Práctica 10

Pablo Gutiérrez Aguirre
pgutierrez2018@udec.cl

13 de junio 2022

Tabla de contenidos

Repaso

La forma estándar de un problema de programación lineal es la siguiente, NO CONFUNDIR CON FORMA CANÓNICA.

$$max \quad c^t X \tag{1}$$
$$s.a: \quad AX = b \tag{2}$$
$$c, X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}_+^m \tag{3}$$

En el caso de que alguna restricción no esté en la forma estándar (que sea $\leq$ o $\geq$) se deben agregar **variables de holgura**.
Al agregar variables de holgura se tendrán **grados de libertad**, que corresponden a la cantidad de variables menos la cantidad de restricciones.
En cada solución básica habrán n variables igual a 0, donde n son los grados de libertad.

Repaso: Definiciones

- **Variables de holgura**: Se agregan a cada restricción que no cumpla la forma estándar, de esta forma la restricción puede ser representada como una igualdad
- **Solución básica**: Solución en la cual habrán n variables igual a 0, n son los grados de libertad
- **Variable no básica**: Variable que son igual a 0 en mi *solución básica*, hay al menos n variables no básicas.
- **Variables básicas**: Variables distintas de cero, se obtienen del sistema de ecuaciones.

Ejercicio 3

Una fábrica localizada en Palomares, manufactura tres productos A, B y C. Cada producto requiere tiempo de producción en tres departamentos, como se muestra en la siguiente

Producto	**Departamento 1**	**Departamento 2**	**Departamento 3**
A	3 hr/unidad	2 hr/unidad	1 hr/unidad
B	4 hr/unidad	1 hr/unidad	3 hr/unidad
C	2 hr/unidad	2 hr/unidad	3 hr/unidad

Se dispone de 600, 400 y 300 horas de tiempo de producción en los tres departamentos, respectivamente. Si cada unidad de producto A, B y C contribuye con \$2 000, \$4 000 y \$2 500 al beneficio, respectivamente, encuentre la combinación óptima de productos.

Ejercicio 3

Variables

- x_a: Unidades del producto A a producir
- x_b: Unidades del producto B a producir
- x_c: Unidades del producto C a producir

$$
\begin{aligned}
max \quad & 2000x_a + 4000x_b + 2500x_c && (1)\\
s.a: \quad & 3x_a + 4x_b + 2x_c \leq 600 && (2)\\
& 2x_a + x_b + 2x_c \leq 400 && (3)\\
& x_a + 3x_b + 3x_c \leq 300 && (4)\\
& x_a \geq 0, x_b \geq 0, x_c \geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Escribiendo el modelo en la forma estándar

$$
\begin{aligned}
max \quad & z = 2000x_a + 4000x_b + 2500x_c + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3 && (1)\\
s.a: \quad & 3x_a + 4x_b + 2x_c + h_1 = 600 && (2)\\
& 2x_a + x_b + 2x_c \qquad + h_2 = 400 && (3)\\
& x_a + 3x_b + 3x_c \qquad\qquad + h_3 = 300 && (4)\\
& x_a \geq 0, x_b \geq 0, x_c \geq 0 && (5)\\
& h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, h_3 \geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3

Empezamos con una base inicial, donde cada variable de holgura toma el valor del coeficiente de cada restricción.

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	2000	4000	2500	0	0	0	0
h_1	3	4	2	1	0	0	600
h_2	2	1	2	0	1	0	400
h_3	1	3	3	0	0	1	300

Ejercicio 3

Buscamos la dirección de mejora, dada por el valor más grande de las variables en la función objetivo, en este caso es x_b

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	2000	4000	2500	0	0	0	0
h_1	3	4	2	1	0	0	600
h_2	2	1	2	0	1	0	400
h_3	1	3	3	0	0	1	300

Ejercicio 3

Una vez encontrada la dirección de mejora, vemos que variable (filas) se hace 0 primero, esto con el cociente entre los valores de la columna RHS y x_b y la que tenga menor valor es la elegida.

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS	Cociente
-Z	2000	4000	2500	0	0	0	0	
h_1	3	4	2	1	0	0	600	$=600/4=150$
h_2	2	1	2	0	1	0	400	$=400/1=400$
h_3	1	3	3	0	0	1	300	$=300/3=100$

En este caso, es la variable h_3, esta es la **variable básica de salida**, con esto vamos a pivotear la tabla respecto al valor 3.

