

# Modelo de circulación atmosférica: análisis y control

Santiago Isaza Cadavid  
Sistemas Lineales  
Ingeniería Matemática  
Departamento de Ciencias Matemáticas  
Universidad EAFIT  
sisazac@eafit.edu.co

Pablo Osorio Marulanda  
Sistemas Lineales  
Ingeniería Matemática  
Departamento de Ciencias Matemáticas  
Universidad EAFIT  
paosoriom@eafit.edu.co

6 de diciembre de 2020

---

## Resumen

Palabras clave: Modelo de Lorenz, Control, Simulink, Sistema caótico

---

## 1. Descripción del modelo

El modelo de Lorenz (Lorenz-84) modela el comportamiento de la atmósfera de la Tierra en cada hemisferio promediando las condiciones en diferentes latitudes, lo que permite una reducción a solamente tres variables, contrario a la alternativa de resolver una gran cantidad de ecuaciones hidrodinámicas simultáneas donde el orden puede llegar hasta  $10^7$ , ver [1]. El modelo implica un equilibrio entre la energía de las corrientes de viento del oeste y la energía que es transportada hacia los polos. Como consecuencia, la transferencia de calor en cada hemisferio genera una disminución global de la temperatura en la dirección de los polos norte y sur, y también predice que los vientos del oeste serán más débiles. El sistema está representado por las ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = -y(t)^2 - z(t)^2 - ax(t) + aF \quad (1)$$

$$y'(t) = x(t)y(t) - bx(t)z(t) - y(t) + G \quad (2)$$

$$z'(t) = x(t)z(t) + bx(t)y(t) - z(t) + G' \quad (3)$$

En este sistema las variables son adimensionadas, los términos en la primera columna del lado derecho de las ecuaciones anteriores expresan que la energía  $(y^2 + z^2)/2$ , transportada hacia los polos disminuye la energía cinética,  $x^2/2$ , del viento proveniente del oeste (y en consecuencia disminuye la diferencia de temperatura). Si el modelo constase solo de estos términos, la energía total,  $E = (x^2 + y^2 + z^2)/2$  sería constante. Además, esta energía tampoco es modificada por los términos de la segunda columna. Estas

caracterizan el cambio de energía entre los modos  $y$  y  $z$ . Ahora, si los valores de  $b$  son mayores que uno, representará que este intercambio será más rápido que entre los vórtices y el viento del oeste. Los términos de la tercera columna describen la amortiguación producto de la disipación atmosférica. Por ejemplo, en la ecuación 1 si  $a < 1$  reflejaría un amortiguamiento del viento del oeste más débil que el de los vórtices. Ambos coeficientes de  $y$  y  $z$  son  $-1$ , lo que indica que el tiempo también es adimensional en este modelo. Sin embargo, la unidad de tiempo puede ser considerada el tiempo de amortiguamiento de los vórtices, que son cinco días en la atmósfera. Por último, la columna final corresponde a constantes de conducción debido a las diferencias de temperatura que se originan debido a la irregularidad del calentamiento de la Tierra por el Sol.

Parámetro	Descripción
<b>F</b>	Es el valor medio de la diferencia de temperatura del ecuador al polo norte
<b>a</b>	Representa el amortiguamiento del viento del oeste
<b>b</b>	Representa el intercambio de energía entre los vórtices y el viento
<b>G</b>	Fuerza impulsora térmica
<b>G'</b>	Fuerza impulsora térmica

## 2. Metodología

### 2.1. Función de transferencia

#### 2.1.1. Tiempo continuo

La función de transferencia o matriz de funciones de transferencia de tiempo continuo se define a partir de la representación en el espacio de estado como:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B - D$$

El comando necesario para realizarlo en la herramienta Matlab es `tf(S)`, donde `S` representa el espacio de estados hallados con el comando `ss`.

#### 2.1.2. Tiempo discreto

La función de transferencia a tiempo discreto se puede definir de la función de transferencia a tiempo continuo, así:

$$G(z) = (1 - z)^{-1} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\}$$

#### 2.1.3. Función de transferencia como secuencia de ponderación

La función de transferencia definida como:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \implies Y(z) = G(z)U(z)$$

Representa la salida del sistema discreto en cada periodo de muestreo. Si, en particular,  $U(k) = \delta(k)$ , entonces  $U(z) = 1$ , y la función de transferencia será, entonces, la salida en cada periodo de muestreo. Al tomar transformada inversa de la ecuación anterior tendremos que:

$$y(k) = g(k) * u(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)u(i)$$

Y, por ende,  $g(k)$  puede ser interpretada como la secuencia de ponderación que indica qué tanto afecta la entrada a la salida del sistema en cada periodo de muestreo.

#### 2.1.4. Reducción del orden:

Para reducir el orden de un sistema mediante su función de transferencia a tiempo continuo, se utilizan dos métodos analíticos principalmente: 1. Cancelación de polos y ceros: Polos y ceros en el semiplano izquierdo que sean cercanos entre si pueden ser cancelados. Con MATLAB, puede ser utilizada la función `minreal`. 2. Eliminación de polos insignificantes: Los polos con parte real más cercana a cero son dominantes en el sistema, y aquellos polos que sean por lo menos 5 veces más negativos en la parte real que los dominantes, son llamados insignificantes y pueden ser eliminados del sistema, dado que su dinámica es más rápida.

Después de aplicar ambos métodos, la función de transferencia resultante  $G(s)$  es multiplicada por una ganancia  $k$ , que permita conservar el valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = \tilde{G}(0)$$

En MATLAB se puede reducir el orden de los sistemas lineales utilizando los comandos `balred`, `reduce` y `Model reduction app`.

