1.- Sea una función de dos variables $z = f(x,y)$, se definen las derivadas parciales como

2.-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$f(x,y) = x^2 y + 3x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f(x+\Delta x, y) = (x+\Delta x)^2 y + 3(x+\Delta x)$$

$$= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)y + 3x + 3\Delta x$$

$$= x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x$$

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{(x^2y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x) - (x^2y + 3x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = 2xy + y\Delta x + 3$$

Limite $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3$$

2.- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f(x, y+\Delta y) = x^2(y+\Delta y) + 3x =$$

$$x^2 y + x^2\Delta y + 3x \qquad f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = x^2 \Delta y \qquad \frac{x^2\Delta x}{\Delta y} = x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

2- Sea la función de dos variables: $Z = f(x,y) = x^2 - xy + 1$, al derivar por definición $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el primer paso, se obtiene

$$f(x+\Delta x, y) = (x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)y + 1$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - xy - y\Delta x + 1$$

Respuesta C

3- Tomando la misma función anterior, al aplicar el segundo paso, de la derivada parcial respecto a y nos da:

$$Z = x^2 - xy + 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$f(x,y+\Delta y) = x^2 - x(y+\Delta y) + 1 = x^2 - xy - x\Delta y + 1$$

$$f(x,y+\Delta y) - f(x,y) = (x^2 - xy - x\Delta y + 1) - (x^2 - xy + 1) = -x\Delta y$$

Respuesta B

4- Sea la función de dos variables: $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$, al derivar por definición $\frac{\partial z}{\partial x}$ en el primer paso, se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f(x+\Delta x, y) = (x+\Delta x)^3 + y^3 + 3(x+\Delta x)^2 - 3y^2 - 8$$

$$(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3(x+\Delta x)^2 = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

Respuesta D

$$f(x+\Delta x, y) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + y^3 + 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3y^2 - 8$$

$$x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + y^3 + 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3y^2 - 8$$

5- Sea nuevamente, la función, al derivar parcialmente respecto a x, en el cuarto paso, antes de calcular el límite, se obtiene:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

$$f(x+\Delta x, y) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + y^3 + 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x^2 - 8$$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = (3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2)$$

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = 3x^2 + 6x + 3x\Delta x + 3(\Delta x) = 3x^2 + 6x + 3\Delta x(x+1)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 6x + 3x\Delta x + 3(\Delta x)^2) \quad \underline{\cancel{A}}$$

Respuesta A