


| | | |
|---|---|------------------|
|  | UNIVERSIDAD EAFIT | |
| | Medellín, Colombia | |
| | Maestría en Matemáticas Aplicadas | |
| | Profesor: Cristhian Montoya | |
| | Alumno: Santiago Isaza Cadavid | |
| | Curso: CM0844 - Análisis Numérico | Semestre: 2023-2 |
| | Examen 1: Punto fijo y Solución de ODEs | |

Ejercicio 1

- (a) Considere la ecuación siguiente

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

A partir de la ecuación anterior, construya un sistema de orden 3 en la forma $x = F(x)$. Aplique el método de aproximaciones sucesivas para encontrar una solución. Verifique las condiciones teóricas que permiten obtener una aproximación a una solución.

- (b) Use el método de aproximaciones sucesivas para encontrar una solución cercana a $(x_1, x_2) = (1, 1)$ del sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 4,32 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Verifique las condiciones teóricas que permiten obtener una aproximación a una solución.

Desarrollo

- (a) Para aplicar el método de aproximaciones sucesivas debemos determinar primero un intervalo en el que ocurra un cambio de signo. Consideremos el intervalo $[1, 3]$ y evaluemos la función en los extremos.

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 + 1 = 19$$

Ahora, construyamos $x = F(x)$ para esto despejemos la variable.

$$x^3 = 3x - 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{3x - 1}$$

Para demostrar la unicidad en el método de aproximaciones sucesivas, debemos verificar que la función $x = F(x) = \sqrt[3]{3x - 1}$ sea una función contractiva en el intervalo $[1, 3]$, es decir, que su derivada en valor absoluto en ese intervalo sea menor que 1. Esto garantiza que el método de aproximaciones sucesivas converja a un único punto dentro del intervalo dado.

Primero, calculemos la derivada de $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{1}{(3x - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

Luego, evaluemos el valor absoluto de la derivada en los extremos del intervalo:

$$|F'(1)| = \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3 \cdot 1 - 1)^{2/3}} \right| \approx 0,6299$$

$$|F'(3)| = \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3 \cdot 3 - 1)^{2/3}} \right| = 0,25.$$

Ambos valores son menores que 1, lo que indica que la función $f(x)$ es contractiva en el intervalo $[1, 3]$. Esto demuestra la unicidad de la solución obtenida mediante el método de aproximaciones sucesivas.

Usando el método de punto fijo que se encuentra en el Anexo 11 al final de este documento y en el repositorio personal se encuentra como resultado (con 4 cifras decimales), 17 iteraciones y una tolerancia de 10^{-6} .

$$x = 1,5320$$

En la siguiente figura se observa que el método converge y su error disminuye con cada iteración.

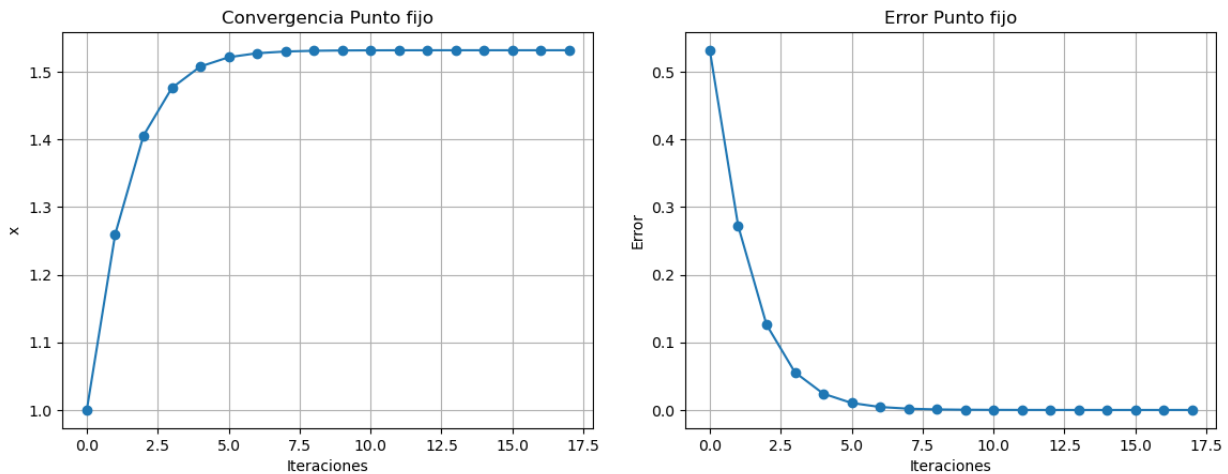


Figura 1: Gráficas del método de punto fijo para la solución de la ecuación planteada.

