser $E[\tau]$ localmente convexo., bastando entonces aplicar el resultado anterior. □

Teorema 3.20 (Hahn-Banach, versión geométrica)**.** *Sea X espacio de Banach. Dados dos conjuntos A y B convexos y cerrados, existe $H = \{x \in E : f(x) = \lambda\}$ que separa A y B, donde $f : E \to \mathbb{R}$ es lineal y continua.*

Demostración. Vale el mismo argumento que en el segundo teorema de separación. □

Observación 3.21. *En clase no copié las hipótesis sobre el espacio del último teorema (si era de Banach o e.v.t.), pero debería aceptarlo con espacio de Banach.*

3.2. Teorema de Baire.

Definición 3.22. *Un conjunto es nunca-denso si el interior de su clausura es vacío.*

Definición 3.23. *Los conjuntos de primera categoría son las uniones numerables de conjuntos nunca-densos, y los de segunda categoría los que no son de primera.*

Definición 3.24. *Un espacio topológico se llama de Baire si la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos es un conjunto denso.*

Teorema 3.25 (Baire)**.** *Si (M,d) es un espacio métrico completo, entonces M es de Baire.*

Demostración. (p. 263, [1]).

Sea $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos. Para demostrar que $\cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es denso, veamos que para cualquier abierto $\emptyset \neq V \subset M$ se tiene que $V \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} G_n) \neq \emptyset$. Construyo inductivamente sucesiones $(x_n)_n \subset M$, $(r_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ de forma que $B[x_n, r_n] \subset G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset G_n \cap G_{n-1} \cap \ldots \cap G_1 \cap V$ y $r_n < \frac{1}{n}$.

- Como G_1 denso en M, $\exists x_1 \in G_1 \cap V \neq \emptyset$, y por ser abierto $\exists r_1 \in (0,1)$ con $B[x_1, r_1] \subset V \cap G_1$.
- Como G_n denso en M, $\exists x_n \in G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \emptyset$, y por ser abierto $\exists r_n \in (0, \frac{1}{n})$ con $B[x_n, r_n] \subset G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset G_n \cap G_{n-1} \cap \ldots \cap G_1 \cap V$.

$(x_n)_n$ es de Cauchy, pues para cada $m > n$ $x_m \in B(x_m, r_m) \subset B(x_{m-1}, r_{m-1}) \subset \ldots \subset B(x_n, r_n)$, y $r_n \to 0$. Como el espacio es completo existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, debe ser $x \in B[x_n, r_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pues ya hemos visto que $\forall m > n$ $x_m \in B(x_n, r_n) \subset B[x_n, r_n]$, y este es cerrado, basta tomar límites en m. Se tiene por construcción entonces que $x \in G_n \cap G_{n-1} \cap \ldots \cap G_1 \cap V$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $x \in V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n)$ □

Corolario 3.26. *Si X es un espacio de Banach, entonces su dimensión algebraica o es finita o es no numerable.*

Demostración. (p. 264, [1]). □

3.3. Teorema de la acotación uniforme o de Banach-Steinhaus.

Teorema 3.27 (Banach-Steinhaus, de la acotación uniforme)**.** *Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas del espacio normado X en el espacio normado Y y sea*

$$D = \{x \in X : \sup_{i\in I} \|A_i(x)\| = \infty\}.$$

Entonces:

1. *Si D^c es de segunda categoría, entonces $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$ y D es vacío.*
2. *Si X es de Banach, entonces, o bien $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$, o bien D es un G_δ denso en X.*

Otra versión más sencilla, que es la que puede preguntar en el examen de teoría:

Teorema 3.28 (Banach-Steinhaus, de la acotación uniforme)**.** *Dada una familia de aplicaciones lineales y continuas $\{A_i\}_{i\in I}$ entre un espacio de Banach X y un espacio normado Y, si $\forall x \in X$ $\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| < \infty$, entonces $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.*

Demostración. (p.265-266, [1])

Considero los conjuntos

$$D = \{x \in X : \sup_{i \in I} \|A_i(x)\| = \infty\},$$

$$D_n = \bigcup_{i \in I} \{x \in X : \|A_i(x)\| > n\}.$$

Los D_n son abiertos porque cada A_i y la norma son continuas, y $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Por hipótesis $D = \emptyset$, y si cada D_n fuese denso D también lo sería (3.25, pues X es Banach), así que algún D_n no es denso, y $\exists m \in \mathbb{N}$ con $Int(D_m^c) \neq \emptyset$. Considero $x \in Int(D_m^c)$, y $r > 0$ con $B(x, r) \subset D_m^c$, de forma que $\forall y \in B(x, r)$ se tiene $\|A_i y\| \leqslant m$. Considero además $C = \sup_{i \in I} \|A_i x\| < \infty$. Se puede comprobar entonces, para $y \in B(0, r)$:

$$\|A_i y\| = \|(A_i y - A_i x) + A_i x\| \leqslant \|A_i(x - y)\| + \|A_i x\| \leqslant m + C,$$

y por lo tanto $\forall y \in B[0, 1], i \in I$ se da $\|A_i y\| \leqslant 2r(m + C)$, con lo que $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$.