### 2.2. Análisis de estabilidad

#### 2.2.1. Polos o valores propios

Para una función de transferencia a tiempo continuo  $G(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)}$ , las raíces del denominador, llamadas polos, determinan la estabilidad del sistema según su localización. Si están en el semiplano derecho, el sistema es inestable. En el semiplano izquierdo, el sistema es estable. Y en el eje imaginario, el sistema es marginalmente estable, depende de la entrada aplicada. Estos valores pueden ser extraídos de la matriz  $A$  del sistema, calculando sus valores propios. De la misma manera, para una función de transferencia a tiempo discreto  $G(z) = \frac{Num(z)}{Den(z)}$ , si las raíces del denominador están dentro del círculo unidad, hablamos de un sistema estable.

#### 2.2.2. Método de Routh-Hurwitz

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz da condiciones necesarias y suficientes para determinar la estabilidad de un sistema lineal. Sea el polinomio que determina los polos del sistema:

$$p(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_ns^0$$

La condición necesaria es que los coeficientes  $a_i > 0$  condición que se vuelve suficiente si el grado del polinomio es 2.

Una vez se cumple la condición necesaria y, dado el caso que el polinomio tenga un grado mayor a 2, es necesario proceder a verificar las condiciones suficientes. Estas condiciones se verifican una vez hallado el arreglo de Routh-Hurwitz, al observar el signo de los elementos en la primera columna. Si son todos positivos, el sistema es estable. En caso contrario, el número de cambios de signo determina el número de raíces en el semiplano derecho.

### 2.2.3. Lugar de las raíces

El método del lugar de las raíces es un método gráfico que nos permite observar la estabilidad del sistema, es decir, las raíces del polinomio característico en función de un parámetro arbitrario  $k$ . Este sistema puede llevarse a una representación en lazo cerrado que nos permite, mediante el comando rlocus observar el gráfico con el lugar de las raíces. Para esto debemos igualar el polinomio característico a 0, es decir,

$$p(s) = 0$$

y llevarlo a la siguiente forma

$$1 + \frac{kN(s)}{D(s)} = 0$$

Esta forma nos permite identificar el sistema en lazo abierto

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

a la cual le podemos aplicar el comando rlocus.

### 2.3. Análisis frecuencial

El análisis frecuencial nos permite determinar la estabilidad en lazo cerrado de la función de transferencia en lazo abierto, así como mirar los efectos que puede llegar a tener un retardo en el sistema. Este análisis se realiza con el Diagrama de Bode, que puede obtenerse con el comando bode de Matlab. Esta función recibe la función de transferencia asociada a nuestro espacio de estados.

Esta herramienta nos permite determinar gráficamente si el sistema es de fase mínima, para esto se requiere que se cumplan las siguientes condiciones: 1. Razón de caída  $= -20(n - m)$ . 2. Tasa de cambio de la fase  $= -90^\circ(n - m)$ . El diagrama de Bode nos permite observar características importantes para la respuesta frecuencial como lo son 1. Pico de resonancia ( $M_r$ ). 2. Frecuencia de resonancia ( $\omega_r$ ). 3. Frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{cf}$ ) 4. Frecuencia de cruce de ganancia ( $\omega_{cg}$ ). 5. Margen de ganancia ( $M_G$ ). 6. Margen de fase ( $M_F$ ). De este diagrama se obtiene la relación entre la amplitud de la señal de entrada y la salida para una frecuencia dada usando las siguientes ecuaciones:

$$\frac{B}{A} = |G(i\omega)| \quad \phi = \tan^{-1} \left( \frac{-w}{2} \right)$$

Es importante notar que la magnitud en el diagrama de Bode está en  $dB$  y la fase está en grados", entonces se necesita aplicar la siguiente conversión.

$$M = |G(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(i\omega)|$$

De donde obtenemos que

$$|G(i\omega)| = 10^{\frac{M}{20}}$$

Una vez se conoce el margen de ganancia ( $M_G$ ) y el margen de fase ( $M_F$ ) podemos determinar el retardo máximo  $\tau_{\max}$  y la ganancia máxima  $k_{\max}$  para los cuales el sistema en lazo cerrado continúa siendo estable. Para lo anterior deben aplicarse las siguientes formulas:

$$\tau_{\max} = \frac{M_f}{w_{eg}} \frac{\pi}{180} \quad k_{\max} = 10^{\frac{M_g}{20}}$$

### 2.4. Periodo de muestreo

El periodo de muestreo de un sistema es determinante del desempeño y costo computacional de la simulación del mismo. La elección de un periodo de muestreo bajo nos permite una mayor suavidad a la hora de obtener la respuesta temporal del sistema, un mejor procesamiento de las perturbaciones que ingresan al sistema y el ruido de los sensores. Sin embargo, un periodo de muestreo demasiado pequeño puede hacer que los polos y ceros del sistema discreto tiendan al círculo unidad y, por tanto, el sistema se desequilibre.

Hay diferentes maneras de escoger este periodo. Según el teorema de Shannon, la frecuencia de muestreo  $\omega_s$  debería cumplir esta relación con respecto a la frecuencia de ancho de banda  $\omega_b$ :

$$\omega_n > 2\omega_b$$

Sin embargo, a la hora de escoger el periodo de muestreo se utilizan frecuencias mis altas dadas por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{T_r}{10} < T_s < \frac{T_r}{2} \\ \frac{\pi}{15\omega_B} < T_s < \frac{\pi}{2,5\omega_B} \\ \frac{0,15}{\omega_{cg}} < T_s < \frac{0,5}{\omega_{cg}} \end{aligned}$$

Donde:

- $T_r$  representa el tiempo de crecimiento del sistema ante un escalón.
- $\omega_B$  representa el ancho de banda obtenido a través del diagrama de Bode.
- $\omega_{cg}$  que es la frecuencia de cruce de ganancia.