(b) Reescribamos el sistema en función de x_1 :

$$f_1 = x_1 = \frac{\sqrt{4,32 - x_2^2}}{2}$$

$$f_2 = x_1 = x_2$$

Como punto inicial consideramos $(x_{1o}, x_{2o}) = (1, 1)$ y verificamos las condiciones teóricas para la convergencia como en el enunciado anterior.

$$|f'_1(x)| = -\frac{x_2}{2\sqrt{4,32 - x_2^2}}$$

$$|f'_1(1)| = 0,2451$$

Por lo que cumple la condición de convergencia. Característica evidenciable en la figura 2, estos valores se hallaron con el método de punto fijo descrito en el Anexo 11 al final de este documento y en el repositorio personal. Los resultados fueron $x_1 = 1,2$ y $x_2 = 1,1999$ después de 33 iteraciones y una tolerancia de $5 * 10^{-6}$

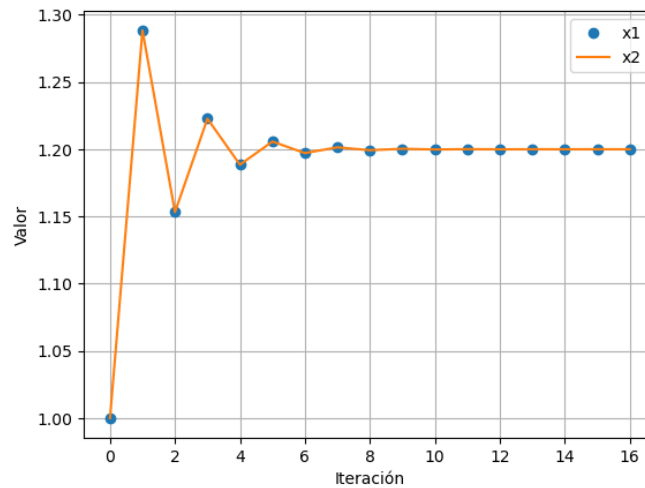


Figura 2: Valores de x_1 y x_2 encontrados usando el método de punto fijo.

Ejercicio 2

Un oscilador amortiguado está modelado por la ecuación diferencial

$$y'' + 10y' + 500y = 0; \quad y(0) = -0,025; \quad y'(0) = -1$$

- Estimar $y(0,053)$ usando el método de Euler progresivo, Euler retrógrado y Euler modificado con $h = 0,025$, y usar el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0,05$. Para ello, determine la solución exacta de la ecuación diferencial planteada y realice un cuadro comparativo (o curvas de error si es de su preferencia) entre los métodos implementados.
- Graficar la solución exacta y la solución aproximada usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0,05$ y $h = 0,1$. Ilustre los resultados en una única figura.

Desarrollo

- La ecuación diferencial que describe el comportamiento de un oscilador amortiguado puede ser expresada de la siguiente manera:

Sea la ecuación diferencial dada:

$$y'' + 10y' + 500y = 0$$

Su polinomio característico asociado es el siguiente:

$$r^2 + 10r + 500 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para determinar las raíces r_1 y r_2 , y al evaluar su naturaleza, ya sea real o compleja, se puede establecer el tipo de solución que corresponde.

Las raíces r_1 y r_2 se obtienen mediante la fórmula cuadrática estándar:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En el caso de la ecuación dada, las raíces son de naturaleza imaginaria, ya que los coeficientes son $a = 1$, $b = 10$ y $c = 500$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial se presenta en la siguiente forma:

$$y(t) = e^{-at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$$

La solución específica resulta en:

$$y(t) = e^{-5t} \left(-0,025 \cos(5\sqrt{19}t) - 0,0516185 \sin(5\sqrt{19}t) \right)$$

Dado que esta ecuación diferencial es de segundo orden y su solución involucra el uso de métodos numéricos, es necesario reformularla en forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El siguiente es el procedimiento general a seguir para lograr este objetivo.