□

3.4. Teorema de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

Definición 3.29. *Sea X un espacio normado y $A \subset X$:*

1. *Se dice que A es CS-compacto si para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$ y cualquier sucesión $(\lambda_n)_n \subset [0, 1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ se verifica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge a un punto de A.*
2. *Se dice que A es CS-cerrado si para toda sucesión $(x_n)_n \subset A$ y cualquier sucesión $(\lambda_n)_n \subset [0, 1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ y para la cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge a un punto, se verifica que dicho punto está en A.*

Proposición 3.30. *Sea X espacio normado y $A \subset X$:*

- *Si X es de Banach su bola unidad es CS-compacta.*
- *Si A es cerrado y convexo, entonces A es CS-cerrado.*
- *Si A es CS-compacto, entonces A es CS-cerrado y acotado. Si X es de Banach, entonces el recíproco también es cierto.*

(Prop 3.4.2., [1])

Proposición 3.31. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ lineal y continua. Si $A \subset X$ es CS-compacto entonces $T(A)$ es CS-compacto. (Prop 3.4.3., [1])*

Proposición 3.32. *Sea X espacio normado y $A \subset X$ CS-cerrado. Entonces A y $\overline{A}$ tienen el mismo interior. (Prop 3.4.4., [1])*

Teorema 3.33 (De la aplicación abierta). *Sean X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sea $T : X \to Y$ lineal y continua tal que $T(X)$ es de segunda categoría en Y. Entonces T es una aplicación sobreyectiva y abierta, siendo además Y un espacio de Banach.*

Demostración. (Teo. 3.4.5., [1])

Para ver que T es abierta y sobreyectiva basta comprobar que $T(B_X) \supset rB_Y$ para cierto $r > 0$.

Como B_X es CS-compacto (3.30.(i)), $T(B_X)$ también lo es (3.31), así que $T(B_X)$ es CS-cerrado (3.30.(iii)).

Como $T(X) = \bigcup_n nT(B_x)$ es de segunda categoría en Y, y las homotecias son homomorfismos, $\overline{T(B_X)}$ tiene interior no vacío, que coincide con el interior de $T(B_X)$ (3.32). Puedo tomar entonces $y_0 \in Y, r > 0$ tales que $B_Y(y_0, r) \subset T(B_X)$. Por la simetría de las bolas, $B_Y(-y_0, r) \subset T(B_X)$, y por lo tanto:

$$B_Y(0, r) \subset \frac{1}{2}B_Y(-y_0, r) + \frac{1}{2}B_Y(y_0, r) \subset \frac{1}{2}T(B_X) + \frac{1}{2}T(B_X) \subset T(B_X) \tag{2}$$

como queríamos ver. Falta solo comprobar que Y es completo entonces, para lo cual es suficiente ver que si $(y_n)_n \subset Y$ y $\sum_n \|y_n\| < \infty$ entonces $\sum_n y_n$ converge.

Por (Ecuación 2), para cada n podemos tomar $x_n \in B_X$ con $Tx_n = \frac{r}{2}\frac{y_n}{\|y_n\|}$, así que haciendo $z_n = \frac{2}{r}\|y_n\|x_n$ se da $Tz_n = y_n$ y $\|z_n\| \leqslant \frac{2}{r}\|y_n\|$. Pero entonces $\sum_n \|z_n\| < \infty$, y existe $x := \sum_n x_n$ por la completitud de X. Finalmente, por la continuidad de T, $\sum_n y_n$ es convergente a Tx.

□

Una versión más particular, y seguramente la que pregunte en el oral:

Corolario 3.34. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y continua, entonces T es sobreyectiva si y solo si es abierta.*

Definición 3.35. *Una aplicación $f : M_1 \to M_2$, donde M_1, M_2 son espacios topológicos Hausdorff, se dice que tiene gráfica cerrada si su gráfica, es decir, el conjunto*

$$Graf(f) = \{(t, f(t)) : t \in M_1\}$$

es cerrado en el espacio producto $M_1 \times M_2$.

Teorema 3.36 (De la gráfica cerrada). *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal. Entonces T es continua si y solo si TA tiene gráfica cerrada.*

Demostración. Algunas observaciones:

1. Como T es lineal, $Graf(T)$ es un espacio vectorial.
2. Considero P_1, P_2 las proyecciones canónicas en $X \times Y$, que son lineales y continuas en la topología producto (dada por $\| \cdot \|$).

3. Llamo $\hat{P}_i = P_i|_{Graf(T)}$, es claro que $\hat{P}_1$ es biyectiva.

$\Longrightarrow$ Sea $((x_n, Tx_n))_n$ sucesión en $Graf(T)$ que converge a $(x, y) \in X \times Y$. Como las proyecciones son continuas, $x_n = P_1(x_n, Tx_n) \to P_1(x, y) = y$, y $Tx_n = P_2(x_n, Tx_n) \to P_2(x, y) = y$.

Como T es continua, $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, así que $(x, y) = (x, Tx) \in Graf(T)$, con lo que $Graf(T)$ cerrado.

$\Longleftarrow$ Por la observación 1 y bajo la hipótesis de que $Graf(T)$ es cerrado en un espacio de Banach, $Graf(T)$ es también un espacio de Banach.

Considero la aplicación $S : X \to Graf(T)$, $x \mapsto (x, Tx)$. S es claramente biyectiva, con inversa $\hat{P}_1$. Como P_1 es lineal y continua $\hat{P}_1$ también, así que por (3.34) es abierta y S es continua. Se tiene entonces que $T = P_2 \circ S$ también lo es, pues es composición de continuas.

$\square$

Referencias

[1] J. Orihuela, B. Cascales, M. Raja y J. M. Mira, *Análisis funcional.* Murcia: Electolibris, 2012, OCLC: 864356789, ISBN: 978-84-940688-2-9.