

Modelo de circulación atmosférica

Pablo A. Osorio Marulanda
Sistemas Lineales
Ingeniería Matemática
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad EAFIT
paosoriom@eafit.edu.co

Santiago Isaza Cadavid
Sistemas Lineales
Ingeniería Matemática
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad EAFIT
sisazac@eafit.edu.co

I. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo de Lorenz (Lorenz-84) modela el comportamiento de la atmósfera de la Tierra en cada hemisferio promediando las condiciones en diferentes latitudes, lo que permite una reducción a solamente tres variables, contrario a la alternativa de resolver una gran cantidad de ecuaciones hidrodinámicas simultáneas donde el orden puede llegar hasta 10^7 , ver [2]. El modelo implica un equilibrio entre la energía de las corrientes de viento del oeste y la energía que es transportada hacia los polos. Como consecuencia, la transferencia de calor en cada hemisferio genera una disminución global de la temperatura en la dirección de los polos norte y sur, y también predice que los vientos del oeste serán más débiles. El sistema está representado por las ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = -y(t)^2 - z(t)^2 - ax(t) + aF \quad (1)$$

$$y'(t) = x(t)y(t) - bx(t)z(t) - y(t) + G \quad (2)$$

$$z'(t) = x(t)z(t) + bx(t)y(t) - z(t) + G' \quad (3)$$

En este sistema las variables son adimensionadas, los términos en la primera columna del lado derecho de las ecuaciones anteriores expresan que la energía $(y^2 + z^2)/2$, transportada hacia los polos disminuye la energía cinética, $x^2/2$, del viento proveniente del oeste (y en consecuencia disminuye la diferencia de temperatura) Si el modelo constase solo de estos términos, la energía total, $E = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ sería constante. Además, esta energía tampoco es modificada por los términos de

la segunda columna. Estas caracterizan el cambio de energía entre los modos y y z . Ahora, si los valores de b son mayores que uno, representará que este intercambio será más rápido que entre los vórtices y el viento del oeste. Los términos de la tercera columna describen la amortiguación producto de la disipación atmosférica. Por ejemplo, en la ecuación 1 si $a < 1$ reflejaría un amortiguamiento del viento del oeste más débil que el de los vórtices. Ambos coeficientes de y y z son -1 , lo que indica que el tiempo también es adimensional en este modelo. Sin embargo, la unidad de tiempo puede ser considerada el tiempo de amortiguamiento de los vórtices, que son cinco días en la atmósfera. Por último, la columna final corresponde a constantes de conducción debido a las diferencias de temperatura que se originan debido a la irregularidad del calentamiento de la Tierra por el Sol.

Parámetro	Descripción
F	Es el valor medio de la diferencia de temperatura del ecuador al polo norte
a	Representa el amortiguamiento del viento del oeste
b	Representa el intercambio de energía entre los vórtices y el viento
G	Fuerza impulsora térmica
G'	Fuerza impulsora térmica

II. METODOLOGÍA

A continuación se describe en detalle la metodología usada.

II-A. Método de Euler y Runge-Kutta

El método de Euler es un procedimiento de integración numérica que permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Este método no es tan preciso debido a que es de primer orden, no obstante al ser un método con poco costo computacional es útil como primera aproximación. Primero se define un paso $h = \frac{x_f - x_0}{n}$ Y a partir de esto se resuelve de manera recursiva la ecuación.

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

donde $f(x_{n-1}, y_{n-1})$ es la derivada del punto calculado en la iteración anterior. Donde se multiplica esta derivada por el paso h obteniendo el cambio de la función en ese paso determinado.

De igual manera se utilizaron los métodos Runge-Kutta, en particular RK-2 y RK4. El método RK2 está dado por la expresión

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Y para el método RK4 tenemos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde podemos obtener cada valor de k con las siguientes expresiones:

- $k_1 = f(x_n, y_n)$
- $k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1h)$
- $k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2h)$
- $k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3h)$

En ambos métodos $f(x, y)$ se refiere a la derivada y'

II-B. Linealización

Para linealizar debemos escoger un punto de operación en el que se aproximara el sistema no lineal a uno que sí lo sea. Usando la representación del espacio de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Para el trabajo se escoge un punto de tal manera que haga que todas las ecuaciones de estado sean iguales a cero, esto es, escogemos un punto de

equilibrio. En este orden de ideas, el punto de operación está definido como

$$x_0 = x(t_0) \quad u_0 = u(t_0)$$

$$\dot{x} = f(x_0, u_0)$$

Después de obtener el punto de operación, se linealiza alrededor de este punto. Para esto se calcula el Jacobiano de las ecuaciones de estado y se evalúa el punto de operación en la matriz. Donde el Jacobiano se define como

$$J_F(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Con este procedimiento encontramos la matriz del A y de igual manera es posible realizar este mismo procedimiento usando MATLAB y el comando 'linmod'.

III. PLAN DE SOLUCIÓN

1. Describir las ecuaciones de estado del modelo no lineal.
2. Implementar el modelo en Simulink utilizando diagramas de bloques.
3. Utilizar máscaras en el modelo, permitiendo mayor facilidad a la hora de variar los parámetros.
4. Determinar diferentes entradas para el modelo y ver cómo se comporta en esos casos.
5. Implementar métodos numéricos para comparar con los resultados de la simulación.
6. Simular con diferentes valores de parámetros y entradas para analizar cómo se comporta el sistema antes estos cambios.
7. Determinar la curva de linealidad del sistema.
8. Escoger un punto de operación para linealizar y obtener el sistema linealizado.
9. Realizar un análisis de los resultados obtenidos; valores numéricos y gráficas.

IV. RESULTADOS

IV-A. Implementación en Simulink

En la figura 1 se presenta un diagrama de bloques del sistema descrito. De manera adicional en la figura 2 se muestran los componentes del subsistema del modelo mostrado previamente.

