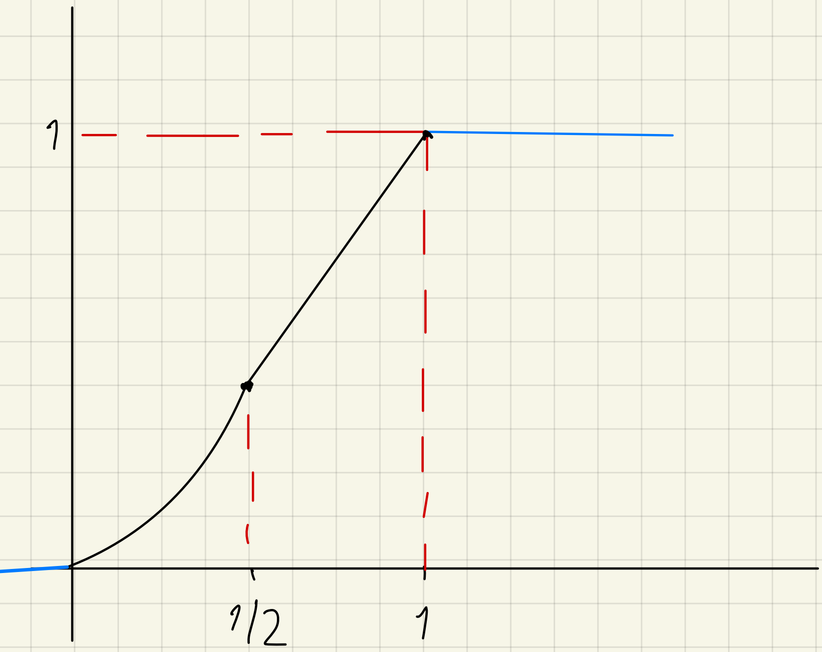
Santiago Isaza Cadavid

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - 3(1-x)/2 & \text{si} \quad 1/2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Para que sea distribución debe cumplir que



1) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Veamos, $F(x) = 1$ para $x \geq 1$, luego, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ ✓

2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$F(x) = 0$, $\forall x < 0$, luego, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ✓

3) Si $X_1 \leq X_2 \Rightarrow F(X_1) \leq F(X_2) \rightarrow$ es creciente, como x^2, $\forall x : 0 \leq x < \frac{1}{2}$ y $1 - 3(1-x)/2$ $\forall x$ $1/2 \leq x < 1$, es creciente ✓

4) $F(x)$ es continua por la derecha, luego, $F(x^+) = F(x)$

Pregunta 2 (1 punto)

El departamento de planeación de un condado requiere que un contratista presente una, dos, tres, cuatro o cinco formas (según la naturaleza del proyecto) para solicitar un permiso de construcción. Sea Y el número de formas requeridas del siguiente solicitante. Se sabe que la probabilidad de que se requieran y formas es proporcional a y, es decir, $p(y) = ky$ con $y = 1, \ldots, 5$

a) ¿Cuál es el valor de k?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que cuando mucho se requieran tres formas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran entre dos y cuatro formas (inclusive)?
d) ¿Podría ser $p(y) = y^2/50$ con $y = 1, \ldots, 5$ como la función masa de probabilidad de Y?

a) $p(y) \geq 0$,

$$\sum p(y) = 1$$

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k = 1$$

$$15k = 1$$

$$\boxed{k = 1/15}$$

b) $$P(y \leq 3) = \sum_{y=1}^{3} p(y) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5}{15} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

c) $$P(2 \leq y \leq 4) = P(y \leq 4) - P(y \leq 2)$$

$$= \sum_{y=1}^{4} p(y) - \sum_{y=1}^{2} p(y)$$

$$= P(y = 3) + P(y = 4) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

d) Veamos si $p(y) = y^2/50$, $y = 1, 2, \ldots 5$, puede ser pdf.

$$\sum_{y} p(y) = 1, \quad \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25}{50} = \frac{55}{50}$$

$\boxed{\frac{55}{50} > 1, \text{ no puede ser pdf}}$

Pregunta 3 (1 punto)

Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad $f(x)$ como aparece abajo. Demuestre que $f(x)$ es efectivamente una función de probabilidad y compruebe que X no tiene esperanza finita.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

$$\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^k = -\frac{1}{k} + \frac{1}{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{k} \geq 0$$

$k = x$

Ahora, veamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Analicemos $E(x)$

$$E(x) = \int_1^{\infty} x \, \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^{\infty}$$

$\ln(\infty) - \ln(1)$, es claro que no es finita

Una función de densidad es simétrica respecto a a si $f(a+x) = f(a-x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Sea X una variable aleatoria con densidad simétrica respecto de a. Demuestre las siguientes afirmaciones suponiendo esperanza finita en el primer inciso y n-ésimo momento finito en el segundo inciso.

a) $E(X) = a$
b) $E((X-a)^n) = 0$, para n impar.

a) $E(X-a) = E(X) - E(a) = E(X) - a$

y $E(X-a) = \int_{\mathbb{R}} (x-a) f(x)\, dx$ $\qquad u = x-a$, $du = dx$

entonces $E(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f(u+a)\, du$

Sea $g(u) = f(u+a)$, $g(-u) = f(-u+a)$

y $f(u+a) = f(-u+a) = g(u)$, es par

A su vez $h(u) = u$, $h(-u) = -u = -h(x)$ impar.

$h(u) \cdot g(u)$ impar

Tenemos así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, f(u+a)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, g(u)\, du = 0 = E(x-a)$$

entonces $E(x-a) = E(X) - a$

$\Rightarrow E(x) - a = 0 \Rightarrow E(x) = a$

b)

$$E((X-a)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^n f(x)\,dx \quad , \quad u = x-a$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u^n f(u+a)\,du$$

para n impar,

$h(u) = u^n$ es impar, y $g(u) = f(u+a)$ es par. Teniendo en cuenta el numeral anterior, y por tanto $h(u)g(u)$ es impar, así:

$$E((X-a)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} u^n f(u+a)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)g(u)\,du = 0$$

para n impar.