Dada una ecuación diferencial lineal de orden n :

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t)$$

donde y es una función desconocida de t , y $g(t)$ es una función conocida que representa el término fuente. Definimos un conjunto de funciones auxiliares u_1, u_2, \dots, u_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_1 &= y \\ u_2 &= \frac{dy}{dt} \\ u_3 &= \frac{d^2 y}{dt^2} \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

Esto nos permite reescribir la ecuación diferencial como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 \\ \frac{du_3}{dt} &= u_4 \\ &\vdots \\ \frac{du_{n-1}}{dt} &= u_n \\ \frac{du_n}{dt} &= \frac{1}{a_n(t)} (g(t) - a_{n-1}(t)u_n - a_{n-2}(t)u_{n-1} - \dots - a_0(t)u_1) \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede expresarse en forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{u} + \mathbf{h}(t)$$

Donde:

▪ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ es el vector de variables de estado.

▪ $\mathbf{A}(t)$ es una matriz $n \times n$ definida por:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-a_0(t)}{a_n(t)} & \frac{-a_1(t)}{a_n(t)} & \frac{-a_2(t)}{a_n(t)} & \dots & \frac{-a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}$$

▪ $\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{g(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}$ es el vector de términos no homogéneos.

La solución del sistema matricial proporciona las soluciones para las n derivadas sucesivas de y , lo que a su vez te permitirá encontrar la solución para la ecuación diferencial original.

Para nuestra ecuación diferencial $y'' + 10y' + 500y = 0$ y las condiciones iniciales: $y(0) = -0,025$ y $y'(0) = -1$.

Reemplazando y'' por $\frac{d^2y}{dt^2}$, obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 500y = 0$$

Este sistema de ecuaciones de segundo orden puede expresarse en forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -500 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Donde:

▪ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ es el vector de variables de estado.

▪ La matriz de coeficientes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -500 & -10 \end{bmatrix}$.

Las condiciones iniciales se convierten en:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -0,025 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ahora que reescribimos la ecuación diferencial podemos utilizar los métodos numéricos discutidos en el curso para resolverla.

En la figura 3 se muestran las soluciones de los métodos considerados en comparación con la solución exacta. Se observa que el método de Euler explícito presenta el peor rendimiento debido a su naturaleza de un solo paso y al error acumulado. En contraste, los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y Euler modificado, que emplean evaluaciones ponderadas en su paso o aproximación, muestran un mejor desempeño.