## 2.5. Realimentación de estado por asignación de polos

Para llevar a cabo este método, es necesario garantizar que el sistema sea controlable, es decir, que sea posible llevarlo de un estado inicial a otro final en tiempo finito. Esto implicaría la medición de todas las variables de estado, que no es siempre alcanzable en la práctica, problema que es posible solucionar mediante la estimación de las variables no medibles. Con este control es posible asignarle a la planta los polos en lazo cerrado definiendo una entrada en tiempo discreto de la siguiente manera:

$$u(k) = -Kx(k)$$

de donde se deriva que:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ &= Ax(k) - BKx(k) \\ &= (A - BK)x(k) \\ &= A_{cl}x(k) \end{aligned}$$

De esta manera, para ejecutar este control es necesario contar con la matriz  $K$  que cumpla con los requerimientos de control, es decir, que asegure que el sistema posea los polos deseados. En Matlab se puede hallar esta matriz mediante el comando `acker` o el comando `place`.

### 2.5.1. Análisis de controlabilidad

Un sistema es controlable si cumple la condición necesaria y suficiente de que el rango de la matriz de controlabilidad dada por:

$$M_c = \begin{bmatrix} A & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

tenga un rango igual al orden del sistema,  $n$ . De esta manera, se pueden encontrar  $n$  ecuaciones para calcular las acciones de control. Aunque, si esta matriz está mal condicionada, se obtendrán acciones de control muy grandes que pueden ser no replicables en el sistema real. Aunque todo el sistema no sea controlable, una salida puede serlo si tenemos que:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} D & CA & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} = p$$

### 2.5.2. Eliminación del error en estado estacionario

A partir del control por realimentación de estado por asignación de polos, es posible diseñar un control que elimine el error en estado estacionario del sistema, añadiendo una acción integral a la planta y realizando un nuevo diseño. Este integrador se adiciona después del regulador y el nuevo modelo de la planta estará dado por:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{E(z)}{z-1} \quad zV(z) = V(z) + E(z) \\ e(k) &= r(k) - y(k) \\ v(k+1) &= v(k) + r(k) - y(k) \\ &= v(k) + r(k) - Cx(k) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0_{n \times p} \\ -C & I_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p \times p} \end{bmatrix} r(k)$$

Y por tanto:

$$x^*(k+1) = \phi^* x^*(k) + \Gamma_1^* u(k) + \Gamma_2^* r(k)$$

La matriz  $\phi^*$  puede reescribirse como  $[KL]$ , de manera que se pueda trazar un diagrama de simulación.

## 2.6. Análisis de incertidumbre

El análisis de incertidumbre determina cómo una incertidumbre en las entradas o parámetros de un modelo, es decir, un parámetro que no se conoce con seguridad su valor o una entrada que no es medida de la mejor manera, se refleja en una incertidumbre en las salidas. Para realizarlo se determinan los intervalos de incertidumbre de cada parámetro y se simula el modelo con cada una de las combinaciones, encontrando métricas del desempeño, de la estabilización o de otras variables que se quieran medir. El Toolbox GSUA de Matlab permite realizar este análisis para los parámetros del modelo en muchos experimentos.

## 3. Plan de solución

1. Encontrar la función de transferencia.
2. Realizar análisis de estabilidad del sistema.
3. Con la función de transferencia realizar análisis utilizando el método de las raíces verificando estabilidad.
4. Usar la función de transferencia para hallar el diagrama de Bode y así realizar un análisis de la respuesta frecuencial.
5. Período de muestreo del sistema.
6. Diseñar control por realimentación de estado por asignación de polos.
7. Realizar análisis de incertidumbre.

## 4. Resultados

### 4.1. Linealización con la estructura limit point

Dado el comportamiento del modelo se considera verificar sus condiciones en un punto límite “limit point”, para verificar si el sistema es linealizable cuando se estabiliza. Se experimento entonces con los parámetros  $F=8$  (Permanent Winter),  $G=1$ ,  $G'=0$ ,  $a=0.25$ ,  $b=1$ , con condiciones iniciales  $(0,0,0)$  en  $(x,y,z)$  y una entrada constante de  $u=0.1$ . El comportamiento del sistema con estos parámetros es el siguiente (Figuras 1,2,7):

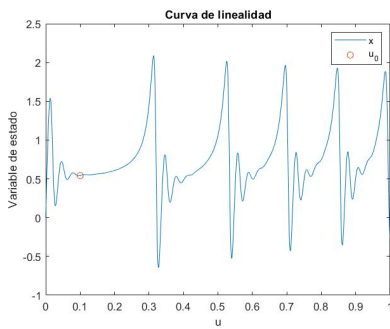


Figura 1: Curva de linealidad de la variable x

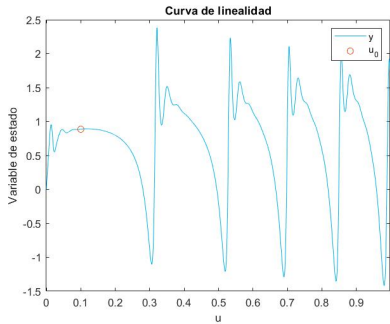


Figura 2: Curva de linealidad de la variable y

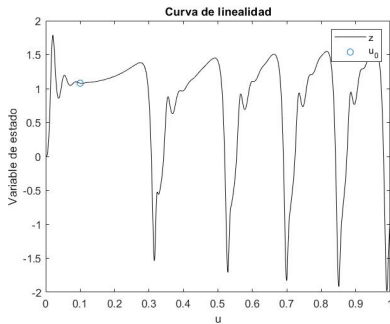


Figura 3: Curva de linealidad de la variable z

Hallando los puntos de equilibrio con `vpasolve` tenemos que el punto de operación es  $(x_0, y_0, z_0) =$

$(0,4574, 1,0772, 0,9083)$  con  $u_0 = 0,1$ .