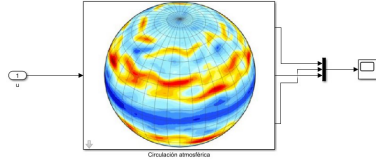


Fig. 1. Implementación del modelo en Simulink

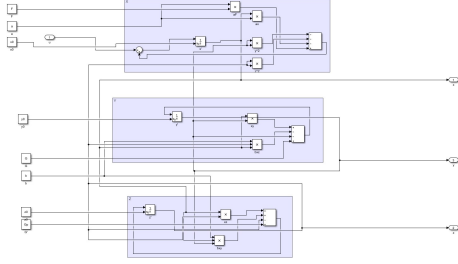


Fig. 2. Diagrama de bloques

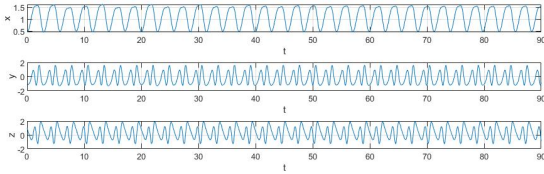
IV-B. Validación

Para realizar la validación del modelo se usaron diversas fuentes. Una de ellas fue, [1] en el cual se realizan varias pruebas de modelación al modelo Lorenz 84. Una de estas se realizó con los siguientes valores de parámetros:

G	F	a	b	X0	Y0	Z0
0.8	8	0.25	4	0.5	-1.1	1

TABLE I

VALORES DE LOS PARÁMETROS Y CONDICIONES INICIALES



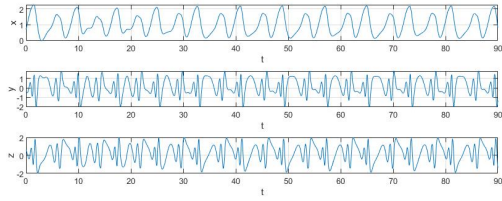
Un ejemplo como el presentado representa las series de tiempo originalmente estudiadas por Lorenz. Estas condiciones iniciales convergen a una solución periódica que coexiste con un atractor. Para

este mismo valor de los parámetros y considerando un cambio en las variables iniciales otorgado por

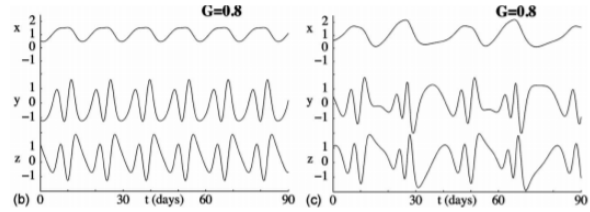
X0	Y0	Z0
0.7	-0.4	0.6

TABLE II

NUEVAS CONDICIONES INICIALES



Se puede ver como resultante otra solución periódica que coexiste con el mismo atractor antes hallado. Esto demuestra nuevamente el nivel de sensibilidad a las condiciones iniciales que tiene modelo caótico. Donde los resultados de [1] son



Adicionalmente, sirviéndonos del mismo trabajo [1], se evaluó la existencia de 3 atractores coexistiendo para el siguiente grupo de parámetros:

G	F	a	b
6.846	1.287	0.25	4

De esta manera se evaluaron 3 condiciones iniciales las cuales reciben el nombre de A, B y C, con los siguientes valores respectivamente.

	x0	y0	z0
A	-0.6	-0.58	0
B	0.87	-1.4	0
C	0.71	-0.96	0

En [1] los resultados de estos valores s
iguientes:

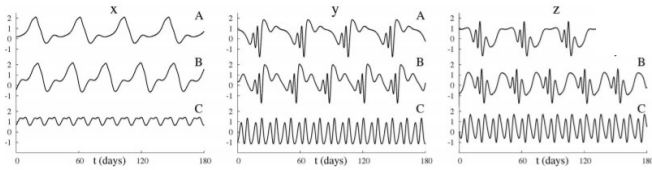


Fig. 3. Atractor A

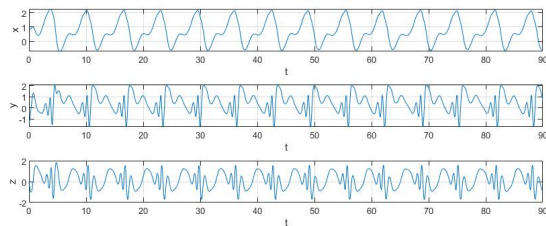


Fig. 4. Atractor B

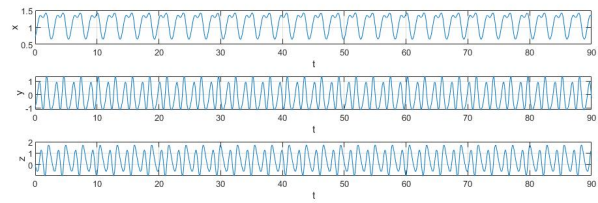


Fig. 5. Atractor C

Realizando la simulación del modelo con estos
mismos valores obtenemos:

En este orden de ideas también podemos com
parar los diagramas de fases con los resultados
anteriores. En [1] obtuvieron:

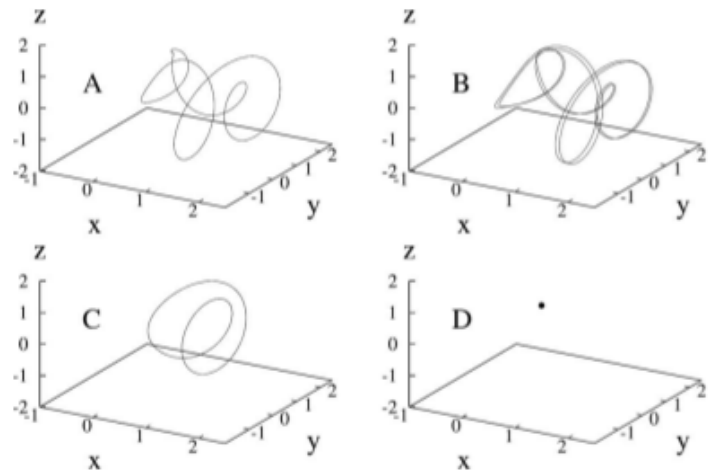


Fig. 6. Diagrama de fases

Y en el modelo de Simulink se obtuvo:

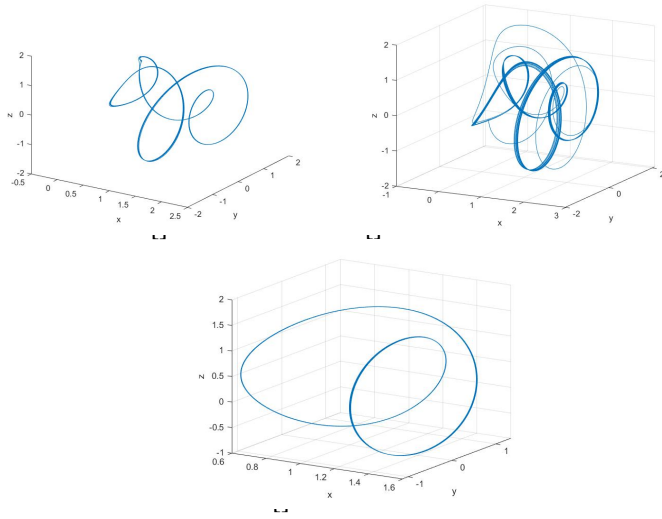


Fig. 7. Diagrama de fases Atractor A, B y C

Es evidente que si bien la calidad de la onda en términos de amplitud y forma coinciden en los casos evaluados, no lo hace con el periodo. Es por ello que para cada caso evaluado se reevaluaron los resultados a través de la implementación del modelo Lorenz 84 realizada en Wolfram [4]. De manera que, dado que los otorgados por este software coincide por los arrojados en el modelo que se está trabajando, se asume que en el trabajo realizado por [1] se simplifican las soluciones gráficas mostradas.