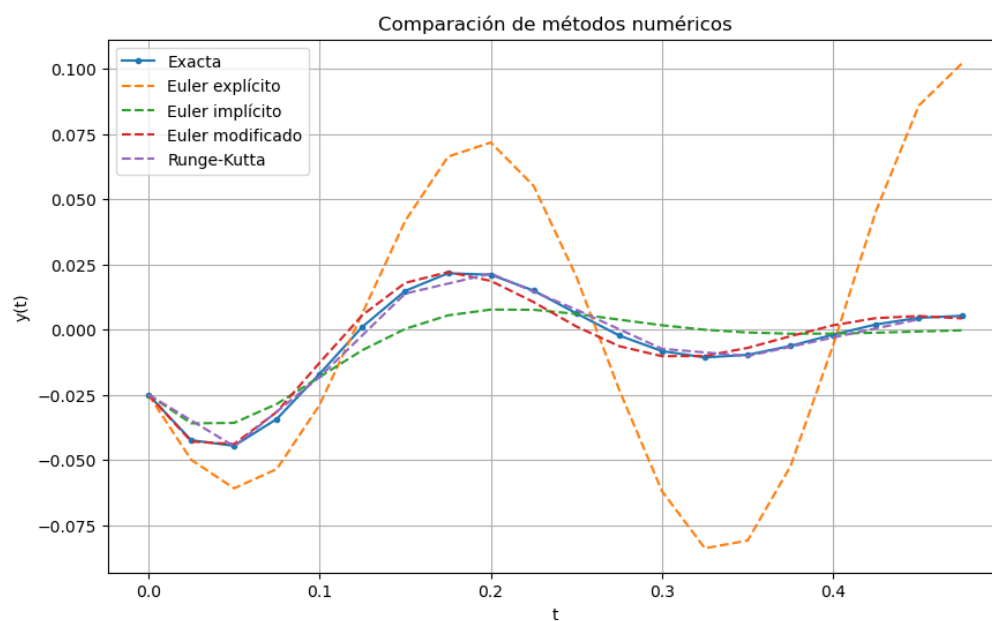


Figura 3: Solución de todos los métodos implementados.

Esto es más evidente en el cuadro 1. Si consideramos la solución en $t = 0,05$ (resaltada en gris), los métodos que presentan una mejor aproximación a la solución exacta son Euler modificado y Runge-Kutta. Estos métodos incorporan ajustes en su paso o en la evaluación de la función, lo que resulta en una aproximación significativamente mejor.

| t | Exacta | Euler explícito | Euler implícito | Euler modificado | Runge-Kutta 4 |
|------|---------|-----------------|-----------------|------------------|---------------|
| 0.05 | -0.0446 | -0.0609 | -0.0358 | -0.0439 | -0.0448 |
| 0.1 | -0.017 | -0.0289 | -0.0182 | -0.0127 | -0.0182 |
| 0.15 | 0.0148 | 0.0417 | 0.0002 | 0.0179 | 0.0138 |
| 0.2 | 0.021 | 0.0717 | 0.0076 | 0.0186 | 0.0214 |

Cuadro 1: Comparación de los métodos para diferentes valores de t .

El comportamiento del error es más claro en la figura 4. Si consideramos la comparación del error del método explícito con los demás métodos, la escala no es suficiente, ya que el método explícito

muestra la menor precisión (como se aprecia en la subfigura izquierda). Enfocándonos en los demás métodos, es claro que el más preciso es Runge-Kutta 4, como se discutió anteriormente.

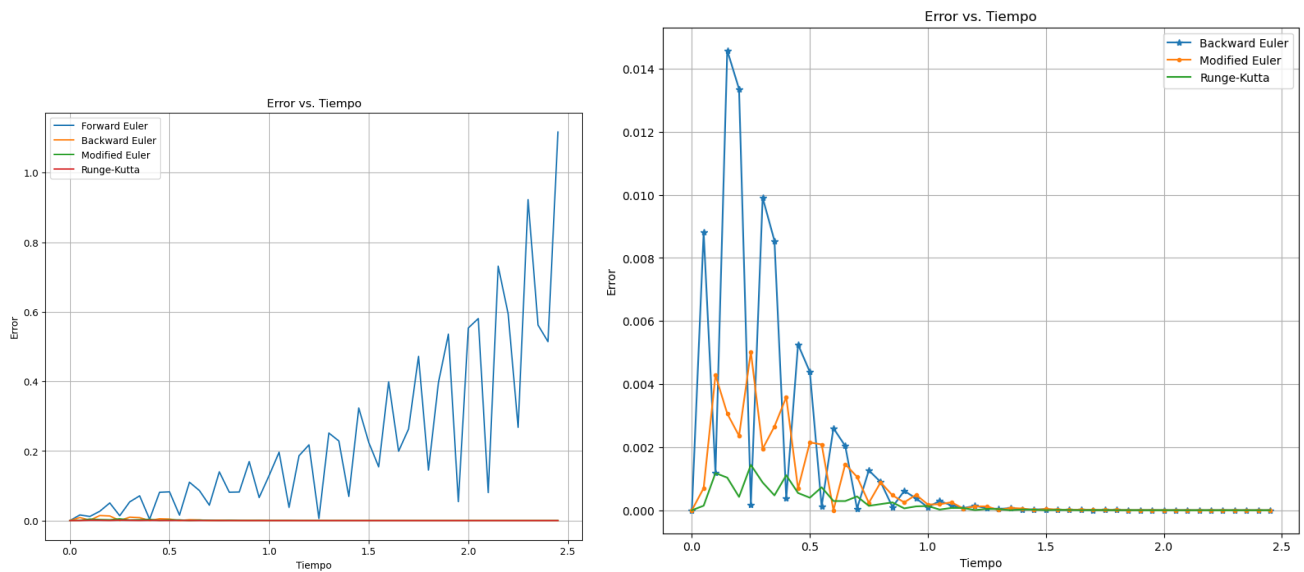


Figura 4: Errores de los métodos numéricos.

