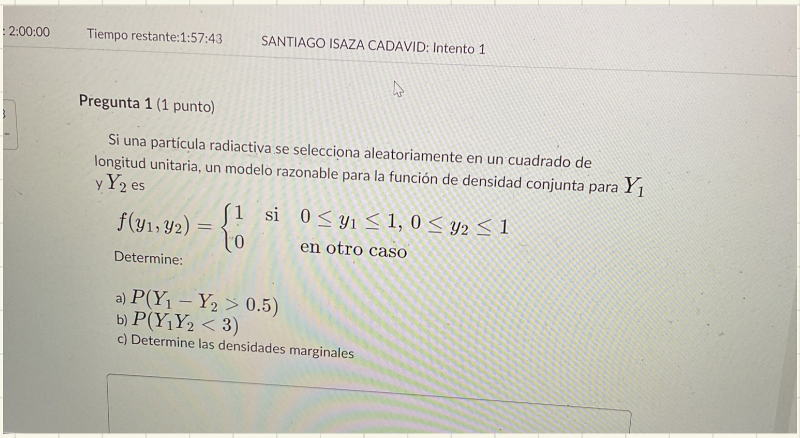
Parcial 4 -

Teoría de la Probabilidad

Santiago Isaza Cadavid



: 2:00:00 Tiempo restante:1:57:43 SANTIAGO ISAZA CADAVID: Intento 1

Pregunta 1 (1 punto)

Si una partícula radiactiva se selecciona aleatoriamente en un cuadrado de longitud unitaria, un modelo razonable para la función de densidad conjunta para Y_1 y Y_2 es

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine:

a) $P(Y_1 - Y_2 > 0.5)$
b) $P(Y_1 Y_2 < 3)$
c) Determine las densidades marginales

a) $P(Y_1 - Y_2 > 0.5)$

$$= 1 - \left[\int_0^1 \int_0^{0.5+Y_2} dy_1 \, dY_2 \right]$$

$$= 1 - \int_0^1 \int_0^{\min(0.5+Y_2,\,1)} dY_1 \, dY_2 \Rightarrow 1 - \int_0^1 \min(0.5+Y_2, 1) \, dY_2$$

$$= 1 - \left[\int_0^{1/2} 0.5 + Y_2 \, dY_2 + \int_{1/2}^1 dY_2 \right]$$

$$= 1 - \left[\int_0^{1/2} 0.5 \, dY_2 + \int_0^{1/2} Y_2 \, dY_2 + \int_{1/2}^1 dY_2 \right]$$

$$= 1 - \left[0.5 x \Big|_0^{1/2} + \frac{Y_2^2}{2} \Big|_0^{1/2} + Y_2 \Big|_{1/2}^1 \right]$$

$$= 1 - 0.875$$

$$= 0.125$$

b) $P(Y_1 Y_2 < 3) = P(Y_1 < 3/Y_2)$

$P(Y_1 Y_2 < 1) \leq P(Y_1 Y_2 < 3)$

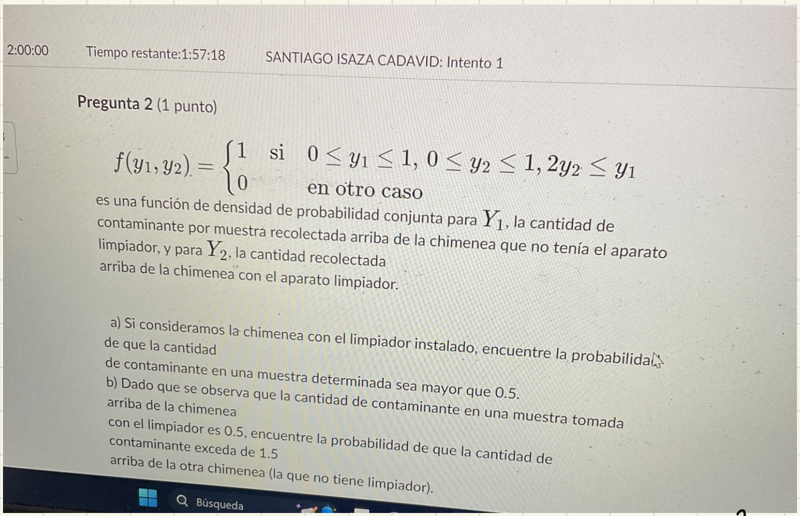
$P(Y_1 Y_2 < 1) = 1 + \int_1^1 \int_0^{1/y_2} dy_1 \, dy_2$

$P(Y_1 Y_2 < 1) = 1$

luego, $P(Y_1 Y_2 < 3) = 1$

c) $f_{Y_1}(y_1) = \int_0^1 1 \, dy_2 = y_2 \Big|_0^1 = 1$

$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^1 1 \, dy_1 = y_1 \Big|_0^1 = 1$



2:00:00 Tiempo restante:1:57:18 SANTIAGO ISAZA CADAVID: Intento 1

Pregunta 2 (1 punto)

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1,\ 2y_2 \leq y_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad conjunta para Y_1, la cantidad de contaminante por muestra recolectada arriba de la chimenea que no tenía el aparato limpiador, y para Y_2, la cantidad recolectada arriba de la chimenea con el aparato limpiador.

a) Si consideramos la chimenea con el limpiador instalado, encuentre la probabilidad de que la cantidad de contaminante en una muestra determinada sea mayor que 0.5.

b) Dado que se observa que la cantidad de contaminante en una muestra tomada arriba de la chimenea con el limpiador es 0.5, encuentre la probabilidad de que la cantidad de contaminante exceda de 1.5 arriba de la otra chimenea (la que no tiene limpiador).