IV-C. Simulación con diferentes tipos de entrada

Para estos experimentos, se tendrán en cuenta los parámetros descritos en la Tabla IV-B

1. **Ruido:** Extrapolando este modelo a una aplicación real es claro que la medida de las velocidades del viento en la circulación atmosférica es probable que traigan ruido consigo. Es por ello que es pertinente evaluar el efecto del ruido en este modelo. Se aplicará el ruido de manera marginal a cada una de las variables (x , y y z) y a las 3 al mismo tiempo, evaluando el diagrama de fase y las ondas que cada uno termina generando. Partiendo del siguiente output que fue obtenido con $(F, G, G', a, b) = (8, 1, 0, 0, 25, 4)$ y considerando las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) =$

$(0, 5, 0, 2, 0)$ se obtiene, sin ruido y con una entrada constante igual a 0, lo siguiente:

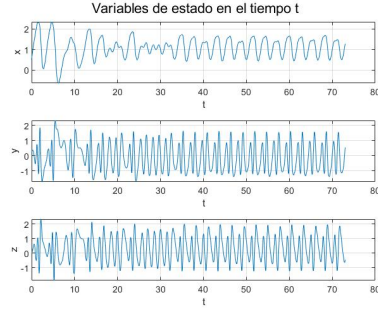


Fig. 8. Comportamiento de las variables de estado sin ruido.

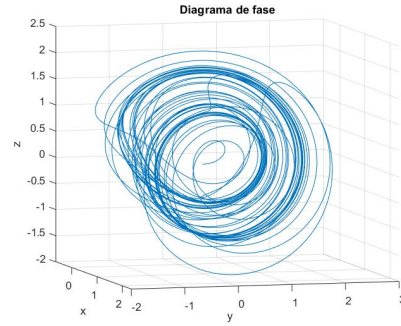


Fig. 9. Diagrama de fase XYZ sin ruido.

Ahora, haciendo el análisis respectivo con un ruido blanco de banda limitada con parámetro con una intensidad de 0.1 y un tiempo de muestreo de 0.1 se obtiene:

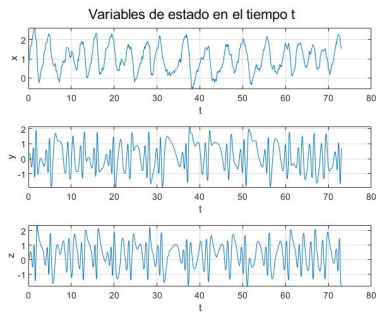


Fig. 10. Comportamiento de las variables de estado con ruido en la variable x .

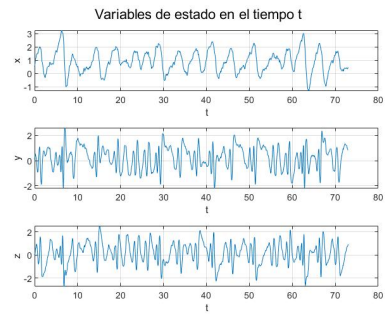


Fig. 13. Comportamiento de las variables de estado con ruido en todas las variables.

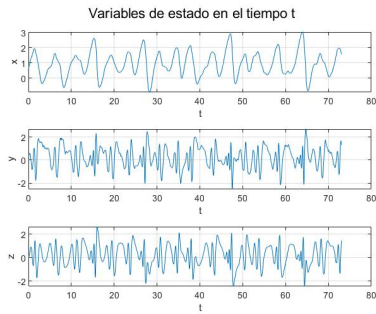


Fig. 11. Comportamiento de las variables de estado con ruido en la variable y .

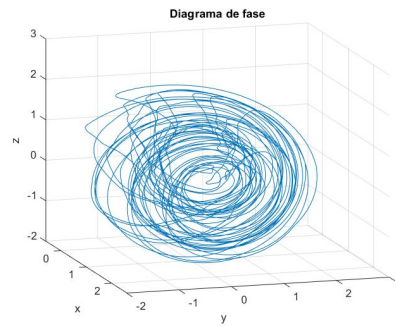


Fig. 14. Diagrama de fase XYZ con ruido en la variable x .

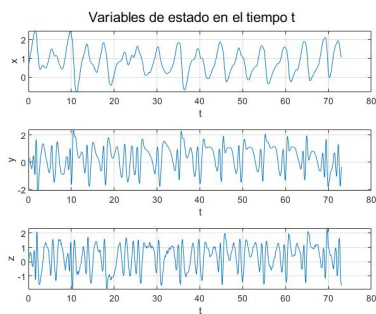


Fig. 12. Comportamiento de las variables de estado con ruido en la variable z .

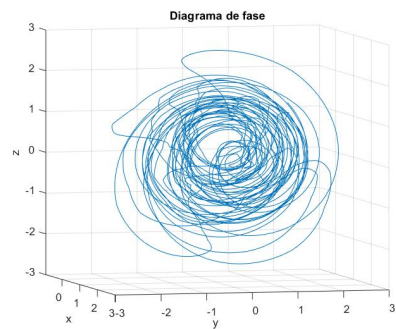


Fig. 15. Diagrama de fase XYZ con ruido en la variable y .

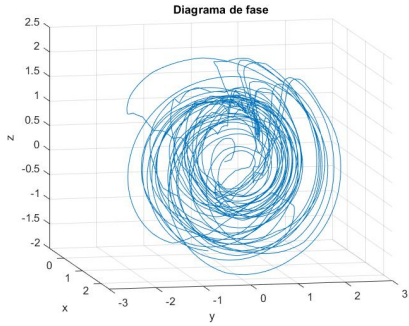


Fig. 16. Diagrama de fase XYZ con ruido en la variable z .