- (b) En este contexto, es importante destacar que el método de Runge-Kutta 4 exhibió el rendimiento más sobresaliente. Dado este resultado, es pertinente explorar el impacto de variar los valores del paso h utilizado en el método. La figura 5 ilustra de manera clara cómo el aumento del valor del paso conlleva a aproximaciones menos precisas en la solución, lo que resalta la sensibilidad de este método a la elección de h .

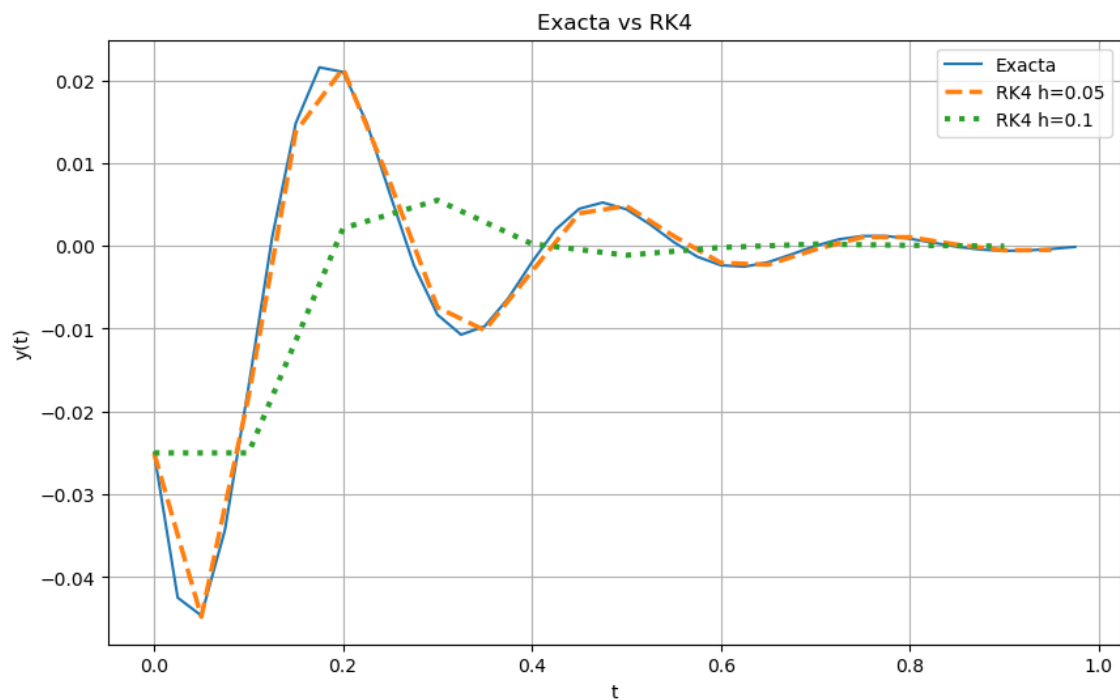


Figura 5: Gráfica de la solución exacta y el método de Runge-Kutta 4 para diferentes valores de h .

Ejercicio 3

Sean $I : X \rightarrow X$ el operador identidad y $B : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado sobre un espacio de Banach X con $\|B\| < 1$. Demostrar:

- (a) El operador $I - B$ es biyectivo, es decir, demostrar que para cada $z \in X$ la ecuación

$$x - Bx = z$$

tiene una única solución $x \in X$

- (b) Las aproximaciones sucesivas

$$x_{n+1} := Bx_n + z, \quad n = 0, 1, \dots$$

con $x_0 \in X$ arbitrario converge a su solución y satisfacen

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|} \|x_1 - x_0\|$$

- (c) Para el operador inverso $(I - B)^{-1}$, demostrar

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

Desarrollo

- (a) Supongamos por contradicción que existen dos soluciones distintas x_1 y x_2 para la ecuación $(I - B)x = z$, donde I es el operador identidad y B es un operador lineal acotado sobre un espacio de Banach X con $\|B\| < 1$. Esto nos da las siguientes expresiones:

$$x_1 - Bx_1 = z$$

$$x_2 - Bx_2 = z$$

Al restar la segunda ecuación de la primera, obtenemos:

$$(x_1 - Bx_1) - (x_2 - Bx_2) = z - z$$

$$x_1 - x_2 - Bx_1 + Bx_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 - B(x_1 - x_2) = 0$$

$$(I - B)(x_1 - x_2) = 0$$

Dado que $\|B\| < 1$, podemos considerar la serie geométrica de B :

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \dots$$

De esta forma, podemos expresar $(I - B)^{-1}(x_1 - x_2)$ como:

$$\begin{aligned}(I - B)^{-1}(x_1 - x_2) &= (I + B + B^2 + \dots)(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) + (Bx_1 - Bx_2) + (B^2x_1 - B^2x_2) + \dots\end{aligned}$$

Usando la linealidad de B y la propiedad de que $\|B^k\| \leq \|B\|^k$, podemos acotar cada término:

$$\begin{aligned}\|(I - B)^{-1}(x_1 - x_2)\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \|B\| \cdot \|x_1 - x_2\| + \|B^2\| \cdot \|x_1 - x_2\| + \dots \\ &\leq (1 + \|B\| + \|B\|^2 + \dots) \cdot \|x_1 - x_2\| \\ &= \frac{1}{1 - \|B\|} \cdot \|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

Sin embargo, $\|B\| < 1$ implica que $1 - \|B\| > 0$, lo que significa que $\frac{1}{1 - \|B\|}$ es un número finito.

Esto contradice la premisa de que x_1 y x_2 son soluciones distintas, ya que si fueran distintas, tendríamos $x_1 - x_2 \neq 0$, lo que llevaría a una norma finita no nula para $(I - B)^{-1}(x_1 - x_2)$, lo cual contradice la propiedad de que $(I - B)^{-1}$ es un operador lineal acotado. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que nuestra suposición inicial es falsa, y en consecuencia, la ecuación $(I - B)x = z$ tiene una única solución. En resumen, hemos demostrado que el operador $I - B$ es biyectivo.

(b) Para un $z \in X$ arbitrario pero fijo, consideramos el operador $A : X \rightarrow X$ definido como

$$Ax := Bx + z.$$

Para establecer la propiedad de contracción de A , observamos inicialmente que para $x, y \in X$, se cumple:

$$\begin{aligned}\|Ax - Ay\| &= \|Bx + z - (By + z)\| \\ &= \|Bx - By\| \\ &= \|B(x - y)\| \\ &\leq \|B\| \cdot \|x - y\|.\end{aligned}$$

Esto implica que A es una contracción con factor de contracción $q = \|B\|$.

Pasamos ahora a examinar la convergencia y unicidad del punto fijo. Partiendo de un x_0 arbitrario en X , definimos recursivamente una secuencia $\{x_n\}$ mediante $x_{n+1} := Ax_n = Bx_n + z$. Luego, para todo $n \geq 1$, podemos establecer la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \\ &\leq \|B\| \cdot \|x_n - x_{n-1}\|.\end{aligned}$$

Por inducción, demostramos que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|B\|^n \cdot \|x_1 - x_0\| \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Aplicando la desigualdad triangular y considerando la serie geométrica, para $m > n$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq (\|B\|^n + \|B\|^{n+1} + \dots + \|B\|^{m-1})\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|} \|x_1 - x_0\|.\end{aligned}$$

Dado que $\|B\| < 1$, es evidente que $\|B\|^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la secuencia $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy. Puesto que X es un espacio de Banach y, por lo tanto, completo, existe un $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente, debido a que A es un operador de contracción, es continuo. Así, podemos afirmar que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax,$$

lo que nos permite concluir que x es un punto fijo de A . La unicidad de x como punto fijo de A se sigue directamente de la propiedad de contracción de A .

