Universidad EAFIT

Escuela de ciencias

Modelo matemático para pizzerías

Juan Daniel Alzate

Pablo Alberto Osorio

Laura María Giraldo

Profesora María Gulnara Baldaquín De la Peña

Trabajo Final

Optimización 1

2019

Modelo para un solo horno:

Índices

i: Tipo de pizza [1 (A en horno 1), 2 (A en horno 2), 3 (B, en horno 1)] y 4 (C, en horno 2)

j: Número de la base que se usa para la pizza **(**1 es la base que se usa para la primera pizza ,2 es la segunda, 3 es la tercera, …).

Variables

Xij: 1 si para el tipo de pizza i se usa la base de pizza j, 0 si no.

Constantes

D: Demanda de pizzas de la hora crítica del día en la pizzería.

Ti: Tiempo que toma la pizza de tipo i en hornearse.

NP: Número de bases para pizza de las que se dispone.

Minimizar Z=

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{NP} X_{ij}$$

La función para optimizar tiene el objetivo de minimizar el número de pizzas necesarias para satisfacer la demanda estimada, si no se declarará de esta forma es posible que existan sobreproducción de pizzas generando que algunas de estas lleguen frías a las mesas y generen rechazo por parte de los comensales.

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} \leq 1 \qquad \forall j$$

Para cada número de base de pizza se asigna un tipo de pizza, de forma que sea única está asignación para que no se desperdicien bases de pizza ni tampoco se designe una base de pizza para dos tipos diferentes.

$$.\sum_{j=1}^{NP} X_{1j} + X_{2j} \geq 0{,}5D$$

Cada tipo de pizza tiene cierta preferencia por parte de los clientes, las pizzas de tipo 1 y 2 que son las pizzas de sabor A independiente del horno donde se cocine tiene una demanda del 50% del total de las pizzas demandadas en esa hora, por tanto, se espera que como mínimo la cantidad de pizzas A respondan a los pedidos.

$$.\sum_{j=1}^{NP} X_{3j} \geq 0{,}3D$$

Se espera que por lo menos el número de pizzas de tipo 3 (sabor B) cumplan con la demanda de los clientes.

$$.\sum_{j=1}^{NP} X_{4j} \geq 0{,}2D$$

Se desea que al menos el número de pizzas de tipo 4 (sabor C) respondan a los pedidos de esa hora crítica en la pizzería.

$$.\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{NP} T_i . X_{ij} \leq 60+\delta$$

El tiempo que tomen el número total de pizzas en hornearse son a lo sumo 60+δ minutos, como existen ciertas pizzas que pudiesen demorarse más que otras entonces se agrega un δ que se estima con la cantidad de tiempo que están dispuestos los clientes a esperar y además que sea correspondiente al respectivo tiempo que faltaría para cumplir la demanda, sin excederse para que no lleguen pizzas frías a las mesas.

$$.X_{ij} + X_{ij-1} + X_{ij-2} \leq 2 \qquad \forall j\geq 3 \quad \forall i$$

Para poder realizar las pizzas se debe tener en cuenta las exigencias de los clientes, esta restricción representa que no se pueden producir tres pizzas del mismo tipo en el mismo horno de forma consecutiva dado que se enfrían y los consumidores rechazarían esa pizza.

$$.\sum_{i=1}^{4} X_{ij} \leq \sum_{i=1}^{4} X_{ij-1} \qquad \forall j\geq 2$$

A través de esta restricción se asegura la continuidad en el uso de las bases de pizza evitando así que alguna éstas dejen de ser utilizadas.

Modelo para dos hornos:

Índices

i: Tipo de pizza [1 (A en horno 1), 2 (A en horno 2), 3 (B, en horno 1)] y 4 (C, en horno 2)

j: Número de la base que se usa para una pizza en determinado horno **(**1 es la base que se usa para las primeras dos pizzas en sus respectivos hornos ,2 son las segundas, 3 son las terceras, …).