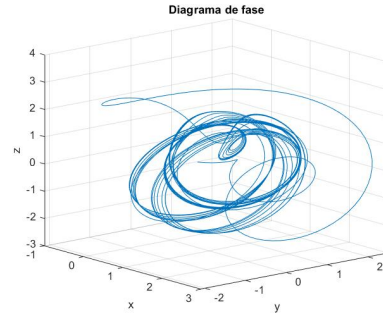


Fig. 18. Diagrama de fase con una entrada constante $u = 1$.

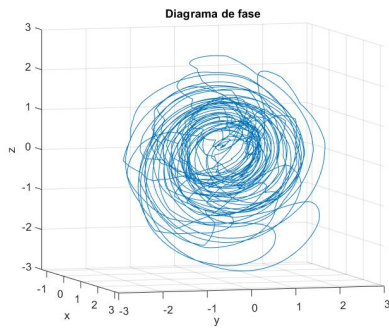


Fig. 17. Diagrama de fase XYZ con ruido en todas las variables.

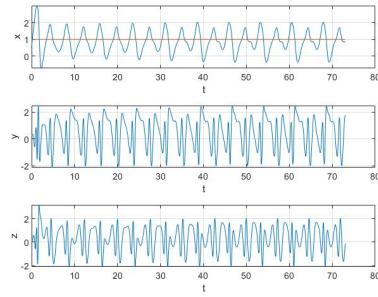


Fig. 19. Variables de estado con una entrada constante $u = 1$ para la velocidad (x).

Para realizar la evaluación en la entrada del modelo se realizaron pruebas con diferentes tipos de entrada aplicadas a la variable x , lo que indica que la velocidad media del viento del oeste va a estar modificada, aunque esto no tenga un significado físico real. El modelo evaluado con estas entradas contiene los mismos parámetros que el ejecutado en el modelo sin ruido.

2. Entrada constante:

■ $u = 1$

■ $u = 5$

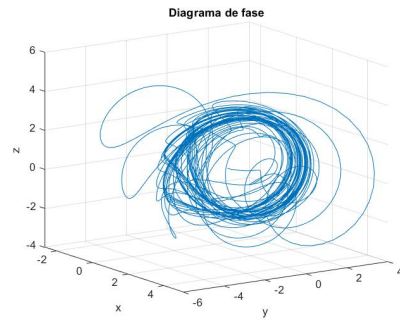


Fig. 20. Diagrama de fase con una entrada constante $u = 5$.

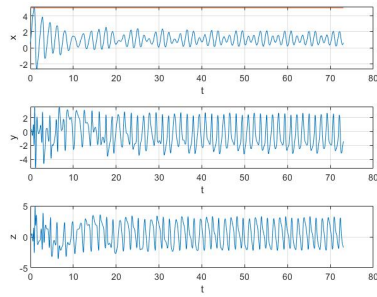


Fig. 21. Variables de estado con una entrada constante $u = 5$ para la velocidad (x).

3. **Step:** Una entrada escalón o step de 3 en el tiempo 36 de la simulación. Lo que podría implicar un cambio repentino en el promedio debido a algún fenómeno ambiental.

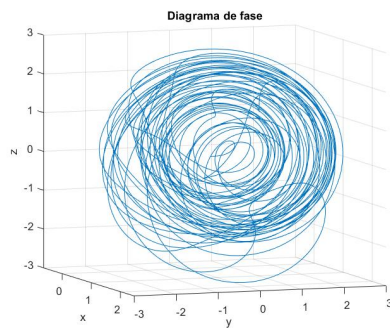


Fig. 22. Diagrama de fase con una entrada step.

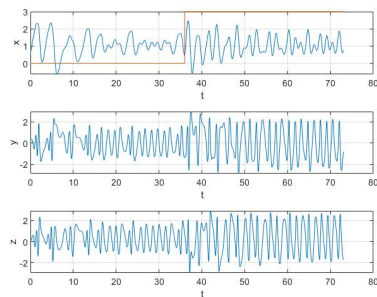


Fig. 23. Variables de estado con una entrada step para la velocidad (x).

Para este ejemplo es notorio que el sistema no recupera la tendencia que venía trayendo, esto es, la amplitud de las ondas generadas por variables como y y z no se vuelven a recuperar en el tiempo simulado.

4. **Sinusoidal:** Para este caso se aplica una función seno con una amplitud de 2 y una frecuencia de $0,2(\text{rad/sec})$. Es evidente el efecto que tienen, sobre todo, los valores negativos de la función, ya que disminuyen la ondulación en los periodos donde esto se cumple.

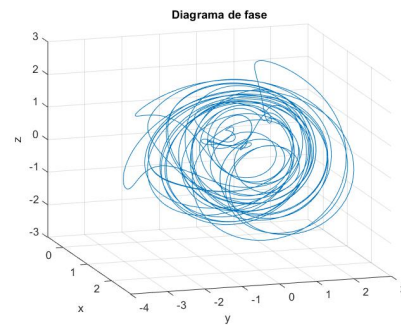


Fig. 24. Diagrama de fase con una entrada sinusoidal.

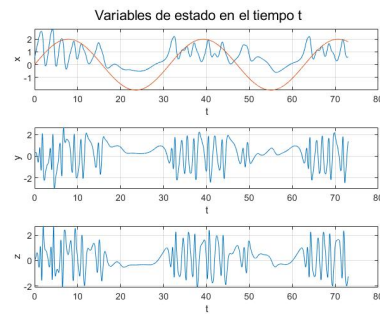


Fig. 25. Variables de estado con una entrada sinusoidal para la velocidad (x).

5. **Pulso:** Para este caso se generó un pulso con una amplitud de 1 unidad cada 10 segundos con un ancho del 10% por periodo.

