Práctica 11

Pablo Gutiérrez Aguirre
pgutierrez2018@udec.cl

20 de junio 2022

Tabla de contenidos

Ejercicio 1

Un molino agrícola localizado en La Unión produce alimento para ganado. El alimento para ganado contiene tres ingredientes principales: maíz, cal y harina de pescado. Cada ingrediente contiene tres nutrientes: proteínas, calcio y vitaminas. La siguiente tabla muestra los nutrientes por kilogramo de ingrediente:

	Ingrediente		
Nutriente	**Maíz**	**Cal**	**H. de Pescado**
Proteínas	25	15	25
Calcio	15	30	20
Vitaminas	5	12	8

La cantidad de proteínas, calcio y vitaminas contenidas por cada kilo de alimento para ganado deben estar en los siguientes intervalos, respectivamente: $[18, 22]$, $[20, \infty)$, y $[6, 12]$. Si el precio de venta por kilogramo de maíz, cal y harina de pescado son, respectivamente, \$200, \$80, y \$500, encontrar la combinación más barata.

Ejercicio 1

Variables:

- x_m: Kilogramos de maíz a producir
- x_c: Kilogramos de cal a producir
- x_h: Kilogramos de harina de pescado a producir

$$
\begin{aligned}
max \quad & 200x_m + 80x_c + 500x_h && (1)\\
s.a: \quad & \frac{25}{45}x_m + \frac{15}{57}x_c + \frac{25}{53}x_h \geq 18 && (2)\\
& \frac{25}{45}x_m + \frac{15}{57}x_c + \frac{25}{53}x_h \leq 22 && (3)\\
& \frac{15}{45}x_m + \frac{30}{57}x_c + \frac{20}{53}x_h \geq 20 && (4)\\
& \frac{5}{45}x_m + \frac{12}{57}x_c + \frac{8}{53}x_h \geq 6 && (5)\\
& \frac{5}{45}x_m + \frac{12}{57}x_c + \frac{8}{53}x_h \leq 12 && (6)\\
& x_m \geq 0, x_c \geq 0, x_h \geq 0 && (7)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1

Agregando las variables de holguras para poder tener el modelo en la forma estándar tenemos:

$$
\begin{aligned}
max \quad & 200x_m + 80x_c + 500x_h && (1)\\
s.a: \quad & \frac{25}{45}x_m + \frac{15}{57}x_c + \frac{25}{53}x_h - E_1 + A_1 = 18 && (2)\\
& \frac{25}{45}x_m + \frac{15}{57}x_c + \frac{25}{53}x_h + H_2 = 22 && (3)\\
& \frac{15}{45}x_m + \frac{30}{57}x_c + \frac{20}{53}x_h - E_2 + A_2 = 20 && (4)\\
& \frac{5}{45}x_m + \frac{12}{57}x_c + \frac{8}{53}x_h - E_3 + A_3 = 6 && (5)\\
& \frac{5}{45}x_m + \frac{12}{57}x_c + \frac{8}{53}x_h + H_2 = 12 && (6)\\
& x_m \geq 0, x_c \geq 0, x_h \geq 0 && (7)\\
& E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, A_1, A_2, A_3 \geq 0 && (8)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2a

Resuelva por el método de las dos fases

$$
\begin{aligned}
min \quad & 4x_1 + x_2 \\
s.a: \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2a

Este método se usa cuando al pasar el problema a la forma estándar no se tiene una solución básica inicial.
Primera fase: Pasar el problema a la forma estándar agregando variables artificiales y minimizar la suma de estas variables artificiales.

$$\begin{aligned} min \quad & Z = 4x_1 + x_2 \\ s.a: \quad & 3x_1 + x_2 + A_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - E_1 + A_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + h_1 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} min \quad & Z - A_1 - A_2 = 0 \\ s.a: \quad & 3x_1 + x_2 + A_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - E_1 + A_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + h_1 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 2a

El modelo anterior lo pasamos a la tabla y nos queda lo siguiente:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	A_1	A_2	RHS
Z	0	0	0	0	-1	-1	0
A_1	3	1	0	0	1	0	3
A_2	4	3	0	-1	0	1	6
H_1	1	2	1	0	0	0	3

Lo que necesitamos es que los valores correspondientes a A_1 y A_2 en la columna Z sean 0, de esta forma tendremos la solución básica inicial, para esto las operaciones que haremos serán:

- $Z = Z + A_1$
- $Z = Z + A_2$

Ejercicio 2a

Realizando las operaciones anteriores se obtiene:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	A_1	A_2	RHS
Z	7	4	0	-1	0	0	9
A_1	3	1	0	0	1	0	3
A_2	4	3	0	-1	0	1	6
H_1	1	2	1	0	0	0	3

Ahora, esta solución no es factible ya que las variables A_2 y A_2 no son parte del problema, no así H_1 y E_1. Lo que sigue es ver cual es la variable de entrada y cual es la de la salida de la misma manera que con simplex.