Donde la matriz A tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} -0,25 & -2,1544 & -1,8166 \\ -0,8311 & -0,5426 & 0,4574 \\ 1,9855 & 0,4574 & -0,5426 \end{bmatrix}$$

Considerando los nuevos puntos de equilibrio, el esquema lineal sigue el siguiente comportamiento:

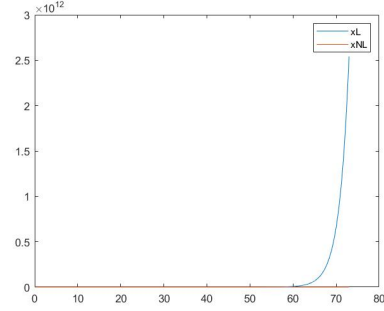


Figura 4: Comportamiento del nuevo esquema

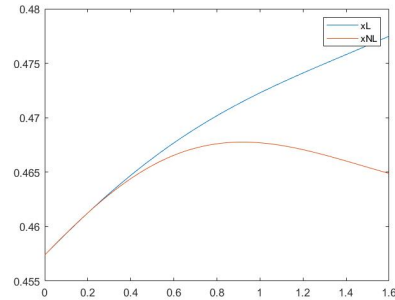


Figura 5: Comportamiento del nuevo esquema con zoom en los primeros periodos de tiempo

Adicionalmente, dado que el modelo no lineal debe tener como condiciones iniciales el punto de operación y este es tan sensible, este alcanza su equilibrio de manera casi inmediata.

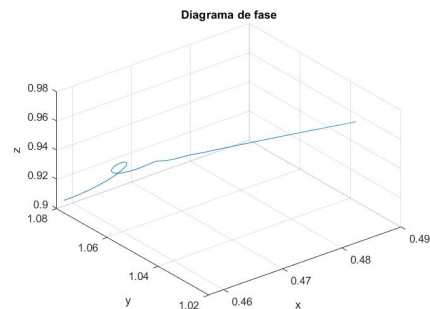


Figura 6: Fase en equilibrio

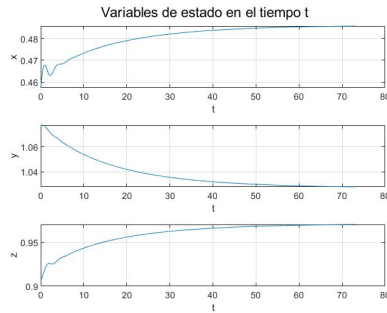


Figura 7: Output no lineal

## 4.2. Función de transferencia

### ■ A tiempo continuo:

Usando la función `tf` en Matlab y seleccionando la segunda la primera función de transferencia obtenemos:

```

      s^2 + 1.085 s + 0.5036
      -----
      s^3 + 1.335 s^2 + 2.591 s - 1.536

Continuous-time transfer function.

```

Figura 8: Función de transferencia continua

### ■ A tiempo discreta:

Para encontrar la función de transferencia a tiempo discreto se utilizó la función `c2d` con un periodo de muestreo igual a 0.01 (Este  $T$  hace que los polos estén muy cerca del círculo unitario), obteniendo la siguiente función:

```

Gd =
      0.009987 z^2 - 0.01987 z + 0.009879
      -----
      z^3 - 2.986 z^2 + 2.973 z - 0.9867

```

Figura 9: Función de transferencia discreta

## 4.3. Análisis de estabilidad

### 4.3.1. Ruth-Hurtwiz

Considerando la función de transferencia a tiempo continuo encontrada, hallemos el polinomio característico usando:

$$G_{ec} = \frac{k * G(s)}{(1 + k * G(s))}$$

Obteniendo:  $ks +$

$$G_{ec} = \frac{ks^2 + 1,085ks + 0,5036k}{s^3 + 1,335s^2 + 2,591s - 1,536 + ks^2 + 1,085ks + 0,5036k}$$

Cuyo denominador equivale al polinomio característico, esto es:

$$P(x) = s^3 + s^2(1,335 + k) + s(2,59 + 1,085k) + 1,536 + 0,5036k$$

Ahora, para hallar las  $k$  que estabilizan al sistema, usemos el método de Ruth-Hurtwiz. A partir del polinomio es posible deducir que:

#### ■ Condiciones necesarias:

$$k > -1,335$$

$$k > -2,387$$

$$k > -3,050$$

Considerando el método de Routh-Hurtwiz tenemos:

$$(0,000002 * (k + 1,335) * (1259,0 * k + 3040,0) * (43400,0 * k^2 + 141395,0 * k + 76866,0)) / ((1200,0 * k + 267,0) * (1,085 * k^2 + 2,536875 * k + 1,501653))$$

Figura 10: Primera columna del método de Ruth-Hurtwiz

Con esto es posible obtener las siguientes condiciones suficientes, resolviendo las dos últimas filas igualándolas a la condición  $> 0$ .

Para la primera ecuación tenemos:

$$k > -0,691993$$

$$-2,5658 < k < -1,335$$

Para la segunda obtenemos:

$$k > -0,691993$$

$$-3,05004 < k < -2,56836$$

$$-2,5636 < k < -1,335$$

$$-1,335 < k < -0,689585$$

Por lo que obtenemos que, el sistema es, en efecto, no estable para ningún valor de  $k$ , pues el rango de los parámetros que solucionan las ecuaciones resultantes de la intersección de las condiciones es vacío.