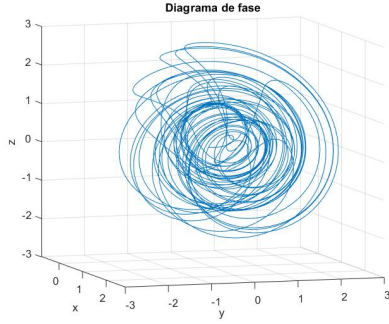


Fig. 26. Diagrama de fase con una entrada pulso

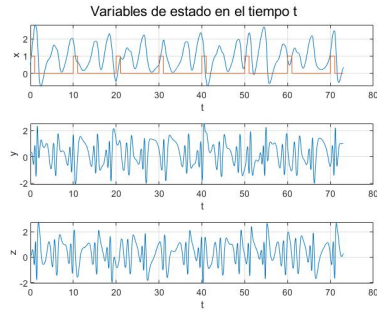


Fig. 27. Variables de estado con una entrada pulso para la velocidad (x)

IV-D. Cambios en los parámetros

Para realizar el análisis por cambio de parámetros se debe recalcar el hecho de que al ser un modelo caótico, el modelo es muy sensible a los cambios en cualquier parámetro. Es por ello que este análisis se realizará teniendo en cuenta 3 conceptos, basados en el análisis realizado por Hu Wang et. al [3]:

- **Chaos(caos):** Cuando a partir de un grupo de parámetros las variables de estado no siguen un modelo periódico, esto es, sus variaciones son, en efecto, caóticas. Ver figura 28
- **Limit cycle (ciclo límite):** Cuando a partir de un grupo de parámetros las variables de estado siguen un modelo periódico, esto es, repiten su comportamiento cada n periodo de tiempo. Ver figura 29
- **Limit point (punto límite):** Cuando a partir de un grupo de parámetros las variables de

estado convergen a un solo punto en algún momento del tiempo. Ver figura 30

Adicionalmente, para las simulaciones contiguas se consideran como condiciones iniciales $(x,y,z) = (0,5,0,2,0)$, pues estas si bien alteran el comienzo del modelo, no repercuten en la base del análisis que se va a realizar. Aquí algunos ejemplos de los casos que se estudiarán:

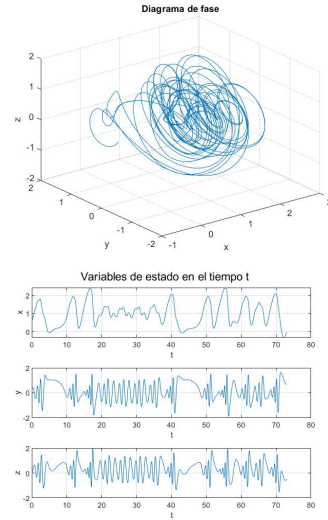


Fig. 28. Modelo con parámetros $(F,G,G',a,b) = (5,1,0,0,25,4)$

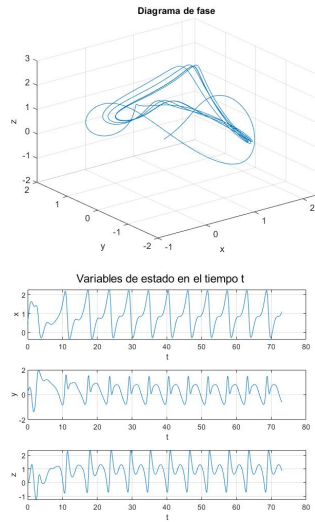


Fig. 29. Modelo con parámetros $(F, G, G', a, b) = (8, 1, 0, 0.25, 1, 7)$

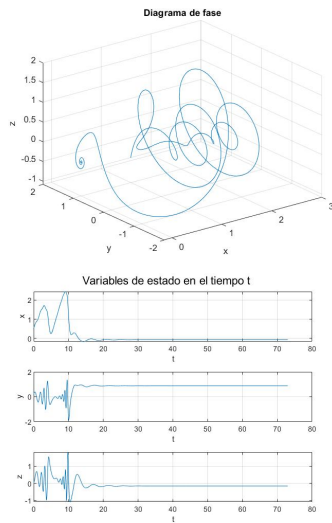


Fig. 30. Modelo con parámetros $(F, G, G', a, b) = (8, 1, 0, 1, 0, 1, 4)$

Las siguientes son las tablas que representan el comportamiento del modelo con variación de todos los parámetros.

TABLE III
VARIACIÓN DE PARÁMETROS CAMBIANDO G

F=8	G'=0	a=0.25	b=4
G		Comportamiento	
0.1		Limit cycle	
0.2		Limit cycle	
0.3		Limit cycle	
0.4		Limit cycle	
0.5		Limit cycle	
0.6		Limit cycle	
0.7		Limit cycle	
0.8		Limit cycle	
0.9		Chaos	
1		Chaos	
1.5		Limit point	
2		Limit cycle	
3		Limit cycle	
5		Limit cycle	

TABLE IV
VARIACIÓN DE PARÁMETROS CAMBIANDO G'

F=8	G=1	a=0.25	b=4
G'		Comportamiento	
0.1		Chaos	
0.2		Chaos	
0.3		Chaos	
0.4		Limit cycle	
0.5		Chaos	
0.6		Chaos	
0.7		Chaos	
0.8		Chaos	
0.9		Chaos	
1		Limit point	
1.5		Limit cycle	
2		Limit cycle	
3		Limit cycle	
5		Limit point	

TABLE V
VARIACIÓN DE PARÁMETROS CAMBIANDO A

F=8	G'=0	G=1	b=4
a		Comportamiento	
0		Limit point	
0.1		Limit point	
0.2		Limit cycle	
0.3		Limit cycle	
0.4		Limit cycle	
0.5		Limit cycle	
0.6		Limit cycle	
0.7		Limit cycle	
0.8		Limit cycle	
0.9		Limit cycle	
0.99		Limit cycle	

TABLE VI
VARIACIÓN DE PARÁMETROS CAMBIANDO B

F=8	G'=0	a=0.25	G=1
b	Comportamiento		
1	Limit point		
1.5	Limit cycle		
2	Chaos		
2.5	Chaos		
3	Limit cycle		
3.5	Limit cycle		
4	Chaos		
4.5	Limit cycle		
5	Limit cycle		
6	Limit cycle		
7	Limit cycle		
8	Limit cycle		
9	Limit cycle		
10	Limit cycle		

TABLE VII
VARIACIÓN DE PARÁMETROS CAMBIANDO F

G=1	G'=0	a=0.25	b=4
F	Comportamiento		
1	Limit point		
2	Limit point		
3	Limit point		
4	Limit point		
5	Chaos		
6	Limit cycle		
7	Chaos		
8	Chaos		
9	Limit cycle		
10	Limit cycle		
11	Limit cycle		
12	Limit cycle		
13	Limit cycle		
14	Limit cycle		
15	Limit cycle		

IV-E. Solución numérica

Para comparar la solución que se obtiene utilizando Simulink con otros métodos numéricos, se realizó una implementación en Matlab de los métodos Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4 y también con el método de Euler. En la figura 31 se pueden observar los valores de las tres variables de estado, en ese caso, Simulink utiliza el método de integración con Runge Kutta 2. De manera similar con la figura 32 y con la figura 33 en las que se usó integración con Euler y RK4, respectivamente. Por último se decidió realizar una comparación usando

ODE3 como método de integración de Simulink, los valores obtenidos se pueden ver en la figura 34.