Búsqueda

a) $P(Y \leq 0.5) = \int_0^{1/2} \int_{2y_2}^{2} 1 \, dy_1 \, dy_2$

$= \int_0^{1/2} 2(1-y_2)\, dy_2 = \int_{1/2}^{1} 2z \, dz = z^2 \Big|_{1/2}^{1} = 1 - \frac{1}{4}$

$= 3/4$

b) $P(Y_1 \geq 1.5 \mid Y_2 = 0.5)$

$f_{Y_2}(y_2) = \int_{2y_2}^{2} f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)\, dy_1$

$= \int_{2y_2}^{2} dy_1 = 2(1-y_2)$, así,

$$f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} 2(1-y_2) & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y_2)} & 2y_2 \leq y_1 \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

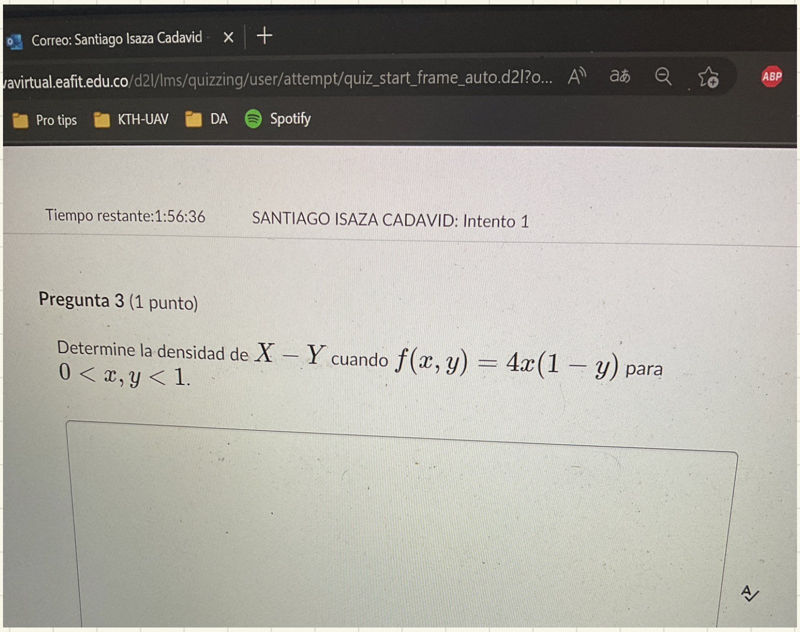
Ahora,

$$P(Y_1 \geq a \mid Y_2 = y_2) = \int_{\max\{a, 2y_2\}}^{2} \frac{dy_1}{2(1-y_2)} = \frac{2 - \max\{a, 2y_2\}}{2(1-y_2)}$$

$$= 1 - \frac{\max\{a/2, y_2\}}{(1-y_2)}$$, como $a = 1.5$ y $y_2 = 0.5$

$$P(Y_1 \geq 1.5 \mid Y_2 = 0.5)$$

$$1 - \frac{\max\{1.5/2, 0.5\}}{1 - 0.5} = \frac{1}{2}$$



Correo: Santiago Isaza Cadavid

avirtual.eafit.edu.co/d2l/lms/quizzing/user/attempt/quiz_start_frame_auto.d2l?o...

Pro tips KTH-UAV DA Spotify

Tiempo restante:1:56:36 SANTIAGO ISAZA CADAVID: Intento 1

Pregunta 3 (1 punto)

Determine la densidad de $X - Y$ cuando $f(x, y) = 4x(1-y)$ para $0 < x, y < 1$.

Sea (X, Y)

$$X - Y \Rightarrow \varphi(X, Y) = (x-y, y)$$

$$(u, v) = \varphi(x, y) = (x-y, y)$$

$$\varphi^{-1}(x, y) = (u+v, v)$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u+v, v)\, dv$$

Sea $x = -v$, tenemos

$$f_{X,Y}(u+v, v) = 4(u+v)(1-v)$$

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} 4(u+v)(1-v)\, dv$$

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-u}^{1} 4(u+v)(1-v)\, dv$$

$$\boxed{\begin{matrix} u + v > 0 \\ v > -u \end{matrix}}$$

$$= 4\left(\frac{u^3 + 3u^2}{6} + \frac{3u+1}{6}\right)$$

$$= \frac{2u^3 + 6u^2 + 6u + 2}{3}$$