### 4.3.2. Polos o valores propios

Los polos de la función de transferencia a tiempo continuo para los parámetros considerados están en:

$$-0,8935 + 1,6126i$$

$$-0,8935 - 1,6126i$$

$$0,4518$$

Ahora, los polos de la función de transferencia a tiempo discreto están en:

$$1,0045$$

$$0,991 + 0,016i$$

$$0,991 - 0,016i$$

Gráficamente vistos por:

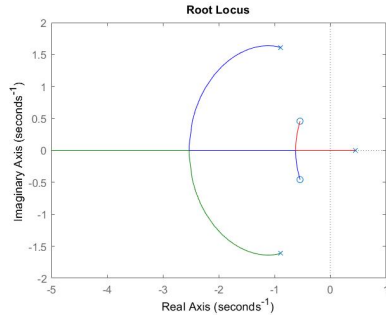


Figura 11: Gráfica de polos de la matriz de transferencia en tiempo continuo

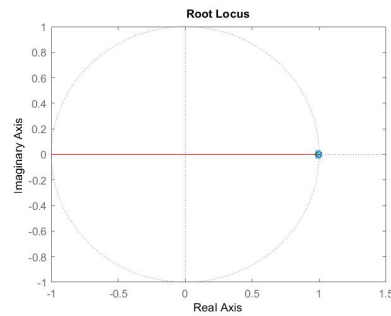


Figura 12: Gráfica de polos de la matriz de transferencia en tiempo continuo

#### 4.4. Diagrama de Bode

En la siguiente figura se muestra el diagrama de Bode para la función de transferencia a tiempo continuo:

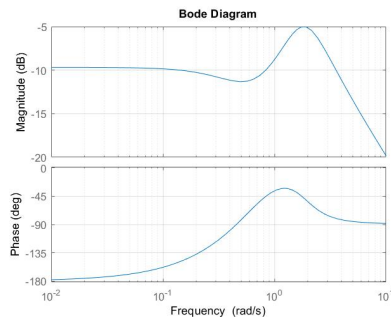


Figura 13: Diagrama de bode a tiempo continuo

Para la función de transferencia a tiempo discreto:

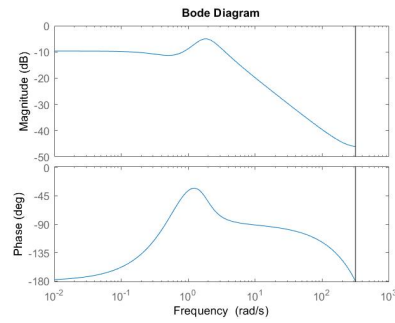


Figura 14: Diagrama de bode a tiempo discreto

#### 4.5. Análisis de incertidumbre

Para el análisis de incertidumbre se variaron los parámetros de el modelo en los siguientes intervalos, con un punto de operación igual a  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  con los parámetros en una variación igual a:

$$F = \text{uniforme}(1, 9) \quad G = \text{uniforme}(0, 2) \quad G_p = \text{uniforme}(0, 2) \\ a = \text{uniforme}(0, 0.99) \quad b = \text{uniforme}(1, 4.5)$$

Para un número de simulaciones igual a 100 se obtuvieron los siguientes resultados en las salidas:

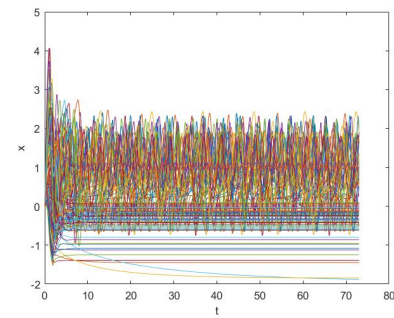


Figura 15: Variable x para 100 simulaciones

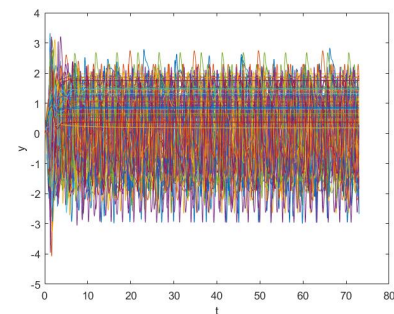


Figura 16: Variable y para 100 simulaciones

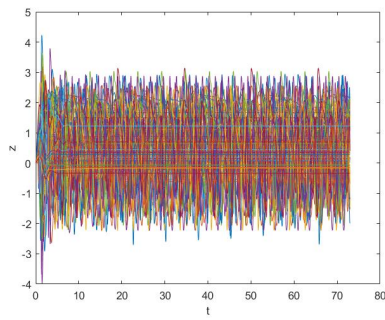


Figura 17: Variable z para 100 simulaciones

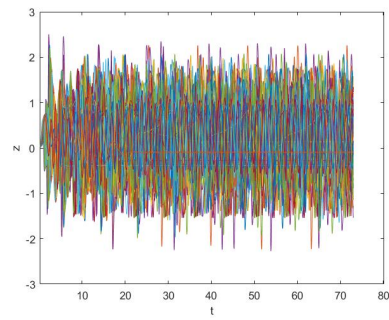


Figura 20: Variable z para 100 simulaciones, variando F

Dado lo caótico del modelo, es preciso verificar de qué manera afecta la variación del análisis a cada una de las salidas del modelo, para ver cual lo hace más sensible. Veamos; los parámetros base son  $(F, G, G', a, b) = (8, 1, 0, 0.25, 4)$ . De manera que, variando  $F = \text{uniforme}(1, 9)$  obtenemos:

F es evidentemente un parámetro muy sensible. Ahora, con media 8 y generando datos normales  $F = \text{normal}(8, 0.2)$