IV-F. Curvas de linealidad

En la figura 35, 36 y 37 la se observa las curvas de linealidad del sistema.

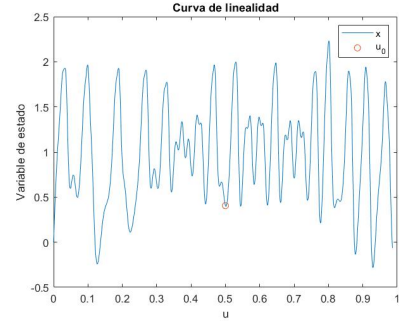


Fig. 35. Curva de linealidad de x

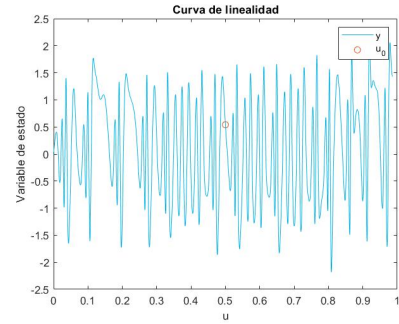


Fig. 36. Curva de linealidad de y

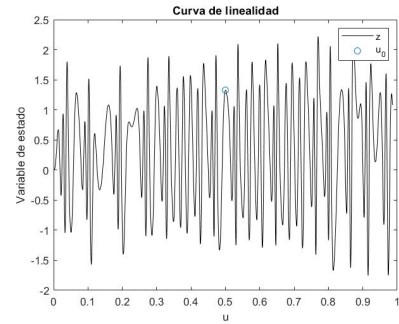


Fig. 37. Curva de linealidad con z

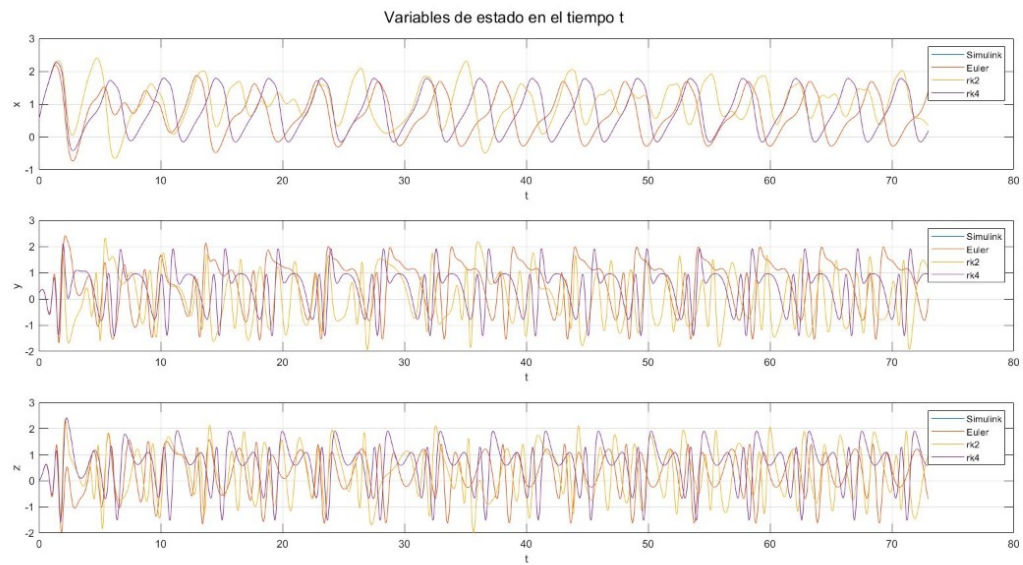


Fig. 31. Comparación de los resultados de Simulink (RK2) y diferentes métodos numéricos

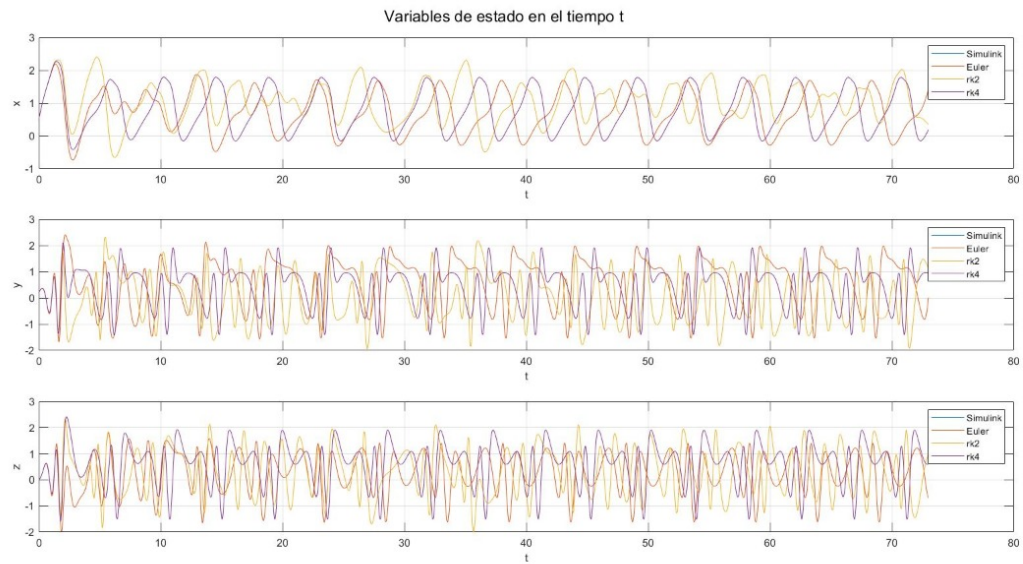


Fig. 32. Comparación de los resultados de Simulink (Euler) y diferentes métodos numéricos