Ejercicio 3

Para pivotear tenemos que hacer operaciones por filas, para esto, el valor pivote (3) debemos convertirlo en 1, por lo tanto vamos a dividir la fila de la variable h_3 por 3. Luego, el resto de valores de la columna pivote deben ser 0, para esto las operaciones serán las siguientes:

- $h_3 = h_3/3$
- $h_1 = h_1 - 4h_3$
- $h_2 = h_2 - h_3$
- $Z = Z - 4000h_3$

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	2000/3	0	-1500	0	0	-4000/3	-400000
h_1	5/3	0	-2	1	0	-4/3	200
h_2	5/3	0	1	0	1	-1/3	300
x_b	1/3	1	1	0	0	1/3	100

Ejercicio 3

Buscamos la dirección de mejora que es la columna x_a, luego, haciendo el cociente entre RHS y x_a se tiene que la variable de salida es h_1 y la variable de entrada es x_a

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS	Cociente
-Z	2000/3	0	-1500	0	0	-4000/3	-400000	
h_1	5/3	0	-2	1	0	-4/3	200	$=200/(5/3) = 120$
h_2	5/3	0	1	0	1	-1/3	300	$=300/(5/3) = 180$
x_b	1/3	1	1	0	0	1/3	100	$=100/(1/3) = 300$

Con esto tenemos que pivotear respecto a 5/3

Ejercicio 3

Para pivotear tenemos que hacer operaciones por filas, para esto, el valor pivote (5/3) debemos convertirlo en 1, por lo tanto vamos a dividir la fila de la variable h_1 por 5/3. Luego, el resto de valores de la columna pivote deben ser 0, para esto las operaciones serán las siguientes:

- $h_1 = \frac{h_1}{5/3}$
- $Z = Z - \frac{2000}{3} h_1$
- $h_2 = h_2 - \frac{5}{3} h_1$
- $x_b = x_b - h_1/3$

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	0	0	-700	-400	0	-800	-480000
x_a	1	0	-6/5	3/5	0	-4/5	120
h_2	0	0	3	-1	1	1	100
x_b	0	1	7/5	-1/5	0	3/5	60

Ejercicio 3

VB	x_a	x_b	x_c	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	0	0	-700	-400	0	-800	-480000
x_a	1	0	-6/5	3/5	0	-4/5	120
h_2	0	0	3	-1	1	1	100
x_b	0	1	7/5	-1/5	0	3/5	60

Finalmente, la solución óptima es $(x_a, x_b, x_c, h_1, h_2, h_3) = (120, 60, 0, 0, 100, 0)$, con un valor de 480000 en la función objetivo. Esto quiere decir que se deben producir 120 unidades del producto A, 60 unidades del producto B y 0 unidades del producto C.

Ejercicio 5

Los Almendros de Manquimávida es una empresa familiar de inmigrantes británicos, dedicada a la comercialización de frutos secos de alta calidad. El empaquetador de frutos tiene a la mano 150 libras de maní, 100 libras de castañas de cajú, y 50 libras de almendras (son británicos, no les gusta el sistema internacional de medidas). La empresa vende paquetes con 3 tipos de mezclas de frutos secos:

- **Mix Económico:** Contiene 80% de maní y 20% de castañas de cajú.
- **Mix carretera:** Contiene 50% de maní, 30% de castañas de cajú y 20% de almendras.
- **Mix de lujo:** Contiene 20% de maní, 50% de castañas de cajú y 30% de almendras.

Si un paquete de 12 onzas (son británicos) del Mix Económico, Mix Carrete y Mix De Lujo se venden por \$900, \$1 100 y \$1 300 respectivamente, ¿cuantas bolsas de cada tipo debería producir la empresa, de modo que puedan maximizar el ingreso?
Indicación: Mister Charles, dueño de la empresa, les recuerda que 1 libra equivalen a 16 onzas.

Ejercicio 5

Variables

- x_e: Bolsas de mix económico
- x_c: Bolsas de mix carretera
- x_l: Bolsas de mix de lujo

150 libras = 2400 onzas, 100 libras 1600 onzas, 50 libras = 800 onzas
Los porcentajes de cada fruto seco en las bolsas se pueden escribir como 0.8*12 = 9.6 onzas en el caso del maní para el mix económico, con esto se tiene:

$$\begin{aligned} max \quad & 900x_e + 1100x_c + 1300x_l && (1)\\ s.a: \quad & 9.6x_e + 6x_c + 2.4x_l \leq 2400 && (2)\\ & 2.4x_e + 3.6x_c + 6x_l \leq 1600 && (3)\\ & 2.4x_c + 3.6x_l \leq 800 && (4)\\ & x_e \geq 0, x_c \geq 0, x_l \geq 0 && (5) \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Escribiendo el modelo en la forma estándar

$$
\begin{aligned}
max \quad & 900x_e + 1100x_c + 1300x_l && (1)\\
s.a: \quad & 9.6x_e + 6x_c + 2.4x_l + h_1 = 2400 && (2)\\
& 2.4x_e + 3.6x_c + 6x_l \qquad + h_2 = 1600 && (3)\\
& 2.4x_c + 3.6x_l \qquad\qquad + h_3 = 800 && (4)\\
& x_e \geq 0, x_c \geq 0, x_l \geq 0 && (5)\\
& h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, h_3 \geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5