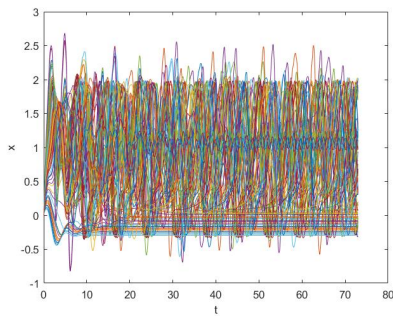


Figura 18: Variable x para 100 simulaciones, variando F

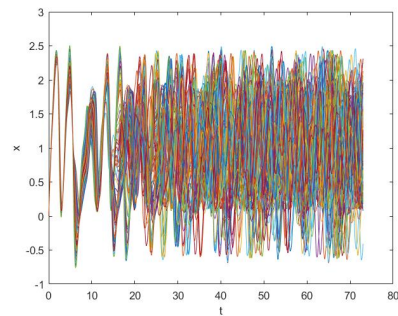


Figura 21: Variable x para 100 simulaciones, variando F con una normal

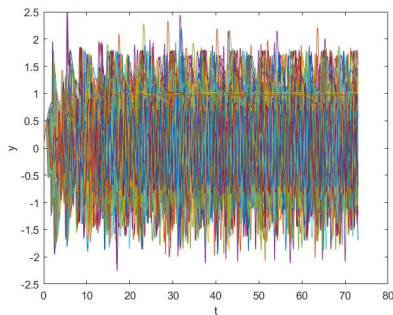


Figura 19: Variable y para 100 simulaciones, variando F

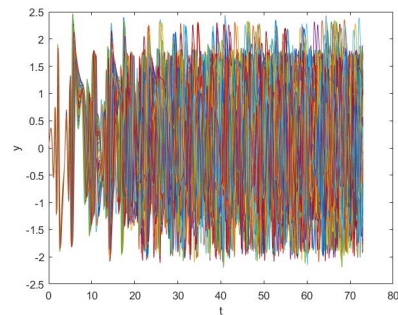


Figura 22: Variable y para 100 simulaciones, variando F con una normal



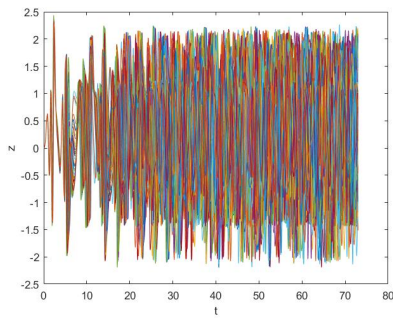


Figura 23: Variable z para 100 simulaciones, variando F con una normal

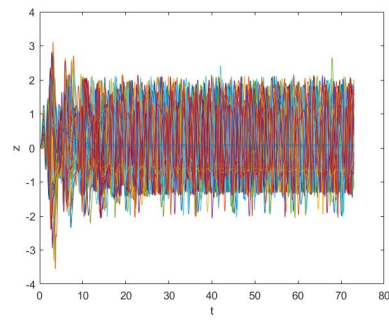


Figura 26: Variable z para 100 simulaciones, variando G

Se empieza a notar una tendencia en los primeros pasos de tiempo. Lo único cierto es la amplitud máxima de las ondas. Hagamos el mismo experimento con los demás parámetros:

■ Variación en  $G = \text{uniforme}(0,2)$  con parámetros estáticos

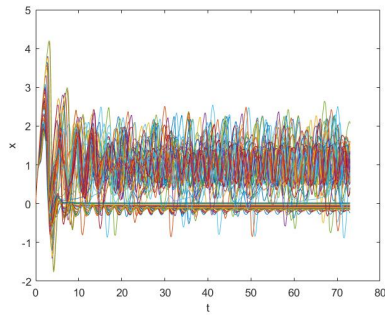


Figura 24: Variable x para 100 simulaciones, variando G

■ Variación en  $G = \text{normal}(1,0.2)$

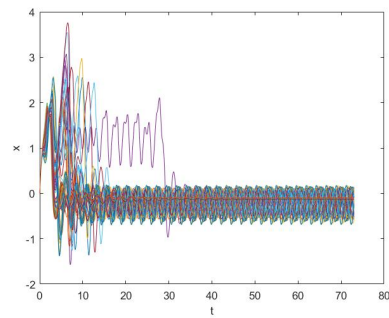


Figura 27: Variable x para 100 simulaciones, variando G con una normal

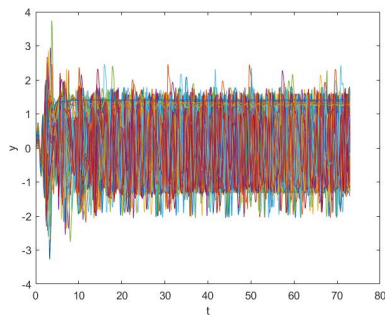


Figura 25: Variable y para 100 simulaciones, variando G

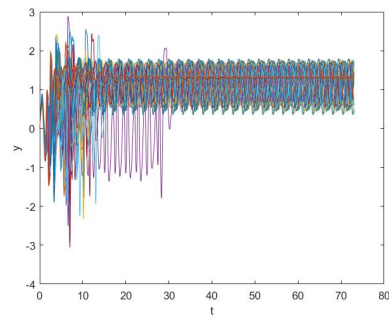


Figura 28: Variable y para 100 simulaciones, variando G con una normal

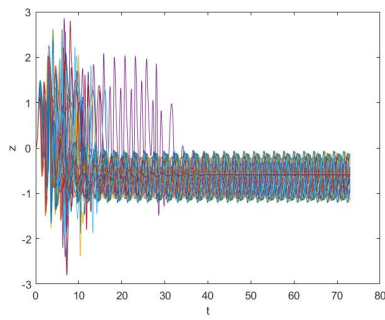


Figura 29: Variable z para 100 simulaciones, variando G con una normal

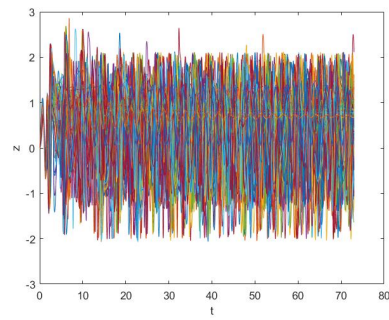


Figura 32: Variable z para 100 simulaciones, variando Gp

■ Variación en Gp= uniforme (0,2) con parámetros estáticos

■ Variación en Gp=normal(1,0.2)