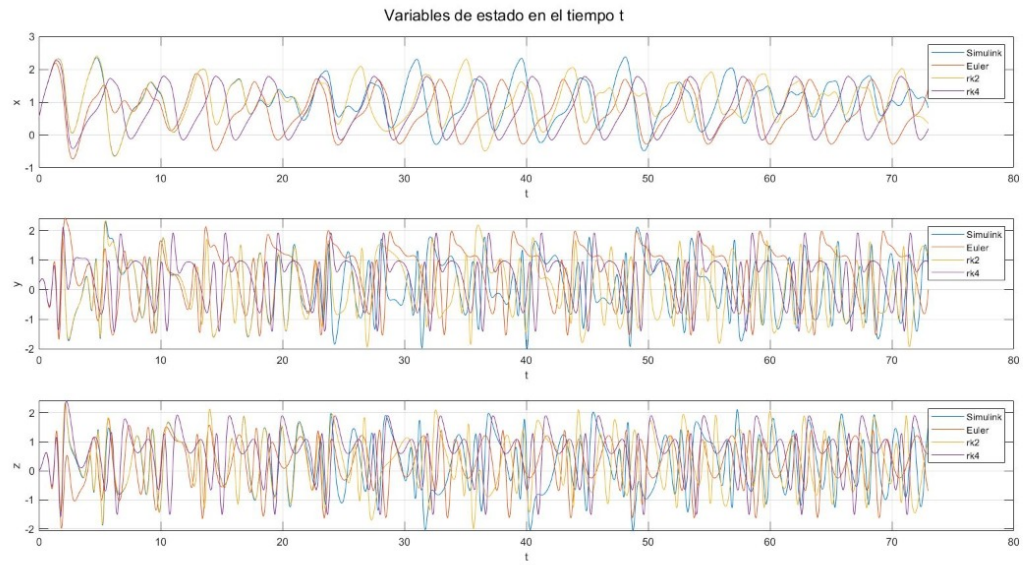


Fig. 33. Comparación de los resultados de Simulink (RK4) y diferentes métodos numéricos

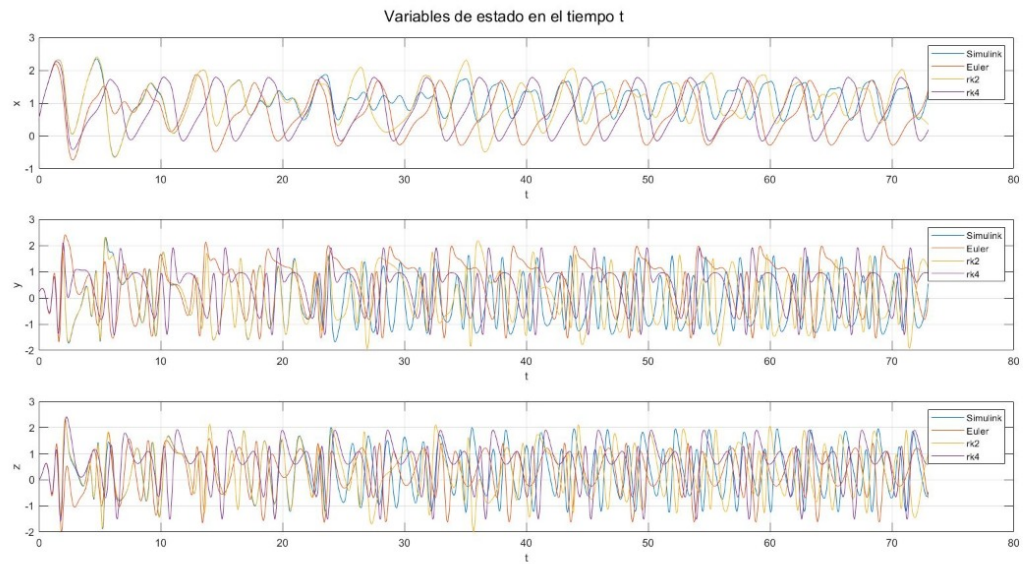


Fig. 34. Comparación de los resultados de Simulink (RK3) y diferentes métodos numéricos

IV-G. Linealización

Lo primero que debemos hacer es igualar las ecuaciones de estado a cero.

$$\begin{aligned} -y(t)^2 - z(t)^2 - ax(t) + aF + u &= 0 \\ x(t)y(t) - bx(t)z(t) - y(t) + G &= 0 \\ x(t)z(t) + bx(t)y(t) - z(t) + G' &= 0 \end{aligned}$$

Despejando las variables obtenemos:

$$y = \frac{(1-x)G}{1-2x+(1+b^2)x^2}$$

$$z = \frac{bxG}{1-2x+(1+b^2)x^2}$$

$$(1-2x+(1+b^2)x^2) \cdot [a(F-x)+u] = G^2$$

Se encuentran cuatro puntos de equilibrio, tres de ellos imaginarios, por lo que el punto de interés será el único punto real, encontrado utilizando la función `vpasolve` de MATLAB.

$$x_0 = \begin{bmatrix} 9,997 \\ -0,00535 \\ 0,02380 \end{bmatrix}$$

Y reemplazando este punto en el Jacobiano

$$A = \begin{bmatrix} -a & -2y & -2z \\ y-bz-1 & x-1 & -bx \\ by+z & bx & x-1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,0107 & -0,0476 \\ -1,1006 & 8,9976 & -39,9904 \\ 0,0024 & 39,9904 & 8,9976 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV-G.1. Comparación del modelo no lineal y el método lineal: El siguiente representa el diagrama de bloques para la evaluación del modelo lineal.

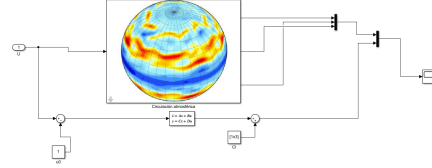


Fig. 38. Diagrama de simulación para la comparación del modelo no lineal con el modelo lineal

Considerando los parámetros encontrados y bajo la estructura mencionada, el modelo lineal en comparación con el no lineal es el siguiente:

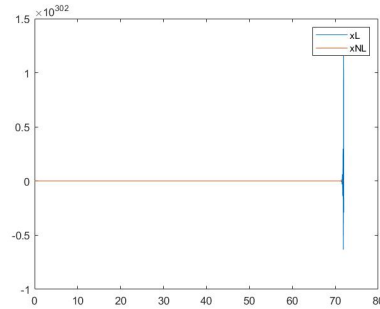


Fig. 39. Diagrama de simulación para la comparación del modelo no lineal con el modelo lineal

Es evidente que el modelo linealizado no coincide con el planteado, no solo en forma, sino en escala. Veamos más de cerca los primeros tiempos:

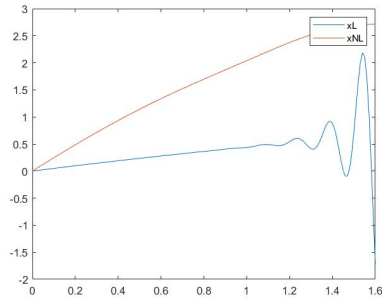


Fig. 40. Diagrama de simulación para la comparación del modelo no lineal con el modelo lineal