Variables

Xij: 1 si para el tipo de pizza i que va a un respectivo horno se usa la base de pizza j, en caso contrario 0.

Constantes

D: Demanda de pizzas de la hora crítica del día en la pizzería.

Ti: Tiempo que toma la pizza de tipo i en hornearse.

NP: Número de bases para pizza de las que se dispone.

Minimizar Z=

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{NP} X_{ij}$$

La función para optimizar tiene el objetivo de minimizar el número de pizzas necesarias para satisfacer la demanda estimada, si no se declarará de esta forma es posible que existan sobreproducción de pizzas generando que algunas de estas lleguen frías a las mesas y generen rechazo por parte de los comensales.

Sujeto a:

$$X_{1j} + X_{3j} \leq 1 \qquad \forall j$$

$$X_{2j} + X_{4j} \leq 1 \qquad \forall j$$

Existen dos hornos que son H1 a donde únicamente van pizzas de tipo 1 y 3, el otro horno H2 se encarga de cocinar las pizzas de tipo 2 y 4, el propósito de esta restricción es lograr que el número de la base de pizzas en cada horno sea asignado a un tipo de pizza, es decir, en este modelo se presenta el caso de que hay bases de pizzas con un mismo número pero solo se asignan a un tipo de pizza del horno correspondiente de forma que no se desperdicien.

$$\sum_{j=1}^{NP} X_{1j} + X_{2j} \geq 0{,}5D$$

Cada tipo de pizza tiene cierta preferencia por parte de los clientes, las pizzas de tipo 1 y 2 que son las pizzas de sabor A independiente del horno donde se cocine tiene una demanda del 50% del total de las pizzas demandadas en esa hora, por tanto, se espera que como mínimo la cantidad de pizzas A respondan a los pedidos.

$$\sum_{j=1}^{NP} X_{3j} \geq 0{,}3D$$

Se espera que por lo menos el número de pizzas de tipo 3 (sabor B) cumplan con la demanda de los clientes.

$$\sum_{j=1}^{NP} X_{4j} \geq 0{,}2D$$

Se desea que al menos el número de pizzas de tipo 4 (sabor C) respondan a los pedidos de esa hora crítica en la pizzería.

$$\sum_{j=1}^{NP} t_1.X_{1j} + t_3.X_{3j} \leq 60+\delta_1$$

El tiempo que tomen las pizzas en el horno 1 no pueden exceder los $60+\delta_1$ minutos donde δ_1 es el tiempo máximo de espera de los clientes.

$$.\sum_{j=1}^{NP} \quad t_2.X_{2j} + t_4.X_{4j} \leq 60+\delta_2$$

El tiempo que tomen las pizzas en el horno 2 no pueden exceder los 60+δ_2 minutos donde δ_2 es el tiempo máximo de espera de los clientes.

.

$$.X_{ij} + X_{ij-1} + \ X_{ij-2} \leq 2 \qquad \forall j\geq 3 \quad \forall i$$

Para poder realizar las pizzas se debe tener en cuenta las exigencias de los clientes, esta restricción representa que no se pueden producir tres pizzas del mismo tipo en el mismo horno de forma consecutiva dado que se enfrían y los consumidores rechazarían esa pizza.

$$.X_{1j} + X_{3j} \leq X_{1j-1} + X_{3j-1} \qquad \forall j\geq 2$$

Con esta restricción se verifica que para el horno 1 el número de base de pizzas sea asignado de forma única y que además no haya vacíos entre el número de una base y su consecuente.

$$.X_{2j} + X_{4j} \leq X_{2j-1} + X_{4j-1} \qquad \forall j\geq 2$$

Con esta restricción se verifica que para el horno 2 el número de base de pizzas sea asignado de forma única y que además no haya vacíos entre el número de una base y su consecuente.