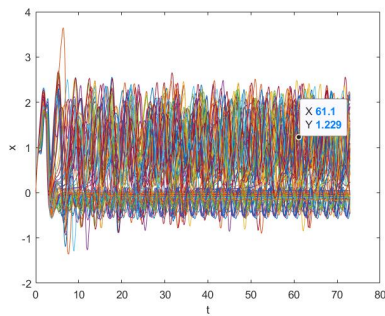


Figura 30: Variable x para 100 simulaciones, variando Gp

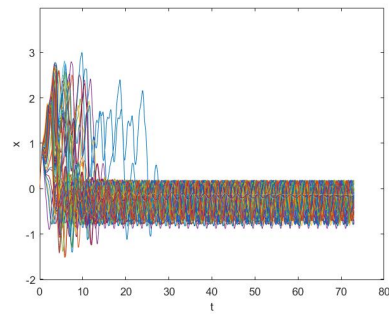


Figura 33: Variable x para 100 simulaciones, variando Gp con una normal

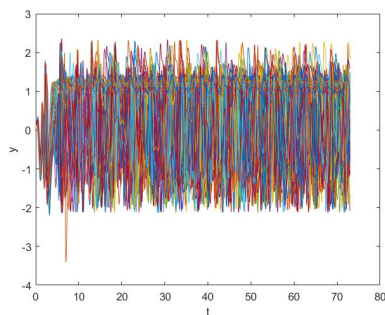


Figura 31: Variable y para 100 simulaciones, variando Gp

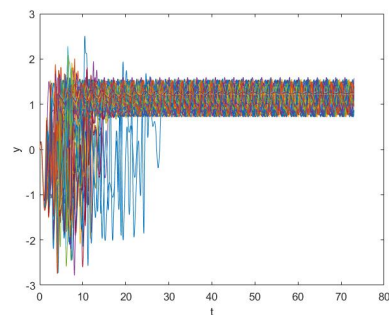


Figura 34: Variable y para 100 simulaciones, variando Gp con una normal

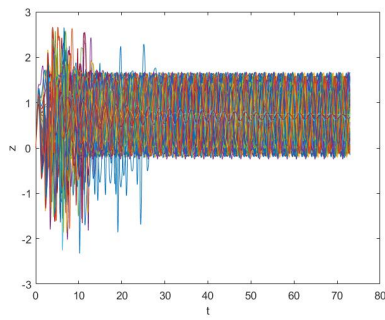


Figura 35: Variable z para 100 simulaciones, variando  $G_p$  con una normal

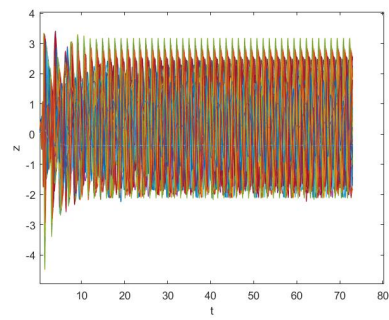


Figura 38: Variable z para 100 simulaciones, variando a

■ Variación en  $a$ = uniforme (0,0.99)

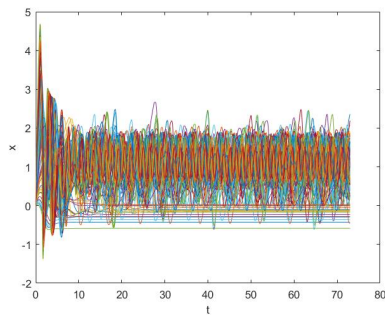


Figura 36: Variable x para 100 simulaciones, variando a

■ Variación en  $a$ = normal (0.25,0.2) (omitiendo los valores negativos y mayores que 1 )

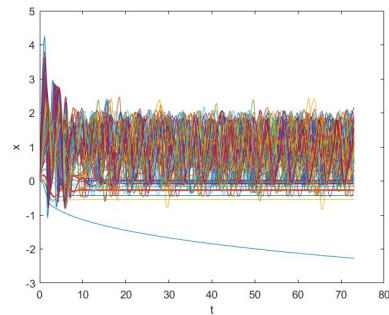


Figura 39: Variable x para 100 simulaciones, variando a con una normal

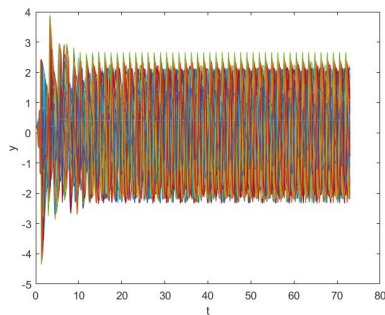


Figura 37: Variable y para 100 simulaciones, variando a

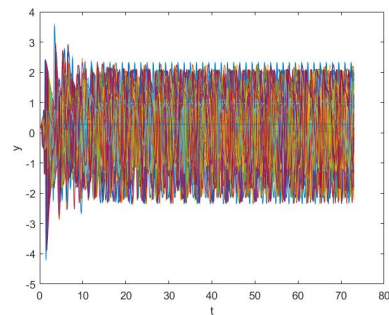


Figura 40: Variable y para 100 simulaciones, variando a con una normal

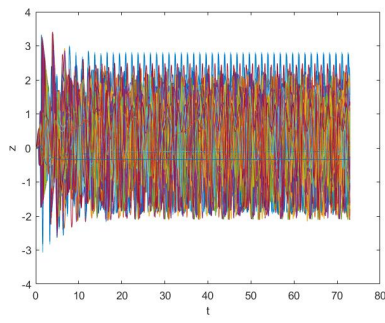


Figura 41: Variable a para 100 simulaciones, variando G con una normal

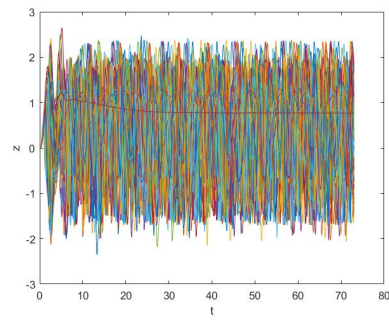


Figura 44: Variable z para 100 simulaciones, variando b

■ Variación en b= uniforme (1,4.5)

■ Variación en b= normal (4,0.2)