(c) Consideremos nuevamente el operador anterior:

$$Ax := Bx + z.$$

Es conocido que A es una contracción con factor de contracción $q = \|B\|$. Ahora, con el elemento inicial $x_0 = z$, las aproximaciones sucesivas tienen la forma:

$$x_n = \sum_{k=0}^n B^k z.$$

Donde el operador $B^k : X \rightarrow X$ está definido de manera recursiva por $B^0 := I$ y $B^k := BB^{k-1}$ para $k \in \mathbb{N}$. Dado que $\|B\|$ es un operador lineal acotado y $\|B\| < 1$, tenemos $\|Bz\| \leq \|B\| \cdot \|z\|$ lo que nos permite aplicar la serie geométrica y la desigualdad triangular para obtener:

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|B^k z\| \leq \sum_{k=0}^n \|B\|^k \|z\| \leq \frac{\|z\|}{1 - \|B\|}.$$

Por lo tanto, dado que $x_n \rightarrow (I - B)^{-1}z$ cuando $n \rightarrow \infty$, se deduce que:

$$\|(I - B)^{-1}z\| \leq \frac{\|z\|}{1 - \|B\|},$$

para todo $z \in X$. En particular:

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Referencias

- [1] Kress, R. (1998). Numerical analysis (Vol. 181). Springer Science & Business Media.
- [2] Stoer, J., Bulirsch, R., Bartels, R., Gautschi, W., & Witzgall, C. (1980). Introduction to numerical analysis (Vol. 1993). New York: Springer.

Anexo

Este anexo presenta los códigos desarrollados en el marco del examen. El propósito principal es proporcionar una vista detallada de la implementación práctica de los conceptos discutidos en el concurso. Los códigos incluidos aquí son una representación tangible de las soluciones propuestas. A través de esta recopilación, se busca facilitar la revisión y comprensión de la implementación detrás de los resultados presentados sin la necesidad de visitar el [repositorio](#).

Ejercicio 1

```
def F(x):  
    return (3*x - 1)**(1/3)  
  
def punto_fijo(initial_guess, tolerance, max_iterations):  
    x_prev = initial_guess  
    for i in range(max_iterations):  
        x_next = F(x_prev)  
        if abs(x_next - x_prev) < tolerance:  
            return x_next, i + 1  
        x_prev = x_next  
    return None, max_iterations  
  
def F1(x2):  
    return np.sqrt((4.32 - x2**2)/2)  
  
def F2(x1):  
    return (4.32 / 3) ** 0.5  
  
def punto_fijo_system(x1, x2, tolerance, max_iterations):  
    for i in range(max_iterations):  
        x1_next = F1(x2)  
        x2_next = F2(x1)  
        if abs(x1_next - x1) < tolerance and abs(x2_next - x2) < tolerance:  
            return x1_next, x2_next, i + 1  
        x1, x2 = x1_next, x2_next  
    return None, None, max_iterations
```

Ejercicio 2

Euler explícito

```
def forward_euler(A, y0, t, h):  
    y = np.zeros((len(y0), len(t)))  
    y[:,0] = y0  
    for i in range(1, len(t)):  
        y[:,i] = y[:,i-1] + h*A@y[:,i-1]  
    return y
```

Euler implícito

```
def backward_euler(A, y0, t, h):
    y = np.zeros((len(t), len(y0)))
    y[0] = y0
    for i in range(1, len(t)):
        y[i] = np.linalg.solve(np.eye(len(A)) - h*A, y[i-1])
    return y
```

Euler modificado

```
def modified_euler(A, y0, t, h):
    y = np.zeros((len(t), len(y0)))
    y[0] = y0
    for i in range(1, len(t)):
        y[i] = y[i-1] + h/2*(A@y[i-1] + A@(y[i-1] + h*A@y[i-1]))
    return y
```

Runge-Kutta 4

```
def rk4(A, y0, t, h):
    y = np.zeros((len(t), len(y0)))
    y[0] = y0
    for i in range(len(t)-1):
        k1 = h*A@y[i]
        k2 = h*A@(y[i]+k1/2)
        k3 = h*A@(y[i]+k2/2)
        k4 = h*A@(y[i]+k3)
        y[i+1] = y[i] + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    return y
```