Práctica 9

Pablo Gutiérrez Aguirre
pgutierrez2018@udec.cl

6 de junio 2022

Tabla de contenidos

Repaso: Dual

Primal

$$
\begin{aligned}
Max \quad & c^T X \\
s.a: \quad & AX \leq b \\
& X \geq 0
\end{aligned}
$$

$$X, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Dual

$$
\begin{aligned}
Min \quad & b^T Y \\
s.a: \quad & A^T Y \geq c \\
& Y \geq 0
\end{aligned}
$$

$$Y, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n$$

Repaso: Dual

Primal

$$\begin{aligned} Max \quad & c^T X \\ s.a: \quad & AX \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

$$X, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Dual

$$\begin{aligned} Min \quad & b^T Y \\ s.a: \quad & A^T Y \geq c \\ & Y \geq 0 \end{aligned}$$

$$Y, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} Max \quad & 3x + 5y \\ s.a: \quad & x \leq 4 \\ & 2y \leq 12 \\ & 3x + 2y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min \quad & 4\alpha + 12\beta + 18\gamma \\ s.a: \quad & \alpha + 3\gamma \geq 3 \\ & 2\beta + 2\gamma \geq 5 \\ & \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

Repaso: Dual

Primal

$$c^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Dual

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b^T = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Repaso: Dual

Función objetivo	Maximización	Minimización	
Variables	≥ 0 ≤ 0 Irrestricta	$\geq$ $\leq$ $=$	Restricciones
Restricciones	$\leq$ $\geq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 Irrestricta	Variables

Ejercicio 2d

Escriba el dual de los siguientes problemas de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
min \quad & -5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 6x_4 \\
s.a: \quad & 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 2 \\
& x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq -2 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_4 \geq 3 \\
& 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\
& x_1, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2d

Primal		Dual	
min	$-5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 6x_4$	max	$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 + 2y_4$
$s.a:$	$8x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 2$	$s.a:$	$8y_1 + y_2 + 2y_3 + 4y_4 \geq -5$
	$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq -2$		$2y_1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4 \geq 12$
	$2x_1 - x_2 + 2x_4 \geq 3$		$-y_1 - 2y_2 - y_4 \leq 4$
	$4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$		$4y_1 + y_2 + 2y_3 \leq -6$
	$x_1, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \geq 0$		$y_1, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0, y_4$ irrestricto

Ejercicio 3b

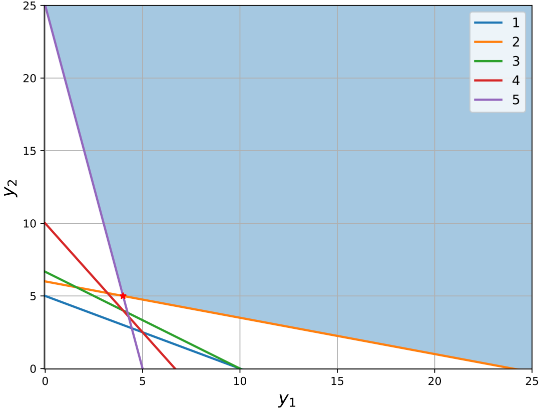
Resuelva el siguiente problema, usando un método gráfico (Indicación: Use el problema dual y el teorema de las holguras complementarias).

$$\begin{aligned} max \quad & 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5 \\ s.a: \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 19 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 57 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3b

Dual

$$
\begin{aligned}
min \quad & 19y_1 + 57y_2 \\
s.a: \quad & y_1 + 2y_2 \geq 10 \\
& y_1 + 4y_2 \geq 24 \\
& 2y_1 + 3y_2 \geq 20 \\
& 3y_1 + 2y_2 \geq 20 \\
& 5y_1 + y_2 \geq 25 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Ejercicio 3b: Teorema holguras complementarias

$$y_1(x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 - 19) = 0 \tag{6}$$

$$y_2(2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 57) = 0 \tag{7}$$

$$x_1(10 - (y_1 - 2y_2)) = 0 \qquad \rightarrow x_1 = 0 \tag{8}$$

$$x_2(24 - (y_1 + 4y_2)) = 0 \tag{9}$$

$$x_3(20 - (2y_1 + 3y_2)) = 0 \qquad \rightarrow x_3 = 0 \tag{10}$$

$$x_4(20 - (3y_1 + 2y_2)) = 0 \qquad \rightarrow x_4 = 0 \tag{11}$$

$$x_5(25 - (5y_1 + y_2)) = 0 \tag{12}$$

Ejercicio 3b: Teorema holguras complementarias

Reemplazando $(y_1, y_2) = (4, 5)$ y $(x_1, x_3, x_4) = (0, 0, 0)$ en ecuaciones (6) y (7)

$$4(x_2 + 5x_5 - 19) = 0 \tag{13}$$
$$5(4x_2 + x_5 - 57) = 0 \tag{14}$$

Resolviendo se tiene que

$$(x_2, x_5) = (14, 1)$$

Finalmente, la solución del primal es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 14, 0, 0, 1)$$

Ejercicio 4

Encontrar el dual del problema siguiente, reduciéndolo a la mínima expresión:

$$
\begin{aligned}
& max \quad r && (1)\\
& s.a: \quad \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 && (2)\\
& \qquad \mathbf{A}^t\mathbf{y} \geq \mathbf{1}r && (3)\\
& \qquad \mathbf{y} \geq 0, \text{r irrestricto} && (4)
\end{aligned}
$$

Aquí, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{1}= (1, 1, ..., 1)^t \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna con todas sus componentes iguales a 1.

Ejercicio 4

Reescribiendo el primal se tiene:

$$\begin{aligned}
&max \quad \mathbf{0y} + r && (1)\\
&s.a: \quad \mathbf{1'y} - 0r = 1 && (2)\\
&\qquad \mathbf{A}^t\mathbf{y} - \mathbf{1}r \geq 0 && (3)\\
&\qquad \mathbf{y} \geq 0, \text{r irrestricto} && (4)
\end{aligned}$$

Donde **1'** y **0** son vectores de $(1 \times m)$
Verificando las dimensiones del problema:

$$\begin{aligned}
&max \quad (1 \times m)(m \times 1) + r && (5)\\
&s.a: \quad (1 \times m)(m \times 1) - 0r = 1 && (6)\\
&\qquad (n \times m)(m \times 1) - (n \times 1)r \geq 0 && (7)\\
&\qquad \mathbf{y} \geq 0, \text{r irrestricto} && (8)
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que la función objetivo es de dimensión 1, la primera restricción (ecuación 2) es de dimensión 1 y la segunda restricción (ecuación 3) es de dimensión n, son n restricciones.

Ejercicio 4

De esta forma, haciendo el dual del problema original se tiene

$$\begin{aligned} min \quad & \alpha + 0\beta \\ s.a: \quad & \mathbf{1'}\alpha + \mathbf{A}^t\beta \geq 0 \\ & -0\alpha - \mathbf{1}\beta = 1 \\ & \alpha \text{ irrestricto}, \beta \leq 0 \end{aligned}$$

Que al simplificarlo da lo siguiente

$$\begin{aligned} min \quad & \alpha \\ s.a: \quad & \mathbf{1'}\alpha + \mathbf{A}^t\beta \geq 0 \\ & -\mathbf{1}\beta = 1 \\ & \alpha \text{ irrestricto}, \beta \leq 0 \end{aligned}$$