Pasando el modelo al tableu se tiene lo siguiente:

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	900	1100	1300	0	0	0	0
h_1	9.6	6	2.4	1	0	0	2400
h_2	2.4	3.6	6	0	1	0	1600
h_3	0	2.4	3.6	0	0	1	800

Ejercicio 5

Buscamos la dirección de mejora que corresponde a la variable de entrada x_l, luego la variable de entrada corresponde a la que tenga menor cociente de RHS y la columna x_l, como se puede ver a continuación:

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS	Cociente
-Z	900	1100	1300	0	0	0	0	
h_1	9.6	6	2.4	1	0	0	2400	$=2400/2.4 = 1000$
h_2	2.4	3.6	6	0	1	0	1600	$=1600/6 = 266.66$
h_3	0	2.4	3.6	0	0	1	800	$=800/3.6 = 222.22$

Ejercicio 5

Las operaciones por filas serán las siguientes:

- $h_3 = \frac{h_3}{3.6}$
- $Z = Z - 1300h_3$
- $h_1 = h_1 - 2.4h_3$
- $h_2 = h_2 - 6h_1$

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	900	700/3	0	0	0	-3250/9	-2600000/9
h_1	9.6	22/5	0	1	0	-2/3	5600/3
h_2	2.4	-2/5	0	0	1	-5/3	800/3
x_l	0	2/3	1	0	0	5/18	2000/9

Ejercicio 5

En esta iteración la dirección de mejora es en x_e, por otro lado la variable de salida corresponde a h_2

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS	Cociente
-Z	900	700/3	0	0	0	-3250/9	-2600000/9	
h_1	9.6	22/5	0	1	0	-2/3	5600/3	=(5600/3) / 9.6 = 194.44
h_2	2.4	-2/5	0	0	1	-5/3	800/3	=(800/3) / 2.4 = 111.11
x_l	0	2/3	1	0	0	5/18	2000/9	∞

Ejercicio 5

Ahora las operaciones por fila son las siguientes:

- $h_2 = h_2/2.4$
- $Z = Z - 900h_2$
- $h_1 = h_1 - 9.6h_2$
- $x_l = x_l$

Dando como resultado la siguiente tabla

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	0	1150/3	0	0	-375	2375/9	-3500000/9
h_1	0	6	0	1	-4	6	800
x_e	1	-1/6	0	0	5/12	-25/36	1000/9
x_l	0	2/3	1	0	0	5/18	2000/9

Ejercicio 5

Finalmente, la dirección de mejora es en la variable de entrada x_c, luego la variable de salida dada por el cociente es h_1

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS	Cociente
-Z	0	1150/3	0	0	-375	2375/9	-3500000/9	
h_1	0	6	0	1	-4	6	800	=800/6 = 133.33
x_e	1	-1/6	0	0	5/12	-25/36	1000/9	=(1000/9)/(-1/6) = -666.66
x_l	0	2/3	1	0	0	5/18	2000/9	= (20000/9)/(2/3) = 333.33

Ejercicio 5

Las operaciones por filas son:

- $h_1 = h_1/6$
- $Z = Z - \frac{1150}{3} h_1$
- $x_e = \frac{-1}{6} - \frac{-1}{6} h_1$
- $x_l = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} h_1$

Dando la siguiente tabla:

VB	x_e	x_c	x_l	h_1	h_2	h_3	RHS
-Z	0	0	0	-575/9	-1075/9	-1075/9	-440000
x_c	0	1	0	1/6	-2/3	1	400/3
x_e	1	0	0	1/36	11/36	-19/36	400/3
x_l	0	0	1	-1/9	4/9	-7/18	400/3

Que tiene como resultado $(x_e, x_c, x_l, h_1, h_2, h_3) = (\frac{400}{3}, \frac{400}{3}, \frac{400}{3}, 0, 0, 0)$.
Por otro lado, es una solución infactible ya que no se pueden vender $\frac{400}{3}$ bolsas. Con esto se puede ver que no todos los problemas de programación lineal se pueden resolver con simplex, específicamente este corresponde a un problema de programación lineal **entera**, por eso no se puede resolver.