Para estos primeros tamaños de paso, tampoco se comportan completamente igual ambos modelos. Esto es claramente por la alta no-linealidad que tiene el modelo Lorenz 84. Finalmente, al realizar el comando `linmod` en Matlab, se obtiene:

```
>> [A1,B1,C1,D1]=linmod('mat_lineal',[x0,y0,z0])

A1 =
    -0.2500    0.0107   -0.0476
    -0.1006    8.9976  -39.9904
     0.0024   39.9904    8.9976

B1 =
     1
     0
     0

C1 =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

D1 =
     0
     0
     0
```

Fig. 41. Diagrama de simulación para la comparación del modelo no lineal con el modelo lineal

V. ANÁLISIS

A. Validación Al ver que el sistema simulado se comporta de manera periódica después de estabilizarse con las condiciones iniciales, la forma y amplitud de las ondas que este

modelo son iguales a las que se plantean en el sistema expuesto por [1], sin embargo dado que no coinciden en periodo, esto es, por unidad de tiempo se repiten más ondas en el modelo planteado aquí en comparación con el modelo expuesto por el autor.

Esto genera una cierta discusión, pues dado que el modelo de este trabajo fue verificado de manera adicional por otra plataforma, es necesario preguntarse porque el presentado en la investigación de [1] no se comporta de la misma manera. Cabe recalcar que el modelo que se plantea allí no contiene el parámetro G' por lo que, para la evaluación y verificación en el modelo de este trabajo fue estrictamente necesario establecer $G' = 0$.

El cambio en los valores iniciales para la primera parte de validación con $G = 8$ nos permite ilustrar de manera específica la sensibilidad y naturaleza caótica del modelo, pues los resultados, si bien siguen siendo periódicos, cambian de manera drástica su manifestación, aunque manteniéndose en un rango de amplitud similar. De manera adicional, tal como se expone en el trabajo [1], un valor de $G = 8$ permite que para todas las condiciones iniciales, la variable eventualmente converja a un conjunto de oscilaciones regulares.

En detalle respecto a la segunda parte de la validación, donde se comparan salidas respecto a la coexistencia de varios co-atractores, el modelo tiene unas salidas correctas que se extrapolan a el trabajo planteado.

B. Simulación con diferentes entradas Si bien la entrada definida en el sistema no tiene un significado físico real, ni tampoco unidades específicas lo podemos interpretar como una alteración, bien sea positiva o negativa, en la velocidad promedio del viento del este, magnitud proporcional a el gradiente de la temperatura norte-sur, esto es, la diferencia de temperatura entre el ecuador y el polo norte. Para la entrada respectiva a las constantes, es posible observar que, tanto el caso de $U=1$ como $U=5$ es posible observar que el siste-

ma tiende a buscar establecer una amplitud constante. Para el primer caso, se toma una afección en términos de periodo respecto al segundo, lo que nos permite deducir que entre más grande sea la constante utilizada, más grande será el periodo.

En el caso de la entrada paso o step, el impacto que tiene es bastante notable en el cambio de la tendencia que mostraban las ondas. Este cambio puede ser interpretado como un cambio repentino en el gradiente de la temperatura dado algún fenómeno físico o ambiental. Al igual que en el caso anterior el sistema tiende a recuperar, para este conjunto de parámetros, que se comportan dinámicamente hablando como un *limit cycle*, la amplitud y generar un nuevo periodo.

La entrada sinusoidal tiene un efecto muy particular en las variables de estado, pues su cambio en valores positivos y negativos hace que, para algunos periodos de tiempo, el sistema no oscile tanto. Esto podría ser interpretado como un cambio estacional, donde hay un componente de la temperatura que baja y sube de manera gradual.

Para el caso de la entrada de pulso es mas complejo establecer una situación en la que se pueda utilizar, sin embargo, para este caso, el sistema encuentra más complejo volver a la amplitud que generalmente maneja.

C. Variación de parámetros

Es evidente que no existe una tendencia notable entre el valor de los parámetros y el tipo de comportamiento, sin embargo hay que tener en cuenta que, el caso particular de G y G' , después de 1.5 y 1 respectivamente tienen un comportamiento común (*limit cycle*) para valores mayores a estos. Adicionalmente, los comportamientos encontrados es posible verificarlos a través de la investigación de Hu Wang et. al [3].

El tipo de comportamiento analizado es el más recomendado en estos casos, pues, un análisis a través de la amplitud de las ondas no otorgaría información para este tipo de sistemas.

D. Método numérico

Para este sistema en particular, dada la gran variación que tienen las soluciones de los métodos numéricos se deberían elegir pasos más pequeños y probablemente algunos que representen mayor costo computacional, pues es evidente que el conjunto de ecuaciones que componen al sistema es sensible incluso, al tipo de métodos a los que fue expuesto para su conclusión en este trabajo.

E. Linealización

El resultado de la linealización analítica (utilizando el Jacobiano), es igual al obtenido utilizando el software de MATLAB. Al comparar las respuestas de ambos modelos, podemos observar que no son iguales o medianamente aproximados, esto se puede justificar dada la alta no-linealidad que presenta este modelo y por supuesto, que es un modelo caótico.

VI. CONCLUSIONES

- Un sistema caótico no es fácil de linealizar.
- A través de la variación de parámetros es notable que, para valores intermedios a los que se analizó, pueden existir un tipo de comportamiento dinámico distinto, esto debido a que no solo el sistema es caótico, sino que el análisis allí expuesto no tiene una tendencia visible.
- Dada la correlación inmediata que existen entre todas las variables de estado, podemos observar que las afecciones en una de ellas afectan, en un periodo de tiempo casi contiguo, a las demás. En este mismo sentido, es posible que la entrada en las demás variables afecte en mayor o menor medida a las demás variables. El análisis realizado al poner la entrada en la primera variable permite hacer una interpretación más adecuada de las mismas, extrapoliéndolas a un posible contexto real.

REFERENCES

- [1] FREIRE, J. G., BONATTO, C., DACAMARA, C. C., AND GALLAS, J. A. Multistability, phase diagrams, and intransitivity in the lorenz-84 low-order atmospheric circulation model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18, 3 (2008), 033121.

- [2] TÉL, T., AND GRUIZ, M. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] WANG, H., YU, Y., AND WEN, G. Dynamical analysis of the lorenz-84 atmospheric circulation model. *Journal of Applied Mathematics* 2014 (2014).
- [4] ZELENY, E. Lorenz's model of global atmospheric circulation. <https://demonstrations.wolfram.com/LorenzsModelOfGlobalAtmosphericCirculation/>, 2012.