$$.\sum_{j=1}^{NP} \ X_{1j}t_1 + X_{3j}t_3 \ \leq (1 + \ \alpha) \sum_{j=1}^{NP} \ X_{2j}t_2 + X_{4j}t_4$$

$$.\sum_{j=1}^{NP} \ X_{1j}t_1 + X_{3j}t_3 \ \geq (1 - \ \alpha) \sum_{j=1}^{NP} \ X_{2j}t_2 + X_{4j}t_4$$

Es necesario equilibrar el uso de los hornos, por tanto, el tiempo para realizar todos los tipos de pizza 1 y 3 del primer horno debe ser **aproximado** al tiempo para realizar todos los tipos de pizza 2 y 4 en el segundo horno, para permitirle flexibilidad al modelo se agrega una tolerancia representada por α y esta se determina según la diferencia de carga que se le quiera asignar a un horno, por tanto, se define un intervalo donde se permite que el horno uno trabaje un poco más o un poco menos que el horno 2.

Datos utilizados en el problema y contextualización:

Para la aplicación real del problema se realizó una encuesta a **Pizzabi** una nueva pizzería ubicada en la carrera 43 #56-30 que es atendida por su único dueño en los horarios de 6pm a 9pm, por lo tanto, la demanda está entre 6 a 8 pizzas de tamaño mediano los fines de semana.

Tipo	Sabor	Tiempo (en minutos)
1	Jamón y piña	7
2	Jamón y queso	8
3	Vegetariana	15
4	Pollo y maíz	9

Para la consistencia de los datos solo se utilizaron las características de las pizzas medianas, por lo general para su preparación se realizan 4 kilogramos de masa para las bases de pizzas que en este contexto serían 20 pizzas de tamaño mediano.

Interpretación de la solución del problema:

Para el **modelo A** se tomó un tiempo de espera máximo de 32 minutos donde se pudiera realizar todas las pizzas necesarias para satisfacer la demanda, suponiendo que un cliente estaría de acuerdo con esperar entre 30 a 40 minutos. El mínimo número de pizzas que satisface la demanda son 9 y al disponer de un solo horno se deben realizar en el siguiente orden:

Sobre la primera base de pizza se debe elaborar la de tipo vegetariano, seguida de esta se realiza de nuevo otra pizza vegetariana, en la base 3 y 4 se realizan pizzas de pollo y maíz de forma continua también se realizan pizzas de jamón y piña sobre las bases 5 y 6 respectivamente, sobre la base de pizza 7 se prepara la de tipo vegetariana y las últimas en hacerse son dos de Jamón y piña.

Dada esta solución observamos que la pizza de Jamón y piña cubre toda la demanda de la de tipo A y por eso no es necesario realizar pizzas de Jamón y queso.

Para el **modelo B** no fue necesario un tiempo de espera dado que al usar dos hornos era más rápido hornear las pizzas. Se permitió que el horno uno trabajará como máximo un cuarto más que el horno dos y como mínimo usará tres cuartos de tiempo de lo que se demoraría el horno dos. El mínimo número de pizzas que satisface la demanda son 9 que se deben realizar en el siguiente orden:

Para el horno 1:

Las dos primeras bases se usan para las pizzas vegetarianas luego sobre la base de pizza 3 se realiza la de Jamón y piña, por último se hace una pizza vegetariana.

Para el horno 2:

Primero hacer una pizza de pollo y maíz, luego hornear una sola de jamón y queso, de nuevo otra de pollo y maíz y por último hornear dos de forma consecutiva de jamón y queso.

A diferencia con el modelo A aquí si se realizan todos los tipos de pizza además de que se demoran a lo sumo una hora exacta, por lo tanto este pudiese ser un mejor modelo a proponer para la pizzería dado que evita el tiempo de espera de los clientes y que por tanto reciban una mejor atención, sin embargo el numero de pizzas a producir en A y B es el mismo dado por las condiciones del modelo, es decir, independiente del modelo la idea es no desperdiciar masa.