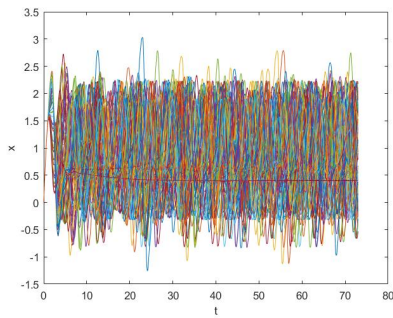


Figura 42: Variable x para 100 simulaciones, variando b

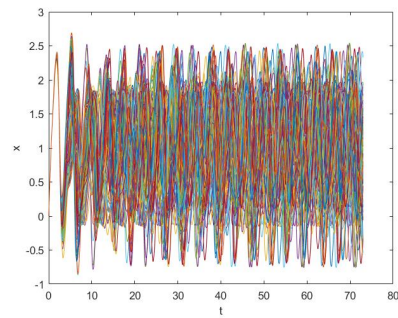


Figura 45: Variable x para 100 simulaciones, variando b con una normal

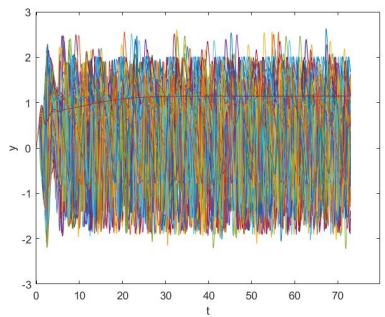


Figura 43: Variable y para 100 simulaciones, variando b

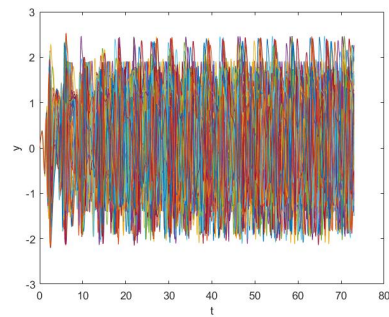


Figura 46: Variable y para 100 simulaciones, variando b con una normal

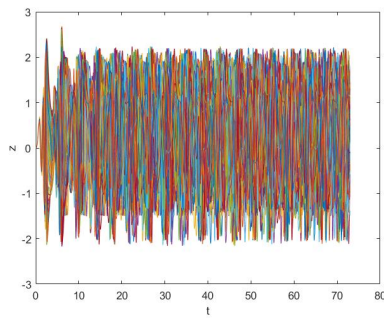


Figura 47: Variable  $z$  para 100 simulaciones, variando  $b$  con una normal

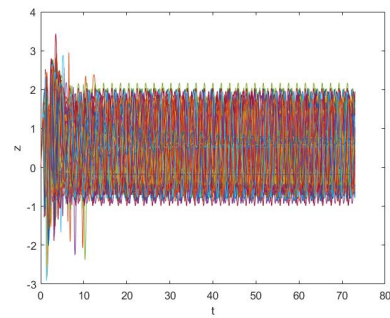


Figura 50: Output del modelo para  $z$  con 100 simulaciones dadas por parámetros normales

## 5. Análisis

### 5.1. Análisis de estabilidad

Ahora, para finalizar, realicemos un último análisis, variando nuevamente todos los parámetros con las normales que se expusieron en el anterior desarrollo.

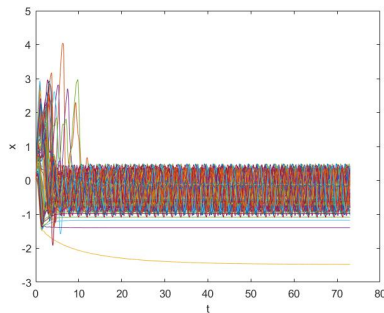


Figura 48: Output del modelo para  $x$  con 100 simulaciones dadas por parámetros normales

Es claro que cuando aún el sistema tiene parámetros que lo estabilizan, este es tan volátil y altamente no lineal que no fue posible linealizarlo para esta serie de experimentos. Adicionalmente, para la búsqueda de un controlador  $K$  del sistema, tampoco fue posible encontrar, esto es, no se encontró un intervalo de parámetro con este método para que el sistema lineal garantizara estabilidad.

El sistema no es de fase mínima ni es estable, considerando su comportamiento en los polos.

Adicionalmente las funciones de transferencia no admiten una reducción de orden.

### 5.2. Análisis de incertidumbre

A través del análisis de incertidumbre es claro concluir que para este tipo de sistemas, podemos asegurar, como mucho, una amplitud de onda máxima cuando los parámetros del sistema insidien de tan amplia manera en su comportamiento. La variación de los parámetros debe ser en efecto mínima, para por lo menos asegurar una estabilidad respecto al tipo de modelo : limit point, limit cycle o chaos

..

## 7.

*Trabajo futuro Para un trabajo futuro sera apropiado aplicar apropiada*

## 8. Conclusiones

El sistema no puede estabilizarse con un regulador estático.

el sistema es sensible a la entrada y todos los parámetros proporcionados, haciendo que alcanzar un estado de equilibrio sea altamente complejo. Sin embargo, este tipo de sistemas tienen una alta aplicabilidad en la vida real, que de alguna manera se

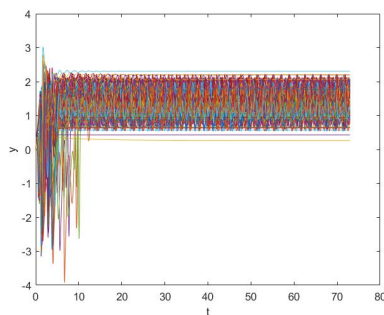


Figura 49: Output del modelo para  $y$  con 100 simulaciones dadas por parámetros normales

encuentra gobernada por el caos, para fenómenos meteorológicos dados a nivel macro (atmosférico). La linealización del modelo alrededor del punto de equilibrio tiene un efecto poco deseable. De esto se saca que el sistema no lineal en el rango selecto para la linealización no fue útil a la hora de analizar como controlar el sistema no lineal.

## Referencias

- [1] Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006.