Ejercicio 2a

Haciendo el análisis anterior se obtiene lo siguiente

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	A_1	A_2	RHS	cociente
Z	7	4	0	-1	0	0	9	
A_1	3	1	0	0	1	0	3	$=3/3 = 1$
A_2	4	3	0	-1	0	1	6	$=6/4 = 1.5$
H_1	1	2	1	0	0	0	3	$= 3/1 = 3$

Donde la variable de entrada es x_1 y la de salida es A_1, con esto tenemos que el valor pivote es 3, actualizamos la tabla siguientes los siguientes pasos:

- $A_1 = A_1/3$
- $Z = Z - 7A_1$
- $A_2 = A_2 - 4A_1$
- $H_1 = H_1 - A_1$

Ejercicio 2a

Aplicando las transformaciones anteriores se obtiene:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	A_1	A_2	RHS
Z	0	5/3	0	-1	-7/3	0	2
x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
A_2	0	5/3	0	-1	-4/3	1	2
H_1	0	5/3	1	0	-1/3	0	2

Ahora, vemos cual es la variable de salida y cual es la de entrada:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	A_1	A_2	RHS	cociente
Z	0	5/3	0	-1	-7/3	0	2	
x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	$1/(1/3) = 3$
A_2	0	5/3	0	-1	-4/3	1	2	$2/(5/3) = 6/5$
H_1	0	5/3	1	0	-1/3	0	2	$2/(5/3) = 6/5$

Ejercicio 2a

Ahora, repetimos los pasos con el valor pivote de $\frac{5}{3}$ y haciendo las siguientes operaciones:

- $A_2 = \frac{A_2}{5/3}$
- $Z = Z - \frac{5}{3}A_1$
- $x_1 = x_1 - \frac{1}{3}A_1$
- $H_2 = H_2 - \frac{5}{3}A_1$

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	A_1	A_2	RHS
Z	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	0	0	1/5	3/5	-1/5	3/5
x_2	0	1	0	-3/5	-4/5	3/5	6/5
H_1	0	0	1	1	1	-1	0

Como en la base ya no quedan variables artificiales, tenemos una solución básica factible y podemos pasar a la fase 2, nuestra solución básica factible es $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $H_1 = 0$

Ejercicio 2a

Podemos pasar a la fase 2 ya que la función objetivo no se puede minimizar más y por que la solución básica no contiene variables artificiales.

Fase 2: Utilizar la función objetivo del problema original con los valores obtenidos en la fase 1, la tabla queda de la siguiente manera:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	RHS
-Z	4	1	0	0	0
x_1	1	0	0	1/5	3/5
x_2	0	1	0	-3/5	6/5
H_1	0	0	1	1	0

Ahora tenemos que lograr que los coeficientes de Z para x_1 y x_2 sean 0

Ejercicio 2a

Los cambios que tenemos que hacer son $Z = Z - 4x_1$ y $Z = Z - x_2$, donde nos queda:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	RHS
-Z	0	0	0	1/5	-18/5
x_1	1	0	0	1/5	3/5
x_2	0	1	0	-3/5	6/5
H_1	0	0	1	1	0

Ahora tenemos una dirección de mejora, la variable de entrada es E_1, falta ver la variable de salida

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	RHS	cociente
-Z	0	0	0	1/5	-18/5	
x_1	1	0	0	1/5	3/5	=(3/5)/(1/5) =3
x_2	0	1	0	-3/5	6/5	=(6/5)/(-3/5) =-2
H_1	0	0	1	1	0	$= 0/1 = 0$

Ejercicio 2a

Aplicando las operaciones por filas correspondientes:

- $x_2 = x_2 - \frac{-3}{5} H_1$
- $x_1 = x_1 - \frac{1}{5} H_1$
- $Z = Z - \frac{1}{5} H_1$

Donde finalmente nos queda:

VB	x_1	x_2	H_1	E_1	RHS
-Z	0	0	-1/5	0	-18/5
x_1	1	0	-1/5	0	3/5
x_2	0	1	3/5	0	6/5
E_1	0	0	1	1	1

Donde tenemos que la solución óptima es $x_1 = 3/5$ y $x_2 = 6/5$.

Ejercicio 3a

Resuelva por el método de la M-grande

$$\begin{aligned} min \quad & -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ s.a: \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$